Cálculo Difrencial e Integral II

Examen 1

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

Instrucciones: Resuelve 3 de los siguentes 4 ejercicios, si resuelves los 4 tendras 1/3 puntos extra. Recuerda justificar con todo detalle tus respuestas.

Problema 1. *Sea* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *una serie de potencias y* $c, M \in \mathbb{R}^+$*, tales que* $|a_n c^n| \le M$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Demuestra que* $(-c, c)$ *está conetenido en el intervalo de convergencia de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*.*

Problema 2. *Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y determina la función a la que convergen en su intervalo de convergencia,*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$.

Problema 3. *Sea* $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$*. Calcula las derivadas de orden* 2018 *y* 2019 *de la función* $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ *en el punto* $x = 0$*.*

Problema 4. *Sea* $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ *una sucesión acotada. Supongamos que la serie:*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n.$$

(la cual tiene radio de convergencia infinito) tiene un decaimiento de orden $O(e^{-x})$ *cuando* x *tiende a infinito, es decir,* $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{e^{-x}} = C$*, para algún* $C \in \mathbb{R}$*. Demuestra que* $a_n = C \cdot (-1)^n$*, para toda* $n \in \mathbb{N}$*.*