Cálculo Difrencial e Integral I

Examen 4

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

Instrucciones: Resuelve 3 de los siguentes 4 ejercicios, si resuelves los 4 tendras 1/3 puntos extra. Recuerda justificar con todo detalle tus respuestas.

Problema 1. *Sean* $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$*, tales que* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$*, para todo* $x \in X$*. Si para* $a \in X \cap X'$ *se tiene que* $f(a) = h(a)$ *y existen las derivadas,* $f'(a) = h'(a)$*, entonces existe* $g'(a)$ *y* $f'(a) = g'(a) = h'(a)$*.*

Problema 2. *Sea* I *un intervalo abierto y* $f : I \to \mathbb{R}$ *diferenciable en* I*. Un* ***Punto Crítico*** *de* f *es un punto,* $c \in I$*, tal que* $f'(c) = 0$*. Cuando* $f''(c)$ *existe, un punto crítico* c *de* f *se llama* ***No Degenerado*** *si* $f''(c) \neq 0$*. Demuestra que:*

(a) *Si* $c \in I$ *es un punto crítico no degenerado de* f*, entonces es un punto crítico aislado (i.e.:* $\exists\ \delta > 0$ *tal que* c *es el único punto crítico en* $(c - \delta, c + \delta)$*)*

(b) *Si* f *solo tiene puntos críticos no degenerados, solo puede tener a lo más una cantidad infinita numerable.*
Hint: *En un subintervalo* $[a, b] \subseteq I$*,* f *solo puede tener una cantidad finita de estos puntos.*

Problema 3. *Sea* $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* $[0,1]$ *y diferenciable en* $(0,1)$*, tal que* $f(0) = 0$ *y* $f(1) = 1$*. Demuestra que para todo* $k \in \mathbb{N}$ *existen* $x_1, \ldots, x_k \in (0,1)$ *distintos tal que:*

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{f'(x_i)} = k.$$

Problema 4. *Sea* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable. Demuestra que* f *es Lipschitz, con constante de Lipschitz* c*, si y solo si,* $f'(x) \leq c$*,* $\forall x \in I$*.*