Cálculo Difrencial e Integral I
Examen Final

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

Instrucciones: Resuelve 2 de los 3 ejercicios de cada sección. Recuerda justificar con todo detalle tus respuestas.

1. Teoría de Conjuntos y Campos Ordenados

Problema 1.1. *Dados 2 conjuntos A, B demostrar que:*

$$(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B).$$

Problema 1.2. *Sea $\mathbb{K}$ un campo ordenado. Escribe como unión de intervalos a los siguientes conjuntos:*

(a) $\{x \in \mathbb{K} : |x-3| + |x+3| < 8\}$.

(b) $|x^2 - 2| \leq 1$.

(c) $|x-5| < |x+1|$.

Problema 1.3 (Desigualdad de la media geométrica y la media aritmética). *Sean $x, y \in \mathbb{R}^+$. Demuestra que*

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

2. Sucesiones y Topología de la Recta

Problema 2.1. *Sea $\{x_n\}$ una sucesión tal que, $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n} = a$ y $\lim\limits_{n\to\infty} x_{2n-1} = a$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.*

Problema 2.2. *Sea $x_n = (1+\frac{1}{n})^n$ y $y_n = (1-\frac{1}{n+1})^{n+1}$. Demuestra que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 1$. Concluye que $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{1}{e}$.*

Problema 2.3. *Sea $A \subseteq \mathbb{R}$ abierto. Demuestra que para cualquier $a \in A$ tenemos que $A \setminus \{a\}$ es abierto.*

3. Límites y Continuidad

Problema 3.1. *Sea $p(x)$ un polinomio con coeficientes reales. Demuestra que si el coeficiente del termino de mayor grado es positivo entonces:*

(a) $\lim\limits_{x \to \infty} p(x) = \infty$

(b) $\lim\limits_{x \to -\infty} p(x) = \pm\infty$ *dependiendo de la paridad del grado.*

Problema 3.2. *Dadas $f, g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ definamos, $f \vee g, f \wedge g : X \longrightarrow \mathbb{R}$ como*

$$(f \vee g)(x) := max\{f(x), g(x)\}$$

Demuestra que si f, g son continuas en $a \in X$ entonces $f \vee g$ también lo es.
Hint: *Encuentra una fórmula para $f \vee g$ en terminos de sumas y composición de funciones continuas.*

Problema 3.3. *Sea $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) := \dfrac{x}{1-|x|}$. Demuestra que f es un homeomorfismo y que f no es uniformemente continuo.*

4. Diferenciabilidad

Problema 4.1. *Sean $f, g, h : X \longrightarrow \mathbb{R}$, tales que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, para todo $x \in X$. Si para $a \in X \cap X'$ se tiene que $f(a) = h(a)$ y existen las derivadas, $f'(a) = h'(a)$. Demuestra que existe $g'(a)$ y $f'(a) = g'(a) = h'(a)$.*

Problema 4.2. *Sean $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y derivables en el intervalo (a,b). Demuestra que existe $c \in (a,b)$ tal que*

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Hint: *Define $h(x) := (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x) + K$, donde K es una constante, encuentra explícitamente el valor de K de tal forma que se valga el teorema de Rolle.*

Problema 4.3. *Sea* $\psi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función dos veces diferenciable tal que* $\psi(a) = \psi(b) = 0$ *y* $\psi''(x) < 0$, $\forall x \in [a,b]$. *Demuestra que* $\psi(x) > 0$, $\forall x \in (a,b)$. *Concluye que si* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es dos veces diferenciable y* $f''(x) > 0$, $\forall x \in I$, *entonces* f *es estrictamente convexa en el intervalo* I.
Hint: *Todo punto donde* ψ' *se anule debe de ser máximo. Para la convexiad define* $g(x)$ *como la función lineal cuya gráfica es el segmento de recta que pasa por los puntos* $(a, f(a))$ *y* $(b, f(b))$ *y utiliza la primera parte con* $g - f$.