Cálculo Difrencial e Integral I
Tarea 3

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

24 de diciembre de 2018

1. Límites

1.1. Límites Finitos

Ejercicio 1.1. *Sea* $f : X \cup Y \longrightarrow \mathbb{R}$*,* $a \in X' \cup Y'$*. Definamos* $g := f|_X$ *y* $h := f|_Y$*. Demuestra que si* $\underset{z\to a}{lim}\ g(z) = \underset{z\to a}{lim}\ h(z) = L$ *entonces* $\underset{z\to a}{lim}\ f(z) = L$ *.*

Ejercicio 1.2. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función monótona tal que* $f(X) \subseteq [a,b]$*. Demuestra que si* $f(X)$ *es denso en el intervalo* $[a,b]$*, entonces* $\forall c \in X'_+ \cap X'_-$*, se tiene que* $\underset{x\to c^-}{lim}\ f(x) = \underset{x\to c^+}{lim}\ f(x)$*. Si* $c \in X$ *demuestra que éste límite es igual a* $f(c)$*.*

Ejercicio 1.3. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función monótona,* $a \in X'_+$ *y* $x_n > a$ *una sucesión de elementos en* X *que converge para* a*. Si* $\lim f(x_n) = L$*, entonces* $\underset{x\to a^+}{lim}\ f(x) = L$*.*

Ejercicio 1.4. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *monótona. Demuestra que* $A := \left\{a \in X' \mid \underset{x\to a^-}{lim}\ f(x) \neq \underset{x\to a^+}{lim}\ f(x)\right\}$ *es a lo más numerable.*

Ejercicio 1.5. *Si* $\underset{x\to a}{lim}\ |f(x)| = |L|$ *demuestra que el conjunto de valores de adherencia de* f *en* a *está dado por* $\{L\}$*,* $\{-L\}$ *o* $\{L,-L\}$*.*

Ejercicio 1.6. *Definamos* $f : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como* $f(\frac{p}{q}) := a^{\frac{p}{q}}$ *donde* $a > 1$*. Demuestra que* $\underset{x\to 0}{lim}\ f(x) = 1$ *concluye que:*

(a) Para todo $b \in \mathbb{R}$ $\underset{x\to b}{lim}\ f(x)$ *existe. A éste límite lo denotaremos como* a^b*.*

(b) Si $b \in \mathbb{Q}$ *entonces* $\underset{x\to b}{lim}\ f(x) = f(b)$*.*

(c) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$*.*

(d) Si $x < y \Rightarrow a^x < a^y$*.*

1.2. Límites Infinitos

Ejercicio 1.7. *Dado* $a > 1$ *definamos* $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como* $g(x) = a^x$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$*. Demuestra que* $\underset{x\to\infty}{lim}\ g(x) = \infty$ *y que* $\underset{x\to-\infty}{lim}\ g(x) = 0$*.*

Ejercicio 1.8. *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Demuestra que si el coeficiente del termino de mayor grado es positivo entonces:*

(a) $\lim_{x\to\infty} p(x) = \infty$

(b) $\lim_{x\to-\infty} p(x) = \pm\infty$ *dependiendo de la paridad del grado.*

Ejercicio 1.9. *Sea $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(\frac{p}{q}) := q$ si $\frac{p}{q}$ es un número racional distinto de 0, $f(x) := x$ si x es un número irracional y $f(0) = 0$. Demuestra que esta función es no acotada en cualquier intervalo abierto de la recta.*

Ejercicio 1.10. *Sean $f:X\longrightarrow\mathbb{R}$, $g:Y\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones tales que $f(X)\subseteq Y$. Demuestra que si $a\in X'$ y $b\in Y'$ se tiene que $\lim_{x\to a} f(x) = b$, $\lim_{y\to b} g(b) = c$ y además $f(x)\neq b$, $\forall x\in X-\{a\}$ entonces $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. Demuestra que la condición $b\in Y'$ se sigue de $f(x)\neq b$ para $x\neq a$.*

Ejercicio 1.11. *Definamos $[x]$ como el mayor entero menor o igual que x. Demuestra que si $a,b\in\mathbb{R}^+$*

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}\qquad \lim_{x\to0^+}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=0$$

Demuestra también que:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x}{a}\left[\frac{b}{x}\right]=\frac{b}{a}\qquad \lim_{x\to0^-}\frac{b}{x}\left[\frac{x}{a}\right]=\infty$$

.

