Tinker

KENGUR BEZ GRANICA

KATEGORIJA: Cadet (IX razred osnovne i I razred srednje škole)

KENGUR BEZ GRANICA

KATEGORIJA CADET
9. RAZRED OSNOVNE I 1. RAZRED SREDNJE ŠKOLE

(PRAVO UČEŠĆA U KATEGORIJI CADET IMAJU I UČENICI
7. I 8. RAZREDA OSNOVNE ŠKOLE)

24.03.2021./31.03.2021./7.04.2021/14.04.2021

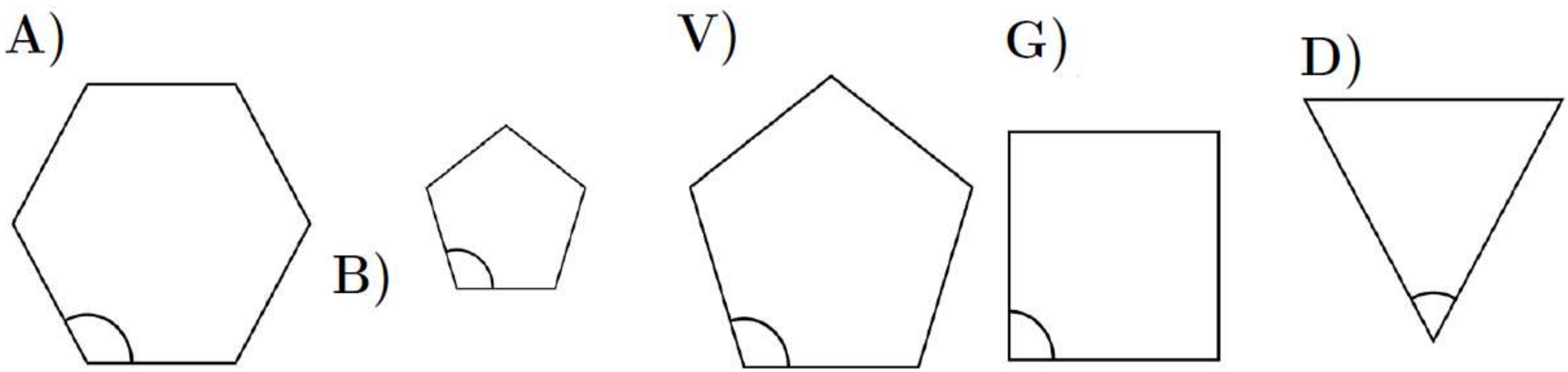
Pripremne radionice

Koliko ima prostih brojeva u skupu $\{2, 20, 202, 2020\}$?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** 4

Rješenje: B) 1 Medju ponudjenim brojevima, jedini prost broj je 2. Ostali brojevi su, osim što su djeljivi sa 1 i samim sobom, svi djeljivi barem još i sa brojem 2, te nisu prosti.

Od datih pravilnih mnogouglova, koji od njih ima naznačeni ugao najveće mjere?



! **Rješenje: A)** Ako sa n označimo broj stranica pravilnog poliedra, tada će označeni ugao imati sledeće mjere:

A) $n = 6$, $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \frac{4}{6} \cdot 180^\circ = 120^\circ$

B) $n = 5$, $\frac{n-2}{n} \cdot 180^\circ = \frac{3}{5} \cdot 180^\circ = 108^\circ$

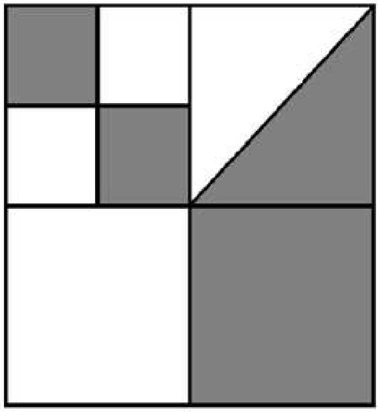
V) isto kao pod B)

G) 90°

D) 60°

Tinker

Veliki kvadrat na slici desno podjeljen je na manje kvadrate. U jednom od kvadrata označena je i dijagonala, kao što je prikazano na slici desno. Koji dio velikog kvadrata je obojen u sivo?



A) $\frac{4}{5}$ **B)** $\frac{3}{8}$ **V)** $\frac{4}{9}$ **G)** $\frac{1}{3}$ **G)** $\frac{1}{2}$

Rješenje: D) $\frac{1}{2}$ Podijelimo kvadrat na četiri manja, a zatim svaki od njih na još četiri kvadrata. Tada je osjenčeni dio jednak $\frac{2}{16}+\frac{2}{16}+\frac{1}{4}=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}$.

Rješenje možemo pojasniti i na sledeći način: veliki kvadrat je podjeljen na 4 kvadrata, a na svakom od njih je (na različite načine) polovina obojena u sivo, te je i polovina velikog kvadrata obojena u sivo (jer je polovina svakog njegovog dijela obojena u sivo).

Na fudbalskom turniru učestvuju četiri ekipe koje se takmiče tako što svaka ekipa odigra utakmicu sa svakom ekipom. U svakom meču pobjednik dobija 3 boda, a poraženi 0 bodova. U slučaju neriješenog rezultata obije ekipe dobijaju po 1 bod. Koji od ponudjenih brojeva bodova je nemoguće da jedna ekipa postigne nakon odigranih svih mečeva?

A) 4 **B)** 5 **V)** 6 **G)** 7 **D)** 8

Rješenje: D) 8 Po uslovu zadatka, svaki tim igra tačno po 3 utakmice. Kako je u svakoj utakmici moguće osvojiti 3,1 ili 0 poena, tim u tri odigrane utakmice može osvojiti 4,5,6,7 ili 9 bodova:

$$3+1+0=4$$

$$3+1+1=5$$

$$3+3+0=6$$

$$3+3+1=7$$

$$3+3+3=9$$

dok je nemoguće osvojiti 8 poena (navedeni su slučajevi u kojima je tim pobijedio u barem jednoj utakmici, inače bi broj bodova tima bio manji ili jednak od 3).

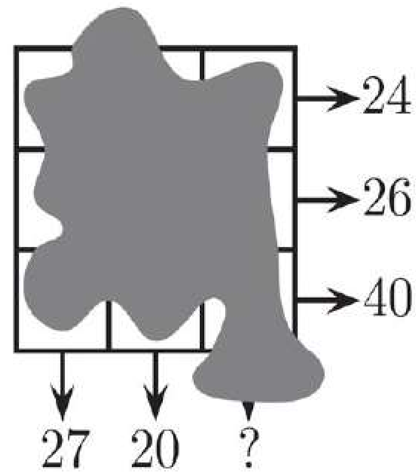
Kengur Kanga želi da pomnoži tri različita broja od sledećih ponudjenih: $-5; -3; -1;\ 2;\ 4$ i 6. Koji najmanji rezultat on može dobiti kao rezultat množenja?

