ÜBER CONTINUIRLICHE FUNCTIONEN EINES REELLEN ARGUMENTS, DIE FÜR KEINEN WERTH DES LETZTEREN EINEN BESTIMMTEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN BESITZEN.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872.)

Bis auf die neueste Zeit hat man allgemein angenommen, dass eine eindeutige und continuirliche Function einer reellen Veränderlichen auch stets eine erste Ableitung habe, deren Werth nur an einzelnen Stellen unbestimmt oder unendlich gross werden könne. Selbst in den Schriften von Gauss, Cauchy, Dirichlet findet sich meines Wissens keine Äusserung, aus der unzweifelhaft hervorginge, dass diese Mathematiker, welche in ihrer Wissenschaft die strengste Kritik überall zu üben gewohnt waren, anderer Ansicht gewesen seien. Erst Riemann hat, wie ich von einigen seiner Zuhörer erfahren, mit Bestimmtheit ausgesprochen (i. J. 1861, oder vielleicht auch schon früher), dass jene Annahme unzulässig sei und z. B. bei der durch die unendliche Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}$$

dargestellten Function sich nicht bewahrheite. Leider ist der Beweis hierfür von Riemann nicht veröffentlicht worden und scheint sich auch nicht in seinen Papieren oder durch mündliche Überlieferung erhalten zu haben. Dieses ist um so mehr zu bedauern, als ich nicht einmal mit Sicherheit habe erfahren können, wie Riemann seinen Zuhörern gegenüber sich ausgedrückt hat. Die Mathematiker, welche sich, nachdem die Riemann'sche Behauptung in weiteren Kreisen bekannt geworden war, mit dem Gegenstande beschäftigt haben, scheinen (wenigstens in ihrer Mehrzahl) der Ansicht gewesen zu sein, es genüge, die Existenz von Functionen nachzuweisen, welche in jedem noch so kleinen Intervalle ihres Arguments Stellen darbieten, wo sie nicht differentiirbar sind. Dass es Functionen dieser Art giebt, lässt sich ausserordentlich leicht nachweisen, und ich glaube daher, dass Riemann nur solche Functionen im Auge gehabt hat, die für keinen Werth ihres Arguments einen bestimmten Differentialquotienten besitzen. Der Beweis dafür, dass die angegebene trigonometrische Reihe eine Function dieser Art darstelle, scheint mir indessen einigermassen schwierig zu sein; man kann aber leicht continuirliche Functionen eines reellen Arguments x bilden, für welche sich mit den einfachsten Mitteln nachweisen lässt, dass sie für keinen Werth von x einen bestimmten Differentialquotienten besitzen.

Dies kann z. B. folgendermassen geschehen.

Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungrade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als 1, und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi);$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt.

Es sei x_0 irgend ein bestimmter Werth von x, und m eine beliebig angenommene ganze positive Zahl; so giebt es eine bestimmte ganze Zahl α_m, für welche die Differenz

$$a^m x_0 - \alpha_m,$$

die mit x_{m+1} bezeichnet werde, $> -\frac{1}{2}$, aber $\leqq \frac{1}{2}$ ist.

Setzt man dann

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \qquad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

so hat man

$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \qquad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

es ist also

$$x' < x_0 < x''.$$

Man kann aber m so gross annehmen, dass x', x'' beide der Grösse x_0 so nahe kommen, wie man will.

Nun ist

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(b^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{x'-x_0}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{m-1}\left((ab)^n\cdot\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)}\right)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\left(b^{m+n}\cdot\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right).$$

Der erste Theil dieses Ausdruckes ist, da

$$\frac{\cos(a^n x'\pi)-\cos(a^n x_0\pi)}{a^n(x'-x_0)} = -\pi\sin\left(a^n\frac{x'+x_0}{2}\pi\right)\cdot\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

und der Werth von

$$\frac{\sin\left(a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi\right)}{a^n\frac{x'-x_0}{2}\pi}$$

stets zwischen -1 und $+1$ liegt, dem absoluten Betrage nach kleiner als

$$\pi\sum_{n=0}^{m-1}(ab)^n,$$

also auch kleiner als

$$\frac{\pi}{ab-1}(ab)^m.$$

Ferner hat man, weil a eine ungrade Zahl ist:

$$\cos(a^{m+n}x'\pi) = \cos(a^n(\alpha_m-1)\pi) = -(-1)^{\alpha_m},$$
$$\cos(a^{m+n}x_0\pi) = \cos(a^n\alpha_m\pi+a^n x_{m+1}\pi) = (-1)^{\alpha_m}\cos(a^n x_{m+1}\pi),$$

also

$$\sum_{n=0}^{\infty}b^{m+n}\cdot\left(\frac{\cos(a^{m+n}x'\pi)-\cos(a^{m+n}x_0\pi)}{x'-x_0}\right) = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n.$$

Alle Glieder der Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1+\cos(a^n x_{m+1}\pi)}{1+x_{m+1}}b^n$$

sind positiv, und das erste, da $\cos(x_{m+1}\pi)$ nicht negativ ist, $1+x_{m+1}$ aber zwischen $\frac{1}{2}$ und $\frac{3}{2}$ liegt, nicht kleiner als $\frac{2}{3}$.

Hiernach hat man

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0} = (-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta\left(\frac{2}{3}+\varepsilon\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo η eine positive Grösse, die >1, bezeichnet, während ε zwischen -1 und $+1$ enthalten ist.

Ebenso ergiebt sich

$$\frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0} = -(-1)^{\alpha_m}(ab)^m \cdot \eta_1\left(\frac{2}{3}+\varepsilon_1\frac{\pi}{ab-1}\right),$$

wo η_1 ebenso wie η positiv und >1 ist, ε_1 aber zwischen -1 und $+1$ liegt.

Nimmt man nun a, b so an, dass $ab > 1 + \frac{3}{2}\pi$, also

$$\frac{2}{3} > \frac{\pi}{ab-1}$$

ist, so haben

$$\frac{f(x')-f(x_0)}{x'-x_0}, \qquad \frac{f(x'')-f(x_0)}{x''-x_0}$$

stets entgegengesetzte Zeichen, werden aber beide, wenn m ohne Ende wächst, unendlich gross.

Hieraus ergiebt sich unmittelbar, dass $f(x)$ an der Stelle $(x = x_0)$ weder einen bestimmten endlichen, noch auch einen bestimmten unendlich grossen Differentialquotienten besitzt.