Cálculo Difrencial e Integral I
Tarea 1

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

24 de diciembre de 2018

1. Teoría de Conjuntos

1.1. Álgebra de Conjuntos y Funciones

Ejercicio 1.1. *Da un ejemplo de conjuntos A, B, C tales que :*

$$(A \cup B) \cap C \neq A \cup (B \cap C)$$

Ejercicio 1.2. *Dados 2 conjuntos A, B demuestra que $A = B$ si y sólo si:*

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) = \emptyset.$$

Solución. $\square$

Ejercicio 1.3. *Demuestra las siguientes igualdades :*

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

(c) $(A \setminus B) \times C = (A \times C) \setminus (B \times C)$.

Ejercicio 1.4. *Dados 2 conjuntos A, B demuestra que:*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Ejercicio 1.5. *Dada una función $f : A \longrightarrow B$ demuestra que $\forall X, Y \subseteq A$.*

(a) $f(X) \setminus f(Y) \subseteq f(X \setminus Y)$

(b) Si f es inyectiva entonces se da la igualdad en la contención anterior.

Ejercicio 1.6. *Demuestra que una función $f : A \longrightarrow B$ es inyectiva si y solo si $f(A) \setminus f(X) = f(A \setminus X)$, $\forall X \subseteq A$.*

Ejercicio 1.7. *Dada una función $f : A \longrightarrow B$ demuestra que:*

(a) $\forall X \subseteq A$ *tenemos que* $X \subseteq f^{-1}(f(X))$.

(b) f *es inyectiva si y sólo si* $f^{-1}(f(X)) = X$, $\forall X \subseteq A$.

Ejercicio 1.8. *Dada una función* $f : A \longrightarrow B$ *demuestra que :*

(a) $\forall Z \subseteq B$ *tenemos que* $f(f^{-1}(Z)) \subseteq Z$.

(b) f *es suprayectiva si y sólo si* $f(f^{-1}(Z)) = Z$, $\forall Z \subseteq B$.

Ejercicio 1.9. *Dada una familia de conjuntos* $\{A_\lambda\}_{\lambda\in I}$, *demuestra que* $X := \bigcup_{\lambda\in I} A_\lambda$ *es el único conjunto que satisface las siguientes 2 propiedades :*

(a) $\forall \lambda \in I$, $A_\lambda \subseteq X$.

(b) *Si* Y *es un conjunto tal que* $A_\lambda \subseteq Y$, $\forall \lambda \in I$, *entonces* $X \subseteq Y$.

Ejercicio 1.10. *Sea* $\{A_{ij}\}_{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *una familia de conjuntos indexada por* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *Demuestra o dar un contraejemplo de la siguiente igualdad:*

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_{ij}\right) = \bigcap_{i=1}^{\infty}\left(\bigcup_{j=1}^{\infty} A_{ij}\right).$$

Ejercicio 1.11 (Teorema de Cantor-Bernstein-Schröder). *Sean* A,B *dos conjuntos. Supongamos que existen dos funciones inyectivas,* $f : A \longrightarrow B$ *y* $g : B \longrightarrow A$. *Demuestra que existe una biyección* $h : A \longrightarrow B$.

1.2. Inducción, Conjuntos finitos y Conjuntos Numerables

Ejercicio 1.12. *Un elemento* $a \in \mathbb{N}$ *se llama antecesor de* $b \in \mathbb{N}$ *cuando se tiene que* $a < b$ *pero no existe* $c \in \mathbb{N}$ *tal que* $a < c$ *y* $c < b$. *Demuestra que todo numero natural distinto de* 0 *tiene antecesor.*

Ejercicio 1.13. *Demuestra por inducción matemática:*

(a) $2(1+2+....+n) = n(n+1)$.

(b) $1+3+5+....(2n+1) = (n+1)^2$.

(c) $(a-1)(1+a+....+a^n) = a^{n+1}-1$, $\forall a, n \in \mathbb{N}$.

(d) *Para toda $n \geq 4$, demuestra que $n! > 2^n$.*

Ejercicio 1.14. *Sea X un conjunto de cardinalidad n. Demuestra por inducción matemática que la cardinalidad de $A := \{f : X \longrightarrow X : f$ es una biyección$\}$ esta dada por $n!$.*

Ejercicio 1.15. *Sean X, Y conjuntos finitos*

(a) *Demuestra que $\#(X \cup Y) + \#(X \cap Y) = \#(X) + \#(Y)$.*

(b) *¿Cuál sería la fórmula correspondiente para 3 conjuntos?.*

(c) *Generaliza lo anterior para n conjuntos distintos.*

Ejercicio 1.16. *Sea X es un conjunto finito. Demuestra que una función $f : X \longrightarrow X$ es inyectiva si y solo es suprayectiva y por lo tanto biyectiva.*

Ejercicio 1.17. *Sea X un conjunto de cardinalidad n. Determina la cardinalidad de $A := \{f : I_p \longrightarrow X : f$ es inyectiva$\}$.*

Ejercicio 1.18. *Define una función suprayectiva $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ con la propiedad de que $\forall n \in \mathbb{N}$ la cardinalidad de $f^{-1}(n)$ es infinita.*

Ejercicio 1.19. *Obtén una descomposición de $\mathbb{N} = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_n \cup \ldots$ tal que $X_1, X_2, \ldots X_n, \ldots$ sean conjuntos infinitos y disjuntos.*

Ejercicio 1.20. *Sea $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ una función definida por*

$$f(1,n) = 2n - 1, \quad f(m+1,n) = 2^m(2n-1)$$

Demuestra que f es una biyeccion.