A) -200 **B)** -120 **V)** -90 **G)** -48 **D)** -15

Tinker

Rješenje: B) -120 Najmanji mogući rezultat dobiće ukoliko pomnoži jedan negativan i dva pozitivna broja, birajući ih tako da imaju najveći mogući zbir aposolutnih vrijednosti. Množenjem brojeva -5, 4 i 6 se dobija najveći proizvod: -120.

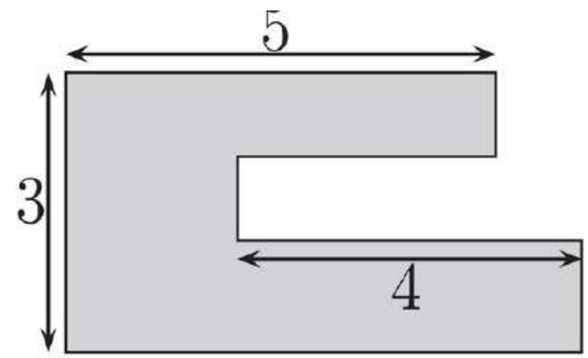
U svakoj ćeliji kvadrata 3×3 upisani su brojevi prije nego što se mastilo razlilo preko njih pa su postali nevidljivi. Medjutim, zbirovi brojeva u sve tri vrste su poznati, kao i zbirovi brojeva u dvije kolone, kao što prikazuju strelice na slici desno. Koliki je zbir brojeva u trećoj koloni?



A) 41 B) 43 V) 44 G) 45 D) 47

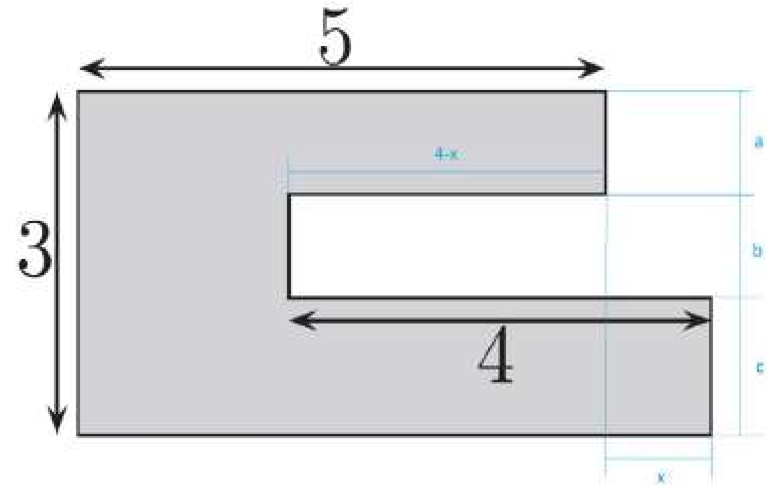
Rješenje: B) 43 Zbir svih brojeva u kvadratu je $24 + 26 + 40 = 90$. Tada zbir brojeva u trećoj koloni mora biti $90 - 27 - 20 = 43$.

Šašina bašta ima oblik prikazan na slici desno. Svake dvije ivice bašte su ili paralelne ili normalne jedna na drugu. Neke od dužina ivica bašte su prikazane na slici. Koliki je obim Sašine bašte?



A) 22 **B)** 23 **V)** 24 **G)** 25 **D)** 26

!



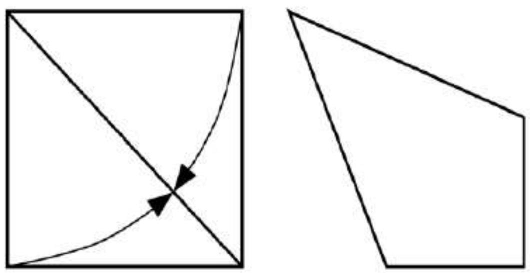
Na slici su označene dužine nekih ivica bašte. Primjetimo da važi sledeća jednakost $a + b + c = 3$ (ivice a, b i c su paralelne sa ivicom dužine 3 i sve ivice bašte, koje su na slici prikazane horizontalnim linijama, su takodje paralelne).

Primjetimo da su dužine ivica bašte koje su iznad krajnje donje ivice bašte i paralelne su sa njom redom, odozdo prema gore: 4, $4 - x$ i 5. Uzimajući u obzir gore navedeno, obim bašte, računajuči od donjeg lijevog ugla može se zapisati sledećom jednačinom:

$O = (5 + x) + c + 4 + b + (4 - x) + a + 5 + 3$, što je ekvivalentno sa

$O = 5+x+4+4+5+3-x+a+b+c$. Kako je $a+b+c = 3$ sledi da je $O = 24$.

Zlata je komad papira kvadratnog oblika presavila tako da se dvije stranice kvadrata preklapaju sa dijagonalom, kao što je prikazano na slici desno. Na taj način Zlata je dobila četvorougao. Kolika je mjera najvećeg ugla dobijenog četvorougla?



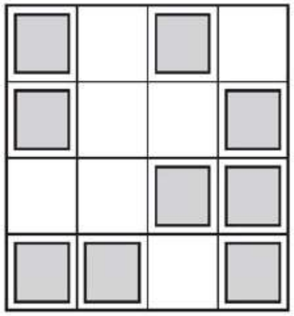
A) $112°30'$ **B)** $120°$ **V)** $125°$ **G)** $135°$ **D)** $150°$

!

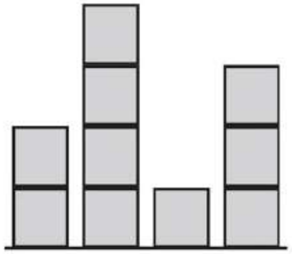
Rješenje: **A)** $112°30'$ Jedan unutrašnji ugao četvorougla (izmedju dvije strane koje nismo presavili) je jednak $90°$. Naspram njega je ugao od $90° : 2 = 45°$ (obije polovine pravog ugla podjelili smo na pola, te je time i sam polazni ugao podjeljen na pola). Dakle, traženi ugao je
$\frac{1}{2} \cdot (360° - 90° - 45°) = \frac{1}{2} \cdot 225° = 112°30'$.

Tinker

Irena je napravila maketu grada koristeći identične drvene kockice. Slika 1 desno prikazuje pogled na maketu odozgo, a slika 2 pogled na maketu sa jedne od strana. Medjutim nije poznato sa koje strane je pogled predstavljen. Koliko najviše kockica je Irena mogla da upotrebi?



