Cálculo Difrencial e Integral II
Tarea 2

Prof: Iker Martínez
Ayud: Andrew Shaw

26 de agosto de 2019

1. Integrales

1.1. Integrales Definidas

Ejercicio 1.1. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *acotada. Prueba que*

$$\left|\overset{*}{\int_a^b} f(x)dx\right| \leq \overset{*}{\int_a^b} \left|f(x)\right| dx.$$

Da un ejemplo donde la desigualdad análoga para integrales inferiores, no vale.

Ejercicio 1.2. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *integrable. Prueba que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\int_a^b \left|f(x)\right| dx = 0.$
2. *Si* f *es continua en un punto* c*, entonces* $f(c)=0$.
3. $X=\left\{x\in[a,b]\middle| f(x)\neq 0\right\}$ *tiene interior vacío.*

Ejercicio 1.3. *Sea* $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *continua. Si* f *no es idénticamente cero, entonces*

$$\int_a^b \left|f(x)\right| dx > 0.$$

Ejercicio 1.4. *Da un ejemplo de una función integrable que sea discontinua en un conjunto infinito.*

Ejercicio 1.5. *Sean* $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ *funciones continuas con* $f(x)\leq g(x)$ *para todo* $x\in[a,b]$. *Define* $\varphi:[a,b]\to\mathbb{R}$ *como,* $\varphi(x)=f(x)$ *si* x *es racional y* $\varphi(x)=g(x)$ *si* x *es irracional. Prueba que*

$$\underset{*}{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

$$y$$

$$\overset{*}{\int_a^b} \varphi(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Concluye que φ *es integrable si y solo si* $f=g$.

Ejercicio 1.6. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada y no negativa. Demuestra que* $\int_{*a}^{b} f(x)dx = \sup_{\xi} \int_a^b \xi(x)dx$, *donde ξ varía por el conjunto de las funciones escalonadas tales que $\xi(x)\le f(x)$ para todo $x\in[a,b]$. Demuestra que un resultado análogo se cumple si tomamos, ξ continua o bien ξ integrable (manteniendo la hipótesis $\xi(x)\le f(x)$, $\forall x\in[a,b]$).*

Ejercicio 1.7. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, $\varphi:[t_0-\varepsilon,t_0+\varepsilon]\to[a,b]$ difrerenciable y $c\in[a,b]$. Demuestra que las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

A) $\varphi'(t)=f(\varphi(t))$ *para todo* $t\in[a,b]$ *y* $\varphi(t_0)=c$

B) $\varphi(t)=c+\int_{t_0}^{t} f(\varphi(s))ds$ *para todo* $t\in[a,b]$.

Ejercicio 1.8. *Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ difrerenciable tal que $f(0)=0$ y para todo $x\in\mathbb{R}$ se cumple que $f'(x)=(f(x))^2$. Demuestra que $f(x)=0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

Ejercicio 1.9. *Da un ejemplo de una función no integrable que tenga una primitiva. (**Hint:** Encuentra una función f diferenciable en $[-1,1]$ y con derivada no acotada).*

Ejercicio 1.10. *Sean $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ funciones integrables. Etiquetemos a cada partición P de dos maneras distintas, escogiendo en cada intervalo $[t_{i-1},t_i]$ un punto ξ_i y un punto η_i. Demuestra que:*

$$\lim_{mesh(\mathrm{P})\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)g(\eta_i)(t_i-t_{i-1}) = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

Ejercicio 1.11. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ integrable y $g:[c,d]\to\mathbb{R}$ monotona con g' integrable. Si $g([c,d])\subseteq[a,b]$, entonces* $\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))g'(t)dt$.

