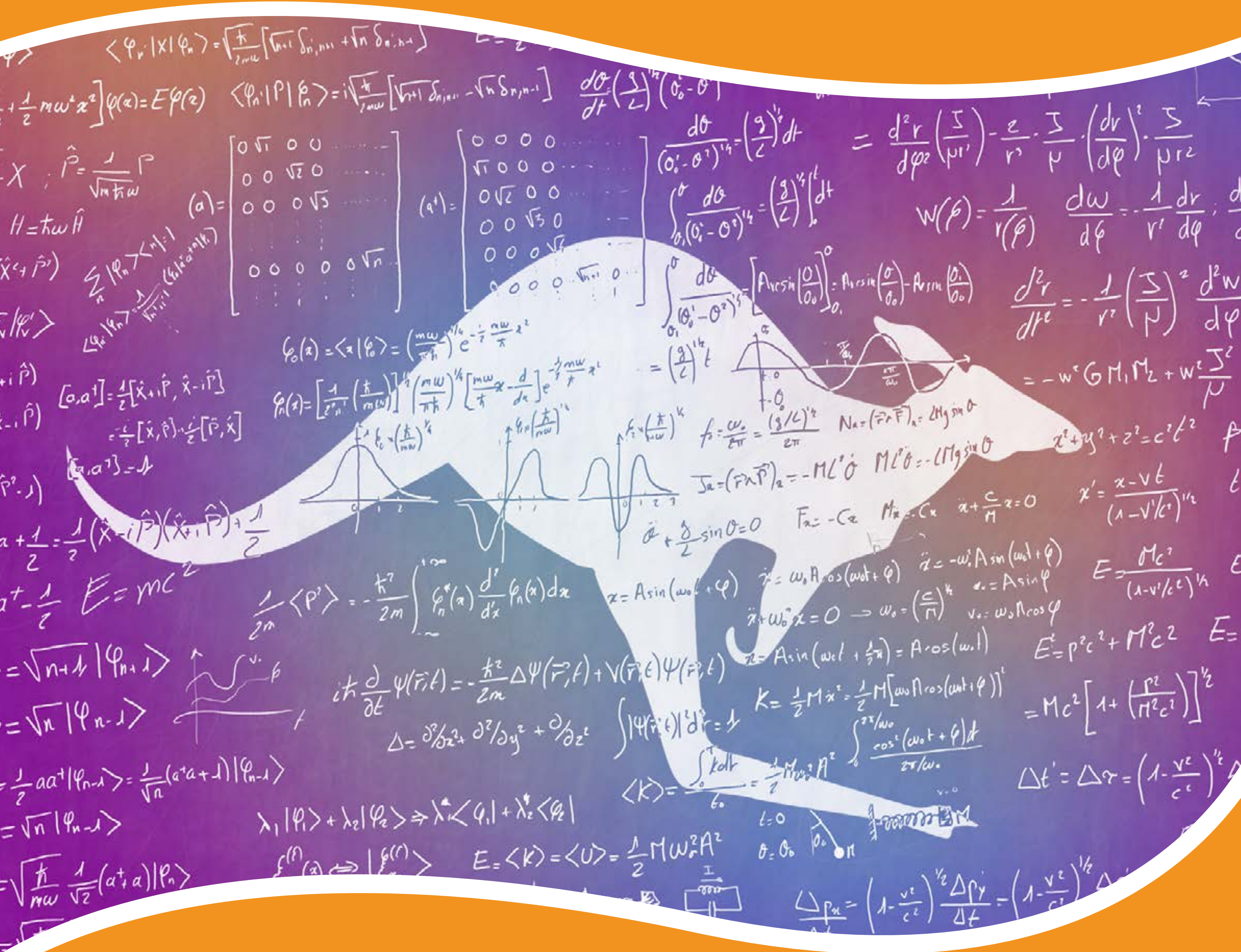
Zbirka riješenih zadataka sa međunarodnog matematičkog takmičenja



KENGUR BEZ GRANICA

KATEGORIJA: Junior (II i III razred srednje škole)

Zbirka riješenih zadataka sa međunarodnog matematičkog takmičenja

KENGUR BEZ GRANICA

KATEGORIJA: Junior (II i III razred srednje škole)

Crna Gora, 2021.

Zbirka riješenih zadataka sa međunarodnog matematičkog takmičenja

KENGUR BEZ GRANICA

Kategorija:
Junior (II i III razred srednje škole)

Izvor:
KSF Kangourou Sans Frontèires

Izdavač:
NVO Tinker
Vasa Raičkovića 48, Podgorica

Urednici i autori prijedloga rješenja:
Dr Vanja Vukoslavčević
Jelena Milojković
Boris Milojković

Saradnice:
Dr Nela Milošević
Dejana Ponoš

Generalni sponzor:

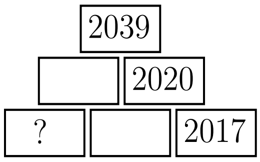
Partneri:

SADRŽAJ

Matematičko takmičenje ,,Kengur bez granica”, 2017. godina, kategorija: Junior

Zadaci koji vrijede 3 poena

1. U piramidi na slici desno svako polje sadrži broj koji predstavlja zbir brojeva koji su u dva polja neposredno ispod. Koji broj mora biti u polju koje je označeno znakom pitanja?



A) 15 **B) 16** **V) 17** **G) 18** **D) 19**

2.Petar je napisao riječ KANGAROO na komadu providnog stakla (vidjeti sliku desno). Šta će Petar vidjeti ako komad stakla prevrne sa lijeva na desno, a zatim polukružno rotira (okrene) ne podižući staklo sa podloge?

A) 

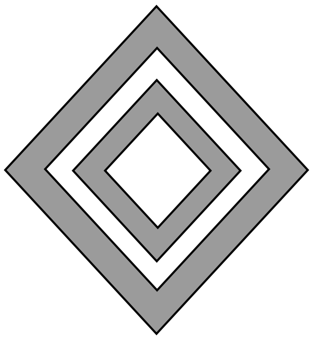
B) 

V) 

G) 

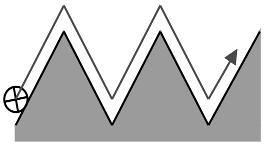
D) 

3. Andjela je napravila ukrase različitih dimenzija u obliku bijelih i sivih zvjezdica (vidjeti sliku desno). Površine zvjezdica su 1 cm^2, 4 cm^2, 9 cm^2 i 16 cm^2. Kolika je površina vidljivog dijela sivih zvezdica?



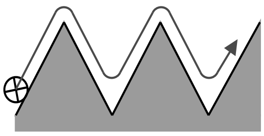
A) $\mathbf{9}cm^2$ **B)** $\mathbf{10}cm^2$ **V)** $\mathbf{11}cm^2$ **G)** $\mathbf{12}cm^2$ **D)** $\mathbf{13}cm^2$

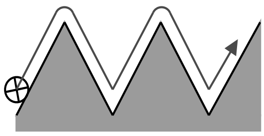
4. Koja od sledećih slika prikazuje krivu kretanja centralne tačke točka kada se točak kreće po cik–cak liniji kao što je prikazano?

A) 

B) 

V) 

G) 

D) 

5. Marija ima 24 eura, a troje njenih rodjaka ima po 12 eura. Koliko eura treba da Marija da svakom od rodjaka tako da njih četvoro imaju isti iznos novca?

A) 1 **B) 2** **V) 3** **G) 4** **D) 6**

6. Krug poluprečnika 1 se kreće po pravoj liniji od tačke K do tačke L(vidjeti sliku ispod), gdje je $|KL| = 11\pi$. Kako izgleda krug na kraju svog kretanja, tj. u tački L?

A) 

B) 

V) 

G) 

D) 

7. Nekoliko djevojčica je igralo u zatvorenom kružnom kolu. Antonija je bila peta lijevo od Branke, a osma desno od Branke. Koliko djevojčica je bilo u kolu?

A) 11 B) 12 V) 13 G) 14 D) 15

8. Na jednoj proslavi, jedna osmina gostiju bila su djeca, a tri sedmine odraslih gostiju bili su muškarci. Koji dio broja gostiju su bile žene?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{1}{3}$ V) $\frac{1}{5}$ G) $\frac{1}{7}$ D) $\frac{3}{7}$

9. Od prvih 15 partija šaha Martin je pobijedio u devet. Kolika će biti njegova uspješnost ove sezone ako u preostalih 5 partija ostvari 5 pobjeda?

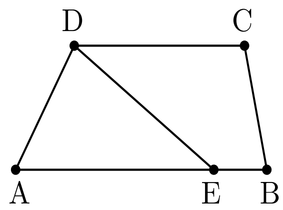
A) 60% B) 65% V) 70% G) 75% D) 80%

10. Na čas kreativne nastave, nastavnik je donio kutiju u kojij je bilo 203 crvenih klikera, 117 bijelih klikera i 28 plavih klikera. Nastavnik je zamolio učenike da bez gledanja, jedan po jedan učenik, izvlači po jedan kliker. Koliko učenika treba da izvlači kliker da bismo bili sigurni da su izvučena najmanje 3 klikera iste boje?

A) 3 B) 6 V) 7 G) 28 D) 203

Zadaci koji vrijede 4 poena

11. Dužine osnovica trapeza ABCD su $|AB| = 50$ i $|CD| = 20$. Tačka E je na stranici AB sa osobinom da duž DE dijeli trapez na dva dijela jednakih površina (vidjeti sliku ispod). Kolika je dužina duži AE?



A) 25 B) 30 V) 35 G) 40 D) 45

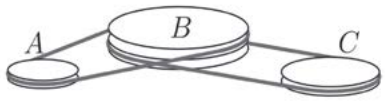
12. Koliko različitih brojeva n ima osobinu da je tačno jedan od brojeva n i $n + 20$ četvorocifren?

A) 19 B) 20 V) 38 G) 39 D) 40

13. Zbir kvadrata tri uzastopna prirodna broja je 770. Koji od njih je najveći?

A) 15 B) 16 V) 17 G) 18 D) 19

14. Jedan pogonski sistem se sastoji od tri točka A, B i C koje pokreću kaiševi bez proklizavanja, kao na slici desno. Točak B napravi 4 puna kruga dok točak A napravi 5 punih krugova. Točak B napravi 6 punih krugova dok točak C napravi 7 punih krugova. Odrediti dužinu poluprečnika točka A ako je dužina poluprečnika točka C 30cm.



A) 27 **B) 28** **V) 29** **G) 30** **D) 31**

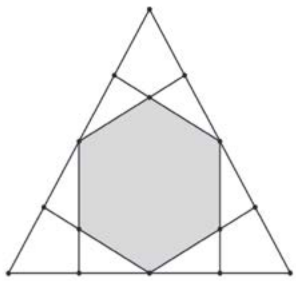
15. Marko želi da napravi plan rekreativnog trčanja za narednih nekoliko mjeseci. Svake nedjelje on želi da trči istim danima u nedelji, ali ne želi da trči dva uzastopna dana. On želi da trči tri puta sedmično. Koliko različitih rasporeda on može napraviti?

A) 6 **B) 7** **V) 9** **G) 10** **D) 35**

16. Četiri brata su različite visine. Mladen je niži od Viktora za istu dužinu za koju je viši od Petra. Lazar je niži od Petra za istu pomenutu dužinu. Mladen je visok 184 cm, a prosječna visina četvorice braće je 178 cm. Koliko je Lazar visok?

A) 160cm **B) 166cm** **V) 172cm** **G) 184cm** **D) 190cm**

17. Duži čija je jedna krajnja tačka središte stranice jednakostraničnog trougla i koje su normalne na druge dvije stranice trougla, obrazuju šestougao kao na slici desno. Koji dio površine trougla je površina dobijenog šestougla?



A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ V) $\frac{4}{9}$ G) $\frac{1}{2}$ D) $\frac{2}{3}$

18. Tokom Nemanjinog odmora tačno 7 puta je padala kiša. Ako je ujutro padala kiša, popodneje bilo sunčano. Ako je popodne bilo kiše, jutro je bilo sunčano. Poznato je da je bilo 5 sunčanih jutara i 6 sunčanih popodneva. Koliko je najmanje dana Nemanjin odmor mogao da traje?

A) 7 B) 8 V) 9 G) 10 D) 11

19. Jelena je odlučila da u kvadratnim poljima table 3×3 upiše brojeve, ali tako da zbirovi u sva četiri kvadrata dimenzije 2×2 budu isti. U tri ugaona polja već su upisani brojevi, kao što je prikazano na slici desno. Koji broj ona treba da upiše u četvrto ugaono polje označeno znakom pitanja?

3		1
2		?

A) 5 B) 4 V) 1 G) 0 D) nemoguće je odrediti

20. Sedam prirodnih brojeva a, b, c, d, e, f i g napisani su tim redom. Zbir svih je 2017, a svaka dva susedna broja razlikuju se ili za 1 ili za -1. Koji od brojeva može biti 286?

A) samo a ili g B) samo b ili f V) samo c ili e
G) samo d D) bilo koji od njih

Zadaci koji vrijede 5 poena

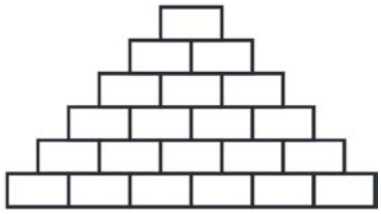
21. Četvoro djece mladjih od 18 godina imaju različit broj godina. Ako je proizvod njihovih godina 882, koliki je zbir njihovih godina?

A) 23 B) 25 V) 27 G) 31 D) 33

22. Broj $n(n+2)$ ima tačno četiri djelioca u skupu prirodnih brojeva. Koju od sledećih vrijednosti može imati broj n?

A) 53 B) 37 V) 89 G) 23 D) 41

23. Aleksa želi da napiše prirodne brojeve u svakom polju piramide na slici desno, ali tako da svako polje sadrži broj koji predstavlja zbir brojeva koji se nalaze u dva polja neposredno ispod njega. Koliko najviše neparnih brojeva Aleksa može upisati?



A) 13 B) 14 V) 15 G) 16 D) 17

24. Bojana ima zadatak da izračuna zbir uglova nekog konveksnog mnogougla. Prilikom izračunavanja Bojana je preskočila jedan ugao i dobila zbir $2017°$. Kolika je mjera ugla koji je Bojana preskočila?

A) 37° B) 53° V) 97° G) 127° D) 143°

25. Proizvoljni dvocifreni broj napisan je ciframa a i b. Ponavljajući ovaj par cifara tri puta, dobija se šestocifreni broj. Ovaj broj je uvijek djeljiv sa:

A) 2 B) 5 V) 7 G) 9 D) 11

26. Jedna strana kutije dimenzije $5 \times 6 \times 7$ je skinuta i kutija je napunjena sa 210 jediničnih kocki. Koji od sledećih brojeva ne može predstavljati broj jedničnih kocki koje dodiruju kutiju?

A) 130 B) 120 V) 135 G) 138 D) sva četiri broja su moguća

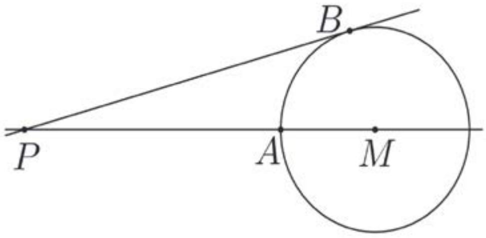
27. Mirko želi da sastavi sedmocifrenu šifru. Svaka cifra šifre se pojavljuje onoliko puta kolika je njena vrijednost, a iste cifre šifre se uvijek pišu uzastopno, kao na primjer 4444333 i 1666666. Koliko različitih šifara Mirko može da sastavi?

A) 6 B) 7 V) 10 G) 12 D) 13

28. U zatvorenom kolu od 30 igrača, svi su okrenuti licem ka centru kola. Na komandu "Lijevo!" nekoliko igrača se okrenulo na lijevo, a ostali na desno. Igrači koji su se našli okrenuti licem u lice sa drugim igračem uzviknuli su "Zdravo!". Ispostavilo se da je 10 igrača uzviknulo "Zdravo!".Na komandu "Okret!" igrači su se polukružno okrenuli, i opet, oni koji su se našli okrenuti licem u lice uzviknuli su "Zdravo!". Koliko je tada igrača uzviknulo "Zdravo!"?

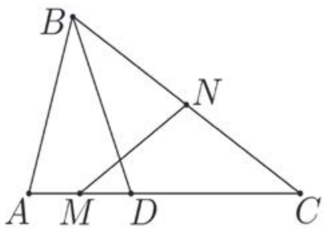
A) 10 B) 20 V) 8 G) 15 D) nemoguće je odrediti

29. Tačke A i B su na kružnici sa centrom M, kao što je prikazano na slici desno. Prava PB je tangenta kružnice, a dužine duži PA i MB su prirodni brojevi i važi da je $|PB| = |PA| + 6$. Koliko različitih vrijednosti može imati dužina duži MB?



A) 0 B) 2 V) 4 G) 6 D) 8

30. Na stranici AC trougla ABC data je tačka D takva da važi $|DC| = |AB|$. Kolika je mjera ugla $\sphericalangle BAC$, ako su M i N redom, središta duži AD i BC, i ako je $\sphericalangle NMC = \alpha$?