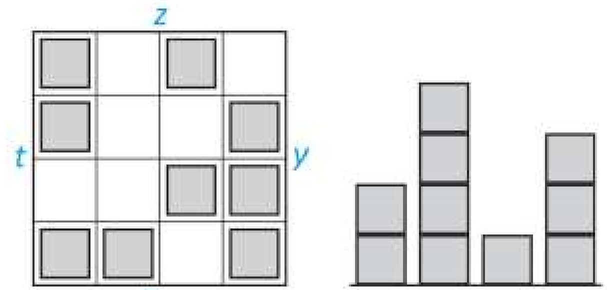
Slika 1



Slika 2

A) 25 **B)** 24 **V)** 23 **G)** 22 **D)** 21

Rješenje: B) 24



Slika 1 Slika 2

Za opisanu situaciju potražimo stranu sa koje broj kockica može imati najveću vrijednost. Na Slici 1 su različite strane sa kojih možemo posmatrati maketu označene sa x, y, z i t. Sa bilo koje strane da gledamo, najveći mogući broj upotrebljenih kockica možemo izračunati koristeći sledeću formulu:

$2 \cdot R1 + 4 \cdot R2 + 1 \cdot R3 + 3 \cdot R4$, gdje je
$R1$ broj kvadrata u 1. redu
$R2$ broj kvadrata u 2. redu
$R3$ broj kvadrata u 3. redu
$R4$ broj kvadrata u 4. redu.

Koristeći formulu, računamo maksimalan broj kockica, gledano sa različitih strana:

x: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 21$,
y: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 2 = 22$,
z: $2 \cdot 3 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 = 24$ i
t: $2 \cdot 2 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 = 23$.

Odatle sledi da je maksimalan broj kockica 24 (pogled z).

Alisa ima papirnu traku sa brojevima 1, 2, 3, 4 i 5 napisanim u ćelijama kao što je prikazano na slici desno. Presavijajući traku ćelije se preklapaju tako da svih pet ćelija budu jedna preko druge u pet slojeva. Koji od sledećih nizova brojeva nije moguće dobiti čitajući brojeve od gornjeg do donjeg sloja presavijene trake?

1	2	3	4	5

A) 3; 5; 4; 2; 1 **B)** 3; 4; 5; 1; 2 **V)** 3; 2; 1; 4; 5
G) 3; 1; 2; 4; 5 **D)** 3; 4; 2; 1; 5

!

Rješenje: D) 3;4;2;1;5

U nizu se nalazi 12 kockica od kojih su 3 plave, 2 žute, 3 crvene i 4 zelene, ali ne tim redom. Na jednom kraju je žuta, a na drugom crvena kockica. Sve crvene kockice se medjusobno dodiruju, kao i sve zelene. Deseta kockica gledajući sa lijeva na desno je plava. Koje je boje šesta kockica gledajući taj niz sa lijeva na desno?

A) zelena **B)** žuta **V)** plava **G)** crvena **D)** crvena ili plava

!

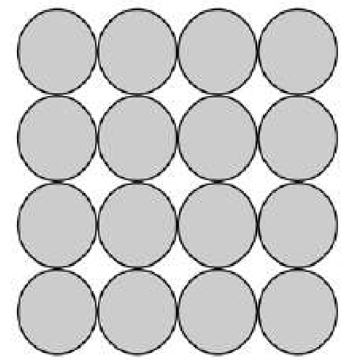
Rješenje: A) zelena

Soja ima 52 podudarna jednakokraka pravougla trougla. Ona želi da napravi jedan kvadrat koristeći neke od trouglova. Koliko različitih veličina kvadrata ona može da napravi?

A) 6 **B)** 7 **V)** 8 **G)** 9 **D)** 10

Rješenje: V) 8 Najmanji kvadrat može dobiti spajanjem 2 trougla po hipotenuzi. Sljedeći po večiličini može dobiti spajanjem 4 trougla spajajući ih po katetama. Nadogradnjom obih kvadrata, može se dobiti 8 kvadrata. Nadogradjom kvadrata dobijenog od dva trougla mogu se dobiti kvadrati od $8, 18, 32i50$ djelova. Nadogradnjom kvadrata dobijenog od 4 trougla, mogu se dobiti kvadrati od 16 i 48 djelova.

Lazar želi da napravi piramidu koristeći identične loptice. Osnova piramide je kvadratnog oblika nastala lijepljenjem 16 loptica u obliku kvadrata dimenzija 4×4 loptice, kao na slici desno. Sledeći nivo piramide od baze ka vrhu čini 9 loptica sastavljenih u obliku kvadrata dimenzija 3×3 loptice. Zatim, sledeći nivo je dimenzija 2×2 loptice, a na vrhu se nalazi jedna loptica. Svaka tačka dodira dvije loptice u sastavu piramide zaljepljena je lijepkom. Koliko tačaka lijepljenja postoji na cijeloj Lazarevoj piramidi?

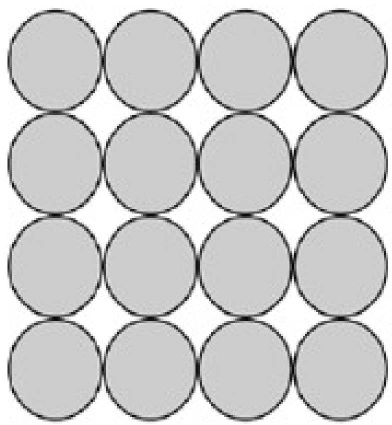


A) 72 **B)** 85 **V)** 88 **G)** 92 **D)** 96

! **Rješenje: D) 96**

Ukoliko prvo izbrojimo potrebna lijepljenja na nivou slojeva, u prvom sloju postoji 24 dodira, odnosno lijepljenja, u drugom 12 a u trećem 4. Ukupno je to 24+12+4=40 dodira ukupno na nivou slojeva.

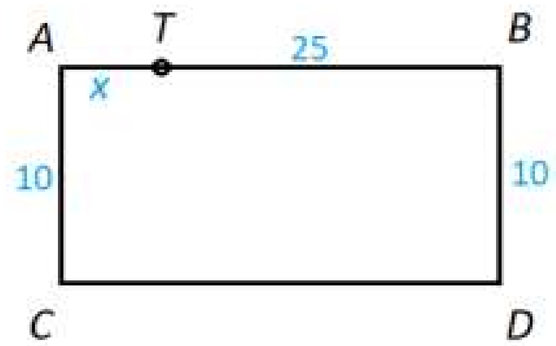
Kada postavimo drugi sloj loptica na prvi sloj, svaku loptu drugog sloja treba zalijepiti sa tačno 4 loptice iz prvog sloja. To je još $9 \cdot 4 = 36$ lijepljenja. Kada treći sloj smjestimo na drugi, imaćemo još dodatnih $4 \cdot 4 = 16$ lijepljenja. Na kraju treba zalijepiti i poslednju lopticu na vrhu, tj. imaćemo još 4 tačaka dodira, odnosno 4 lijepljenja. Dakle, ukupan broj lijepljenja je 40+36+16+4=96.



Četvoro djece nalazi se u četiri ugla pravougaonog bazena dimenzija $10m \times 25m$. Njihov trener stoji negdje na nekoj ivici bazena. Kada ih pozove, troje od četvoro djece izlazi i kreće se najkraćim putem oko bazena i dolaze do njega. Oni ukupno hodaju $50m$. Koja je najkraća udaljenost oko bazena koju trener treba da predje da bi stigao do četvrtog djeteta?