Ejercicio 1.12. *Sean $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ y $g:[-1,1]\to\mathbb{R}$ integrables, entonces*

$$\int_0^2 (x-1)f((x-1)^2)dx = 0 = \int_0^{\pi} g(\mathrm{sen}(x))\cos(x)dx.$$

Ejercicio 1.13. *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ con derivada integrable, para $m=\frac{a+b}{2}$, demuestra que*

$$f(a)+f(b)=\frac{2}{b-a}\int_a^b [f(x)+(x-m)f'(x)]dx.$$

Ejercicio 1.14. *Sea $f[a,b]\to\mathbb{R}$ acotada. Demuestra que f es integrable si y solo si existe un número real α, con la propiedad de que para todo $\epsilon>0$ podemos obtener una partición P_ϵ de $[a,b]$, tal que $\left|R(f;\dot{\mathrm{Q}})-\alpha\right|<\epsilon$, para cualquier partición etiquetada $\dot{\mathrm{Q}}$, con $\mathrm{P}_\epsilon\subseteq\mathrm{Q}$.*

Ejercicio 1.15. *Sea $g\geq 0$ una función integrable tal que $\displaystyle\int_a^b g(x)dx=0$ y $f(x)$ una funcion integrable. Demuestra que,*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0.$$

Ejercicio 1.16. *Sea $g:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ continua y $f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ integrable. Demuestra que $g\circ f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable.*

Ejercicio 1.17. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow[c,d]$ una función de clase C^1 tal que $f'(x)\neq 0$, $\forall x\in[a,b]$. Demuestra que si $g:[c,d]\longrightarrow\mathbb{R}$ es integrable entonces $g\circ f$ también lo es.*

Ejercicio 1.18. *Sea $f:[0,1]\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $f(x):=x\cdot sen(\frac{1}{x})$ si $x\neq 0$ y $f(0)=0$. Demuestra que f es continua pero no tiene variación acotada.*

Ejercicio 1.19. *Dadas $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$, definamos:*

$$(f\wedge g)(x):=min\{f(x),g(x)\}$$

$$(f\vee g)(x):=max\{f(x),g(x)\}$$

Demuestra que si f y g son integrables entonces $f\wedge g$ y $f\vee g$ también lo son. Concluye que una función es integrable si y solo si su parte positiva y su parte negativa son integrables.

Ejercicio 1.20. *Para cada entero k, $0\leq k\leq n$, reescribe a $(1-t)^n$ como, $(1-t)^n=(1-t)^{n-k}(1-t)^k$ en la expresión para el residuo R_{n+1} de la fórmula de Taylor con residuo integral. Obtén que*

$$R_{n+1}=\frac{(1-\theta)^{n-k}f^{(n+1)}(a+\theta h)}{n!(k+1)}h^{n+1},\qquad \theta\in(0,1).$$

Tomando $k = n$ recupera el residuo de Lagrange y tomando $k = 0$ reobtén el residuo de Cauchy:

$$R_{n+1} = \frac{(1-\theta)^n f^{(\theta+1)}(a+\theta h)}{n!} h^{n+1}$$

Con los cambios de variables $b := a+h$ y $\xi := a+\theta h$ entonces la fórmula del residuo de Cauchy se reexpresa como sigue:

$$R_{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(b-\xi)^n(b-a), \quad \xi \in (a,b).$$

Ejercicio 1.21. *Usa el residuo de Cauchy en la expansión de Taylor de $f(x) = (1+x)^\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{N}$ para demostrar que la serie de Taylor de f al rededor del 0 converge para $f(x)$ cuando $x \in (-1,1)$.*

1.2. Integrales Impropias

Ejercicio 1.22. *Sean $f,g : [a,\infty] \to \mathbb{R}$ continuas y $K > 0$ tal que para cualesquiera $c,d \in [a,\infty]$,*

$$\left| \int_c^d f(x)dx \right| \le K.$$

Si g es una función derifertenciable, decreciente y además $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Prueba que existe el límite

$$\int_a^\infty f(x)g(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(x)g(x)dx$$