A) 2α **B)** $90° - \alpha$ **V)** $45° + \alpha$ **G)** $90° - \frac{\alpha}{2}$ **D)** $60°$

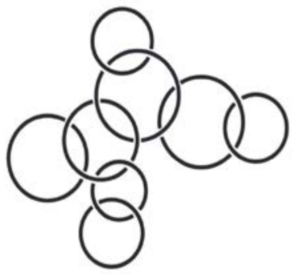
Matematičko takmičenje „Kengur bez granica”, 2018. kategorija: Junior

Zadaci koji vrijede 3 poena

1. Kolika je dužina treće stranice trougla, ako su dužine dvije stranice 5 i 2, a dužina treće stranice je neparan broj?

A) 3 **B)** 4 **V)** 5 **G)** 6 **D)** 7

2. Neke alke na slici desno formiraju lance (na slici je označeno kao da jedna alka prolazi kroz ″rupu″ na drugoj; alke koje su nacrtane kao da su jedna preko druge nisu dio lanca). Koliko ima alki u najdužem lancu na slici?

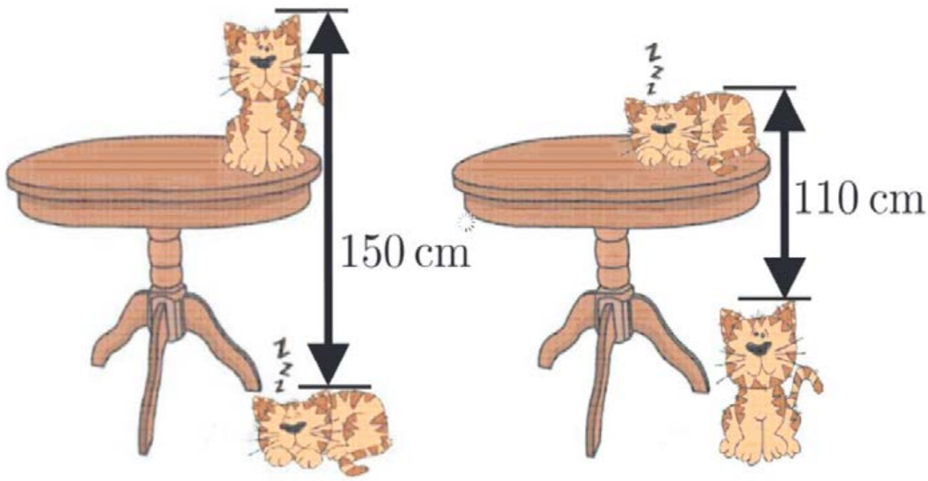


A) 3 **B)** 4 **V)** 5 **G)** 6 **D)** 7

3. Zbir 5 uzastopnih prirodnih brojeva je 10^{2018}. Kolika je vrijednost srednjeg, trećeg po redu?

A) 10^{2013} **B)** 5^{2017} **V)** 10^{2017} **G)** 2^{2018} **D)** $2 \cdot 10^{2017}$

4. Rastojanje od vrha mačke koja spava na podu do vrha mačke koja sjedi na stolu je 150cm, a rastojanje od vrha mačke koja sjedi na podu do vrha mačke koja spava na stolu je 110cm (vidjeti sliku ispod). Kolika je visina stola na kojem mačka u prvom slučaju stoji, a u drugom leži?

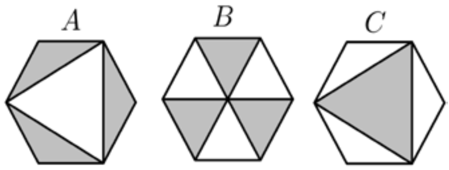


A) 110cm **B)** 120cm **V)** 130cm **G)** 140cm **D)** 150cm

5. U Miloševoj porodici svako dijete ima najmanje dva brata i najmanje jednu sestru. Najmanji mogući broj djece u Miloševoj porodici je:

A) 3 **B)** 4 **V)** 5 **G)** 6 **D)** 7

6. Neka su X, Y i Z površine osjenčenih dijelova podudarnih pravilnih šestouglova A, B i C redom, prikazanih na slici ispod. Koji od sledećih iskaza je tačan?



A) $X = Y = Z$ **B)** $Y = Z \neq X$

V) $Z = X \neq Y$ **G)** $X = Y \neq Z$

D) svaka od površina X, Y i Z ima različitu vrijednost

7. Zbir 25% broja 2018 i 2018% broja 25 je:

A) 1009 **B)** 2016 **V)** 2018 **G)** 3027 **D)** 5045

8. Neke cifre u tačnom sabiranju na slici desno su zamjenjene slovima P, Q, R i S. Kolika je vrijednost zbira $P + Q + R + S$?

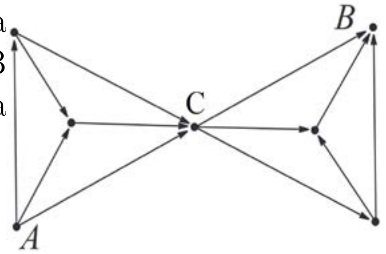
$$\begin{array}{r} P\;4\;5 \\ +\,Q\;R\;S \\ \hline 6\;5\;4 \end{array}$$

A) 14 **B)** 15 **V)** 16 **G)** 17 **D)** 24

9. Milica je kupila 42 jabuke, 60 kajsija i 90 krušaka. Ona želi da svo voće koje je kupila podijeli na jednake grupe i pokloni ih svojim prijateljima. Koji je najveći broj grupa koje Milica može da napravi?

A) 3 **B)** 6 **V)** 10 **G)** 14 **D)** 42

10. Na slici desno prikazano je kako se možemo kretati iz tačke A do tačke B prateći strelice. Na koliko načina možemo stići iz tačke A u tačku B krećući se po linijama i u skladu sa smjerovima strelica?



A) 20 B) 16 V) 12 G) 9 D) 6

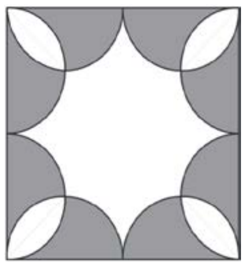
11. Koliko cifara ima broj $\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1)$?

A) 2017 B) 2018 V) 4035 G) 4036 D) 4037

12. U nizu je napisano 105 prirodnih brojeva: $1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5, \ldots$(svaki broj n napisan je tačno n puta). Koliko brojeva ovog niza je djeljivo sa brojem 3?

A) 4 B) 12 V) 21 G) 30 D) 45

13. Osam polukrugova je nacrtano unutar kvadrata stranice dužine 4 (slika desno). Kolika je površina bijelog (neosijenčenog) dijela kvadrata?



A) 2π B) 8 V) $6+\pi$ G) $3\pi+2$ D) 3π

14. Odredjenog dana 40 vozova prevozi putnike, svaki samo na relaciji izmedju dva grada od pet velikih gradova M, N, O, P i Q. 10 vozova je putovalo ka gradu M ili od grada M. 10 vozova je putovalo ka gradu N ili od grada N. 10 vozova je putovalo ka gradu O ili od grada O, a 10 vozova je putovalo ka gradu P ili od grada P. Koliko vozova je putovalo ka gradu Q ili od grada Q?

A) 0 B) 10 V) 20 G) 30 D) 40

15. Na Univerzitetu društvenih nauka mogu se studirati jezici, istorija i filozofija. 35% studenata koji studiraju jezike, studira engleski jezik,13% univerzitetskih studenata studira neki drugi jezik, a ne engleski, a nijedan student ne studira više od jednog jezika. Koliko procenata univerzitetskih studenata studira jezike?

A) 13% **B)** 20% **V)** 22% **G)** 48% **D)** 65%

16. Petar je želio da kupi knjigu, ali nije imao novca. Kupio je uz pomoć svog oca i dva brata. Njegov otac mu je dao polovinu od iznosa koji su mu dala njegova braća. Njegov stariji brat mu je dao trećinu od onoga što su mu drugi dali, a mladji brat mu je dao 10 eura. Kolika je bila cijena knjige u eurima?

A) 24 **B)** 26 **V)** 28 **G)** 30 **D)** 32

17. Koliko trocifrenih prirodnih brojeva ima osobinu da je dvocifreni broj dobijen brisanjem njegove srednje cifre jednak njegovoj devetini?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

18. Koliko se puta sabirak 2018^2 pojavljuje ispod kvadratnog korena tako da važi jednakost:

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + ... + 2018^2} = 2018^{10}?$$

A) 5 **B)** 8 **V)** 18 **G)** 2018^2 **D)** 2018^{18}

19. Dvije zgrade se nalaze u istoj ulici na rastojanju 250m jedna od druge. U prvoj zgradi živi 100 studenata, a u drugoj zgradi živi 150 studenata. Gdje bi bilo potrebno izgraditi autobusku stanicu, tako da ukupno rastojanje koje bi svi studenti, koji žive u ove dvije zgrade, prelazili od ove autobuske stanice do svojih zgrada bilo najmanje moguće?

A) ispred prve zgrade
B) na udaljenosti 100m od prve zgrade
V) na udaljenosti 100m od druge zgrade
G) ispred druge zgrade
D) bilo gdje izmedju ove dve zgrade

20. U pravilnom 2018-uglu čija su tjemena numerisana redom brojevima od 1 do 2018, nacrtane su dvije dijagonale. Jedna od nacrtanih dijagonala povezuje tjemena numerisana brojevima 18 i 1018, a druga nacrtana dijagonala povezuje tjemena numerisana brojevima 1018 i 2000. Po koliko tjemena imaju tri mnogougla dobijena na prethodno opisan način?

A) 38,983,1001 **B)** 37,983,1001 **V)** 38,982,1001 **G)** 37,982,1000
D) 37,983,1002

Zadaci koji vrijede 5 poena

21. Na tabli je napisano nekoliko cijelih brojeva, uključujući i broj 2018. Zbir napisanih cijelih brojeva je 2018, a proizvod napisanih brojeva je takodje 2018. Koji od sledećih brojeva može biti broj napisanih cijelih brojeva na tabli?

A) 2016 **B)** 2017 **V)** 2018 **G)** 2019 **D)** 2020

22. Data su četiri broja: kada izaberemo tri od njih i odredimo njihovu aritmetičku sredinu, a zatim dodamo vrijednost četvrtog, možemo dobiti rezultate, 17, 21, 23 i 29. Najveći od datih brojeva je:

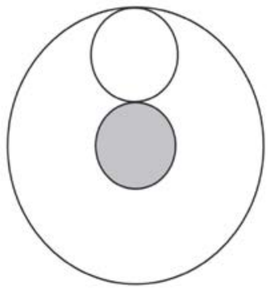
A) 12 **B)** 15 **V)** 21 **G)** 24 **D)** 29

23. Tačke $A_0, A_1, A_2, \ldots$ se nalaze na pravoj, tako da je $|A_0A_1| = 1$, a tačka A_n je središte duži $A_{n+1}A_{n+2}$, za svaki nenegativan cijeli broj n. Kolika je

dužina duži A_0A_{11}?

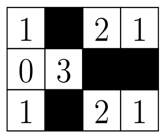
A) 171 B) 341 V) 512 G) 587 D) 683

24. Dva koncentrična kruga poluprečnika 1 i 9 čine prsten. U unutrašnjosti ovog prstena nacrtano je n krugova bez preklapanja, tako da oni dodiruju obe početne kružnice (na slici desno je prikazan primjer jedne od n kružnica sa opisanim svojstvom proizvoljnog prstena). Najveća moguća vrijednost za n je:



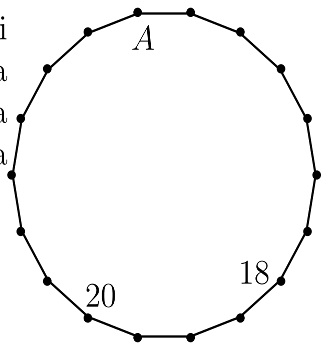
A) 1 B) 2 V) 3 G) 4 D) 5

25. Danka je nacrtala pravougaonu mrežu sastavljenu od 12 kvadrata, a neke od kvadrata je obojila u crno, kao na slici desno. U svaki bijeli kvadrat upisala je broj koji predstavlja broj crnih kvadrata sa kojim posmatrani bijeli kvadrat dijeli stranicu. Danka je isto to uradila i sa pravougaonom mrežom sastavljenom od 2018 kvadrata. Koja je maksimalna vrijednost koju ona može dobiti kao rezultat zbira svih brojeva u mreži sastavljenoj od 2018 kvadrata?



A) 1262 B) 2016 V) 2018 G) 3025 D) 3027

26. Svako tjeme 18-ougla, na slici desno, treba biti numerisano brojem koji predstavlja zbir brojeva kojim su numerisana susjedna tjemena. Dva tjemena su numerisana kao na slici. Kojim brojem treba numerisati tjeme označeno slovom A?

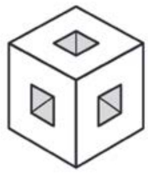


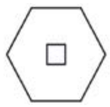
A) 2018 B) -20 V) 18 G) 38 D) -38

27. Na koliko različitih načina možemo upisati brijeve skupa $\{1,2,3,4,5,6\}$ u polja pravougaone tabele 2×3, tako da se svaki broj nalazi u tačno jednom polju, a da zbir brojeva u svakoj vrsti i svakoj koloni bude djeljiv sa brojem 3?

A) 36 **B)** 42 **V)** 45 **G)** 48 **D)** neki drugi broj

28. Sedam jediničnih kockica je izrezano iz kocke dimenzija $3\times3\times3$, kao na slici desno. Kako će izgledati presjek ako ovako dobijenu kocku presiječemo sa ravni koja prolazi kroz centar kocke i koja je normalna na jednu od 4 velike dijagonale kocke?

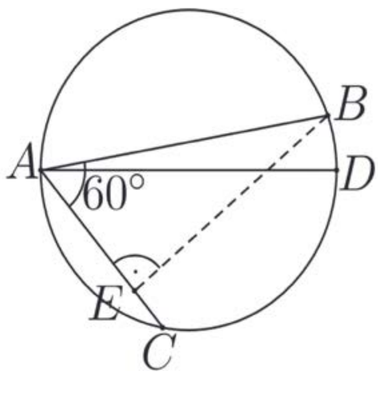


A)  **B)**  **V)**  **G)**  **D)** 

29. Marko je napravio veliku kocku tako što je lijepio nekoliko manjih identičnih kockica, a zatim je obojio nekoliko strana velike kocke. Njegova sestra Nikolina je ispustila veliku kocku i ona se raspala na početne, male kockice. Koliko strana velike kocke je Marko obojio, ako 45 malih kockica nije imalo obojenu nijednu svoju stranu?

A) 2 **B)** 3 **V)** 4 **G)** 5 **D)** 6

30. U krugu prečnika AD označene su dvije tetive AB i AC, tako da je $\measuredangle BAC = 60$ i $AB = 24cm$ (vidjeti sliku desno). Kolika je dužina tetive BD ako je $BE \perp AC$ i $EC = 3cm$?



A) $\sqrt{3}cm$ **B)** $2cm$ **V)** $3cm$ **G)** $2\sqrt{3}cm$
D) $3\sqrt{2}cm$

Matematičko takmičenje „Kengur bez granica”, 2019. godina, kategorija: Junior

Zadaci koji vrijede 3 poena

1. $20 \cdot 19 + 20 + 19 =$

A) 389 **B)** 399 **V)** 409 **G)** 419 **D)** 429

2. Modelu voza potrebno je 1 minut i 11 sekundi da predje svaki krug staze. Koliko vremena je modelu voza potrebno za šest krugova?

A) 6 minuta i 56 sekundi **B)** 7 minuta i 6 sekundi
V) 7 minuta i 16 sekundi **G)** 7 minuta i 26 sekundi
D) 7 minuta i 36 sekundi

3. Berberin želi da napiše reč SHAVE na tabli tako da mušterija koja gleda u ogledalo ispravno čita napisanu riječ. Kako bi izgledala riječ koju bi berberin napisao na tabli?

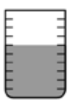
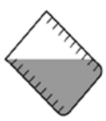
A) 

B) 
V) 
G) 
D) 

4. Koliko različitih zbirova brojeva tačkica možemo dobiti prilikom istovremenog bacanja tri standardne kockice za igru?

A) 14 **B)** 15 **V)** 16 **G)** 17 **D)** 18

5. U pet identičnih čaša sipana je voda. Tačno četiri od njih sadrže istu količinu vode. Koja čaša ima različitu količinu vode u odnosu na preostale četiri?

A)  B)  V)  G)  D) 

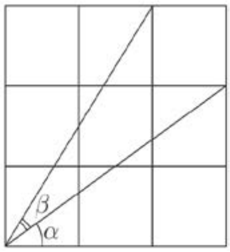
6. Park ima tačno pet kapija. Monika želi da udje u park kroz jednu kapiju, a da izadje iz parka kroz neku drugu. Na koliko različitih načina. Monika može uči i izaći iz parka?

A) 25 **B)** 20 **V)** 16 **G)** 15 **D)** 10

7. Težina svakog od tri kengura je različit prirodan broj. Njihova ukupna težina je 97kg. Koliko najviše kilograma može imati najlakši od njih?

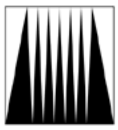
A) 1kg **B)** 30kg **V)** 31kg **G)** 32kg **D)** 33kg

8. Koja od sledećih jednakosti je tačna za označene uglove na slici desno sastavljenoj od 9 podudarnih kvadrata?

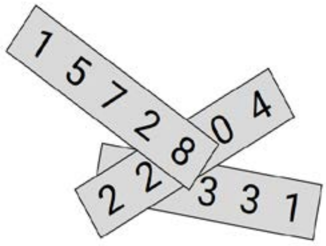


A)$\alpha = \beta$ **B)** $2\alpha + \beta = 90°$
V)$\alpha + \beta = 60°$ **G)** $2\beta + \alpha = 90°$
D)$\alpha + \beta = 45°$

9. Unutar svakog od 5 jediničnih kvadrata odredjeni dio je obojen u crno. U kom kvadratu je najveća površina obojena u crno?