Ejercicio 1.12. *Dadas $f,g:X\longrightarrow\mathbb{R}$ definamos $h:X\longrightarrow\mathbb{R}$ como $h(x) := max\{f(x),g(x)\}$. Sea $a\in X'$ tal que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ y $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Demuestra que $\lim_{x\to a} h(x) = N$ donde N es el máximo entre L y M.*

Ejercicio 1.13. *Sea $f:[0,\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ una función acotada en cualquier intervalo acotado.*
Si $\lim_{x\to\infty}[f(x+1)-f(x)] = L$ demuestra que $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = L$.

Ejercicio 1.14. *Sea $p:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ un polinomio no constante, $b\in\mathbb{R}$ y $\{x_n\}$ una sucesión tal que $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = b$. Demuestra que la sucesión $\{x_n\}$ es acotada y que el conjunto de sus valores de adherencia es no vacío y está contenido en $p^{-1}(b)$. En particular prueba que si existe una sucesión $\{x_n\}$ tal que $\lim_{n\to\infty} p(x_n) = 0$ entonces p tiene al menos una raíz real.*

2. Continuidad

2.1. Continuidad

Ejercicio 2.1. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Demuestra que el conjunto de ceros de* f*,* $Z_f := f^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R} | f(x) = 0\}$ *es un conjunto cerrado. Concluye que si* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *son continuas entonces* $A := \{x \in \mathbb{R} | f(x) = g(x)\}$ *es cerrado.*

Ejercicio 2.2. *Dadas* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *definamos,* $f \vee g, f \wedge g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *como*

$$(f \vee g)(x) := max\{f(x), g(x)\}$$

$$(f \wedge g)(x) := min\{f(x), g(x)\}$$

Demuestra que si f, g *son continuas en* $a \in X$ *entonces* $f \vee g$ *y* $f \wedge g$ *también lo son.*

Ejercicio 2.3. *Sean* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas. Supongamos que* $\overline{Y} \subseteq X$ *y que* $f(y) = g(y)$*,* $\forall y \in Y$*. Demuestra que* $f|_{\overline{Y}} = g|_{\overline{Y}}$*. Concluye que si* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *son funciones continuas tales que* $f(x) = g(x)$*,* $\forall x \in \mathbb{Q}$*, entonces* $f = g$*.*

Ejercicio 2.4. *Sean* $f, g : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continuas tales que* $f(1) = g(0)$ *y definamos* $h : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *como sigue:*

$$h(x) := \begin{cases} f(2x) & si \;\; x \in \left[0, \frac{1}{2}\right] \\ g(2x-1) & si \;\; x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

Demuestra que h *es continua.*
También prueba que la función de sentido contrario, $f^*(x) := f(1-x)$ *es continua en* $[0,1]$*.*

Ejercicio 2.5. *Demuestra que una funcion* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es discontinua en* $a \in X$ *si y solo si existe* $\epsilon > 0$ *y una sucesión* $\{x_n\} \subseteq X$ *tal que* $|x_n - a| \leq \frac{1}{n}$ *y* $|f(x_n) - f(a)| > \epsilon$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*.*

Ejercicio 2.6. *Sea* $F \subseteq \mathbb{R}$ *cerrado y* $f : F \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Demuestra que existe una* ***Extensión*** *(función),* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua, con* $\psi|_F = f$*. (Hint: define* ψ *linealmente en las componentes conexas de* $\mathbb{R} \setminus F$*, imagina la gráfica).*

Ejercicio 2.7. *Una función* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$*, continua se llama* ***Propia****, si para todo* $K \subseteq \mathbb{R}$*, compacto se tiene que* $f^{-1}(K)$ *es compacto. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f *es propia.*

(b) $\lim_{x\to\infty} |f(x)| = \lim_{x\to-\infty} |f(x)| = \infty$.

(c) Si $|x_n| \to \infty$ *entonces* $|f(x_n)| \to \infty$.

Ejercicio 2.8. *Sea* K *el conjunto de Cantor y definamos* $A := [0,1]\setminus K$. *Construye una función* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *con las siguientes propiedades:*

(a) f *es monotona no-decreciente.*

(b) f *es constante para en todo intervalo abierto contenido en* A.

(c) $f(A) \subset [0,1]$ *y los elementos de* $f(A)$ *son racionales de la forma* $\frac{m}{2^n}$.

Demuestra que existe una extensión (función) monótona y continua $\psi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $\psi|_A = f$. *A esta función se le llama* ***Función de Cantor***.