*(**Hint:** Usa el criterio de Cauchy. Demuestra que $\forall \varepsilon > 0$ existe $A > a$ ta que $A < c < d$ implica que*

$$\left| \int_c^d f(x)g(x) \right| < \epsilon).$$

Ejercicio 1.23. *Demuestra que la integral impropia $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} dx$ es convergente, mas no converge absolutamente, pues para $F(x) = \displaystyle\int_0^\infty \left| \frac{\operatorname{sen}(x)}{x} \right| dx$, se tiene que el limite $\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$.*

1.3. Medida Cero

Ejercicio 1.24. *Decimos que $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es* ***Localmente Acotada en un Punto*** *x, cuando existe $\epsilon>0$ tal que $f\big|_{(x-\epsilon,x+\epsilon)}$ es acotada.*
Demuestra que el conjunto de puntos $x\in\mathbb{R}$ donde f es localmente acotada es abierto. Muestra que se puede definir la oscilación de f en los puntos donde f es localmente acotada. Prueba que los puntos donde una función arbitraria $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ es continua es una intersección numerable de abiertos. Usando el teorema de Baire, concluye que ninguna función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ puede tener a $\mathbb{Q}$ como el conjunto de puntos donde f es continua.

Ejercicio 1.25. *Sea I un intervalo de medida 0. Demuestra que I es un punto.*

Ejercicio 1.26. *Demuestra que todo conjunto de medida 0 tiene interior vacío.*

Ejercicio 1.27. *Sean $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ Riemann integrables. Define $A:=\{x\in[a,b]:f(x)\neq g(x)\}$. Demuestra que si la medida de A es cero entonces*

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b g(x)dx.$$

Ejercicio 1.28. *Da un ejemplo de 2 funciones acotadas $f,g:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ tales que $A:=\{x\in[a,b]:f(x)\neq g(x)\}$ tenga medida 0, $f(x)$ sea Riemann integrable y $g(x)$ no lo sea.*

Ejercicio 1.29. *Sea $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ Lipschitz continua. Demuestra que si $A\subseteq[a,b]$ tiene medida 0 entonces $f(A)$ también.*

Ejercicio 1.30. *$A\subseteq\mathbb{R}$ tiene* ***Contenido 0*** *si para toda $\epsilon>0$ existe una cantidad finita de intervalos $I_1,\ldots,I_k$ tal que $A\subseteq I_1\cup\ldots\cup I_k$ y $\sum\limits_{i-1}^{k}\ell(I_i)<\epsilon$.*
Demuestra que si $A\subset\mathbb{R}$ tiene contenido 0 entones su cerradura $\bar{A}$ también. En particular $\bar{A}$ tiene interior vació. ¿Que pasa si A tiene medida 0?.

1.4. Logaritmos y Exponenciales

Ejercicio 1.31. *Sea $f:\mathbb{R}^+\longrightarrow\mathbb{R}$ continua tal que $f(x\cdot y)=f(x+y)$ para todo $x,y\in\mathbb{R}^+$. Demuestra que existe $c\in\mathbb{R}$ tal que $f(x)=c\cdot log(x)$.*

Ejercicio 1.32. *Demuestra que:*

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a.$$

Ejercicio 1.33. *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} x^x = 1$, $\lim_{x\to 0} x^{log(x+1)} = 1$ *y que* $\lim_{x\to 0}\big(log(x)\cdot log(x+1)\big) = 0.$

Ejercicio 1.34. *Sea* $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ *una función continua tal que* $f(x+y)=f(x)f(y)$*. Demuestra que* $f(x)=a^x$ *con* $a\in\mathbb{R}^+$ *o* $f(x)=0\ \forall x\in\mathbb{R}$.

Ejercicio 1.35. *Demuestra que* $\forall a\geq 0$

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot\sqrt[n]{a-1} = log(a).$$

Ejercicio 1.36. *Demuestra que*

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^{n+1}+(n+1)^n}{n^{n+1}}\right)^n = e^e.$$