A)  **B)**  **V)**  **G)**  **D)** 

10. Na svakom od tri lista papira napisano je po 5 cifara. Tri cifre su pokrivene kao što je prikazano na slici desno. Ako je zbir sva tri broja napisana na papirima jednak 57263, koje cifre su pokrivene?



A) 0, 2 i 2 **B)** 1, 2 i 9
V) 2, 4 i 9 **G)** 2, 7 i 8
D) 5, 7 i 8

Zadaci koji vrijede 4 poena

11. Tjemena kvadrata označena su sa A, B, C i D u smjeru kazaljke na časovniku. U jednakostraničnom trouglu tjemena A, E i C označena su u smjeru kretanja kazaljke na časovniku. Kolika je mjera ugla CBE?

A) 30° **B)** 45° **V)** 135° **G)** 145° **D)** 150°

12. Brojevi a, b, c i d su različiti prirodni brojevi od 1 do 10. Koja je najmanja moguća vrijednost izraza $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$?

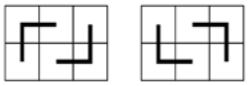
A) $\frac{2}{10}$ **B)** $\frac{3}{19}$ **V)** $\frac{14}{45}$ **G)** $\frac{29}{90}$ **D)** $\frac{25}{72}$

13. Zastava Kraljevstva Kengura je pravougaonik sa stranicama čije su dužine u odnosu 3:5. Zastava je podijeljena na četiri pravougaonika jednakih površina, kao što je prikazano na slici desno. Koji je odnos dužina stranica bijelog pravougaonika sa zastave Kraljevstva Kengura?

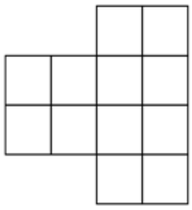
A) 1 : 3 **B)** 1 : 4 **V)** 2 : 7 **G)** 3 : 10
D) 4 : 15

14. Pravougaonik dimenzije 32 može se prekriti sa tačno dvije L-figure oblika

na dva različita načina kao što je prikazano na slici ispod.



Na koliko različitih načina L-figurama možemo da prekrijemo figuru datu na narednoj slici?



A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 48

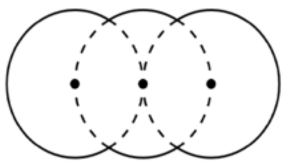
15. Triatlon se sastoji od plivanja, trčanja i biciklizma. Biciklizam je na tri četvrtine ukupne dužine triatlona, trčanje je jedna petina dužine triatlona, a plivanje je dužine 2km. Kolika je dužina ovog triatlona?

A) 10km **B)** 20km **V)** 38km **G)** 40km **D)** 60km

16. Sok za konzumiranje treba napraviti od koncetrovanog sirupa soka i vode u odnosu 1:7. Koncetrovani sirup soka se nalazi u boci zapremine jedan litar, a boca je do pola napunjena. Koji dio ovog koncetrovanog sirupa soka treba iskoristiti da bismo u mješavini sa vodom dobili 2 litra soka za konzumiranje?

A) $\frac{1}{4}$ **B)** $\frac{1}{2}$ **V)** $\frac{2}{7}$ **G)** $\frac{4}{7}$ **D)** sav koncetrovani sirup soka

17. Figura na slici desno je dobijena od delova tri kruga poluprečnika r čiji se centri nalaze na jednoj pravoj. Srednji krug prolazi kroz centre druga dva kruga kao što je prikazano na slici desno. Koliki je obim dobijene figure?



A) $\frac{10\pi r}{3}$ B) $\frac{5\pi r}{3}$ V) $\frac{2\pi r\sqrt{3}}{3}$ G) $2\pi r\sqrt{3}$ D) $4\pi r$

18. Sedam cifara telefonskog broja $\overline{aaabbbb}$ u zbiru daju dvocifreni broj $\overline{ab}$. Kolika je vrijednost $a + b$?

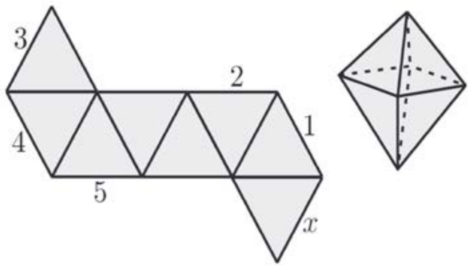
A) 8 B) 9 V) 10 G) 11 D) 12

19. U kutije se pakuju jabuke i kruške, ali tako da svaka kutija sadrži isti broj jabuka i da ne postoje dvije kutije sa istim brojem krušaka. Koji je najveći mogući broj kutija koje se mogu spakovati na ovaj način ako imamo na raspolaganju 60 jabuka i 60 krušaka?

A) 20 B) 15 V) 12 G) 10 D) 6

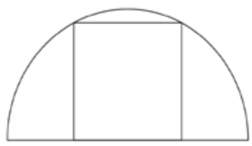
20. Na slici desno prikazana je mreža oktaedra. Kada se od date mreže formira oktaedar, kojim brojem je obeležena duž koja će se preklopiti sa duži označenom sa x?

A) 1 B) 2 V) 3
G) 4 D) 5



Zadaci koji vrijede 5 poena

21. Kvadrat upisan u polukrug tako da se dva tjemena kvadrata nalaze na polukružnici, a dva tjemena na prečniku, kao na slici desno. Ako je poluprečnik polukruga 1 cm, kolika je površina upisanog kvadrata?



A) $\frac{4}{5}cm^2$ B) $\frac{\pi}{5}cm^2$ V) $1cm^2$ G) $\frac{4}{3}cm^2$ D) $\frac{2}{\sqrt{3}}cm^2$

22. Na kružnom disku koji rotira oko svog centra označene su dvije tačke. Tačka A je za 3cm dalje od centra diska nego tačka B i kreće se konstantnom brzinom koja je $2,5$ puta veća nego brzina tačke B. Koliko je rastojanje

tačke A od centra diska?

A) $10cm$ **B)** $9cm$ **V)** $8cm$ **G)** $6cm$ **D)** $5cm$

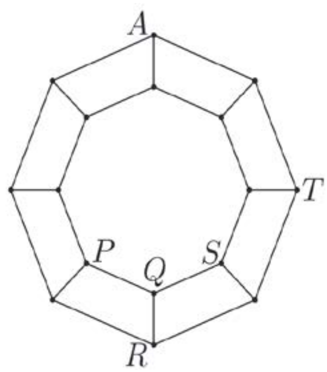
23. Prirodni brojevi od 1 do 99 pišu se uzastopno bez razmaka. Ovaj niz cifara se zatim dijeli na grupe od po tri cifre: $123456789101112....979899 \rightarrow$ $(123)(456)(789)(101)(112)....(979)(899)$. Koja od sledećih grupa se dobija na taj način?

A) (222) **B)** (444) **V)** (464) **G)** 646 **D)** (888)

24. Koliko je različitih ravni koje sadrže tačno tri tjemena date kocke?

A) 1 **B)** 2 **V)** 4 **G)** 8 **D)** 12

25. Graf se sastoji od 16 čvorova i nekih linija koje ih povezuju, kao na slici desno. Mrav se trenutno nalazi na čvoru A i kreće se tako što u jednom koraku on sa jednog čvora predje na drugi čvor linijom koja te čvorove povezuje. Na kom od čvorova označenih sa P, Q, R, S i T mrav može biti nakon 2019 koraka?



A) P, R ili S **B)** P, R, S ili T **V)** samo Q
G) samo T **D)** sve je moguće

26. Svaki od trocifrenih pririodnih brojeva a, b i c ima svojstvo da mu je prva cifra jednaka trećoj i važi da je $b = 2a + 1$ i $c = 2b + 1$. Koliko ima takvih različitih brojeva a?

A) 0 **B)** 1 **V)** 2 **G)** 3 **D)** više od 3

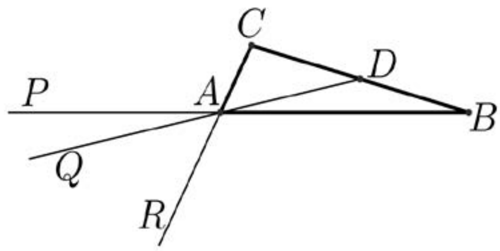
27. U svakom tjemenu kvadrata upisan je po jedan prirodan broj. Za dva broja koja su upisana u tjemenima povezanim stranicom kvadrata važi da je jedan broj djelilac drugog. Medjutim, za dva broja koja su upisana u tjemenima dijagonale važi da jedan drugog ne dijele. Koji je najmanji mogući zbir ta četiri broja?

A) 12 **B)** 24 **V)** 30 **G)** 35 **D)** 60

28. Koji je najmanji broj elemenata potrebno izbaciti iz skupa $\{10,20,30,40,50,60,70,80,90\}$, tako da proizvod elemenata koji ostaju bude potpun kvadrat?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

29. Neka je D središte stranice BC trougla ABC čija je površina jednaka S i neka su tačke P, Q i R redom na pravama AB, AD, i AC, tako da je $AP = 2 \cdot AB$, $AQ = 3 \cdot AD$ i $AR = 4 \cdot AC$ (slika desno). Kolika je površina trougla PQR?



A) S **B)** $2S$ **V)** $3S$ **G)** $\frac{S}{2}$
D) 0, tj. tačke P, Q i R su kolinearne

30. Ako u datom četvorocifrenom broju eliminišemo jednu proizvoljnu cifru, dobijeni trocifreni broj je djelilac polaznog četvorocifrenog broja. Koliko ima različitih četvorocifrenih brojeva sa opisanim svojstvom?

A) 5 **B)** 9 **V)** 14 **G)** 19 **D)** 23

Matematičko takmičenje „Kengur bez granica", fin. 2019. godina, kategorija: Junior

Zadaci koji vrijede 3 poena

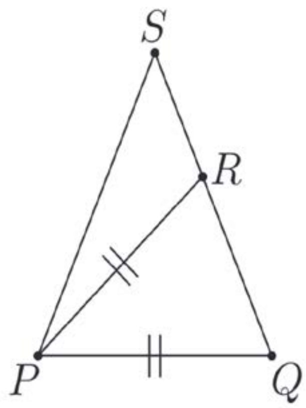
1. Artimetička sredina dva broja je 2019. Ako je jedan od tih brojeva 2021, drugi je:

A) **2017** **B)** **2018** **V)** **2020** **G)** **2022** **D)** **2023**

2. Poslednja cifra broja 2019 je tri puta veća od zbira prve tri cifre. Koliko takvih četvorocifrenih brojeva ima:

A) **manje od 5** **B)** **5** **V)** **6** **G)** **7** **D)** **više od 7**

3. Na slici desno je $SP = SQ$ i $PQ = PR$. Mjera ugla SPR je 36°. Mjera ugla PQR je:



A) 60° **B)** 63° **V)** 66° **G)** 69° **D)** 72°

4. Nataša je formirala niz cifara tako što je pisala naizmenično brojeve 2018 i 9102 počevši sa 2018: 201891022018910220189102... Koja cifra je na 2019. poziciji u Natašinom nizu?

A) **0** **B)** **1** **V)** **2** **G)** **8** **D)** **9**

5. Brojilac razlomka je uvećan za 40%. Za kolko procenata treba smanjiti imenilac da bi se dobio razlomak koji je 2 puta veći od polaznog razlomka?

A) 30% B) 40% V) 50% G) 60% D) 70%

6. U mnogouglu su unutrašnji uglovi naizmjenično od 150° i 120°. Koliko stranica ima taj mnogougao?

A) 6 B) 7 V) 8 G) 9 D) 10

7. Koliko je različitih vrijednosti medju brojevima: $3^{3^{(3^3)}}$, $3^{(3^3)^3}$, $(3^3)^{3^3}$, $3^{(3^{3^3})}$ i $(3^{3^3})^3$?

A) 5 B) 4 V) 3 G) 2 D) 1

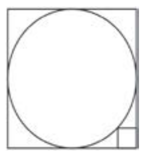
8. Pirat je našao četiri zapisa koji daju informaciju o lokaciji skrivenog blaga (vidjeti sliku ispod)

Blago je na ostrvu A ili na ostrvu G.	Blago je na ostrvu B.	Blago je na ostrvu V.	Blago nije na ostrvu G.

Informacija je tačna samo na jednom od tih zapisa i blago je skriveno samo na jednom ostrvu. Na kom ostrvu je skiveno blago?

A) A B) B V) V G) G D) ne može se utvrditi

9. Površina većeg kvadrata na slici desno je 32. Površina manjeg kvadrata je:



A) $16 - 8\sqrt{2}$ B) $12 - 8\sqrt{2}$ V) $8 - 4\sqrt{2}$ G) $2\sqrt{2}$ D) 2

10. Ako su x i y realni brojevi koji zadovoljavaju jednačinu $2x^2 + y^2 = 2xy$, koje od sledećih tvrdjenja ne može biti tačno?

A) $x - y = 1$ **B)** $x = y$ **V)** $x = 2y$ **G)** $x + y = 0$
D) Rješenje je jedinstveno

Zadaci koji vrijede 4 poena

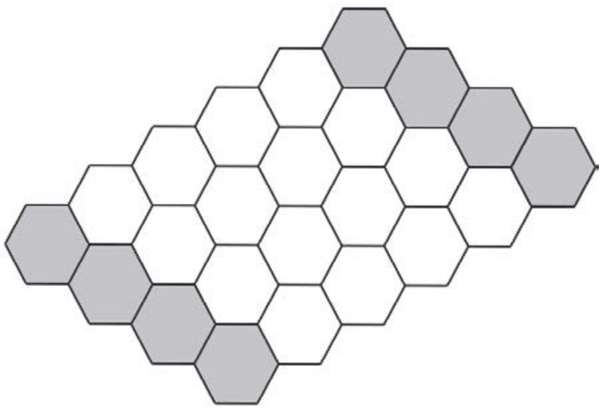
11. Ne računajući krajnje tačke, kroz koliko tačaka sa cjelobrojnim koordinatama u pravouglom Dekartovom koordinatnom sistemu prolazi duž koja spaja tačke (0,0) i (30,42)?

A) 1 B) 2 V) 3 G) 4 D) 5

12. Ako je $\overline{abc} + \overline{def} = 769$, tada je $\overline{aecabf} + \overline{dbfdec}$ jednako:

A) 769679 B) 769000 V) 769976 G) 869769 D) 769769

13. Na koliko načina se na slici ispod mogu obojiti sivom bojom četiri šestougaona polja tako da svih 12 sivih šestougaonih polja bude povezano (dva šestougaona polja su povezana ako imaju zajedničku stranicu)?



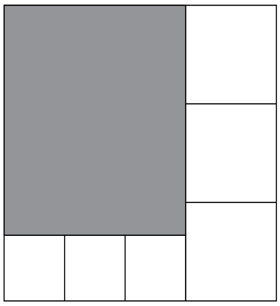
A) 16 B) 17 V) 18 G) 19 D) 20

14. U prvom razredu ima 32 učenika. Medju bilo kojih 20 učenika uvijek ima najmanje 3 dječaka. To znači da u prvom razredu ima:

A) najmanje 14 dječaka **B)** najviše 14 dječaka **V)** tačno 14 dječaka

G) više dječaka nego djevojčica **D)** više djevojčica nego dječaka

15. Marta je veliki kvadrat podijelila na sivi pravougaonik i šest manjih kvadrata kao na slici desno. Ako je površina sivog pravougaonika 42, tada je obim početnog (velikog) kvadrata jednak:



A) 36 **B)** 40 **V)** 44 **G)** 48 **D)** 52

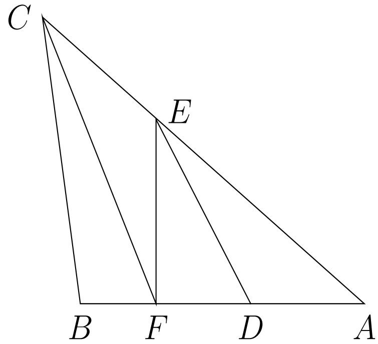
16. Na koliko načina se mogu izabrati prirodni brojevi $m, n > 1$, tako da $(\sqrt[m]{\sqrt[n]{2}})^{12}$ bude racionalan?

A) 3 **B)** 7 **V)** 9 **G)** 10 **D)** 12

17. Na sastanku je bilo 6 osoba: A, B, V, G, D i E. Svako od njih se rukovao sa svim svojim prijateljima. Osoba A je imala 1 rukovanje, osoba B 2 rukovanja, V 3 rukovanja, G 4 rukovanja i D 5 rukovanja. Koliko rukovanja je imala osoba E?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

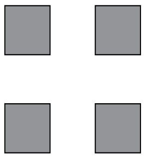
18. Na stranici BA trougla ABC nalaze se tačke F i D, a na stranici AC nalazi se tačka E tako da su trouglovi AED, DEF, EFC i FCB jednakih površina (slika desno). Odrediti odnos AF:BD.

