Cálculo Difrencial e Integral II
Tarea 1

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

26 de agosto de 2019

1. Series de Potencias

1.1. Límite Superior e Inferior

Ejercicio 1.1. *Sea* $A \subseteq \mathbb{R}$ *acotado y no vacío. Dado* $c \in \mathbb{R}$*, definamos* $c \cdot A := \{c \cdot x \mid x \in A\}$*. Demuestra que si* $c > 0$ *entonces* $sup(c \cdot A) = c \cdot sup(A)$ *y que* $inf(c \cdot A) = c \cdot inf(A)$*, mientras que si* $c < 0$*, se tiene que* $sup(c \cdot A) = c \cdot inf(A)$ *e* $inf(c \cdot A) = c \cdot sup(A)$*.*

Ejercicio 1.2. *Dada una sucesión* $\{x_n\}$*, decimos que* x_p *es un* ***Término Destacado****, si* $x_p \geq x_n$*,* $\forall n > p$*. Sea* $P := \{p \in \mathbb{N} \mid x_p$ *es destacado*$\}$*. Demuestra que si* $P = \{p_1 < p_2 < \ldots\}$ *es un conjunto infinito entonces* $\{x_p\}$ *es una subsucesión no creciente de* $\{x_n\}$*. Si* P *es finito (en particular vacío), demuestra que existe una subsucesión creciente de* $\{x_n\}$*. Concluye que toda sucesión contiene una subsucesión monótona.*

Ejercicio 1.3. *Sea* $\{x_n\}$ *una sucesión acotada. Demuestra que si* $\lim a_n = a$ *y cada* a_n *es un valor de adherencia de* $\{x_n\}$*, entonces* a *también es un valor de adherencia de* $\{x_n\}$*.*

Ejercicio 1.4. *Sean* $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ *sucesiones acotadas. Definamos,*

$$a := \liminf_{n\to\infty} x_n, \quad A := \limsup_{n\to\infty} x_n, \quad b := \liminf_{n\to\infty} y_n, \quad B := \limsup_{n\to\infty} y_n$$

Demuestra que:

(a) $\limsup(x_n + y_n) \leq A + B, \quad \liminf(x_n + y_n) \geq a + b.$

(b) $\limsup(-x_n) = -a, \quad \liminf(-x_n) = -A.$

(c) $\limsup(x_n y_n) \leq AB, \quad \liminf(x_n y_n) \geq ab.$

En las 2 últimas desigualdades agrega la hipótesis que $\{x_n\} \geq 0$ *y* $\{y_n\} \geq 0$*.*
Da ejemplos de sucesiones donde las desigualdades anteriores sean estrictas.

Ejercicio 1.5. *Demuestra que* $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \dfrac{1}{p+1}$*. (**Hint:** usa Stolz-Cesàro).*

Ejercicio 1.6. *Sean* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$*,* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ *series de números positivos. Si* $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n = \infty$ *y existe* $N \in \mathbb{N}$ *tal que* $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{b_{n+1}}{b_n}$*,* $\forall n \geq N$*. Demuestra que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$*.*

Ejercicio 1.7. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión no creciente tal que* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ *y* $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$*, donde* $b_n := \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$*. Demuestra que la serie*

$$a_1 - \frac{1}{2}(a_1 + a_2) + \frac{1}{3}(a_1 + a_2 + a_3) - \ldots$$

es convergente.

Ejercicio 1.8. *Sea* $\{a_n\}$ *una sucesión decreciente tal que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n = \infty$*. Demuestra que,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_3 + \ldots + a_{2n-1}}{a_2 + a_4 + \ldots + a_{2n}} = 1.$$

Ejercicio 1.9. *Sean* $a_1 \geq a_2 \geq \ldots \geq 0$ *y* $s_n := a_1 - a_2 + \ldots + (-1)^{n-1} a_n$*. Demuestra que* $\{s_n\}$ *es una sucesión acotada y que*

$$\limsup\, s_n \; - \; \liminf\, s_n = \lim\, a_n.$$

1.2. Series de Potencias

Ejercicio 1.10. *Sea* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ *una serie de potencias y* $c, M \in \mathbb{R}^+$*, tales que* $|a_n c^n| \leq M$*,* $\forall n \in \mathbb{N}$*. Demuestra que* $(-c.c)$ *esta conetenido en el intervalo de convergencia de* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*.*

Ejercicio 1.11. *Demuestra que tanto la serie de potencias* $(1-x) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n x^{2n} \right)$ *como la serie* $(1+x^2) \cdot \left(\sum_{n\in\mathbb{N}} x^n \right)$ *tienen radio de convergencia* 1*.*