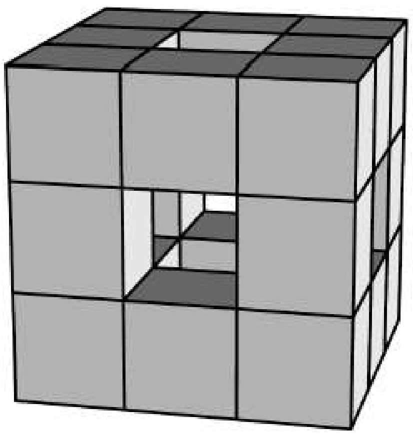
A) $10m$ **B)** $12m$ **V)** $15m$ **G)** $20m$ **D)** $25m$

! **Rješenje: G)** $20m$



Da bi djeca iz pozicije B, C i D došla do pozicije trenera T, potrebno je $25-x$ za dijete na poziciji B, $10+x$ za dijete na poziciji C i $10+25-x$, za dijete na poziciji D. To je ukupno $(25-x)+(10+x)+(10+25-x) = 70-x$. Kako je u zadatku navedeno da oni ukupno hodaju $50m$, sledi da je $70-x = 50$, odnosno $x = 20$ te je četvrtom djetetu (pozicija A) potrebno 20m da dodje do trenera (pozicija T).

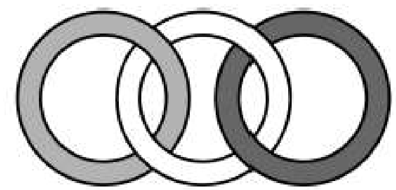
Kocka dimenzije $3 \times 3 \times 3$ je izgradjena od kocki dimenzija $1 \times 1 \times 1$. Iz kocke dimenzije $3 \times 3 \times 3$ je izvadjeno nekoliko kocki kao što je prikazano na slici desno. Koliko kocki dimenzija $1 \times 1 \times 1$ je ostalo nakon vadjenja?

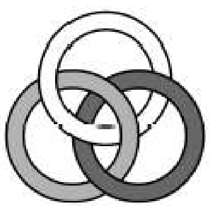
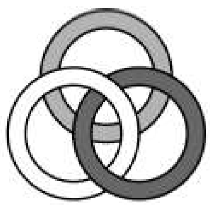
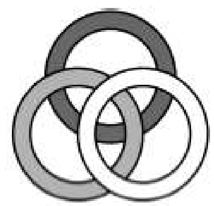
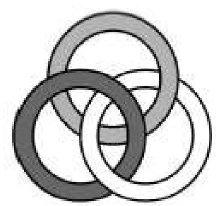
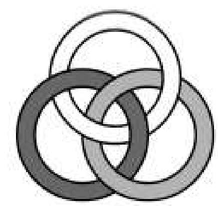


A) 15 **B)** 18 **V)** 20 **G)** 21 **D)** 22

! Rješenje: V)

Tri prstena su povezana kao što je prikazano na slici desno. Koja od sledećih slika takodje pokazuje tri prstena povezana na isti način?



A)  B)  V)  G)  D) 

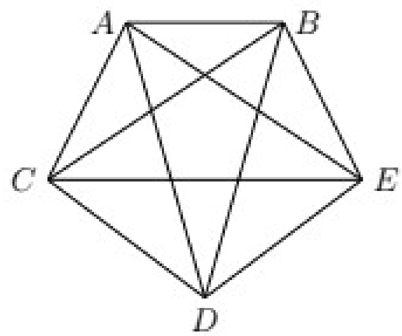
!

Rješenje: G)

Pet prijatelja su dijelili kolače tako što je svako od njih poklonio po kolač svakom od preostalih pijatelja. Zatim su pojeli sve kolače koji su bili poklonjeni. Kao rezultat razmjene poklona ukupan broj kolača se smanjio za pola. Koliko kolača je pet prijatelja ukupno imalo na početku?

A) 20 **B)** 24 **V)** 30 **G)** 40 **D)** 60

Rješenje: G)



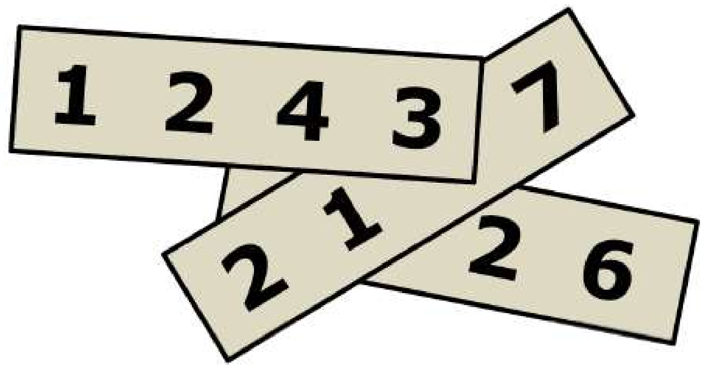
Označimo sa A, B, C, D i E pet prijatelja. Ukupan broj linija koje ih povezuju je $4 + 3 + 2 + 1 = 10$. Kako su kolače davali jedno drugom broj kolača koje su podijelili je $2 \cdot 10 = 20$.

Drugi način da dodjemo do ukupnog broja podijeljenih kolača je sledeći: Svaki od 5 prijatelja je dao po jedan kolač svakom od preostala 4 prijatelja. To znači da je ukupno podijeljeno $5 \cdot 4 = 20$ kolača.

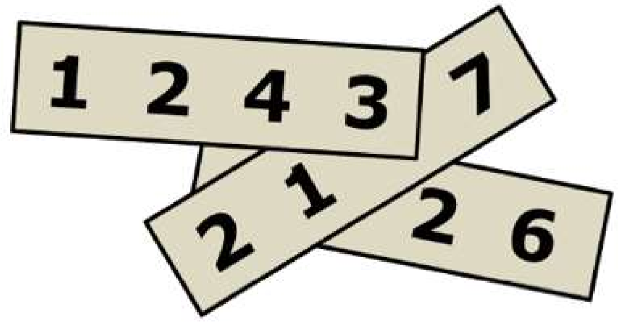
Dalje je rečeno da su prijatelji pojeli sve podijeljene kolače, pa je otuda pojedeno ukupno 20 kolača.

Kako se ukupan broj kolača (po uslovu zadatka) smanjio za pola nakon što su podijeljeni kolači pojedeni, dobijamo da je broj kolača koje su prijatelji imali na početku bio $2 \cdot 20 = 40$.

Na svakom od tri lista papira napisani su četvorocifreni brojevi. Tri cifre su prekrivene kao što je prikazano na slici desno. Ako je zbir sva tri četvorocifrena broja napisana na papirima jednaka 10126, koje su cifre prekrivene?