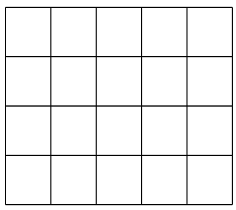


A) 1 **B)** 9:8 **V)** 8:7 **G)** 7:6 **D)** 6:5

19. Dati su skupovi $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$ i $B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$. Izračunati zbir svih elemenata skupa S za koji je $A \cap S = \{3, 4\}$ i $B \cup S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

A) 21 **B)** 23 **V)** 25 **G)** 27 **D)** 29

20. Pečat je oblika  i jednim udarom oboji 4 polja tabele 5×4 prikazane na slici ispod.



Koliko najmanje puta treba udariti ovim pečatom da bi se obojila sva polja tabele (neka polja mogu da se oboje više puta)?

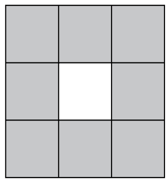
A) 5 **B)** 6 **V)** 7 **G)** 8 **D)** više od 8

Zadaci koji vrijede 5 poena

21. Koliko ima funkcija $f : \{1,2,3,4\} \to \{1,2,3,4,5\}$ takvih da se parni brojevi preslikavaju u neparne a neparni u parne?

A) 5 **B)** 13 **V)** 20 **G)** 36 **D)** više od 5^4

22. Teodor je upisao brojeve od 1 do 8 u siva polja figure na slici desno (svaki broj je upisao u tačno jedno polje). Sva četiri zbira u gornjoj i donjoj vrsti, kao i lijevoj i desnoj koloni su jednaka. Najmanji mogući zbir brojeva koje je Teodor upisao u četiri ugao polja figure je:



A) 10 **B)** 12 **V)** 14 **G)** 16 **D)** 20

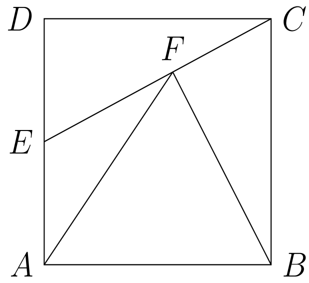
23. Svaka od 5 osoba u sobi je ili lupež (uvijek laže) ili vitez (uvijek govori istinu). Iz sobe su jedna po jedna izašle 4 osobe i svaka je nakon napuštanja sobe rekla: "U sobi je ostalo više lupeža nego vitezova." Koliko je u sobi bilo lupeža na početku?

A) 1 **B)** 2 **V)** 3 **G)** 4 **D)** 5

24. Kolika je vrijednost izraza $a+b+c$ ako su a, b i c cifre takve da su brojevi a, $\overline{ab}$, $\overline{bc}$ i $\overline{acc}$ potpuni kvadrati?

A) 9 **B)** 11 **V)** 13 **G)** 15 **D)** 17

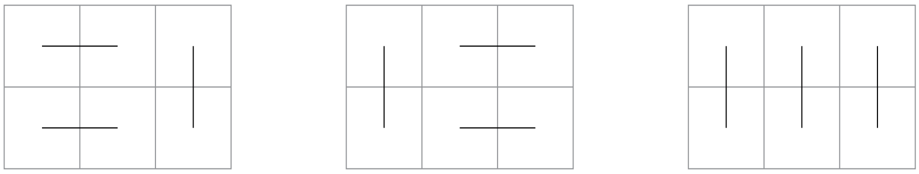
25. Neka je E središte stranice AD kvadrata $ABCD$ stranice dužine a i tačka F na duži EC takva da su trouglovi EAF i BCF jednakih površina (videti sliku desno). Kolika je površina trougla ABF?



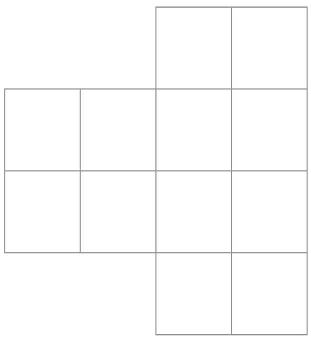
A) $\frac{2}{5}a^2$ **B)** $\frac{1}{2}a^2$ **V)** $\frac{5}{12}a^2$ **G)** $\frac{1}{3}a^2$

D) $\frac{4}{9}a^2$

26. Pravougaonik dimenzije 3x2 se može pokriti pravougaonicima dimenzije 2x1 na 3 različita načina kao što je prikazano na slici ispod.



Na koliko načina se figura



može prekriti pravougaonicima dimenzije 2x1?

A) 2 **B)** 3 **V)** 6 **G)** 11 **D)** 12

27. Ako je $f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4$, $p, q, r \in \mathbb{R}$ i $f(-7) = 3$, tada je $f(7)$ jednako:

A) -11 **B)** -3 **V)** 10 **G)** 17 **D)** nemoguće je odrediti

28. Prirodan broj $3a$ ima tačno 4 pozitivna djelioca, a broj $5a$ ima tačno 6 pozitivnih djelilaca. Prva cifra broja $2019a$ je:

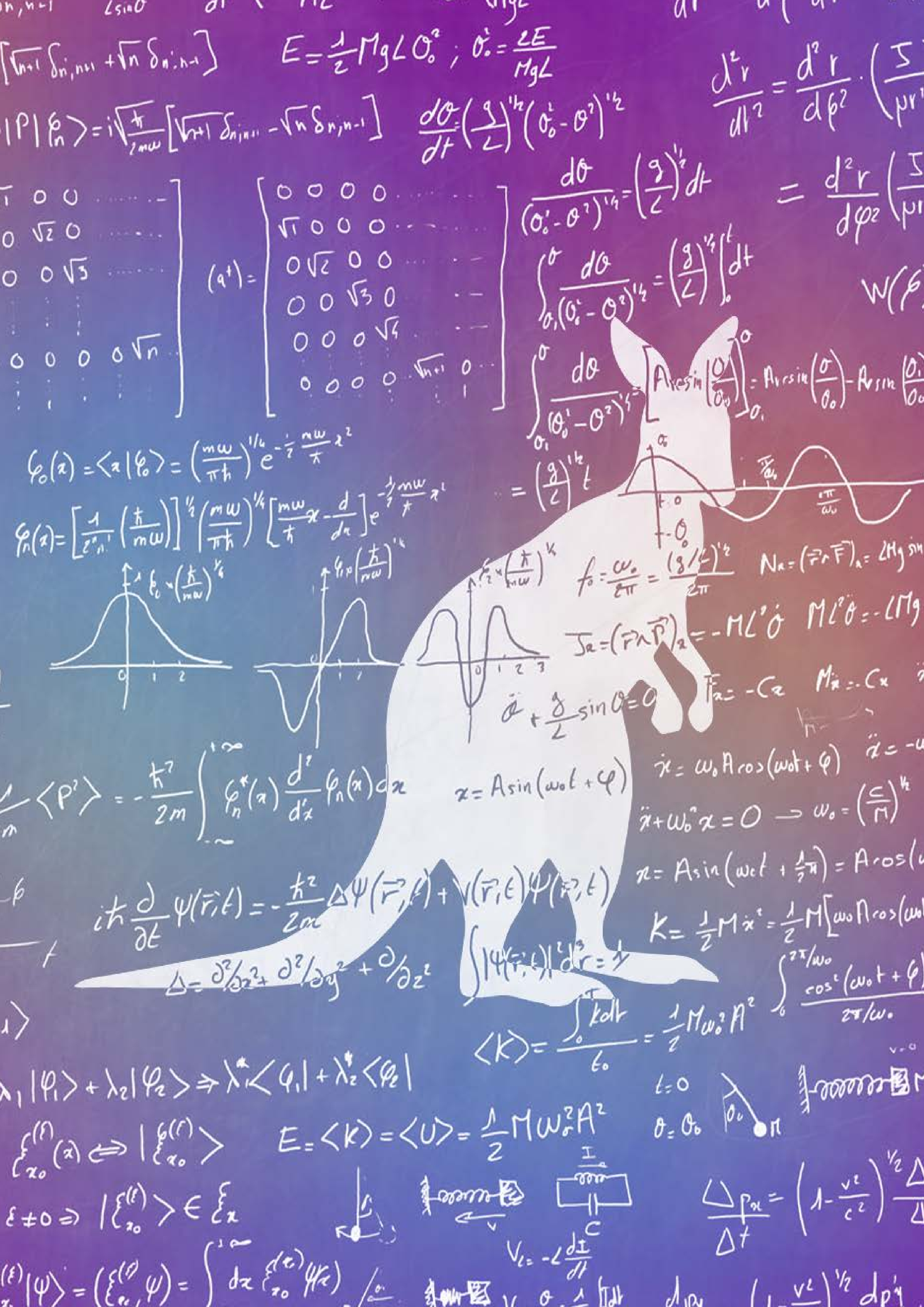
A) 1 **B)** 3 **V)** 8 **G)** 9 **D)** ne može da se odredi

29. Brojeve od 1 do 17 treba poredjati u niz tako da zbir svaka dva susjedna broja niza bude potpun kvadrat. Koji broj će se naći na 9. mjestu u tom nizu?

A) 4 **B)** 9 **V)** 12 **G)** 14 **D)** ne može da se odredi

30. U oštrouglom trouglu su date dužine dvije stranice $a = 15$, $b = 13$ i dužina poluprečnika opisanog kruga $R = 8,125$. Za dužinu treće stranice tog trougla važi:

A) $7 < c \leq 9$ **B)** $9 < c \leq 13$ **V)** $13 < c \leq 15$ **G)** $15 < c \leq 17$
D) $17 < c \leq 19$



RJEŠENJA

Rješenja, godina 2017.

1. **Rješenje: B) 16**

$$\begin{gathered}2039 \text{ - } 2020 = 19\\ 2020 \text{ - } 2017 = 3\\ 19 \text{ - } 3 = 16\end{gathered}$$

$$\begin{array}{ccc} & \boxed{2039} & \\ & \boxed{19}\ \boxed{2020} & \\ \boxed{16} & \boxed{3} & \boxed{2017}\end{array}$$

2. **Rješenje: D)**
3. **Rješenje: B) 10**cm^2

$$16cm^2 - 9cm^2 + 4cm^2 - 1cm^2 = 10cm^2$$

4. **Rješenje: D)**
5. **Rješenje: V)** Kako je $\mathbf{24 + 4 \cdot 12 = 24 + 36 = 60}$, svo četvoro imaju ukupno 60 eura. Ako svi imaju isti iznos novca, dobijamo $\mathbf{60 : 4 = 15}$ da svi trebaju da imaju po 15 eura.

$$\mathbf{24 - 15 = 9}\ ,\ \mathbf{9 : 3 = 3}$$

Dakle svima treba da da po 3 eura.
6. **Rješenje: D)**

$$O = 2r\pi = 2 \cdot 1 \cdot \pi = 2\pi$$

Nakon 10π biće kao na početku. Krećući se za jos jedno π biće na polovini obima pa je odgovor pod D.
7. **Rješenje: V) 13** Izmedju Antonije i Branke je sa jedne strane 4 djevojčice a sa druge 7.

$$\text{Dakle } 4 + 7 + 2 = 13.$$

8. **Rješenje: A)** $\frac{1}{2}$

$$x \text{ - broj gostiju}$$

$$\frac{1}{8}x \text{ - broj djece}$$

$$x - \frac{1}{8}x = \frac{7}{8}x \text{ - broj odraslih}$$

$$\frac{3}{7} \cdot \frac{7}{8}x = \frac{3}{8}x \text{ - broj muškaraca}$$

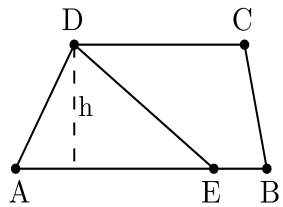
$$\text{Broj žena je: } x - (\frac{1}{8}x + \frac{3}{8}x) = x - \frac{4}{8}x = x - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}x$$

9. **Rješenje: V) 70%** Ukupan broj partija je 20. Pobijedio je u 9 i ako pobedi u još 5, biće to 14 pobjeda.

$$14 = \frac{P}{100} \cdot 20 = \frac{P}{5}$$
$$P = 5 \cdot 14 = 70 \text{ Dakle } 70\%$$

10. **Rješenje: V) 70%** Šest učenika mogu izvući po dva klikera iste boje (ako slučajno ne izvuku 3 iste boje). Već sledeći učenik izvlači treći kliker iste boje. Dakle odgovor je 7.

11. **Rješenje: V) 35**



$$P_T = \frac{a+b}{2}h = \frac{50+20}{2}h = 35h$$
$$P_{AE} = \frac{|AE|h}{2} = \frac{1}{2}P_T$$
$$\frac{|AE|h}{2} = \frac{1}{2} \cdot 35h$$
$$|AE| = 35$$

12. **Rješenje: D) 40** To je 20 brojeva počev unazad of 999, 998..., 980 i još 20 četvorocifrenih brojeva 9980, 9981..., 9999. Dakle, 40 brojeva.

13. **Rješenje: V) 17**

$$(n-1)^2 + n + (n+1)^2 =$$
$$(n-1)(n-1) + n^2 + (n+1)(n+1) =$$
$$n^2 - n - n + 1 + n^2 + n^2 + n + n + 1 = 3n^2 + 2$$
$$3n^2 + 2 = 770$$

$$3n^2 = 768$$
$$n^2 = 256$$
$$n = 16$$
$$n + 1 = 17$$

14. **Rješenje: B) 28**

$$r_c = 30cm \text{ dužina poluprečnika točka C}$$
$$O_c = 2r_c\pi = 60\pi$$
$$r_a,\ r_b \text{ - dužina poluprečnika točka A i B}$$
$$6 \cdot 2r_b\pi = 7 \cdot 60\pi \qquad /:12\pi$$
$$r_b = 7 \cdot 5 = 35$$
$$4 \cdot 2r_b\pi = 5 \cdot 2r_a\pi$$
$$8 \cdot 35\pi = 10r_a\pi \qquad /:5$$
$$8 \cdot 7\pi = 2r_a\pi \qquad /:2\pi$$
$$4 \cdot 7 = r_a$$
$$r_a = 28$$

15. **Rješenje: B) 7**

Ponedeljak	Utorak	Srijeda	Četvrtak	Petak	Subota	Nedjelja
X		X		X		
X		X			X	
X			X		X	
	X		X		X	
	X		X			X
	X			X		X
		X		X		X

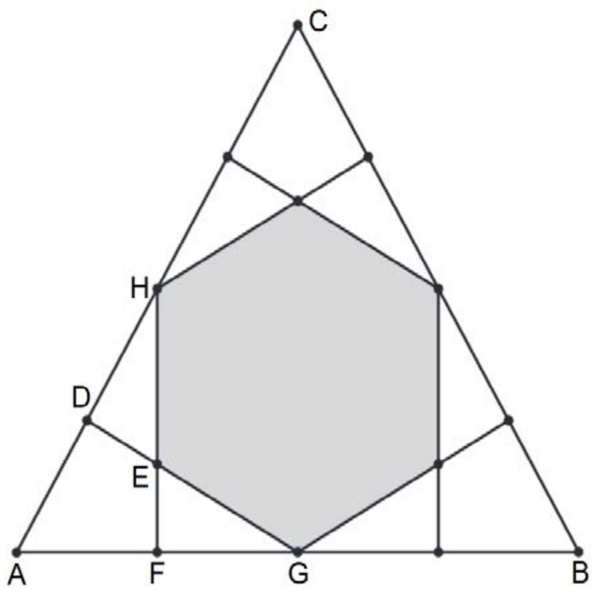
Dakle, 7 različitih načina.

16. **Rješenje: A) 160cm**
m - visina Mladena
p - visina Petra
v - visina Viktora
l - visina Lazara

$$m = v - x$$
$$m = p + x$$
$$l = p - x$$
$$m = 184cm$$
$$\frac{m + v + p + l}{4} = 178$$
$$\frac{184 + 184 + x + p + p - x}{4} = 178$$
$$\frac{2 \cdot 184}{4} + \frac{2p}{4} = 92 + \frac{p}{2} = 178$$
$$\frac{p}{2} = 86 \rightarrow p = 172cm$$

$$m = p + x \rightarrow 184cm = 172cm + x \rightarrow x = 12cm$$
$$l = p - x = 172cm - 12cm = 160cm$$

17. **Rješenje: G)** $\frac{1}{2}$



P_S - površina šestougla

a - stranica jednakostraničnog trougla ABC

$$P_S = P_{ABC} - 3 \cdot (P_{AFH} + P_{FGE})$$

$$P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$P_{AFH} = \frac{AF \cdot FH}{2} = \frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{32}$$

$$P_{FGE} = \frac{EF \cdot FG}{2}$$

$$FG = \frac{a}{4} = EF\sqrt{3}$$

$$3EF = \frac{a\sqrt{3}}{4} \rightarrow EF = \frac{a\sqrt{3}}{12}$$

$$P_{FGE} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{12} \cdot \frac{a}{4}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{96}$$

$$P_S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot (\frac{a^2\sqrt{3}}{32} + \frac{a^2\sqrt{3}}{96}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot (\frac{4a^2\sqrt{3}}{96}) =$$

$$= \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - 3 \cdot (\frac{a^2\sqrt{3}}{24}) = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$$

18. **Rješenje: V) 9**

Jutro S S S S S K K K K

Popodne K K K S S S S S S

Najmanje je mogao da traje 9 dana.

