Álgebra Superior I
Tarea 3

Prof: Iker Martínez
Ayud: Erick Rodríguez

31 de diciembre de 2019

1. Conjuntos Finitos e Infinitos

1.1. Conjuntos Finitos

Ejercicio 1.1. *Sea* $I_n := \{1,2,...,n\}$. *Definamos,* $S_n := \{\sigma : I_n \longrightarrow I_n \mid \sigma \text{ es una biyección}\}$.

1. *Demuestra que* $(S_n, \circ)$ *es un grupo, donde* $\circ$ *es la composición de funciones.*

2. *Demuestra por inducción que la cardinalidad de* S_n *esta dada por* $n!$.

Al grupo S_n *se le conoce como el* ***Grupo Simétrico*** *de* I_n *ó como el* ***Grupo de Permutaciones*** *de* I_n.

Ejercicio 1.2. *Sean* X, Y *conjuntos finitos*

(a) *Demuestra que* $\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#(X) + \#(Y)$.

(b) *¿Cuál sería la fórmula correspondiente para 3 conjuntos?.*

(c) *Generaliza lo anterior para n conjuntos distintos.*

Ejercicio 1.3. *Sea* X *es un conjunto finito. Demuestra que una función* $f : X \longrightarrow X$ *es inyectiva si y solo es suprayectiva y por lo tanto biyectiva.*

Ejercicio 1.4. *Sea* X *un conjunto con* n *elementos. ¿Cuántos subconjuntos* $A \subseteq X$ *de* k *elementos tiene* X*?.*

Ejercicio 1.5. *Sea* X *un conjunto con* n *elementos. Demuestra que* $\mathscr{P}(X)$ *tiene* 2^n *elementos.*

Ejercicio 1.6. *Sea* X *un conjunto de cardinalidad* n*. Determina la cardinalidad de*

$$A := \{f : I_k \longrightarrow X \mid f \text{ es inyectiva }\}.$$

Ejercicio 1.7. *Sea* $f : X \longrightarrow X$ *una función. Un subconjunto* $Y \subseteq X$ *se llama* ***f-Estable*** *cuando* $f(Y) \subseteq Y$*. Demuestra que un conjuno* X *es finito si y solo si existe una función* $f : X \longrightarrow X$ *que solo admite a* $\emptyset$ *y a* X *como subconjuntos* f*-estables.*

1.2. Conjuntos Numerables

Ejercicio 1.8. *Sea $X \subseteq \mathbb{N}$ un subconjunto infinito. Demuestra que existe una única biyeciión creciente $f : \mathbb{N} \longrightarrow X$.*

Ejercicio 1.9. *Demuestra que si X es infinito numerable el conjunto de subconjuntos finitos de X es también infinito numerable.*

Ejercicio 1.10. *Define una función suprayectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ con la propiedad de que $\forall n \in \mathbb{N}$ la cardinalidad de $f^{-1}(n)$ es infinita.*

Ejercicio 1.11. *Obtén una descomposición de $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots$ tal que $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ sean conjuntos infinitos y disjuntos.*

Ejercicio 1.12. *Sea $f : \mathbb{N}^{\times} \times \mathbb{N}^{\times} \longrightarrow \mathbb{N}^{\times}$ la función definida por:*

$$f(1,n) = 2n - 1, \quad f(m+1,n) = 2^m(2n-1)$$

Demuestra que f es una biyeccion.

Ejercicio 1.13.

a) Sea X un conjunto finito y sea Y infinito numerable, entonces $\mathscr{F}(X,Y)$ es infinito numerable.

b) Para cada función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ sea $A_f := \{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq 1\}$. Demuestra que el conjunto $X := \{f \in \mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{N}) \mid \#(A_f) < \infty\}$, es un conjunto infinito numerable.

Ejercicio 1.14.

1. *Sea A un conjunto arbitrario, dadas 2 funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{N}$, definamos las siguientes operaciones:*
   - $(f+g)(a) := f(a) + g(a)$
   - $(f \cdot g)(a) := f(a) \cdot g(a)$

   Demuestra que $\left(\mathscr{F}(A,\mathbb{N}), +, \cdot\right)$ es un semianillo conmutativo.

2. *Da un significado a la afirmación $g \leq f$.*

Ejercicio 1.15. *Sea X un conjunto y $A \subseteq X$. La función **Caracteristica** de A es la función $\chi_A : X \longrightarrow \mathbb{N}$ dada por:*

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \in A^{\complement} \end{cases}$$

Demuestra que:

1. $\chi_{A\cap B} = \chi_A \cdot \chi_B$.
2. $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B - \chi_{A\cap B}$. *En particular* $\chi_{A\cup B} = \chi_A + \chi_B$ *si y solo si* $A \cap B = \emptyset$.
3. $A \subseteq B \iff \chi_A \leq \chi_B$.
4. $\chi_{A^{\complement}} = 1 - \chi_A$.

1.3. Conjuntos Infinito No Numerables

Ejercicio 1.16. *Sea $f : X \longrightarrow X$ una función inyectiva tal que $f(X) \neq X$. Toma $x \in X \setminus f(X)$ y demuestra que $x, f(x), f^2(x), ..., f^k(x), ...$ son dos a dos distintos. Recuerda que $f^k(x) = \underbrace{f \circ ... \circ f}_{k-veces}(x)$.*

Ejercicio 1.17. *Sea X un conjunto infinito y Y un conjunto finito. Demuestra que existe una funcion suprayectiva $f : X \longrightarrow Y$ y una función inyectiva $g : Y \longrightarrow X$.*

Ejercicio 1.18. *Demuestra que todo conjunto conjunto infinito se descompone como la unión disjunta de una cantidad infinita numerable de conjuntos infinitos.*

Ejercicio 1.19. *Demuestra que el conjunto de sucesiones crecientes ($n_0 < n_1 < n_2 < ...$) de números naturales es infinito no numerable. Concluye que $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ es infinito no numerable.*