Álgebra Superior I
Tarea 1

Prof: Iker Martínez
Ayud: Erick Rodríguez

26 de agosto de 2019

1. Lógica

QUINO. (1999). *Todo Mafalda* . Barcelona. Lumen.

1.1. Lógica

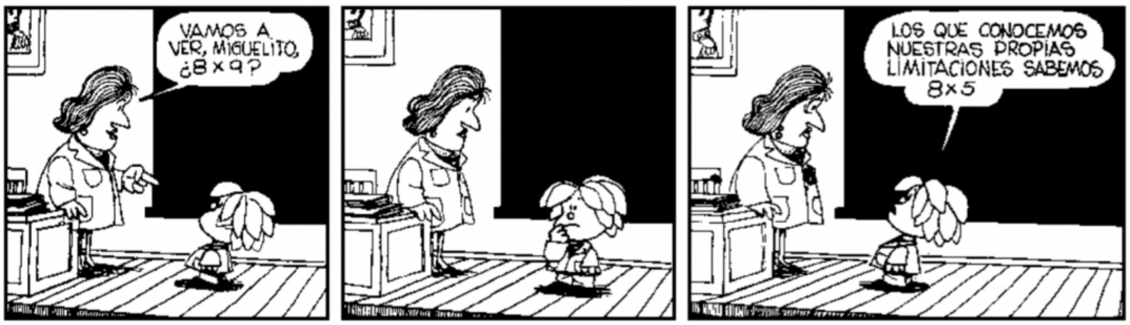
Ejercicio 1.1. *Determina cuáles de las siguientes oraciones son proposiciones.*

- *El 7 de diciembre de 1941 fue domingo.*
- *Algunos números enteros son negativos.*
- *¡Si todas las mañanas fueran tan soleados y despejadas como ésta!*
- *El número 15 es un número par.*
- *Esta frase es falsa.*
- *¿Qué hora es?*
- *Todos los círculos del mismo radio son iguales.*
- *En los números enteros,* $11+6 \neq 12$.
- *La tierra es redonda.*

Ejercicio 1.2. *Sean P y Q proposiciones tales que $P \Rightarrow Q$ es falsa. Determina los valors de verdad de las siguientes proposiciones:*

- $\neg P \vee Q$,
- $P \wedge Q$,
- $Q \Rightarrow P$,

- $\neg Q \Rightarrow \neg P$,
- $P \Leftrightarrow Q$.



Ejercicio 1.3. *Sean P, Q y R proposiciones. Construye una tabla de verdad para cada una de las siguientes proposiciones compuestas. ¿Cuáles de las proposiciones son tautologías?*

- $\neg P \wedge Q$,
- $\neg(P \wedge Q)$,
- $P \Rightarrow P$,
- $\neg(P \vee \neg Q) \Rightarrow \neg P$,
- $P \Rightarrow (Q \Rightarrow R)$,
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow R$,
- $(P \Rightarrow Q) \Rightarrow (Q \Rightarrow P)$,
- $[P \wedge (P \Rightarrow Q)] \Rightarrow Q$,
- $(P \wedge Q) \Rightarrow P$,
- $Q \Leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$,
- $[(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)] \Rightarrow (P \Rightarrow R)$.

Ejercicio 1.4. *Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías*

- $P \vee \neg P$ *(Tercero excluido),*
- $\neg(P \wedge \neg P)$ *(No contradicción),*

- $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ *(Transitividad implicativa).*

Ejercicio 1.5. *Usando tablas de verdad, compruebe las equivalencias siguientes:*

- $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ *(Involución o Doble negación),*
- $(P \wedge P) \Leftrightarrow P$ *y* $(P \vee P) \Leftrightarrow P$ *(Idempotencia),*
- $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$ *(Conmutatividad de la conjunción),*
- $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$ *(Conmutatividad de la disyunción),*
- $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$ *y* $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$ *(Leyes de De Morgan),*
- $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$ *(Asociatividad de la conjunción),*
- $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$ *(Asociatividad de la disyunción),*
- $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ *(Distributividad),*
- $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ *(Distributividad).*
- $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \Rightarrow \neg P)$ *(Contrarrecíproca o contrapuesta).*

Ejercicio 1.6. *Di si los siguientes son razonamientos deductivos válidos, justificando tu respuesta (si el razonamiento no es válido, la manera de justificar la respuesta es dando un ejemplo en el que las premisas sean verdaderas y la conclusión falsa, es decir, dar un contraejemplo):*

1.

$$\begin{array}{l} P \vee \neg Q \\ (\neg Q) \Leftrightarrow R \\ \underline{P \vee \neg R} \\ P \end{array}$$

2.

