Cálculo Difrencial e Integral I
Tarea 2

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

24 de diciembre de 2018

1. Sucesiones y Series

1.1. Sucesiones

Ejercicio 1.1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Ejercicio 1.2. *Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ sucesiones tales que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = b$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{b}{a}$.*

Ejercicio 1.3. *Sean $k \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{R}^+$. Si $a \leq x_n \leq n^k$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = 1$*

Ejercicio 1.4. *Sea $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ y $y_n = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$. Concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{e}$.*

Ejercicio 1.5. *Sean $a, b \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = max\,\{a, b\}$.*

Ejercicio 1.6. *Sea $\{t_n\} \subseteq [0,1]$ y $\{x_n\}, \{y_n\}$ sucesiones tales que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} |t_n x_n + (1-t) y_n| = a$.*

Ejercicio 1.7. *Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ tiene variación acotada si la sucesión,*

$$v_n := \sum_{i=1}^{n} |x_{i+1} - x_i|$$

es acotada. Demuestra que si $\{x_n\}$ tiene variación acotada entonces

(a) $\{v_n\}$ es convergente.

(b) $\{x_n\}$ es convergente.

(c) Si $\forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq c|x_{n+1} - x_n|$ para alguna $c \in [0,1)$ entonces $\{x_n\}$ tiene variación acotada.

(d) $\{x_n\}$ tiene variación acotada si y solo si $x_n = y_n - z_n$, donde $\{z_n\}$ y $\{y_n\}$ son sucesiones acotadas no decrecientes.

(e) Da un ejemplo de una sucesión de convergente que no tenga variación acotada.

Ejercicio 1.8. *Consideremos una sucesión x_n definida recursivamente como*

$$x_1 = 1$$
$$x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}$$

Demuestra que $\forall n \in \mathbb{N}$, se tiene que, $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|$. Usa el ejercicio 1.7 para concluir que x_n es una sucesión convergente y calcula el límite de x_n.

Ejercicio 1.9. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente tal que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ y definamos*

$$y_n := \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n}.$$

Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$.
Nota: *Una sucesión $\{x_n\}$ tal que el límite de $\{y_n\}$ existe se llama Cesàro sumable y a su límite se le llama límite de Cesàro. Así éste ejercicio demuestra que toda sucesión convergente es Cesàro sumable. El converso es falso.*

Ejercicio 1.10. *Sean a, b números reales positivos y definamos recursivamente las sucesiones x_n, y_n como*

$$x_1 = \sqrt{ab}, \quad y_1 = \frac{a+b}{2}$$
$$x_{n+1} = \sqrt{x_n y_n}, \quad y_{n+1} = \frac{x_n + y_n}{2}$$

Demuestra que tanto x_n como y_n convergen al mismo límite. A este se la llama la media geométrica-aritmética entre a y b .

1.2. Series

Ejercicio 1.11. *Para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que*

$$0 \leq e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} < \frac{1}{n!n}.$$

Utiliza ésto para demostrar que e es un número irracional.

Ejercicio 1.12. *Sean* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *y* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *series de números reales positivos. Demuestra que*

a) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$ *y* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *converge entonces* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge.*

b) Si $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = c \neq 0$ *entonces* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge si y solo si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *converge.*

Ejercicio 1.13. *Demuestra que para todo polinomio* $p(x)$ *de grado mayor que* 1 *se tiene que la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{p(n)}$ *es convergente.*

Ejercicio 1.14. *Demuestra que para todo* $p \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n(n+1).....(n+p)}$ *converge.*

Ejercicio 1.15. *Demuestra que si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n)^2$ *converge entonces* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{a_n}{n}$ *también converge.*

Ejercicio 1.16. *Sea* a_n *una sucesión decreciente tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge. Demuestra que* $\lim_{n\to\infty} na_n = 0$.

Ejercicio 1.17. *Sea* a_n *una sucesión no-creciente tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, *Demuestra que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ *converge si y solo si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} 2^n \cdot a_{2^n}$ *converge.*

Ejercicio 1.18. *Demuestra que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n^2}$ *converge. Calcula su límite.*

2. Topología de la Recta

Ejercicio 2.1. *Sean* X, Y *subconjuntos de* $\mathbb{R}$. *Demuestra que:*

(a) $Int(X \cap Y) = Int(X) \cap Int(Y)$.

(b) $Int(X) \cup Int(Y) \subseteq Int(X \cup Y)$. *Da un ejemplo donde no se de la igualdad.*

Ejercicio 2.2. *Consideremos las funciones* $f, g, h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definidas por:*

1. $f(x) := ax + b$ *con* $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.
2. $g(x) := x^2$.
3. $h(x) := x^3$.