19. **Rješenje: G) 0**

3	a	1
b	c	d
2	e	?

$$3+a+b+c=1+a+c+d$$
$$b=d-2$$
$$b+c+2+e=c+d+e+?$$
$$b+2=d+?$$
$$d-2+3=d+?$$
$$?=0$$

20. **Rješenje: A) samo a ili g**

$$\frac{2017}{7}=288,14...$$
$$a=286$$
$$286+287+288+289++288+289+290=2017$$

ili

$$290+289+288+289+288+287+286=2017$$

21. **Rješenje: G) 31**

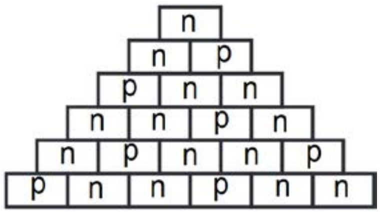
$$882:2=441$$
$$441:3=147$$
$$147:3=49$$
$$49:7=7$$
$$7:7=1$$

Imaju 1, 9, 7 i 14 godina.

$$1+9+7+14=31$$

22. **Rješenje: D) 41** Djelioci broja $n(n+2)$ su brojevi 1, n, $n+2$ i $n(n+2)$. Da bi to bili i jedini djelioci brojevi n i $n+2$ moraju biti prosti brojevi (takoyvani prosti brojevi blizanci). Dakle rješenje je 41 jer su 41 i 43 prosti brojevi.

23. **Rješenje: B) 14**



Sabiranjem dva parna ili dva neparna broja dobijamo paran broj.

24. **Rješenje: D) 143** Zbir uglova u mnogouglu sa n stranica je $(n-2)\cdot 180$. Dakle:

$$(n-2\cdot 180) = 2017^\circ + \alpha \ , \ 0 < \alpha < 180^\circ$$

$$180n - 360^\circ = 2017^\circ + \alpha$$

$$180n = 2377^\circ + \alpha$$

Dobijemo da je α neparan broj. Da bi $2377^\circ + \alpha$ bio djeljiv sa 9 (uslov djeljivosti sa devet je da je zbir cifara djeljiv sa 9) kome je $2+3+7+7 = 19$, αpri djeljenju sa 9 treba da daje ostatak 8 (jer je $19 : 9 = 2(1)$). Takodje zbog djeljivosti sa 5 α se završava cifrom 3 ili 8. Iz poslednjeg uslova B) i D) su moguća rješenja. Provjeravamo uslov djeljivosti sa 9.

$$5+3=8 \text{ - ostatk 8, takodje}$$

$$1+4+3=8$$

Provjerom za $\alpha = 53$ dobijemo:

$$180n = 2377 + 53$$

$$180n = 2430$$

Desna strana nije djeljiva sa 4, a lijeva jeste. Dakle B) nije rješenje

$$180n = 2377 + 143$$

$$180n = 2520$$

$$n = 14$$

25. **Rješenje: V) 7** Rješenje ne može biti 2 ili 5 jer ne mozemo da garantujemo da nam poslednja cifra neće biti neparan broj. Rješenje takodje ne može biti 9 jer ne možemo da garantujemo da ce nam zbir cifara $(3(a+b))$ biti djeljiv sa 9. Rješenje takodje ne moze biti 11 jer je uslov djeljivosti sa 11 da razlika zbira cifara na neparnim i onih koji stoje na parnim mjestima bude deljiva sa 11, a to za prizvoljna a i b ne možemo da tvrdimo. Ostaje nam jos 7.

Da bi broj bio djeljiv sa 7 zbir proizvoda njegovih cifara počevši od zadnje pomnoženih sa brojevima 1, 3, 2, 6, 4, 5 redom mora biti djeljiv sa 7.

$$ababab \text{ - šestocifreni broj}$$

$$b + 3a + 2b + 6a + 4b + 5a = 14a + 7b = 7(2a + b)$$

26. **Rješenje: B) 120**

$$5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$$

$$\text{Stranice su :}$$

$$5 \cdot 5 = 30$$

$$5 \cdot 7 = 35$$

$$6 \cdot 7 = 42$$

Ako uklonimo stranicu kocke dimenzija 5×6 broj kocki koje dodiruju kutiju je:

$$5 \cdot 6 + 2 \cdot 6 \cdot 6 + 2 \cdot 3 \cdot 6 = 30 + 2 \cdot 36 + 36 = 30 + 3 \cdot 36 = 30 + 108 = 138$$

Ako uklonimo stranicu 7×5 dobijamo sledeći broj kocki koje dodiruju kutiju:

$$7 \cdot 5 + 2 \cdot 7 \cdot 5 + 2 \cdot 3 \cdot 5 = 35 + 70 + 30 = 135$$

Ako uklonimo stranicu dimenzija 6×7 dobijamo:

$$6 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 7 + 2 \cdot 4 \cdot 4 = 42 + 56 + 32 = 130$$

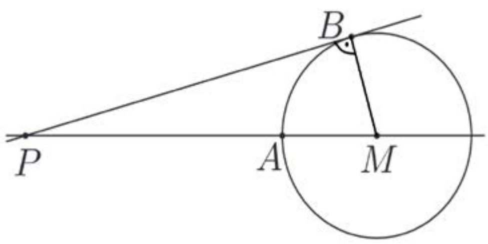
27. **Rješenje: D) 13**
28. **Rješenje: A) 10**

$$x \text{ - broj onih koji su se okrenuli na lijevo}$$

$$y \text{ - broj onih koji su se okrenuli na desno}$$

Ako ih je 10 uzviknulo "Zdravo", to znači da je 5 parova (susjednih igrača) okrenulo jedan udesno, jedan ulijevo. Dakle petoro udesno ostali ulijevo. Nakon polukružnog okretanja, petoro je ulijevo a ostali udesno. Dakle ponovo je 5 parova okrenutih jedan udesno a jedan ulijevo. Dakle, desetoro je uzviknulo zdravo.

29. **Rješenje: G) 6**



$$PA \text{ i } MB \text{ su prirodni brojevi.}$$

$$|PB| = |PA| + 6$$

$$MB = ?$$

$$|PM|^2 = |PB|^2 + |MB|^2$$

$$|MB| = |AM| \text{ - poluprečnik kruga}$$

$$(|PA| + |AM|)^2 = (|PA| + 6)^2 + |AM|^2$$

$$|PA|^2 + 2|PA||AM| + |AM|^2 = |PA|^2 + 12|PA| + 36 + |AM|^2$$

$$2|PA||AM| = 12|PA| + 36 \qquad / : 2$$

$$|PA||AM| = 6|PA| + 18$$

$$|PA| \text{ i } |AM| \text{ su prirodni brojevi}$$

$$|PA|(|AM| - 6) = 18$$

Djelioci broja 18 su 1, 2, 3, 6, 9, 18.

$$|AM| = |MB| = 7 \ , \ |PA| = 18$$

$$|AM| = |MB| = 8 \ , \ |PA| = 9$$

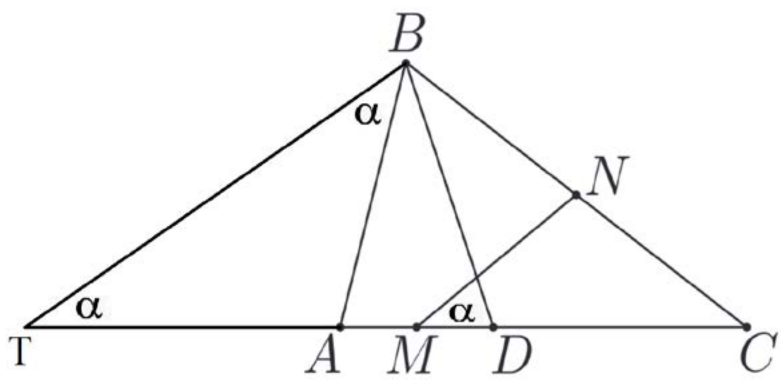
$$|MB| = 9 \ , \ |PA| = 6$$

$$|MB| = 12 \ , \ |PA| = 3$$

$$|MB| = 15 \ , \ |PA| = 2$$

$$|MB| = 24 \ , \ |PA| = 1$$

30. **Rješenje: A)** 2α

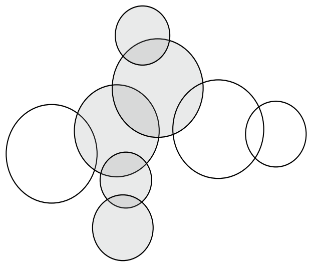


Označimo sa T tačku na pravoj $p(A, C)$ (kao na slici) tako da e $AT = AB$. Kako je $AM = MD$ i $AT = AB = DC$ dobijamo da je M središte duži AC. Dakle MN je srednja linija troubla $\triangle TBC$, odnosno $BT||MN$ i $\sphericalangle BTA = \alpha$. Kako je $\triangle TAB$ jednakokraki imamo da je $\sphericalangle TBA = \alpha$ i odavde kao spoljašnji ugao trougla $\triangle TAB$ dobijamo da je traženi ugao $\sphericalangle BAC = 2\alpha$.

Rješenja, godina 2018.

1. **Rješenje: V) 5** Iz uslova da je dužina treće stranice neparan broj, dobijamo da je rješenje 3, 5 ili 7. Kako je $2 + 3 = 5$ (zbir dužina dvije stranice u trouglu je veći od dužine treće), dobijemo da 3 nije rješenje, slično ni 7,jer je $5 + 2 = 7$. Dakle treća stranica je dužine 5.

2. **Rješenje: V) 5**



3. **Rješenje: D)** $2 \cdot 10^{2017}$ Označimo sa $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ pet uzastopnih brojeva dobijamo da je:

$$n - 2 + n - 1 + n + n + 1 + n + 2 = 10^{2018}$$
$$5n = 10^{2018}$$
$$n = \frac{1}{5} 10 \cdot 10^{2017}$$
$$n = 2 \cdot 10^{2017}$$

4. **Rješenje: V) 130cm** Označimo sa:
M - visina mačke
S - visina stola
SM - visina mačke koja spava

$$M + S - SM = 150cm$$
$$S - M + SM = 110cm$$

Sabiranjem ove dvije jednačine dobijamo:

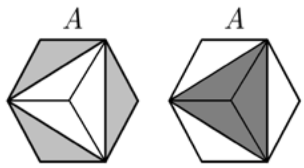
$$M + S - SM + S - M + SM = 150cm + 110cm$$

$$2S = 260cm$$

$$S = 130cm$$

5. **Rješenje: V) 5** U porodici su tri brata i dvije sestre, dakle petoro.

6. **Rješenje: A)** $X = Y = Z$ Očigledno je da je površina osijenčenog dijela šestougla B jednaka polovini površine tog šestougla. Ako šestouglove B i C podijelimo na trouglove na sledeći način:



, iz podudarnosti osjenčenih i neosjenčenih trouglova dobijamo

$$P_{\text{šestougla}} = 6\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}$$

$$X = 3 \cdot \frac{1}{2}\frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

$$Y = X = \frac{1}{2}\frac{3}{2}a^2\sqrt{3} = \frac{3}{4}a^2\sqrt{3}$$

7. **Rješenje: A) 1009**

$$\text{Treba nači zbir } 25\% \cdot 2018 + 2018\%25$$

$$\frac{1}{4} \cdot 2018 = 504,5$$

$$\frac{2018}{100} \cdot 25 = \frac{2018}{4} = 504,5$$

$$504,5 + 504,5 = 1009$$

8. **Rješenje: B) 15**

$$5 + S = 14 \implies S = 9$$

$$5 + R = 5 \implies R = 0$$

$$P + Q = 6$$

$$P + Q + R + S = 6 + 9 + 0 = 15$$

9. **Rješenje: B) 6** Rješenje je NZD(42,60,90), tj.

$$\begin{array}{c|c} 42{,}60{,}90 & 2 \\ 21{,}30{,}45 & 3 \\ 7{,}10{,}15 & \end{array}$$

Dakle, $2 \cdot 3 = 6$ je najveći broj grupa koje Milica može da napravi.

10. **Rješenje: B) 16** Označimo sa C (kao na slici) središnju tačku. Od tačke A do tačke C možemo doći na 4 različita načina i od C do B takodje na 4 različita načina, pa od A do B imamo $4 \cdot 4 = 16$ različitih puteva.

11. **Rješenje: G) 4036**

$$\frac{1}{9} \cdot \underbrace{10^{2018}}_{\text{2019 cifara}} \cdot \underbrace{(10^{2018} - 1)}_{\text{2018 cifara}}$$

$$\frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot (10^{2018} - 1) = \frac{1}{9} \cdot 10^{2018} \cdot \underbrace{99...9}_{2018} = 10^{2018}\,\underbrace{11...1}_{2018}$$

$$\underbrace{11...1}_{2018} \cdot 1\,\underbrace{00...0}_{2018} = \underbrace{11...1}_{2018}\,\underbrace{00...0}_{2018}$$

Dakle 4036 cifara.

12. **Rješenje: G) 30**

$$\text{Kako je } 1 + 2 + 3 + 4... + n = 105$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 105$$

$$n(n+1) = 210$$

$$n = 14$$

Dobijamo da je posljenji broj koji se ponavlja broj 14.Brojevi djeljivi sa 3, a manji od 14 su 3, 6, 9 i 12. Prema tome

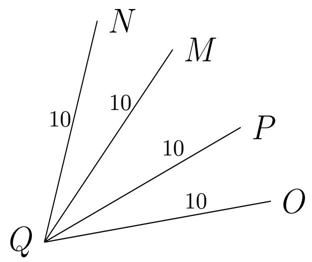
3 - 3 broja
6 - 6 brojeva
9 - 9 brojeva
12 - 12 brojeva

Najzad, $3 + 6 + 9 + 12 = 30$

13. **Rješenje: B) 8**

$$P_B = \frac{1}{2}P_K = \frac{1}{2}16 = 8$$

14. **Rješenje: D) 40**



Jedina mogućnost je da su svi putovali od grada Q ili ka gradu Q jer je $10 + 10 + 10 + 10 = 40$.

15. **Rješenje: B)** 20%

Označimo sa J, I i F - broj studenata koji studiraju jezike, istoriju i filozofiju
35% J studira engleski dok 65% J studira neke druge jezike i
$13\%(J + I + F)$ - studira neki drugi jezik
Dobijamo da je $65\%J = 13\%(J + I + F)$
$52\%J = 13\%(I + F)$

$$\frac{52}{100}J = \frac{13}{100}(I + F)\Big/ : \frac{100}{13}$$

$$4J = I + F$$

Ako označimo sa $J + I + F = X$ - ukupan broj studenata imamo da je
$5J = I + J + F = X$

$$J = \frac{X}{5}$$

$$J = 20\%X$$

16. **Rješenje: A) 24**

Označimo sa O, S i M - količine novca dobijene od oca, starijeg i mladjeg brata

$$M = 10$$

$$O = \frac{1}{2}(S+10) = \frac{1}{2}S + 5$$

$$S = \frac{1}{3}(O+10)$$

Dakle,

$$O = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}(O+10) + 5 \Big/ \cdot 6$$

$$6O = O + 10 + 30 \implies 5O = 40 \implies O = 8$$

$$S = \frac{1}{3}(8+10) = 6$$

$$8 + 6 + 10 = 24$$

17. **Rješenje: G) 4**

$$\overline{abc} = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

$$\overline{ac} = \frac{1}{9}\overline{abc}$$

$$10a + c = \frac{1}{9}(a \cdot 100 + b \cdot 10 + c) \Big/ \cdot 9$$

$$90a + 9c = a \cdot 100 + b \cdot 10 + c$$

$$10a + 10b - 8c = 0 \Big/ : 2$$

$$5a + 5b - 4c = 0$$

$$5(a+b) = 4c \implies 4|(a+b) \text{ i } 5|c$$

Kako je $\overline{ac} = \frac{1}{9}\overline{abc}$ dobijamo da je zbir cifara $a+b+c$ djeljiv sa 9.

Iz uslova $5|c$ dobijamo da je $c = 0$ ili $c = 5$. Razmatramo dva slučaja:

1^o $c = 0, a + b = 9$ ili $a + b = 18$

Za $a + b = 18$ je $a = b = 9$, ali broj 990 ne zadovoljava uslov zadatka. Slično, provjerom za $a + b = 9$ direktnom provjerom dobijamo da nijedan od mogućih brojeva ne zadovoljava uslov zadatka.

2^o $c = 5, a + b = 4$ ili $a + b = 13$

Ako je $a + b = 4$ dobijamo četiri rješenja $135, 225, 315$ i 405. Provjerom za $a + b = 13$, ne dobijamo broj koji zadovoljava uslov zadatka. Dakle, jedina rješenja su $135, 225, 315$ i 405.

18. **Rješenje: D)** 2018^{18}

$$\sqrt{2018^2 + 2018^2 + ... + 2018^2} = 2018^{10} \Big/^{2}$$

$$\underbrace{2018^2 + 2018^2 + ... + 2018^2}_{n} = 2018^{20}$$

$$n \cdot 2018^2 = 2018^{20}$$

$$n = 2018^{18}$$

19. **Rješenje: G) Ispred druge zgrade**
20. **Rješenje: A) 38,983,1001**

Mnogougao od 18. do 1018. tjemena ima $1018 - 18 + 1 = 1001$ tjemena, a mnogougao

od 1018. do 2000. tjemena ima $2000 - 1018 + 1 = 983$ tjemena Trećem n-touglu pripadaju $2018 - 999 - 981 = 2018 - 1980 = 38$ tjemena.