Ejercicio 2.9 (Punto Fijo de Brower). *Sea* $f : [a,b] :\longrightarrow [a,b]$ *continua. Demuestra que* f *tiene al menos un punto fijo, es decir, existe* $x_0 \in [a,b]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$. *Da un ejemplo de una función continua* $f : [0,1) \longrightarrow [0,1)$ *sin puntos fijos.*

Ejercicio 2.10. *Sea* n *impar. Demuestra que* $\forall y \in \mathbb{R}$ *existe un único* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $x^n = y$. *Concluye que la función* f *definida por* $f(y) := \sqrt[n]{y}$ *es un homeomorfismo de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$.

Ejercicio 2.11. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Demuestra que si para todo abierto* $A \subseteq \mathbb{R}$ *se tiene que* $f(A)$ *es abierto entonces* f *es inyectiva y por lo tanto monótona.*

Ejercicio 2.12. *Sea* $X \subseteq \mathbb{R}$. *Demuestra que si toda función continua* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *es acotada entonces* X *es compacto.*

Ejercicio 2.13. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funcion continua tal que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$. *Demuestra que existe un elemento* $x_0 \in \mathbb{R}$ *para el cual* f *alcanza su mínimo.*

Ejercicio 2.14. *Sea* $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) := \frac{x}{1-|x|}$. *Demuestra que* f *es un homeomorfismo.*

Ejercicio 2.15. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *una funcion tal que* $\forall \epsilon > 0$ *existe una función continua* $g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *con la propiedad de que* $\forall x \in X$, $|f(x) - g(x)| < \epsilon$. *Demuestra que* f *es continua.*

2.2. Continuidad Uniforme

Ejercicio 2.16. *Dado* $S \subseteq \mathbb{R}$ *no vacío, definamos* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *como* $f(x) := inf\{|x-s| : s \in S\}$. *Demuestra que* $|f(x)-f(y)| \leq |x-y|$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$. *Concluye que* f *es uniformemente continua.*

Ejercicio 2.17. *Sea* $g : \mathbb{R} \longrightarrow (-1,1)$ *la inversa de la funcion definida en el ejercicio 2.14. Demuestra que* g *es uniformemente continua y que* f *no lo es.*

Ejercicio 2.18. *Sean* $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *uniformemente continuas. Demuestra que* $f+g$, $f \wedge g$ *y* $f \vee g$ *también lo son (ver 2.2).*

Ejercicio 2.19. *Sea* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un polinomio. Demuestra que* p *es uniformemente continua si y solo si su grado es menor o igual que 1.*

Ejercicio 2.20. *Sea* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$. *Demuestra que* f *es continua si y solo si* $\forall \epsilon > 0$ *existe una cubierta abierta* $\{I_x\}$ *de* X *tal que si* $y, z \in X \cap I_x$ *entonces* $|f(x)-f(y)| < \epsilon$. *Demuestra que* f *es uniformemente continua si estos abiertos se pueden tomar de la misma longitud.*

Ejercicio 2.21. *Demuestra que* $f(x) = x^n$ *es Lipschitz continua en cualquier conjunto acotado. Si* $n > 1$ *demuestra que* f *no es uniformemente continua en ningún intervalo no acotado.*

Ejercicio 2.22. *Demuestra que la función* f *definida por* $f(x) := \sqrt[n]{x}$ *no es Lipshtitz continua en ningún intervalo de la forma* $[0,a]$, $a > 0$, *pero si es uniformemente continua ahí. Por otro lado demuestra que para cualquier intervalo de la forma* $[a,\infty]$ f *es Lipshitz continua y por lo tanto uniformemente continua. Concluye que* f *es uniformemente continua en* $[0,\infty]$. *(Hint: Prueba que* f *es Lipshitz con constante de Lipschitz* $\lambda = \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{a^{n-1}}}$ *en* $[a,\infty]$ *).*

Ejercicio 2.23. *Sea* $I \subseteq \mathbb{R}$ *un intervalo. Demuestra que si* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es continua, monótona y acotada, entonces* f *es uniformemente continua.*

Ejercicio 2.24. *Sea* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *continua. Demuestra que* $\forall \epsilon > 0$ *existen* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ *tal que* $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ *y* $\forall\ x, y \in [a_{i-1}, a_i]$ *se tiene que* $|f(x)-f(y)| < \epsilon$.

Ejercicio 2.25. *A una función continua* $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *se llama* ***Poligonal*** *si existen* $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_{n-1} < a_n = b$ *tales que* $\forall i \in \{1,2,\ldots,n\}$ *se tiene que* $\psi|_{[a_{i-1},a_i]}$ *es una función afín. Demuestra que para toda función continua* $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *y para toda* $\epsilon > 0$ *existe una función poligonal* $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $|f(x)-\psi(x)| < \epsilon$, $\forall x \in [a,b]$.