A) 5, 6 i 7 **B)** 4, 5 i 7
V) 4, 6 i 7 **G)** 4, 5 i 6 **D)** 3, 5 i 6



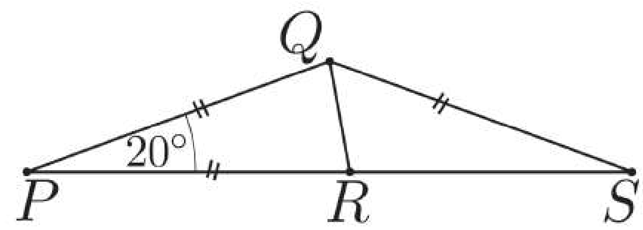
! **Rješenje: A)**

$$
\begin{array}{ccccc}
 & 1 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 2 & 4 & 3 \\
 & 2 & 1 & * & 7 \\
 & * & * & 2 & 6 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 2 & 6
\end{array}
$$

$$1 + 4 + * + 2 = 12$$

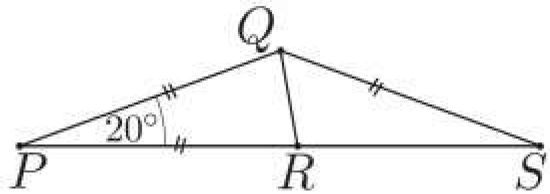
Dakle * u drugom broju mora biti 5. Slično $1 + 2 + 1 + * = 11$ cifra stotina trećeg broja je 7. Najzad $1 + 1 + 2 + * = 10$ i cifra hiljada trećeg broja je 6. Dakle to su cifre 5, 6, 7.

Ako u trouglu PSQ važi da je $PQ = PR = QS$ i $\measuredangle QPR = 20$ (slika desno), kolika je mjera ugla RQS?



A) 50 **B)** 60 **V)** 65 **G)** 70 **D)** 75

Rješenje: B)



$$\measuredangle RQS = ?$$

Kako je $\triangle PQS$ jednakokraki dobijamo da je $\measuredangle S = 20^\circ$ i $\measuredangle PQS = 180^\circ - (20^\circ + 20^\circ) = 140^\circ$. Kako je $\triangle PRQ$ jednakokraki i $\measuredangle PQR = \measuredangle PRQ = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$. Odavde $\measuredangle RQS = \measuredangle PQS - \measuredangle PQR = 140^\circ - 80^\circ = 60^\circ$.

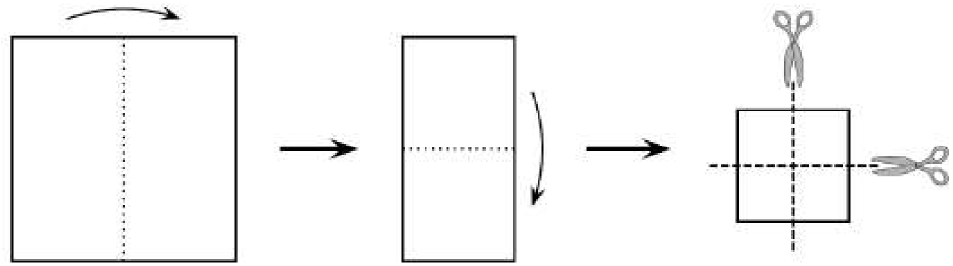
Ana, Bojana, Veljko, Gordan i Dora su se sreli na zabavi i svako od njih se rukovao jednom sa svakom osobom koju je već poznavao. Ana se rukovala jednom, Bojana dva puta, Veljko se rukovao tri puta, a Gordan četiri puta, Koliko puta se Dora rukovala?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** 4

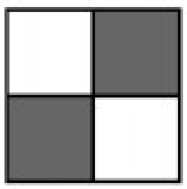
!

Rješenje: V) 2

Milena je dva puta presavila kvadratni list papira, a zatim ga dva puta presekla, kao što je prikazano na slici desno. Koliko parčića papira koje je Milena dobila je kvadratnog oblika?



Rješenje: V)



Presavijanjem papira na dati način dobijamo 4 manja kvadrata (označeno bijelim kvadratom dolje desno) i jedan veći (označeno bijelim kvadratom gore lijevo).

Nikola ima za ljubimce pse, mačke, krave i kengure. On je izjavio da ima ukupno 24 ljubimca, da su psi $\frac{1}{8}$ svih ljubimaca, da $\frac{3}{4}$ nisu krave i da $\frac{2}{3}$ nisu mačke. Koliko kengura ima Nikola za ljubimce?

A) 4 **B)** 5 **V)** 6 **G)** 7 **D)** 8

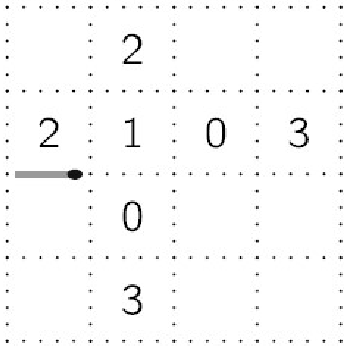
! **Rješenje: G)**

Pasa ima $\frac{1}{8} \cdot 24 = 3$. $\frac{3}{4} \cdot 24 = 18$ nisu krave i $\frac{2}{3} \cdot 24 = 16$ nisu mačke. Dobijamo da su 21 životinja mačke, krave ili kenguri, pri čemu 15 nisu krave i 13 nisu mačke, tj. 15 su mačke ili kenguri a 13 krave ili kenguri. Ako označimo broj mačaka sa m, broj krava sa k i broj kengura sa x dobijamo.

$$m + k + x = 21$$
$$m + x = 15$$
$$k + x = 13$$

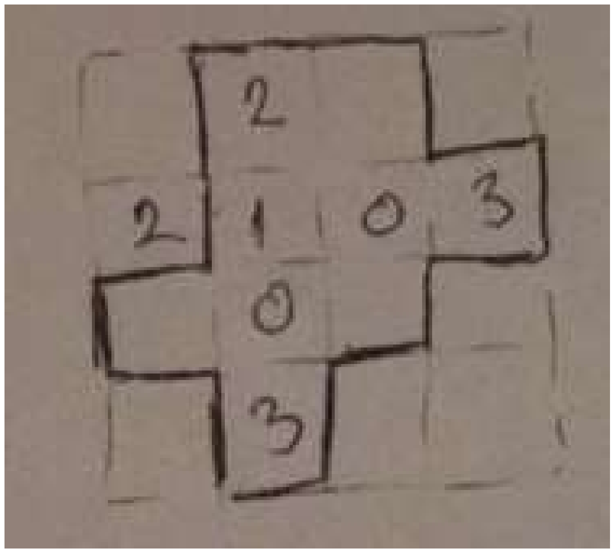
Oduzimanjem prve dvije jednačine dobijamo da je $k = 6$ i iz poslednje $6 + x = 13$, $x = 7$ tj. broj kengura je 7.

Aylin wants to create a path of matches using as few matches as possible. She places each match on the piece of paper like the one shown, along some of the dotted lines. Her path returns to the left-hand end of her original match. The numbers shown in some of the cells are equal to the number of matches around that cell. How many matches are in this path?