21. **Rješenje: B) 2017** Kako im je proizvod 2018, ostali brojevi mogu biti ili jedinice ili po dva broja -1. Sa druge strane broj brojeva 1 i broj brojeva -1 je isti jer je zbir svih brojeva 2018. Dakle iz

$$2018 + \underbrace{1 + 1 + ... +}_{n} + \underbrace{(-1) + (-1) + ...(-1)}_{2k} = 2018 \text{ i } n = 2k$$

dobijamo da je broj napisanih cijelih brojeva $1 + 2k + 2k = 1 + 4k$

Dakle, broj je neparan i oblika je $1 + 4k$.

$$2017 = 1 + 2016 \text{ i } 4 \text{ dijeli } 2016$$

dok $2019 = 1 + 2018$ i 4 ne dijeli 2018

22. **Rješenje: V) 21** Neka su a, b, c i d dati brojevi. Tada je po uslovu zadatka :

$$\frac{a+b+c}{3} + d = 17 \Big/ \cdot 3$$
$$\frac{a+b+c}{3} + c = 21 \Big/ \cdot 3$$
$$\frac{a+b+c}{3} + b = 23 \Big/ \cdot 3$$
$$\frac{a+b+c}{3} + a = 29 \Big/ \cdot 3$$

Dakle,

$$a + b + c + 3d = 51$$
$$a + b + 3c + d = 63$$
$$a + 3b + c + d = 69$$
$$3a + b + c + d = 87$$

Ako prvu jednačinu pomnožimo sa -1 i dodamo drugoj, zatim prvu jednačinu pomnožimo takodje sa -1 i dodamo trećoj jednačini i na kraju prvu jednačinu pomnožimo sa -3 i dodamo četvrtoj jednačini dobijamo sistem:

$$a + b + c + 3d = 51$$
$$2c - 2d = 12 \Big/ : 2$$
$$2b - 2d = 18 \Big/ : 2$$
$$2a - 2d = 66 \Big/ : 2$$

Odnosno,

$$a + b + c + 3d = 51$$

$$c - d = 6$$
$$b - d = 9$$
$$a - d = 33$$

Dakle,

$$a + b + c + 3d = 51$$
$$c - d = 6 \implies c = 6 + d$$
$$b - d = 9 \implies b = 9 + d$$
$$a - d = 33 \implies a = 18 + d$$

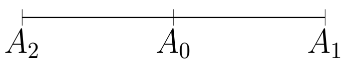
Najzad,

$$18 + d + 9 + d + 6 + d + 3 + d = 51$$
$$6d = 18 \implies d = 3$$
$$c = 9$$
$$b = 12$$
$$a = 21$$

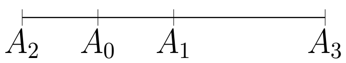
23. **Rješenje: D) 683**

$$|A_0A_1| = 1$$

Za $n = 0$, A_0 je središte duži A_1A_2

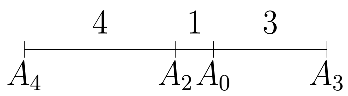


Za $n = 1$, A_1 je središte A_2A_3 tj.



$$|A_0A_3| = 3 \text{ tj. } 1 + 2 = 3$$

Dalje, $n = 2$, A_2 je središte A_3A_4



$$|A_0A_4| = 5 \text{ tj. } 1 + 4 = 5$$

Za $n = 3$ A_3 je središte A_4A_5, tj. $|A_3A_4| = 8 = |A_3A_5|$ pa je

$$|A_0A_5| = 3 + 8 = 11$$

$$A_4 \text{ je središte } A_5A_6$$

$$|A_5A_6| = 5 + 16 = 21$$

$$A_5 \text{ je središte } A_6A_7 \implies |A_5A_7| = 32$$

$$|A_0A_7| = 11 + 32 = 43$$

Slično:

$$|A_0A_8| = 21 + 64 = 85$$

$$|A_0A_9| = 43 + 128 = 171$$

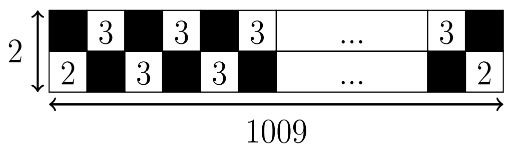
$$|A_0A_{10}| = 85 + 256 = 341$$

$$|A_0A_{11}| = 171 + 512 = 683$$

Uočili smo da se dodaju stepeni dvojke i da je prvi sabirak odredjen tako što od stepena dvojke u prethodnom rastojanju oduzimamo prvi broj npr. $43 = 64 - 21{,}85 = 128 - 43$ itd.

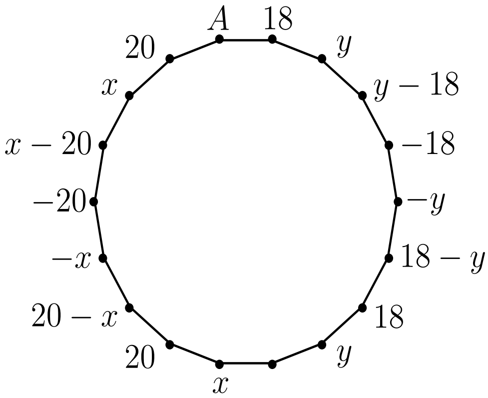
24. **Rješenje: V)**

25. **Rješenje: G) 3025** Broj 2018 rastavimo na proste činioce i dobijemo da je $2018 = 2 \cdot 1009$. Dakle, Danica je nacrtala pravougaonik 2×1009 na ovaj način



i tako dobijamo maksimalan zbir brojeva. Dakle, $3 \cdot 1007 + 2 + 2 = 3021 + 4 = 3025$

26. **Rješenje: G) 38**



Označimo sa x i y tjemena kao na slici. Tada po uslovu zadatka (svako tjeme je numerisano brojem koji predstavlja zbir brojeva kojima su numerisana susjedna tjemena) dobijamo vrijednost u tjemenima kao na slici. Dakle, tjeme A je numerisano sa 38.

27. **Rješenje: G) 48** Brojevi 6 i 3 su djeljivi sa 3, tako da oni moraju biti u jednoj koloni.

6	X	X
3	X	X

Ostali su nam brojevi 1, 2, 4 i 5. Ako broj 1 stavimo u jedan kvadrat , znamo da u toj vrsti mora biti jedan oid brojeva 2 ili 5, a u koloni drugi broj (ako je u vrsti broj 5 u koloni je broj 2 i obratno).

1	2
5	4

1	5
2	4

Sve ostale kombinacije ova 4 broja su ustvari rotacije ovoga kvadrata, samim tim dobijamo ukupno 8 različitih kombinacija za ova 4 broja. Njima možemo da dodamo kolonu sa brojevima 6 i 3 na 3 načina:

6	X	X
3	X	X

X	6	X
X	3	X

X	X	6
X	X	3

Ovo nam daje 24 kombinacije , jos dodate 24 kombinacije dobijamo mijenjanjem pozicija brojevima 3 i 6. Dakle 48 načina.

28. **Rješenje: A)**

29. **Rješenje: V) 4** Za $n = 4$, $n^3 = 64$ dakle nije kocka dimenziije 4 jer jedna obojena ima 16 kockica i preostaje 48 kockica. Bojanjem još jedne strane dobijamo manje od 45 neobojenih. Ako je $n = 5$. Ukupan broj malih kockica je $n^3 = 125$. Ako oboji donju i gornju stranu dobije $25 \cdot 2 = 50$ obojenih. Tada je $125 - 50 = 75$ neobojenih. Ako sada oboji i bočne strane to je $2 \cdot 5 \cdot 3 = 30$ kockica. Dakle neobojenih je $75 - 30 = 45$. Dakle obojio je 4 strane.

30. **Rješenje: G)**

Rješenja, godina 2019.

1. **Rješenje: G) 419**

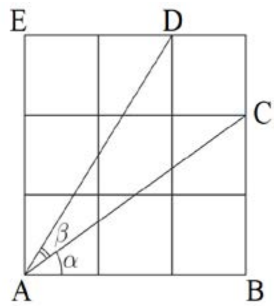
$$20 \cdot 19 + 20 + 19 = 20(19 + 1) + 19 = 20 \cdot 20 + 19 = 400 + 19 = 419$$

2. **Rješenje: B) 7 minuta i 6 sekundi**

$$1min11s \cdot 6 = 6min66s = 7min6s$$

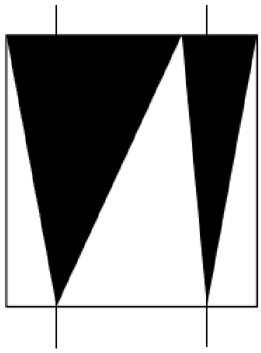
3. **Rješenje: D)**
4. **Rješenje: V)** Najmanji zbir je 3 a najveći 18. Svaki od zbirova od 4 do 17 je moguće dobiti. Npr. $4 = 1 + 1 + 2$ itd. Kako brojeva od 3 do 18 ima 16, odgovor je V.

5. **Rješenje: B)**
6. **Rješenje: B)** Ako udje na jednu može izaći na preostalih 4, isti je slučaj sa ostalima. Kako je $5 \cdot 4 = 20$, odgovor je B.
7. **Rješenje: V) 31** Najveći broj djeljiv sa 3 a manji od 97 je 96. $96 : 3 = 32$ tj. kenguri su npr. teški 31kg, 32kg i 34kg.
8. **Rješenje: B)** $2\alpha + \beta = 90°$

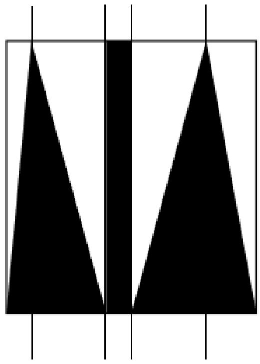


Kako su $\triangle ABC$ i $\triangle ADE$ podudarni slijedi da je $\measuredangle EAD = \alpha$. Dakle, $2\alpha + \beta = 90°$.

9. **Rješenje: A)** Očigledno je polovina kvadrata na slici pod D obojena u crno. Ako na slici B primjenimo



ovaku podjelu kvadrata, vidimo da je ponovo polovina obojena u crno. Slično na slikama pod V i G. Dakle odgovor je A jer je



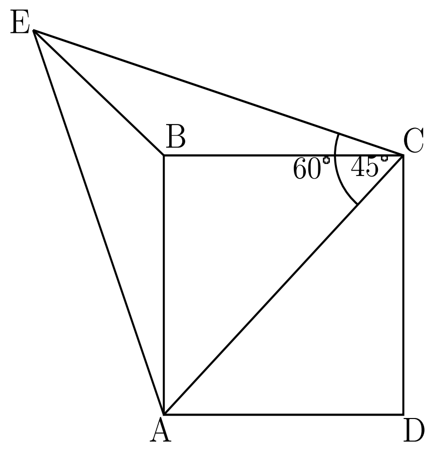
više od pola obojeno u crno.

10. **Rješenje: B)**

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & & & \\ 1 & 5 & 7 & 2 & 8 \\ 2 & 2 & * & 0 & 4 \\ * & * & 3 & 3 & 1 \\ \hline 5 & 7 & 2 & 6 & 3 \end{array}$$

Kako je $7 + 3 = 10$ a zbir tj. cifra stotina u zbiru je 2 dobijamo da sakriven broj na drugom listu mora biti 2 i prenosimo 1. Kako je $1 + 5 + 2 = 8$ dobijamo da je cifra hiljada na trećem papiru 9 i prenosimo 1. Dalje, $1+1+2 = 4$ pa je prva cifra na trećem papiru 1. Odgovor je 1, 2 i 9.

11. **Rješenje: V)** $135°$

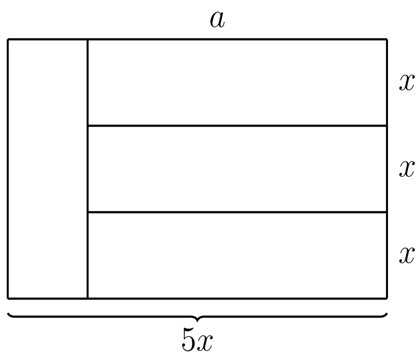


Kako je $\measuredangle ACB = 45°$ a ugao $\measuredangle ACE = 60°$ dobijamo da je $\measuredangle BCE = 5°$. Ugao $\measuredangle CEB = 60° : 2 = 30°$. Dakle, $\measuredangle CBE = 180° - (15° + 30°) = 180° - 45° = 135°$.

12. **Rješenje: V)** $\frac{14}{45}$ Vrijednost $\frac{a}{b} + \frac{c}{d}$ je najmanja za $b = 10$, $d = 9$, $a = 2$ i $b = 1$. Tada je:

$$\frac{2}{10} + \frac{1}{9} = \frac{18+10}{90} = \frac{28}{90} = \frac{14}{45}$$

13. **Rješenje: D)** Označimo dužine stranica na sledeći način:



Iz uslova da su površine pravougaonika jednake dobijamo:

$$ax = 3x(5x - a)$$

$$ax = 15x^2 - 3xa$$

tj.

$$15x^2 - 4ax = 0 \Big/ : X$$

$$15x - 4a = 0$$

$$15x = 4a \Big/ : \frac{1}{15a}$$

Odnosno,

$$\frac{x}{a} = \frac{4}{15}$$

14. **Rješenje: B)**

15. **Rješenje: G) 40km** Označimo sa x dužinu triatlona. Tada je:

$$x - (\frac{3}{4}x + \frac{1}{5}x) = 2km$$

$$x - \frac{15+4}{20}x = 2km$$

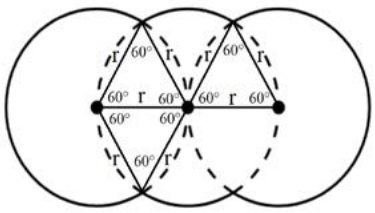
$$x - \frac{19}{20}x = 2km$$

$$\frac{1}{20} = 2km$$

Dakle plivanje je $\frac{1}{20}$ puta. $20 \cdot 2km = 40km$

16. **Rješenje: B)** $\frac{1}{2}$ Ako je odnos 1:7 za litar soka potrbno je $\frac{1}{8}l$ koncetrovanog sirupa i $\frac{7}{8}$ vode. Za dva litra soka potrebno je $\frac{2}{8}l = \frac{1}{4}l$ koncentrovanog soka. U boci imamo $\frac{1}{2}l$ koncentrovanog soka, dakle treba iskoristiti $\frac{1}{2}$ koncentrovanog soka.

17. **Rješenje: A)** $\frac{10\pi r}{3}$



$$O = 2r\pi - \frac{1}{3}2r\pi + \frac{1}{6}2r\pi + \frac{1}{6}2r\pi + 2r\pi - \frac{1}{3}2r\pi =$$

$$= 4r\pi - \frac{2}{3}r\pi = \frac{12r\pi - 2r\pi}{3} = \frac{10r\pi}{3}$$

18. **Rješenje: V) 10**

$$3a + 4b = \overline{ab}$$

$$3a + 4b = 10a + b$$

$$3a = 7b$$

Kako su a i b jednocifreni brojevi različiti od nule, slijedi da je $a = 3$ i $b = 7$, dakle $a + b = 10$.

19. **Rješenje: G) 10** Iz slučaja da je broj krušaka u kutijama različit dobijamo:

$$1 + 2 + 3 ... + n = 60$$

Kako je $1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$ dobijamo

$$\frac{n(n+1)}{2} = 60 / \cdot 2$$

$$n(n+1) = 120$$

Kako je $10 \cdot 11 = 110$ i $11 \cdot 12 > 120$ imamo da je

$$n = 10$$

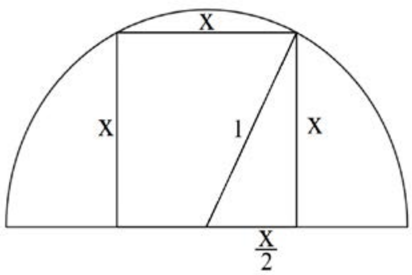
Broj krušaka u kutijama može biti na primjer

$$\underline{1 + 2 + 3 + ... + 9} = \frac{9 \cdot 10}{2} = 9 \cdot 5 = 45 + 15 = 60$$

i u poslednjoj je 15, da bi zbir bio 60. Broj jabuka u svakoj je $60 : 10 = 6$.

20. **Rješenje: D)**

21. **Rješenje: A)** $\frac{4}{5} cm^2$



$$x^2 + \frac{x^2}{4} = 1^2 cm^2$$
$$\frac{5x^2}{4} = 1cm^2$$
$$x^2 = \frac{4}{5} cm^2$$
$$P = x^2 = \frac{4}{5} cm^2$$

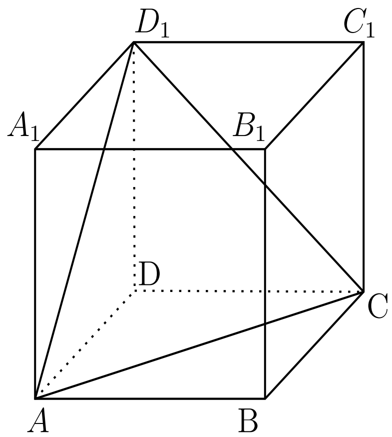
22. **Rješenje: D)**
23. **Rješenje: B)** 444

(123)(456)(789)(101)(112)(131)(415)(161)(718)(192)(021)(222)(324)(252)

(627)(282)(930)(313)(233)(343)(536)(373)(839)(404)(142)(434)(445)(467)...

444 jedino možemo dobiti ako 4445 pravi grupu (444) ali to nije slučaj.