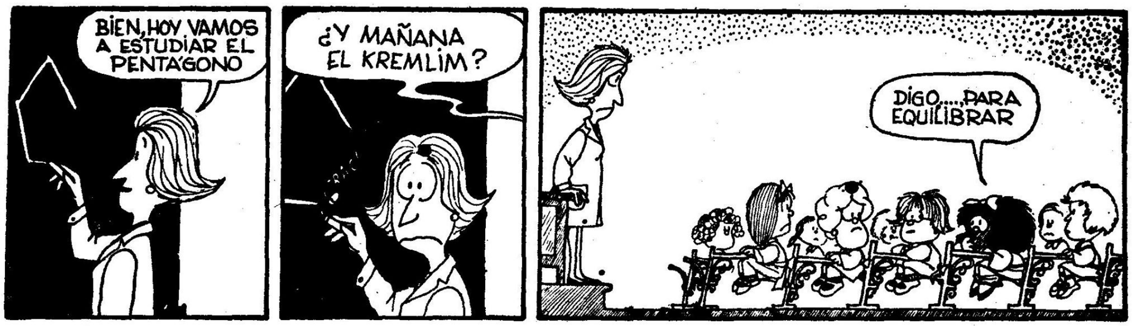
$$\begin{array}{l} P \wedge Q \\ (P \wedge Q) \Rightarrow R \\ \underline{R \Rightarrow S} \\ S \end{array}$$

3.

$$\begin{array}{l} ((\neg P) \wedge Q) \Rightarrow R \\ (\neg R) \wedge S \\ \underline{\neg Q} \\ P \end{array}$$

4.

$$\begin{array}{l} P \wedge \neg Q \\ \neg Q \Rightarrow R \\ \underline{\neg R} \\ P \end{array}$$



Ejercicio 1.7. *Traduce las siguientes proposiciones al lenguaje de la lógica de predicados, después niega las representaciones simbólicas de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más a un predicado y retradúzcalas al español:*

1. *El cuadrado de todo número real es mayor que 2.*
2. *Existen enteros cuyo cubo aumentado en 1 es igual al cubo del siguiente entero.*
3. *Todo el que disfruta estudia.*
4. *Algunos animales permanecen toda su vida en medios acuáticos.*
5. *Ningún estudiante carece de conocimientos.*

Ejercicio 1.8. *Niega las siguientes fórmulas de manera que cada símbolo de negación afecte a lo más un predicado:*

1. $\exists x(P(x) \vee \neg Q(x))$.
2. $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$.
3. $\exists(\neg P(x) \wedge Q(x))$.
4. $\forall x \exists y(x \cdot y = 0)$.
5. $\exists x \forall y(x \leq y)$.

Ejercicio 1.9. *Di si los siguientes razonamientos deductivos son válidos, justificando su respuesta.*

1.
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \underline{\neg Q(a)} \\ \neg P(a) \end{array}$$

2.
$$\begin{array}{l} \forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \\ \underline{Q(a)} \\ P(a) \end{array}$$

Ejercicio 1.10. *Di si los siguientes razonamientos deductivos son válidos, justificando su respuesta.*

1. *Las cafeteras están hechas de oro. Las cosas hechas de oro son máquinas de tiempo. Las máquinas de tiempo sirven para viajar en el tiempo. Por lo tanto, Las cafeteras sirven para viajar en el tiempo.*

2. *Algunos senadores son personas corruptas. Los senadores son políticos. Por lo tanto, algunas personas corruptas son políticos.*

3. *Todos los trabajadores honestos son bien remunerados. Ningún político es un trabajador honesto.*

Ejercicio 1.11.

1. *Da un ejemplo de una interpretación en la que* $\forall x P(x)$ *sea falso, pero* $\exists x P(x)$ *sea verdadero.*

2. *¿Existe alguna interpretación en la que* $\forall x P(x)$ *sea verdadero y* $\exists x P(x)$ *sea falso? Justifique su respuesta.*

3. *¿Existe alguna interpretación en la que* $\forall x P(x)$ *sea verdadero y* $\neg \exists x P(x)$ *sea verdadero?*

4. *¿Será cierto que en toda interpretacion que haga a* $\neg \forall x P(x)$ *verdadero se tiene que* $\exists x \neg P(x)$ *es verdadero? Justifique su respuesta.*

Ejercicio 1.12.

1. *Da un ejemplo de una interpretación en la que* $\forall x \exists y Q(x,y)$ *sea verdadero, pero* $\exists y \forall x Q(x,y)$ *sea falso.*

2. *¿Existe alguna interpretación en la que* $\forall x \exists y Q(x,y)$ *sea falso y* $\exists y \forall x Q(x,y)$ *sea verdadero? Justifica tu respuesta.*

3. *Da un ejemplo de una interpretación en la que* $\forall x \exists y Q(x,y)$ *sea verdadero, pero* $\forall y \exists x Q(x,y)$ *sea falso.*

4. *¿Existe alguna interpretación en la que* $\forall x \exists y Q(x,y)$ *sea falso y* $\forall y \exists x Q(x,y)$ *sea verdadero? Justifica tu respuesta.*