(**A**) 12 (**B**) 14 (**C**) 16 (**D**) 18 (**E**) 20

Rješenje: C) 16



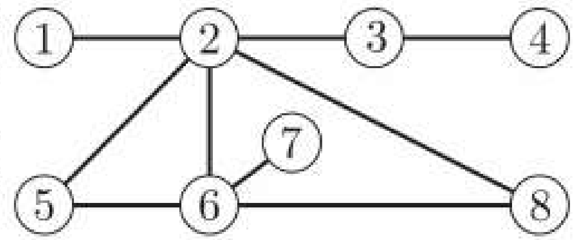
Lazar je sav svoj novac potrošio na kupovinu 50 boca soka koje je plaćao jedan euro po boci. On je svaku bocu prodavao po jednakoj, višoj cijeni. Nakon prodaje 40 boca on je imao 10 eura više nego kada je počeo sa ulaganjem. Zatim je prodao sve ostale boce. Koliko sada Lazar ima novca?

A) 70 eura **B)** 75 eura **V)** 80 eura **G)** 90 eura **D)** 100 eura

Rješenje: B)

Lazar je 50 boca platio 50 eura, tj. imao je 50 eura na početku. Nakon što je prodao 40 boca imao je 60 eura, dakle svaku nocu je prodao za $60 : 40 = 1,5$. Preostalih 10 boca prodao je za 15 eura, tako da Lazar sada ima 75 eura.

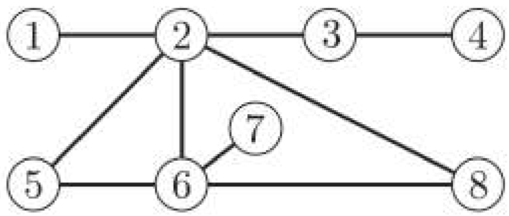
Dejan je obojio svaki od osam krugova na slici desno i to crvenom, žutom ili plavom bojom, tako da ne postoje dva kruga koja su direktno povezana i obojena istom bojom. Koja dva kruga moraju biti obojena istom bojom?



A) 5 i 8 **B)** 1 i 6 **V)** 2 i 7 **G)** 4 i 5 **D)** 3 i 6

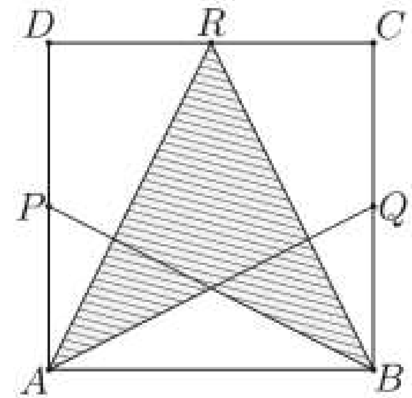
Rješenje: A)

Posmatrajmo krugove 2, 5, 6 i 8.



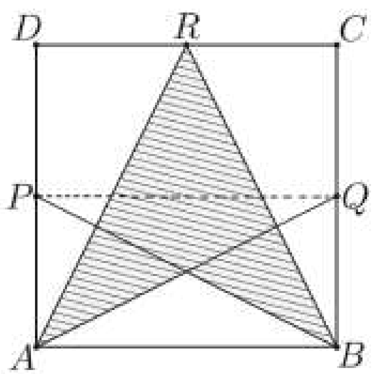
Ne gubeći na opštosti neka je na primjer krug označen brojem 7 obojen u žuto. Tada krugovi 5 i 8 moraju biti crveni ili plavi. Ako je jedan crven a drugi plav tada je krug 2 povezan sa žutim, crvenim i plavim krugom, pa kako god da ga obojimo dobijamo slučaj da su dva povezana kruga obojena istom bojom. Dakle krugovi 5 i 8 moraju biti ili oba plava ili oba crvena.

Na slici desno dat je kvadrat $ABCD$ gde su tačke P, Q i R redom središta stranica DA, BC i CD. Koji deo površine kvadrata $ABCD$ je osjenčen?



A) $\frac{3}{8}$ **B)** $\frac{7}{16}$ **V)** $\frac{1}{2}$ **G)** $\frac{5}{8}$ **D)** $\frac{3}{4}$

! **Rješenje: A)**



Označimo sa a dužinu stranice kvadrata. Tada je

$$P_{\triangle ABR} = \frac{a \cdot a}{2} = \frac{a^2}{2}$$

.

Označimo sa S presjek dijagonala AQ i PB pravougaonika $ABQP$. Tada je

$$P_{\triangle ABS} = \frac{a \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2}{8}$$

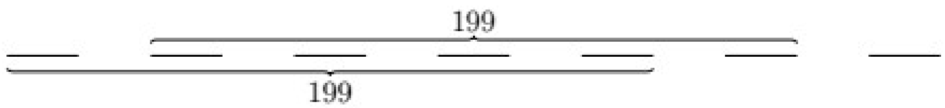
Dakle površina osijenčene figure je:

$$P_{\triangle ABR} - P_{\triangle ABS} = \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{8} = \frac{4a^2 - a^2}{8} = \frac{3a^2}{8} = \frac{3}{8} P_{kvadrata}$$

Kompozicija voza se sastoji od 18 vagona. Tim vozom putuje 700 putnika, a u svakom nizu od pet susjednih vagona ukupno je 199 putnika. Koliko putnika ima u dva susjedna vagona koja se nalaze u sredini kompozicije voza?

A) 70 **B)** 77 **V)** 78 **G)** 96 **D)** 103

! **Rješenje: G)**



Dobijamo:

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 199$$

$$a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 = 199$$

Ako oduzmemo ove dvije jednačine dobijamo da je:

$$a_1 - a_6 = 0 \implies a_1 = a_6$$

Slično:

$$a_2 = a_7 = a_{12} = a_{17} = a$$

$$a_3 = a_8 = a_{13} = a_{18} = b$$

$$a_4 = a_9 = a_{14} = c$$

$$a_5 = a_{10} = a_{15} = d$$

$$a_1 = a_6 = a_{11} = a_{16} = e$$

Dobijamo:

$$4a + 4b + 3c + 3d + 4e = 700$$

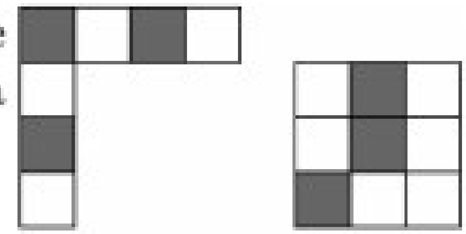
$$4(a + b + e) + 3(d + c) = 700$$

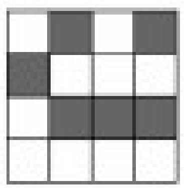
$$3(d + c) = 700 - 4(a + b + e)$$

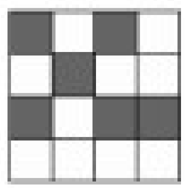
$$3(d + c) = 4(175 - (a + b + e))$$

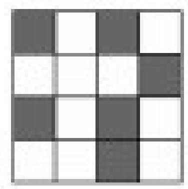
dobijamo da $4|(d+c)$ i $3|(175-(a+b+e))$, pa $a+b+e$ pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1. Direktnom provjerom dobijamo da je $d+c = 96$ tj. $a_9 + a_{10} = 96$

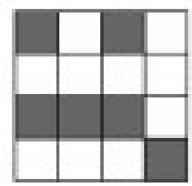
Koju od sledećih pločica dimenzije 4×4 ne možes dobiti povezivanjem dva dijela prikazana na slici desno?