24. **Rješenje: G)** 8

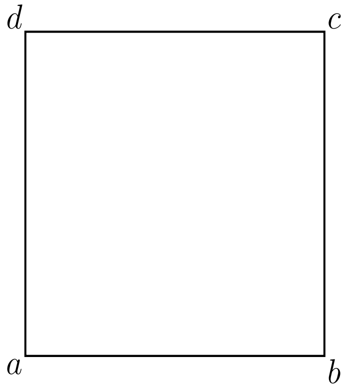


Ravni koje sadrže tjeme A i samo još 2 tjemena su $r(A, C, B_1)$, $r(A, C, D_1)$. Sve one sadrže dijagonalu AC. Slično po dvije ravni koje sadrže dijagonale BD, A_1C_1 i D_1B_1. Dakle ima ih $4 \cdot 2 = 8$.

25. **Rješenje: V) samo Q** Mrav do svakog od čvorova T, S, P i R može doći samo nakon parnog broja koraka. Jedino do čvora Q dolazi nakon neparnog broja koraka. Dakle nakon 2019 koraka može doći jedino do čvora Q.

26. **Rješenje: V)** 2 Jedino rješenje je za $a = 1x1$, gdje je x cifra veća od 5, jer na primjer ako je $a = 2x2$, $b = 2 \cdot 2x2 + 1$, x tada mora biti najmanje 5, ali onda c nije trocifren broj. Slično za $a = 3x3$ itd. Provjerom dobijamo da su jedina rješenja sledeća: $a = 181$, tada je $b = 363$ i $c = 727$, i za $a = 191$, $b = 383$ i $c = 767$. Dakle, dva rješenja.

27. **Rješenje: G)** 35



Ne umanjujući opšstost $a|b$, $a|d$, $c|b$, $c|d$, $1<a<c<b<d$ a ne dijeli c i b ne dijeli d. Najmanji kandidat za a i c su 2 i 3. U ovom slučaju najmanja vrijednost za b je 6, ali kako je d djeljivo sa 2 i 3 djeljivo je i sa 6 i dobijamo kontradikciju za b je 12, a najmanji broj veći od 12 a djeljiv sa 2 i 3, i nije djeljiv sa 12 je broj 18. Tada je $a + b + c + d = 2 + 3 + 12 + 18 = 35$. Ako krenemo sa $a = 2$, $c = 5 \implies b = 20$, $c = 30$ (lošiji izbor). Za $a = 3$, $c = 4 \implies b = 24$, $c = 36$, takodje lošiji izbor su ostali slučajevi koji daju veći zbir. Dakle, rješenje je $a = 2$, $c = 3$, $b = 12$, $d = 18$ i zbir je 35.

28. **Rješenje: B)** 2 Kako je $70 = 7 \cdot 2 \cdot 5$ a broj 7 nije prost činilac nijednog od preostalih brojeva dobijamo da broj 70 moramo izbaciti. Preostale brojeve napišemo na sledeći način:

$$10 = 2 \cdot 5$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

$$30 = 3 \cdot 2 \cdot 5$$

$$40 = 4 \cdot 2 \cdot 5$$

$$50 = 25 \cdot 2$$

$$60 = 4 \cdot 3 \cdot 5$$

$$80 = 16 \cdot 5$$

$$90 = 9 \cdot 2 \cdot 5$$

Ako izdvojimo prvo potpune kvadrate proizvod ovih brojeva je:

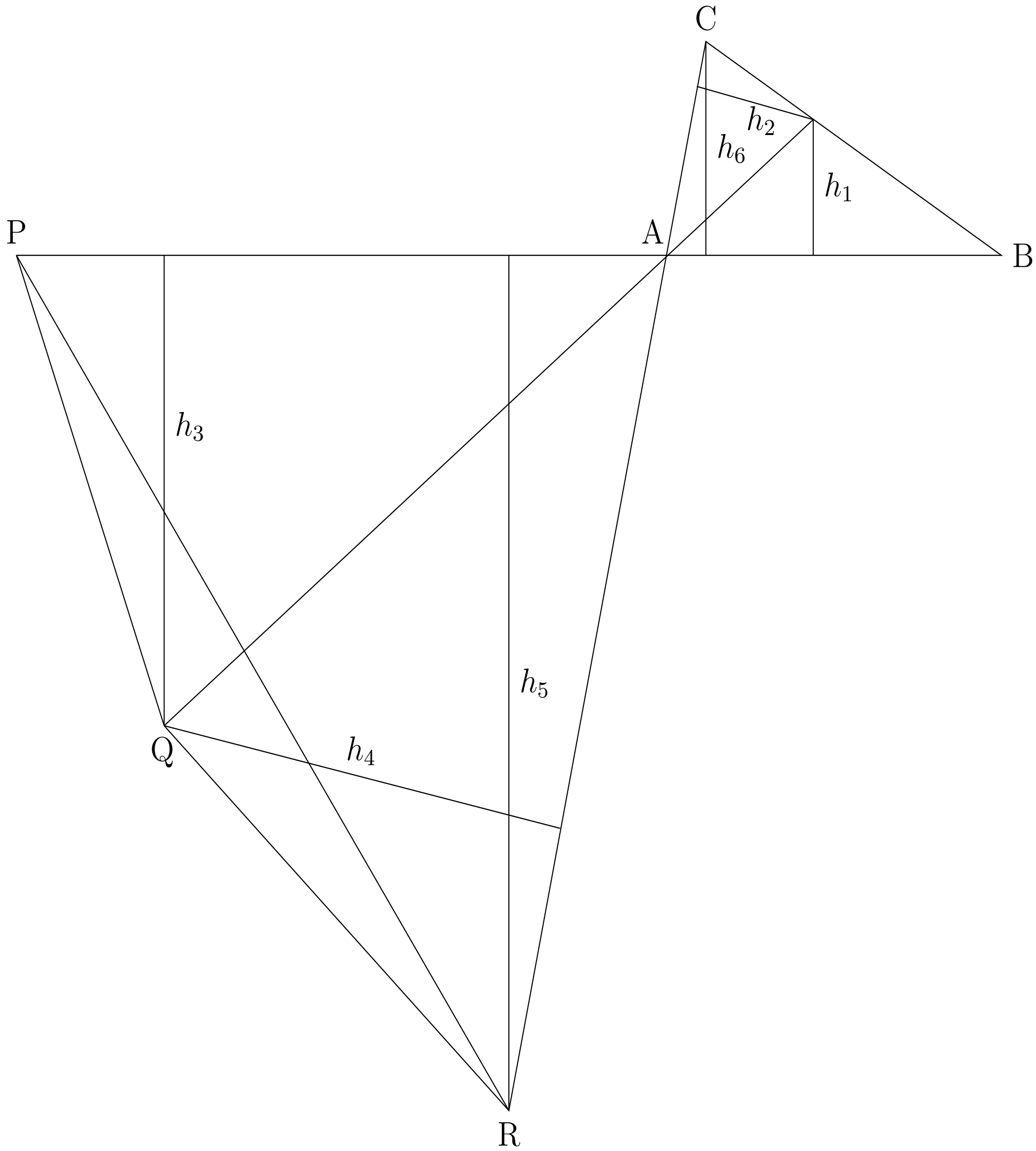
$$4 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5 =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 9 \cdot 2^5 \cdot 3^2 \cdot 5^7 =$$

$$= 4 \cdot 4 \cdot 25 \cdot 4 \cdot 16 \cdot 9 \cdot (2^2)^2 \cdot 2 \cdot 3^2 \cdot (5^2)^2 \cdot 5^2 \cdot 5$$

Dakle treba izbaciti broj $2 \cdot 5 = 10$.

29. **Rješenje: A) S**



$$P_{\triangle ABC} = P1 + P2$$

$$CD = DB \wedge \text{ jednake dužine visina iz tjemena A} \implies P_1 = P_2$$

$$\underline{\text{Talesova teorema i prave PB i QD}}$$

$$1)\frac{h_1}{h_3} = \frac{1}{3} \implies h_3 = 3 \cdot h_1$$

$$2)PA = 2 \cdot AB$$

$$1) \wedge 2) \implies P_{\triangle PQA} = 6 \cdot P_{\triangle ADB} = 6 \cdot P_1$$

$$\underline{\text{Talesova teorema i prave RC i QD}}$$

$$1)\frac{h_2}{h_4} = \frac{1}{3} \implies h_4 = 3 \cdot h_2$$

$$2)RA = 2 \cdot AC$$

$$1) \wedge 2) \implies P_{\triangle QRA} = 12 \cdot P_{\triangle ADC} = 12 \cdot P_2$$

$$\underline{\text{Talesova teorema i prave PB i RC}}$$

$$1)\frac{h_5}{h_6} = \frac{4}{1} \implies h_5 = 4 \cdot h_6$$

$$2)PA = 2 \cdot AB$$

$$1) \wedge 2) \implies P_{\triangle PRA} = 8 \cdot P_{\triangle ABC}$$

$$(P_1 = P_2 = \frac{P}{2})$$

$$P_{\triangle PQR} = P_{\triangle PQA} + P_{\triangle QRA} - P_{\triangle APR}$$

$$= 6P_1 + 12P_2 - 8P$$

$$= 6\frac{P}{2} + 12\frac{P}{2} - 8P$$

$$= 3P + 6P - 8P$$

$$= 9P - 8P$$

$$= P = P_{\triangle ABC}$$

28. **Rješenje: V)**

Rješenja, godina 2019. fin

1. **Rješenje: A) 2017**

$$\frac{2021+x}{2} = 2019 \Big/ \cdot 2$$

$$2021 + x = 4038$$

$$x = 4038 - 2021$$

$$x = 2017$$

2. **Rješenje: D) više od 7**

$$\overline{abcd}$$

$$d = 3 \cdot (a+b+c) \ , \ 1 \leq d \leq 9$$

$$d \geq 3$$

$$d = 3 \ , \ a = 1 \ , \ b = c = 0$$

$$d = 6 \ , \ a+b+c = 2$$

$$a = 1 \ , \ b = 1 \ , \ c = 0$$

$$a = 1 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1$$

$$d = 9 \ , \ a+b+c = 3$$

$$a = 1 \ , \ b = 1 \ , \ c = 1$$

$$a = 1 \ , \ b = 2 \ , \ c = 0$$

$$a = 1 \ , \ b = 0 \ , \ c = 2$$

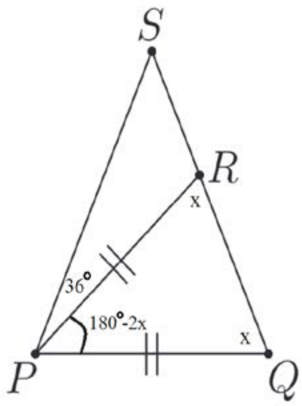
$$a = 2 \ , \ b = 1 \ , \ c = 0$$

$$a = 2 \ , \ b = 0 \ , \ c = 1$$

$$a = 3 \ , \ b = 0 \ , \ c = 9$$

$$1003 \ , \ 1016 \ , \ 1106 \ , \ 1016 \ , \ 1119 \ , \ 1209 \ , \ 1029 \ , \ 2109 \ , \ 2019 \ , \ 3009$$

3. **Rješenje: D)** $72°$



$$SP = SQ \ , \ PQ = PR$$

$$\sphericalangle SPR = 36^\circ$$

$$\sphericalangle PQR = \sphericalangle QPR (\text{iz } PQ = PR)$$

$$\sphericalangle SPQ = \sphericalangle PQS$$

$$36^\circ + 180^\circ - 2x = x$$

$$216^\circ = 3x \qquad \Big/ : 3$$

$$72^\circ = x \rightarrow \sphericalangle PQR = 72^\circ$$

4. **Rješenje: B) 1**

$$\underline{2018}\ \underline{9102}\ 2018\ 9102 \ldots$$

$$2019 : 4 = 504(3)$$

Kako je broj 504 paran, poslednja četvorka (prije ostatka od 3 cifre) 9102. Dakle, iz ostatka 3 dobijamo da je to treća cifra broja 2018. Rješenje je 1.

5. **Rješenje: A)** 30%

$$\frac{a}{b} \text{ - polazni razlomak}$$

$$\frac{\frac{140}{100}a}{(\frac{100}{100} - \frac{x}{100})b} = 2\frac{a}{b}$$

$$\frac{140a}{(100-x)b} = 2\frac{a}{b} \qquad \Big/ : 2$$

$$\frac{70a}{(100-x)b} = \frac{a}{b} \rightarrow 100 - x = 70$$

$$x = 30$$

6. **Rješenje: V) 8**

$$\text{Zbir uglova mnogougla je } (n-2)\cdot 180^\circ$$

$$(n-2)\cdot 180 = 150 + 120 + \ldots + 150 + 120$$

$$(n-2)\cdot 180 = \frac{n}{2}\cdot 150 + \frac{n}{2}\cdot 120 \qquad \Big/ \cdot \frac{2}{10}$$

$$(n-2)\cdot 36 = 15n + 12n$$

$$36n - 72 = 27n$$

$$36n - 27n = 72$$

$$9n = 72$$

$$n = 8$$

7. **Rješenje: V) 3**

$$3^{3^{(3^3)}} = 3^{3^{27}}$$

$$3^{(3^3)^3} = 3^{3^9}$$

$$(3^3)^{3^3} = 3^{3\cdot 3^3} = 3^{3^4}$$

$$3^{(3^{3^3})} = 3^{3^{27}}$$

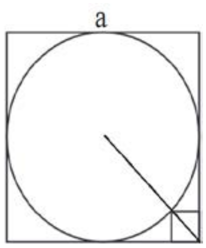
$$(3^{3^3})^3 = 3^{3\cdot 3^3} = 3^{3^4}$$

8. **Rješenje: G) G** Ako je na ostrvu A tačna su dva zapisa: prvi i poslednji. Slično, ako je na ostrvu B blago onda je tačan i drugi i četvrti zapis. Analogno, ako je na ostrvu V tačan je zapis i na trećem i na četvrtom mjestu. Dakle, tačan je četvrti zapis a ostali su netačni i blago je na ostrvu G.

9. **Rješenje: B)** $12 - 8\sqrt{2}$

$$P = 32$$

Dakle, stranica velikog kvadrata je $a = \sqrt{32}$, a dijagonala većeg kvadrata je:



$$d = a\sqrt{2} = \sqrt{32}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{64} = 8$$

Poluprečnik kruga je:

$$r = \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{32}}{2}$$

Tada je dijagonala manjeg kvadrata:

$$d_1 = \frac{8}{2} - \frac{\sqrt{32}}{2} = 4 - \frac{\sqrt{32}}{2} = 4 - \frac{\sqrt{16 \cdot 2}}{2} = 4 - \frac{4}{2}\sqrt{2} = 4 - 2\sqrt{2}$$

Kako je: $a^2 = a \cdot a = \frac{d}{\sqrt{2}} \cdot \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{d^2}{2}$

Dobijamo da je površina manjeg kvadrata:

$$P = \frac{d_1^2}{2} = \frac{1}{2}(4 - 2\sqrt{2})^2 =$$

$$= \frac{1}{2}(16 - 16\sqrt{2} + 8) = \frac{1}{2}(24 - 16\sqrt{2}) =$$

$$= 12 - 8\sqrt{2}$$

10. **Rješenje: A)** $x - y = 1$

A)

$$y = x - 1$$

$$2x^2 + (x-1)^2 = 2x(x-1)$$

$$2x^2 + x^2 - 2x + 1 = 2x^2 - 2y$$

$x^2 = -1$ ne može biti tačno za $x \in \mathbb{R}$

B)

$$x = y \ , \ 2x^2 + x^2 = 2x^2 \ , \ x^2 = 0 \ , \ x = 0$$

V)

Za $x = 2y$ dobijemo $2 \cdot 4y^2 + y^2 = 4y^2$, je tačno za x=y=0

G)

$$x + y = 0 \text{ tj. } y = -x$$

$2x^2 + x^2 = -2x^2$, ponovo tačno za $x = y = 0$

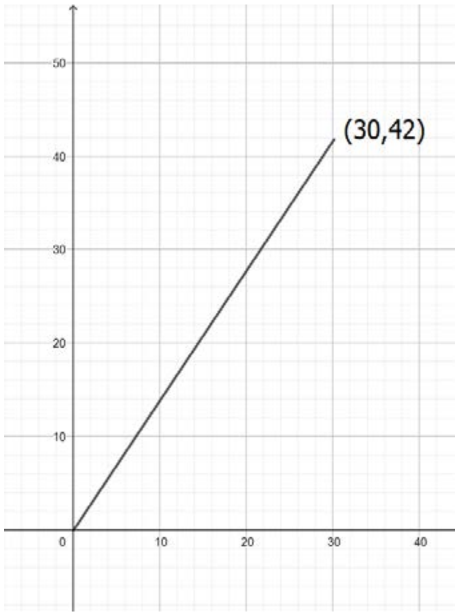
D)

Kvadratna jednačina ima više od jednog rešenja.

11. **Rješenje: D) 5** Iz jednačine prave kroz tačke (0,0) i (30,42) dobijamo:

$$y - y_0 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0)$$
$$y - 0 = \frac{42 - 0}{30 - 0}(x - 0)$$
$$y = \frac{42}{30}x$$
$$y = \frac{7}{5}x$$

To su tačke (5,7), (10,14), (15,21), (20,28) i (25,35).