2. Campos

2.1. Campos Ordenados

Ejercicio 2.1. *Sean $\mathbb{K}$,$\mathbb{L}$ campos. Una funcion $f:\mathbb{K}\longrightarrow:\mathbb{L}$ se llama morfismo de campos cuando $\forall x,y\in\mathbb{K}$ se tiene que:*

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x)+f(y) \\ f(xy) &= f(x)f(y) \end{aligned} \tag{21}$$

(a) Demuestra que si $f:\mathbb{K}\longrightarrow:\mathbb{L}$ es un morfismo de campos entonces $f(0)=0$.

(b) Demuestra que $f(x)=0$ para toda $x\in\mathbb{K}$ o $f(1)=1$ y por lo tanto f es inyectiva.

Ejercicio 2.2. *Sea $f:\mathbb{Q}\longrightarrow\mathbb{Q}$ un morfismo. Demuestra que $f(x)=0$ para toda $x\in\mathbb{Q}$ o $f(x)$ es la función identidad , es decir $f(x)=x$ para toda $x\in\mathbb{Q}$.*

Ejercicio 2.3. *Explica porque el conjunto de números enteros $\mathbb{Z}$ y el conjunto de polinomios con coeficientes racionales $\mathbb{Q}[t]$ no forman un campo bajo las operaciones usuales.*

Ejercicio 2.4. *Sean x,y elementos positivos de un campo ordenado $\mathbb{K}$. Demuestra que*

(a) $x>y$ si y solo si $x^{-1}<y^{-1}$.

(b) $x>0$ si y solo si $x^{-1}>0$.

Ejercicio 2.5. *Sea a un elemento positivo en un campo ordenado $\mathbb{K}$. Demuestra que la función $f:\mathbb{Z}\longrightarrow\mathbb{K}$ definida por $f(j):=a^j$ es creciente si $a>1$, decreciente si $a<1$ y constante si $a=1$.*

Ejercicio 2.6. *Sean $x_1,...,x_n$ elementos de un campo ordenado $\mathbb{K}$. Demuestra por inducción que:*

(a) $|x_1+x_2+....x_n|\leq|x_1|+|x_2|+....|x_n|$

(b) $|x_1x_2....x_n|=|x_1||x_2|....|x_n|$.

Ejercicio 2.7. *Sea $\mathbb{K}$ un campo ordenado. Escribe como unión de intervalos a los siguientes conjuntos:*

(a) $\{x \in \mathbb{K} : |x-3| + |x+3| < 8\}$.

(b) $|x^2 - 2| \leq 1$.

(c) $|2x+1| \leq 1$.

(d) $|x-5| < |x+1|$.

(e) $(2x+3)^6(x-2) \geq 0$.

Ejercicio 2.8. *Demuestra que un campo ordenado $\mathbb{K}$ es Arquimedeano si y solo si $\forall \epsilon > 0 \in \mathbb{K}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{2^n} < \epsilon$.*

Ejercicio 2.9. *Sea a un numero racional distinto de 0 y x un numero irracional.*

(a) *Demuestra que tanto $a+x$ como ax son números irracionales.*

(b) *Da un ejemplo de 2 números irracionales distintos x, y tales que xy sea racional.*

(c) *Da un ejemplo de 2 números irracionales distintos x, y tales que $x+y$ sea racional.*

Ejercicio 2.10. *Sean a, b números racionales positivos. Demuestra que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ es un numero racional si y solo si tanto $\sqrt{a}$ como $\sqrt{b}$ son racionales. (Hint: Multiplica por $\sqrt{a} - \sqrt{b}$).*

Ejercicio 2.11. *Sea $X = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$. Demuestra que $inf(X) = 0$.*

Ejercicio 2.12. *Sean A, B conjuntos no vacíos de numeros reales con la propiedad de que $\forall x \in A$ y $\forall y \in B$ tenemos que $x \leq y$. Demuestra que*

(a) $sup(A) \leq inf(B)$.

(b) *$sup(A) = inf(B)$ si y solo si para toda $\epsilon > 0$ existe $x \in A$ y $y \in B$ tales que $y - x < \epsilon$.*

Ejercicio 2.13. *Sea $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ un polinomio con coeficientes en $\mathbb{Z}$.*

(a) *Si $\frac{p}{q}$ es un numero racional (p, q primos relativos) y $f(\frac{p}{q}) = 0$, demuestra que p divide a a_0 y q divide a a_n.*

(b) *Concluye que cuando $a_n = 1$ las raíces reales de f son enteras o irracionales.*

(c) *Examina al polinomio $x^n - a = 0$ y usa el inciso anterior para demuestra que para cualquier $a \in \mathbb{N}$ mayor que 0 y para cualquier n se tiene que si a no tiene una raiz n-esima entera, entonces $\sqrt[n]{a}$ es un numero irracional.*

(d) *Usa el caso general para demuestra que $\sqrt{2} + \sqrt[3]{2}$ es irracional.*

Ejercicio 2.14. *Da un ejemplo de una sucesión decreciente de intervalos anidados cerrados cuya intersección sea vacía y de una sucesión decreciente de intervalos anidados abiertos cuya intersección también sea vacía.*

Ejercicio 2.15 (Desigualdad de la media geométrica y la media aritmética). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

Ejercicio 2.16. *Demuestra que $f : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ es una biyección.*