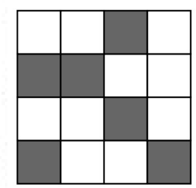


A) 

B) 

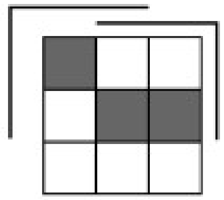
V) 

G) 

D) 

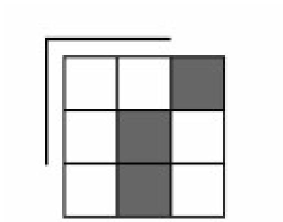
! Rješenje: D)

Postavimo drugu pločicu na sledeći način.



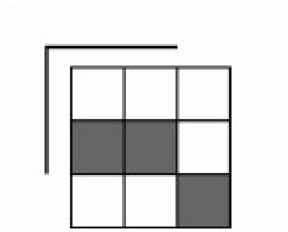
A) i B) dobijamo postavljajući drugi dio sa desna i sa lijeva (kao na slici)

Pod V) dobijamo na sledeći način.



I sa lijeva se dodaje prvi dio pločice

Pod G) dobijamo na sledeći način.



Dakle, nemoguće je dobiti ploču pod D).

Marko je igrajući košarku nakon niza od 20 šuteva imao uspješnost ubačaja 55%. Nakon još pet šuteva procenat uspješnosti ubačaja se povećao na 56%. Koliko ubačaja u koš je Mirko ostvario u poslednjih 5 šuteva?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

Rješenje: V)

$$55\% \cdot 20 = \frac{55}{100} \cdot 20 = \frac{55}{5} = 11$$

U prvih 20 pokušaja imala je 11 uspješnih bacanja.

$$56\% \cdot 25 = \frac{56}{100} \cdot 25 = \frac{56}{4} = 14$$

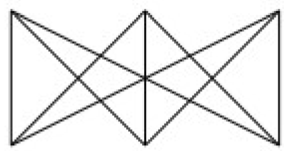
Nakon 25 pokušaja imala je 14 pogodaka. Dakle u poslednjih pet pokušaja tri puja je pogodila koš.

Tročlane šahovske ekipe se prijavljuju za turnir. Pravilo turnira je da svaki igrač jedne ekipe igra po jednu partiju šaha sa svakim igračem svih drugih ekipa. Iz organizacionih razloga ne može se igrati više od 250 partija. Koliko najviše ekipa može učestvovati?

A) 11 **B)** 10 **V)** 9 **G)** 8 **D)** 7

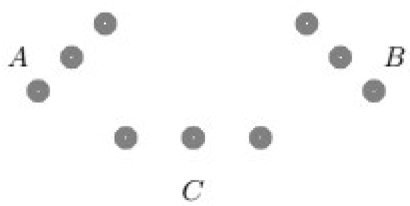
Rješenje: D)

Ako imamo dva tima broj partija šaha po uslovu zadatka bi bio:



$$3 \cdot 3 = 9$$

Ako imamo tri tima tada dobijamo:



9 partija izmedju A i B
9 partija izmedju B i C
9 partija izmedju A i C
Dobijamo formulu:

$$C_2^3 = \frac{3!}{2! \cdot 1!} = 3$$

$$C_2^3 \cdot 9 = 3 \cdot 9 = 27$$

(jer C_2^3 predstavlja broj podskupova sa dva elementa skupa sa 3 elementa)
Slično:

$$C_2^4 \cdot 9 = \frac{4!}{2! \cdot 2!} \cdot 9 = 54$$

$$C_2^5 \cdot 9 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} \cdot 9 = 90$$

$$C_2^6 \cdot 9 = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 9 = 135$$

$$C_2^7 \cdot 9 = \frac{7!}{2! \cdot 5!} \cdot 9 = 189$$

$$C_2^8 \cdot 9 = \frac{8!}{2! \cdot 6!} \cdot 9 = 252$$

Dobili smo da je 7 najveći mogući broj timova koje će odigrati manje od 250 partija.

• • • • • n ekipa

Tražimo broj dvočlanih podskupova

Prva ekipa sa preostalih $n-1$

Druga sa preostalih $n-2$

⋮

Predzadnja sa poslednjom. Dobijamo

$$n-1+n-2+n-3+\dots+1=$$

$$=\underline{n}-1+\underline{n}-2+\underline{n}-3+\dots+\underline{n}-(n-1)=$$

ukupno ih je $n-1$

$$=n(n-1)-(1+2+\dots+n-1)=$$

Formula za zbir prvih n prirodnih brojeva je

$$1+2+3+\dots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

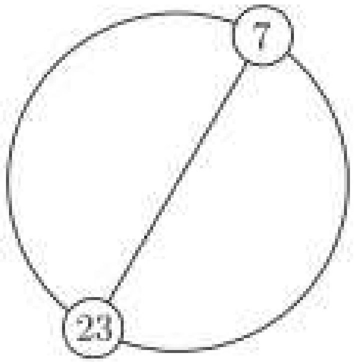
$$= n(n-1)-\frac{(n-1)n}{2}=\frac{2n(n-1)-(n-1)n}{2}=$$

$$=\frac{n(n-1)}{2}$$

Na primjer za 3 ekipe broj podskupova je

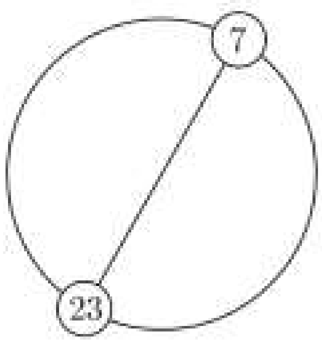
$\frac{3\cdot 2}{2}=3$, za četiri $\frac{4\cdot 3}{2}=6$

Prirodni brojevi od 1 do n (uključujući i 1 i n) rasporedjeni su redom na kružnici tako da je rastojanje svaka dva susjedna jednako. Prečnik koji povezuje poziciju broja 7 proalazi i kroz poziciju broja 23, kao što je prikazano na slici desno. Koja je vrijednost prirodnog broja n?