Demuestra que:

(a) *Para todo* $A \subseteq \mathbb{R}$ *abierto, se tiene que* $f^{-1}(A)$, $g^{-1}(A)$ *y* $h^{-1}(A)$ *son abiertos.*

(b) *Para todo* $A \subseteq \mathbb{R}$ *abierto, se tiene que* $f(A)$ *y* $h(A)$ *son abiertos.*

(c) *Da un ejemplo de un abierto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *tal que* $g(A)$ *no sea abierto.*

Ejercicio 2.3. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *abierto. Demuestra que para cualquier* $a \in A$ *tenemos que* $A \setminus \{a\}$ *es abierto.*

Ejercicio 2.4. *Demuestra que cualquier colección de abiertos no vacíos y disjuntos es a lo más numerable.*

Ejercicio 2.5. *Sea* $X \subseteq F$ *donde* F *es un conjunto cerrado. Demuestra que* $\overline{X} \subseteq F$.

Ejercicio 2.6. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión que converge a* $l \in \mathbb{R}$. *Demuestra que* $\overline{\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$ *es* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{l\}$.

Ejercicio 2.7. *Demuestra que* $\frac{1}{4}$ *es un elemento del conjunto de Cantor.*

Ejercicio 2.8. *Sean* K, F *conjuntos cerrados y disjuntos tales que* $K \cup F$ *es un intervalo cerrado (posiblemente no acotado). Demuestra que* $K = \emptyset$ *o* $F = \emptyset$.

Ejercicio 2.9. *Sean X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demuestra que:*

(a) $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

(b) $\overline{X \cap Y} \subseteq \overline{X} \cap \overline{Y}$. *Da un ejemplo donde no se de la igualdad.*

Ejercicio 2.10. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$. Demuestra que A es denso si y solo si $Int(A^c) = \emptyset$.*

Ejercicio 2.11. *Sea X un subconjunto de $\mathbb{R}$ no vacío. Definamos la* ***Distancia*** *entre $a \in \mathbb{R}$ y X como*

$$d(a, X) := inf\{|x - a| : x \in X\}$$

Demuestra:

1. $d(a, X) = 0$ *si y solo si* $a \in \overline{X}$.
2. *Si K es cerrado entonces $\forall a \in \mathbb{R}$ existe $b \in K$ tal que $d(a, K) = |b - a|$.*

Ejercicio 2.12. *Sean X, Y subconjuntos de $\mathbb{R}$. Demuestra que $(X \cup Y)' = X' \cup Y'$.*

Ejercicio 2.13. *Sea F un conjunto cerrado y $x \in F$. Demuestra que x es un punto aislado si y solo si $F \setminus \{x\}$ es cerrado.*

Ejercicio 2.14. *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no numerable. Demuestra que $X \cap X' \neq \emptyset$.*

Ejercicio 2.15. *Sean $A \subseteq \mathbb{R}$ tal que tanto A como $A \cup \{a\}$ son abiertos. Demuestra que a es un punto limite de A tanto por derecha como por izquierda.*

Ejercicio 2.16. *Sea K un compacto y $F \subseteq K$ un cerrado demuestra que F es compacto. Utiliza esto para demostrar que el conjunto de Cantor es compacto.*

Ejercicio 2.17 (Teorema de Lindenlöf). *Sea $X \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto arbitrario. Demuestra que toda cubierta abierta de X tiene una sucubierta abierta numerable.*

Ejercicio 2.18. *Obtén cubiertas abiertas de $\mathbb{Q}$ y de $[0, \infty)$ que no admitan subcubiertas finitas.*

Ejercicio 2.19. *Sean K, L subconjuntos compactos de $\mathbb{R}$. Demuestra que:*

(a) $f(K), g(K)$ *y* $h(K)$ *son compactos*

(b) $f^{-1}(L), g^{-1}(L)$ *y* $h^{-1}(L)$ *son compactos*

Donde f, g, h *son las funciones del ejercicio 2.2.*

Ejercicio 2.20. *Una familia de cojuntos* $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *se llama **Cadena** cuando, para cualesquiera* $\lambda, \mu \in \Lambda$ *se tiene que,* $K_\lambda \subseteq K_\mu$ *o* $K_\mu \subseteq K_\lambda$*. Demuestra que si* $\{K_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ *es una cadena de compactos no vacíos, entonces* $K = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} K_\lambda$ *es compacto y no vacío.*

Ejercicio 2.21. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}$ *no numerable. Demuestra que* X' *es no numerable.*

Ejercicio 2.22 (Teorema de Baire). *Sean* $F_1, ..., F_n, ...$ *conjuntos cerrados con interior vacío. Demuestra que* $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i$ *tiene interior vacío.*
Hint: Demuestra que dado un intervalo abierto I*, existe algún* $x \in I \cap (\bigcup_{i\in\mathbb{N}} F_i)^{\complement}$.