Cálculo Difrencial e Integral I
Tarea 4

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

24 de diciembre de 2018

1. Derivadas

1.1. Derivadas

Ejercicio 1.1. *Sean $f,g,h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in X$. Si para $a \in X \cap X'$ se tiene que $f(a) = h(a)$ y existen las derivadas, $f'(a) = h'(a)$, entonces existe $g'(a)$ y $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.*

Ejercicio 1.2. *Considera el siguiente polinomio de grado 3:*

$$p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Demuestra que $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es un homeomorfismo si y solo si $a^2 \leq 3b$. Además prueba que el homeomorfismo inverso $f = p^{-1}$ es diferenciable si y solo si $a^2 < 3b$.

Ejercicio 1.3. *Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, diferenciable en $a \in X \cap X'$. Si $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ son dos sucesiones tales que, $x_n < a < y_n$ para toda $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, demuestra que:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$$

.

Ejercicio 1.4. *Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, continua en $a \in int(I)$. Supongamos que existe $L \in \mathbb{R}$ tal que,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n} = L$$

.

Para todo par de sucesiones $y_n, x_n \subseteq I$ tal que $x_n < a < y_n$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. Demuestra que $f'(a) = L$. Demuestra que la hipótesis de que f sea continua en a es indispensable.

Ejercicio 1.5. *Sea I un intervalo abierto y $f : I \to \mathbb{R}$ diferenciable en I. Un **Punto Crítico** de f es un punto, $c \in I$, tal que $f'(c) = 0$. Cuando $f''(c)$ existe, un punto crítico c de f se llama **No Degenerado** si $f''(c) \neq 0$. Demuestra que:*

(a) Si f es de clase C^1, para cada subintervalo compacto $[a,b] \subseteq I$ el conjunto de puntos críticos de f que pertenecen $[a,b]$ es cerrado.

(b) Los puntos máximos y mínimos locales de f son críticos. Un punto crítico no degenerado tiene que ser máximo o mínimo.

(c) *Si* $c \in I$ *es un punto crítico no degenerado de* f*, entonces es un punto crítico aislado (i.e.:* $\exists\, \delta > 0$ *tal que* c *es el único punto crítico en* $(c-\delta, c+\delta)$*)*

(d) *Existen funciones* C^∞ *con máximos y mínimos locales aislados degenerados (i.e.* $f''(c) = 0$*). Existen puntos críticos (necesariamente degenerados) de funciones* C^∞ *que no son máximos ni mínimos.*

(e) *Si* f *solo tiene puntos críticos no degenerados, entonces en cualquier subintervalo compacto* $[a,b] \subseteq I$*,* f *solo puede tener una cantidad finita de estos puntos. Concluye que* f *tiene a lo más una cantidad infinita numerable de puntos críticos no degenerados.*

Ejercicio 1.6. *Sea* $p : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *un polinomio. Demuestra que* $p(a) = p'(a) = \cdots = p^{(k)}(a) = 0$ *si y solo si* $p(x) = (x-a)^{k+1} q(x)$ *donde* q *es un polinomio.*

Ejercicio 1.7. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función Hölder continua con exponente de Hölder* $\alpha > 1$*. Es decir,* $\forall x, y \in (a,b)$ *se tiene que* $|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^\alpha$*. Demuestra que* f *es constante.*

Ejercicio 1.8. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función de clase* C^1 *,* $a \in I$ *y* $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$ *sucesiones que convergen para* a*, con* $x_n \neq y_n$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Demuestra que* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$*. (Nota que al ser* f *de clase* C^1 *no es necesario suponer que* $x_n < a < y_n$ *como en el ejercicio 1.3.)*

Ejercicio 1.9. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable ,* $a \in I$ *y* $\{x_n\}, \{y_n\} \subset I$ *sucesiones que convergen para* a *con la propiedad de que* $y_n \neq x_n$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Demuestra que si* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{f(y_n)-f(x_n)}{y_n - x_n} = f'(a)$ *entonces* f' *es continua en* a*.*

Ejercicio 1.10. *Sea* $f : (a, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable tal que* $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ *existe. Demuestra que si* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x)$ *existe entonces es igual a cero.*

Ejercicio 1.11. *Sea* $f : [0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable tal que* $\lim\limits_{x\to\infty} f'(x) = L$*. Demuestra que* $\forall c > 0$*,*

$$\lim_{x\to\infty} (f(x+c) - f(x)) = cL$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = L$$

Ejercicio 1.12. *Sean* $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones continuas y derivables en el intervalo* (a,b). *Demuestra que existe* $c \in (a,b)$ *tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Ejercicio 1.13. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable. Demuestra que* f *es Lipschitz, con constante de Lipschitz* c*, si y solo si,* $f'(x) \leq c$*,* $\forall x \in I$.

Ejercicio 1.14. *Da un ejemplo de una función* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de clase* C^{∞} *tal que* $|f'(x)| < 1$ *y* $f(x) \neq x$*,* $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 1.15 (**Punto Fijo de Banach Diferenciable**). *Sea* I *un intervalo cerrado y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable tal que:*

1. $f(I) \subseteq I$.
2. *Existe* $p \in \mathbb{N}$ *y* $c \in \mathbb{R}$ *tal que* $g := \underbrace{f \circ \ldots \circ f}_{p\ veces} = f^p$ *satisface* $|g'(x)| \leq c < 1$*,* $\forall x \in I$.

Demuestra que:

(a) *Existe un único* $a \in I$ *con la propiedad de que* $f(a) = a$.

(b) *Para todo* $x \in I$ *se tiene que* $\lim\limits_{n \to \infty} f^n(x) = a$.

Ejercicio 1.16. *Sea* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función diferenciable con derivada acotada. Demuestra que existe* $c \in \mathbb{R}$ *tal que la función* $\psi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\psi(x) := f(x) + cx$ *es un difeomorfismo.*

Ejercicio 1.17. *Sea* $f[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y derivable en* (a,b). *Demuestra que si* $\lim\limits_{x \to a^+} f'(x) = \infty$ *entonces* $\lim\limits_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \infty$.

Ejercicio 1.18. *Sean* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *funciones derivables tales que existe* $a \in \mathbb{R}$ *con la propiedad de que* $f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0$. *Demuestra que* $\forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ *se tiene que* $(g \circ f)^{(i)}(a) = 0$.

Ejercicio 1.19. *Sea* $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función dos veces diferenciable tal que* $\psi(a) = \psi(b) = 0$ *y* $\psi''(x) < 0$*,* $\forall x \in [a,b]$. *Demuestra que* $\psi(x) > 0$*,* $\forall x \in (a,b)$. *Concluye que si* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es dos veces diferenciable y* $f''(x) > 0$*,* $\forall x \in I$*, entonces* f *es estrictamente convexa en el intervalo* I.