12. **Rješenje: D) 769769**

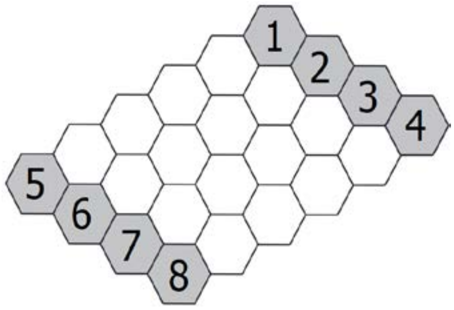
$$c + f = 9$$
$$b + e = 6 \text{ ili } b + e = 16$$

Dakle ili rešenje pod G) ili pod D). Za $b + e = 6$ imamo:

$$aecabf + dbfdec = 769769$$
$$a + d = 7 \text{ ili } a + d = 17$$
$$a + d \neq 17 \text{ jer tada sledeća cifra ne bi bila } 0$$
$$\text{Dakle } a + d = 7$$
$$c + f = 9$$
$$e + b = 6$$
$$a + d = 7$$

13. **Rješenje: D) 20**

Nacrtane šestouglove koji su obojani u sivo oznacimo sa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 i 8. Prebrojavamo tako što spajamo po jedan šestougao od obojenih označenih sa 1, 2, 3 i 4 sa jednim od šestouglova označenih sa 5, 6, 7, 8.(u svakom sledećem isključujemo slučaj koji smo vec prebrojali)



1 – 5 , 1 način

2 – 6 , 1 način

3 – 7 , 1 način

4 – 8 , 1 način

1 – 6 , 3 načina

2 – 7 , 3 načina

3 – 8 , 3 načina

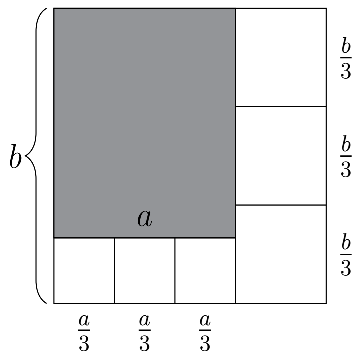
1 – 7 , 3 načina

2 – 8 , 3 načina

1 – 8 , 1 način

14. **Rješenje: A) najmanje 14 dječaka** Pretpostavimo da u razredu ima 13 dječaka i 18 djevojčica. Ako posmatramo grupu u kojoj je 18 djevojčica i dva dječaka dobijamo da nije zadovoljen uslov iz zadatka. Dakle u razredu je najmanje 14 dječaka.

15. **Rješenje: A) 36**



$$a + \frac{b}{3} = b$$

$$a = \frac{2b}{3} \implies b = \frac{3a}{2}$$

Označimo a P_S površinu sivog pravougaonika

$$P_S = a(b - \frac{a}{3}) = 42$$

$$ab - \frac{a^2}{3} = 42$$

$$\frac{3a^2}{2} - \frac{a^2}{3} = 42 \Big/ \cdot 6$$

$$9a^2 - 2a^2 = 42 \cdot 6$$

$$7a^2 = 42 \cdot 6 \Big/ : 7$$

$$a^2 = 6^2$$

$$a = 6$$

Najzad, $b = \frac{3}{2} \cdot a = \frac{3}{2} \cdot 6 = 9$

I obim je $O = 4 \cdot 9 = 36$

16. **Rješenje: B) 7**

Djelovi broja 12 su 1, 2, 3, 4, 6, 12.

Za $n = 2$ imamo tri mogućnosti $m = 2$, $m = 3$, $m = 6$

$$(\sqrt[m]{2})^6$$

Za $n = 3$ imamo dvije mogućnosti $m = 2$, $m = 4$

$$(\sqrt[m]{2})^4$$

Za $n = 4$ imamo jednu mogućnost $m = 3$

$$(\sqrt[m]{2})^3$$

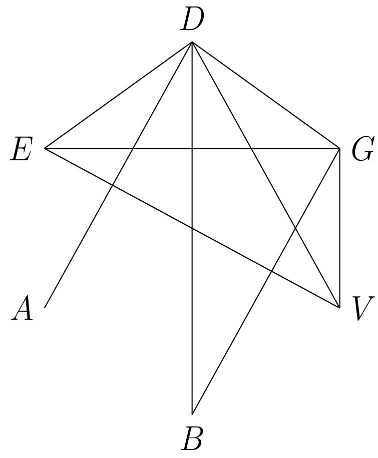
Za $n = 6$ imamo jednu mogućnost $m = 2$

$$(\sqrt[m]{2})^2$$

Za $n = 12$ nema rješenja

$$\sqrt[m]{2}$$

17. **Rješenje: V) 3**



Počnimo od osobe D. Rukovala se sa svima jer je imala pet rukovanja. Kako se osoba G rukovala sa četvoro, a A se rukovao samo sa jednom osobom (dakle osobom D), slijedi da se G rukovala sa D, E, B i V.Kako se B rukovala sa dvije osobe (D i G) imamo da se V pored osoba G i D rukovala i sa E. Dakle osoba E se rukovala sa osobama D, G i V, tj. sa tri osobe.

18. **Rješenje: D) 6:5**

$$P_{\triangle AED} = P_{\triangle DEF} = P_{\triangle EFC} = P_{\triangle FCB}$$

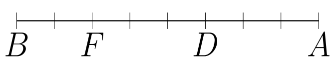
Iz $P_{\triangle EFD} = P_{\triangle AED}$ i činjenice da $\triangle EFD$ i $\triangle AED$ imaju jednake visine (visina iz tjemena E), odavde slijedi da su im i osnovice jednakih dužina, tj. :

$$FD = DA$$

Posmatramo $\triangle BFC$ i $\triangle ABC$

$$P_{\triangle BFC} = \frac{1}{4} P_{\triangle ABC}$$

Kako ova dva trougla takodje imaju iste visine (visina iz tjemena C) dobijamo da je $BF = \frac{1}{4}AB$
Podijelimo duž AB na osmine i dobijamo raspored kao na slici.



$$BF : FD : DA = 2 : 3 : 3$$

$$AF : BD = 6 : 5$$

19. **Rješenje: B) 23**

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8\}$$

$$B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$$

$$A \cap S = \{3, 4\}$$

Iz $B \cup S = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ dobijamo da su 3, 7 i 9 elementi skupa S.

Iz $A \cap S = \{3, 4\}$ dobijamo da je i $4 \in S$

Dakle, $2 + 4 + 7 + 9 = 23$

20. **Rješenje: B) 6**

Na tabeli je $4 \cdot 5 = 20$ polja, a na pečatu obojenih 4. Dakle najmanje treba udariti 5 puta. Označimo sa $1, 2, 3, 4, 5$ i 6 prvi, drugi, treći, četvrti, peti i šesti udar pečata. Ako udaramo kao na slici šest puta obojićemo cijelu tablu.

1	3	1, 5	3	5
2	4	2, 6	4	6
1	3	1, 5	3	5
2	4	2, 6	4	6

21. **Rješenje: G) 36**

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

2 se na dva načina može preslikati (u 2 ili 4),
4 se takodje može na dva načina preslikati (u 2 ili 4),
1 se na tri načina može preslikati (u 1, 3 ili 5),
3 takodje na tri načina.
Dakle broj mogućnosti je :

$$2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

22. **Rješenje: B) 12** Označimo sa a, b, c, d, e, f, g i h brojeve iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, pri čemu je različitim slovom označen različit broj.

$$a+b+c=c+d+e \implies a+b=d+e$$

a	b	c
h		d
g	f	e

$$c+d+e=e+f+g \implies c+d=f+g$$

$$e+f+g=g+h+a \implies e+f=h+a$$

$$g+h+a=a+b+c \implies g+h=b+c$$

$$a+b+c+d+e+f+g+h=1+2+3+4+5+6+7+8=\frac{8\cdot 9}{2}=4\cdot 9=36$$

Postmatramo brojeve u ugao polja. Tada:

$$x \in \{1,2,3,4,5,6,7,8\}$$

$$8+1+2+x \neq 10$$

$$7+1+2+x \neq 10$$

$$6+1+2+x \neq 10 \text{ , jer } x \neq 1$$

$$5+1+2+x \neq 10 \text{ , jer } x \neq 2$$

Ostaje još zbir $4+3+2+1=10$

Neka je

4	a	2
d		b
1	c	3

i dobijamo:

$$4+a=b+3$$

$$b+2=1+c$$

$$c+3=d+4$$

$$1+d=a+2$$

$c=b+1$, $c=d+1 \implies b=d$ što je nemoguće

Slično :

4	a	1
d		b
3	c	2

$$4 + a = b + 2$$

$$b + 1 = c + 3$$

$$c + 2 = d + 4$$

$$d + 3 = a + 1$$

Dobijamo:

$$d = c - 2 \ , \ d = a - 2 \implies a = c$$

Preostala dva rasporeda brojeva 1, 2, 3, 4 u ugaona polja su simetrična posmatranim, pa su nemogući. Pretpostavimo da je zbir 12 i tada dobijamo:

$$8 + 1 + 2 + x \neq 12 \ , \ x \neq 1$$

$$7 + 1 + 2 + x \neq 12 \ , \ x \in \{1, 2, ..., 8\}$$

$$6 + 1 + 2 + 3 = 12$$

Ako rasporedimo u četiri ugaona polja brojeve 6, 1, 3, 2 dobijamo:

6	5	1
4		8
2	7	3

Dakle odgovor je 12.

23. **Rješenje: V) 3** Označimo sa : _ _ _ _ _ pet osoba tačno po redosljedu izlaženja(dakle prva linija označava osobu koja je prva izašla itd.). Predzadnja osoba kaže da je u sobi više lupeža. Ako je predzadnja osoba koja je izašla vitez, onda je zadnja osoba lupež, ako je predzadnja osoba koja je izašla lupež onda je zadnja osoba vitez , tj.

$$\_\ \_\ \_\ \underline{\text{V}}\ \underline{\text{L}} \text{ ili } \_\ \_\ \_\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{V}}$$

U oba slučaja ostaje jednak broj lupeža i vitezova pa onda treća osoba koja je izašla mora biti lupež, tj.

$$\_\ \_\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{V}}\ \underline{\text{L}} \text{ ili } \_\ \_\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{V}}$$

Sada je zaista više lupeža pa je osoba koja je druga izašla vitez , tj.

$$\_\ \underline{\text{V}}\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{V}}\ \underline{\text{L}} \text{ ili } \_\ \underline{\text{V}}\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{L}}\ \underline{\text{V}}$$

Dobijamo da je prva osoba lupež jer je ostao jednak broj lupeža i vitezova. Dakle bilo je tri lupeža na početku.

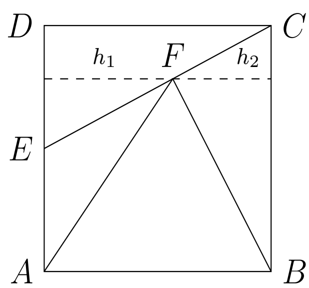
24. **Rješenje: B) 11** Ako je a potpun kvadrat onda je $a \in \{1, 4, 9\}$. Za $a = 1$ dobijamo da je $b = 6$ ($\overline{1b}$ je potpun kvadrat) i $c = 4$ ($\overline{6c}$ je potpun kvadrat). To su brojevi 1, 16, 64, 144 i $a + b + c = 1 + 6 + 4 = 11$.
Ako je $a = 4$, onda je $b = 9$ ali tada $\overline{9c}$ ne može biti potpun kvadrat.
Slično za $a = 9$, $\overline{9b}$ ne može biti potpun kvadrat.

25. **Rješenje: V)** $\frac{5}{12}a^2$ Označimo sa h_1 i h_2 visine iz tjemena F (kao na slici).

$$P_{\triangle ABF} = ?$$

$$P_{\triangle EAF} = P_{\triangle BCF}$$

$$P_{\triangle EAF} = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} \cdot h_1\right) = \frac{ah_1}{4}$$



$$P_{\triangle BCF} = \frac{a \cdot h_2}{2} \implies \frac{h_1}{4} = \frac{h_2}{2} \qquad \Big/ \cdot 4$$

$$h_1 = 2h_2 \text{ i } h_1 + h_2 = a \implies h_1 = \frac{2}{3}a\ ,\ h_2 = \frac{1}{3}a$$

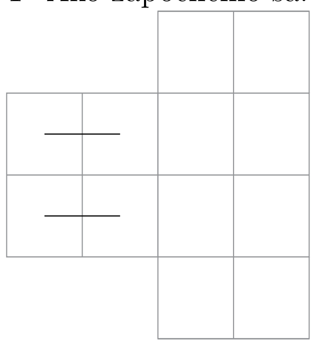
$$P_{\triangle EAF} = P_{\triangle BCF} = \frac{a \cdot \frac{1}{3}a}{2} = \frac{a^2}{6}$$

$$P_{\triangle EDC} = \frac{\frac{a}{2} \cdot a}{2} = \frac{a^2}{4}$$

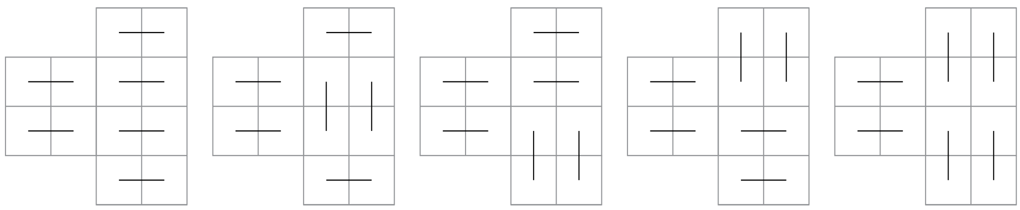
$$P_{\triangle ABF} = P_{\square ABCD} - (P_{\triangle EAF} + P_{\triangle BCF} + P_{\triangle EDC}) =$$
$$= a^2 - \left(\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{4}\right) = a^2 - \left(\frac{a^2}{3} + \frac{a^2}{4}\right) =$$
$$= a^2 - \frac{7a^2}{12} = \frac{5}{12}a^2$$

26. **Rješenje: G) 11**

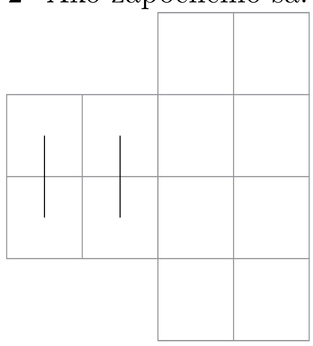
1° Ako započnemo sa:



Moguće kombinacije su:

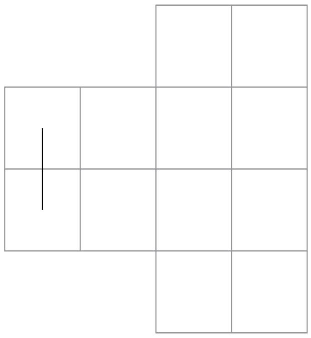


2° Ako započnemo sa:

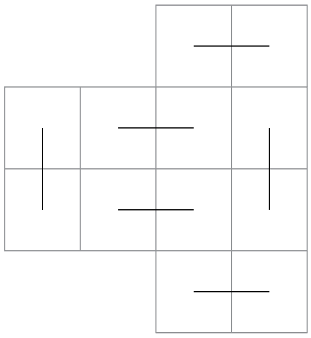


Imamo isti broj mogućih kombinacija kao što smo imalu u slučaju 1°

3° Ako započnemo sa:



Jedina drugačija kombinacija je:



Ukupan broj kombinacija: $5 + 5 + 1 = 11$

27. **Rješenje: A) -11**

$$f(x) = px^7 + qx^3 + rx - 4 \ , \ p, q, r \in \mathbb{R}$$

$$f(-7) = 3 \ , \ f(7) = ?$$

$$f(7) = -p(-7)^7 - q(-7)^3 - r(-7) - 4 = -(p(-7)^7 + q(-7)^3 + r(-7) + 4) =$$

$$= -(p(-7)^7 + q(-7)^3 + r(-7) - 4 + 4) - 4 =$$

$$= -f(-7) - 4 - 4 = -3 - 8 = -11$$

28. **Rješenje: A) 1** Djelioci broja $3a$ su 1, 3, a i $3a$. Takodje $a \neq 1$ iz uslova zadatka i a nije prost broj jer bi i brojevi $3a$ i $5a$ imali po tačno 4 djelioca. Broj a ne može biti ni paran broj veći od 2 jer bi tada broj $3a$ imao više od 4 pozitivna djelioca. Dakle, a je neparan broj koji nije prost. Najmanji takav broj je 9.

Za $a = 9$ broj $3 \cdot 9 = 27$ ima tačno 4 pozitivnih djelilaca $(1, 3, 9, 27)$

$$\text{Dalje, } 5 \cdot 9 = 45 \text{ ima tačno 6 pozitivnih djelilaca} (1, 3, 5, 15, 9, 45)$$

$$\text{Tada je } 2019 \cdot 9 = 18171, \text{ pa je prva cifra 1}$$

29. **Rješenje: V) 12** Medju brojevima 1, 2, 3, 4...17 jedino su brojevi 16 i 17 takvi da postoji samo po 1 broj koji kad saberemo sa 16 (ili 17) daje potpun kvadrat. Iz tog razloga dati niz počinje sa 17 i završava se sa 16 (ili obratno). Dakle, niz je:

$$17, 8, 1, 15, 10, 6, 3, 13, 12, 4, 5, 11, 14, 2, 7, 9, 16$$

Na devetom mjestu je broj 12.

30. **Rješenje: V)** $13 < c \leq 15$

ILUSTRACIJE

https://www.freepik.com/ *flaticon*

kengur.me