Ejercicio 1.12. *Sea* $(-\rho, \rho)$ *el intervalo de convergencia de la serie* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$*. Definamos* s_n *como* $s_n := a_0 + a_1 + \ldots + a_n$*. Demuestra que* $\forall x \in (-1,1) \cap (-\rho, \rho)$ *se tiene que* $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n = (1-x) \sum_{n\in\mathbb{N}} s_n x^n$*.*

Ejercicio 1.13. *Sean* $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i$ *y* $\sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j$ *series de potencias con radios de convergencia* $r > 0$ *y* $s > 0$ *respectivamente. Demuestra que existe una serie de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ *con radio de convergencia* $t > 0$ *tal que* $\forall x \in (-t, t)$ *se tiene que* $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{j=0}^{\infty} b_j \left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \right)^j$*. Usando ésto concluye que la composición de funciones analíticas es analítica.*

Ejercicio 1.14. *Calcula el radio de convergencia de la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *donde :*

(a) $0 < \alpha \leq |a_n| \leq \beta < +\infty \ \forall n \geq 1$.

(b) $2^n - n \leq |a_n| \leq 2^n + n, \ \forall n \geq 1$.

(c) $a_0 = 1$ *y* $a_{n+1} = 2a_n^2, \ \forall n \geq 0$.

(d) $a_0 = 1$ *y* $a_{n+1} = 2\sqrt{a_n}, \ \forall n \geq 0$.

Ejercicio 1.15. *Sean* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *y* $T = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n$ *dos series de potencias. Demuestra que:*

(a) *Si* $|a_n| \leq |b_n| \ \forall n \geq N$ *entonces* $\rho(S) \geq \rho(T)$.

(b) *Si* $a_n \neq 0 \ \forall n \geq N$ *y* $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{b_n}{a_n}\right| = 1$, *entonces* $\rho(S) = \rho(T)$.

Ejercicio 1.16. *En cada uno de los siguientes casos determina una serie de potencias* $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *que satisfaga las ecuaciones y condiciones indicadas:*

(a) $S'' + \lambda^2 S = 0$, *donde* $\lambda \neq 0$, $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 1$.

(b) $S(2x) = 2S(x) + x^2, \quad a_1 = 1$.

(c) $S'' = (S')^2$, *con* $a_0 = 0$ *y* $a_1 = 1$.

(d) $S'(x) = 2xS(x)$, $a_0 = 1$.

(e) $x^2 S'(x) = S(x) + x$, $a_0 = 0$.

Determina el radio de convergencia en cada caso.

Ejercicio 1.17. *Calcula el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y determina la función a la que convergen en su intervalo de convergencia,*

(a) $\sum_{k=1}^{\infty} k x^k$.

(b) $\sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$.

Ejercicio 1.18. *Demuestra que:*

(a) $\frac{d}{dx}(cosh(x)) = senh(x)$.

(b) $\frac{d}{dx}(senh(x)) = cosh(x)$.

(c) $cosh^2(x) - senh^2(x) = 1$.

(d) $cosh(x+y) = cosh(x)cosh(y) + senh(x)senh(y)$.

(e) $senh(x+y) = cosh(x)senh(y) + senh(x)cosh(y)$.

Ejercicio 1.19. *Sean f, g funciones analíticas en una vecindad V de 0 tales que $f' = g$, $g' = f$, $g(0) = 1$ y $f(0) = 0$. Demuestra que $g(x) = cosh(x)$ y que $f(x) = senh(x)$, $\forall x \in V$.*

Ejercicio 1.20. *Demuestra que:*

(a) $1 + tan^2(x) = sec^2(x)$.

(b) $tan(x) = tan(y)$ *si y sólo si* $x - y = k\pi$ *para algún* $k \in \mathbb{Z}$.

(c) $tan(x)$ *es una función periódica de periodo de* π.

Ejercicio 1.21. *Sean f, g funciones analíticas en un intervalo abierto I. Demuestra que si existe $a \in I$ tal que $f(a) = g(a)$ y $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ para toda $n \geq 1$ entonces $f(x) = g(x)$ $\forall x \in I$. Demuestra que esto es falso si suponemos que f y g son solamente de clase C^∞.*

Ejercicio 1.22. *Sea $f(x) = \frac{x^5}{1+x^6}$. Calcule las derivadas de orden 2018 y 2019 de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto $x = 0$.*