A) 30 **B)** 32 **V)** 34 **G)** 36 **D)** 38

! **Rješenje: B)**



Brojeva izmedju data dva imamo $22 - 7 = 15$. Analogan broj imamo i sa druge strane. Dakle ukupno je $15 + 15 + 2 = 32$

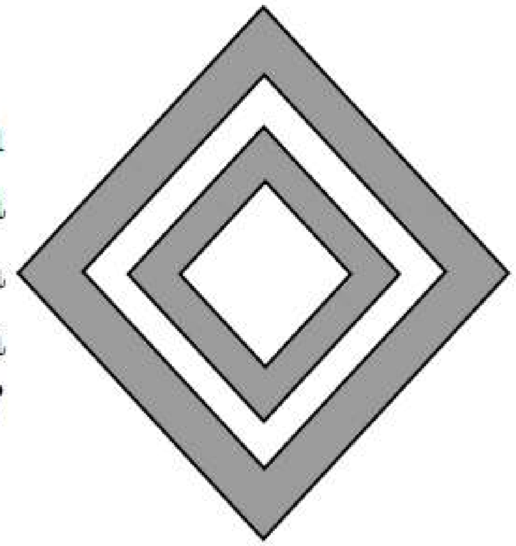
Emilija je u torbi imala 60 čokoladica. U ponedeljak je počela da jede čokoladice i tog dana je pojela svaku desetu iz torbe, zatim je u utorak pojela svaku devetu od ostatka, zatim u srijednu svaku osmu od ostatka, pa u četvrtak svaku sedmu od ostatka i tako dalje, sve dok jednog dana nije pojela polovinu čokoladica preostalih od prethodnog dana. Koliko je čokolada ostalo?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 6

Rješenje: D)

U ponedeljak je pojela $\frac{1}{10} \cdot 60 = 6$ čokolada, u utorak $\frac{1}{9} \cdot 54 = 6$, zatim u srijedu $\frac{1}{8} \cdot 48 = 6$, u četvrtak $\frac{1}{7} \cdot 42 = 6$, petak $\frac{1}{6} \cdot 36 = 6$ itd. Dakle svakog dana je jela po 6 čokoladica. Kad bude imala 12 čokolada sledećeg dana će pojesti polovinu od njih tj. 6 i ostace joj još šest.

Andjela je napravila ukrase različitih dimenzija u obliku bijelih i sivih zvjezdica (vidjeti sliku desno). Površine zvjezdica su 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 i 16 cm^2. Kolika je površina vidljivog dijela sivih zvezdica?



A) $\mathbf{9}cm^2$ **B)** $\mathbf{10}cm^2$ **V)** $\mathbf{11}cm^2$ **G)** $\mathbf{12}cm^2$ **D)** $\mathbf{13}cm^2$

!

Rješenje: B) $\mathbf{10}cm^2$

$$16cm^2 - 9cm^2 + 4cm^2 - 1cm^2 = 10cm^2$$

Nekoliko djevojčica je igralo u zatvorenom kružnom kolu. Antonija je bila peta lijevo od Branke, a osma desno od Branke. Koliko djevojčica je bilo u kolu?

A) 11 **B) 12** **V) 13** **G) 14** **D) 15**

Rješenje: V) 13 Izmedju Antonije i Branke je sa jedne strane 4 djevojčice a sa druge 7.

$$\text{Dakle } 4 + 7 + 2 = 13.$$

Na jednoj proslavi, jedna osmina gostiju bila su djeca, a tri sedmine odraslih gostiju bili su muškarci. Koji dio broja gostiju su bile žene?

A) $\frac{1}{2}$ **B)** $\frac{1}{3}$ **V)** $\frac{1}{5}$ **G)** $\frac{1}{7}$ **D)** $\frac{3}{7}$

! **Rješenje: A)** $\frac{1}{2}$

$$x \text{ - broj gostiju}$$

$$\frac{1}{8}x \text{ - broj djece}$$

$$x - \frac{1}{8}x = \frac{7}{8}x \text{ - broj odraslih}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8}x = \frac{3}{8}x \text{ - broj muškaraca}$$

$$\text{Broj žena je: } x - (\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}x) = x - \frac{4}{8}x = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

Od prvih 15 partija šaha Martin je pobijedio u devet. Kolika će biti njegova uspješnost ove sezone ako u preostalih 5 partija ostvari 5 pobjeda?

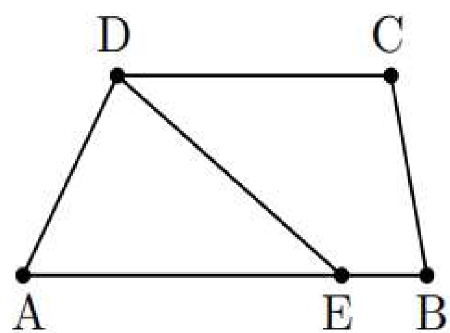
A) 60% **B) 65%** **V) 70%** **G) 75%** **D) 80%**

Rješenje: V) 70% Ukupan broj partija je 20. Pobijedio je u 9 i ako pobedi u još 5, biće to 14 pobjeda.

$$14 = \frac{P}{100} \cdot 20 = \frac{P}{5}$$

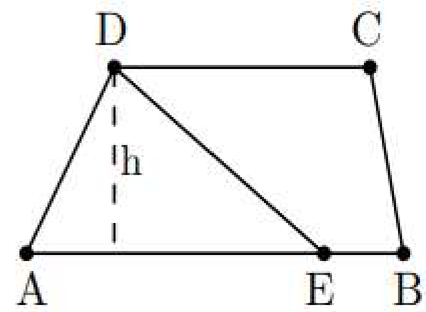
$$P = 5 \cdot 14 = 70 \text{ Dakle } 70\%$$

Dužine osnovica trapeza ABCD su $|AB| = 50$ i $|CD| = 20$. Tačka E je na stranici AB sa osobinom da duž DE dijeli trapez na dva dijela jednakih površina (vidjeti sliku ispod). Kolika je dužina duži AE?



A) 25 **B) 30** **V) 35** **G) 40** **D) 45**

! **Rješenje: V) 35**



$$P_T = \frac{a+b}{2}h = \frac{50+20}{2}h = 35h$$

$$P_{AE} = \frac{|AE|h}{2} = \frac{1}{2}P_T$$

$$\frac{|AE|h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 35h$$

$$|AE| = 35$$

Zbir kvadrata tri uzastopna prirodna broja je 770. Koji od njih je najveći?

A) 15 **B) 16** **V) 17** **G) 18** **D) 19**

Tinker

! **Rješenje: V) 17**

$$(n-1)^2 + n + (n+1)^2 =$$

$$(n-1)(n-1) + n^2 + (n+1)(n+1) =$$

$$n^2 - n - n + 1 + n^2 + n^2 + n + n + 1 = 3n^2 + 2$$

$$3n^2 + 2 = 770$$

$$3n^2 = 768$$

$$n^2 = 256$$

$$n = 16$$

$$n + 1 = 17$$

U prezentaciji su korišćeni zadaci sa takmičenja „Kengur bez granica“, AKSF (www.aksf.org).

Hvala!

Do narednog druženja, veliki pozdrav!
Tinker tim