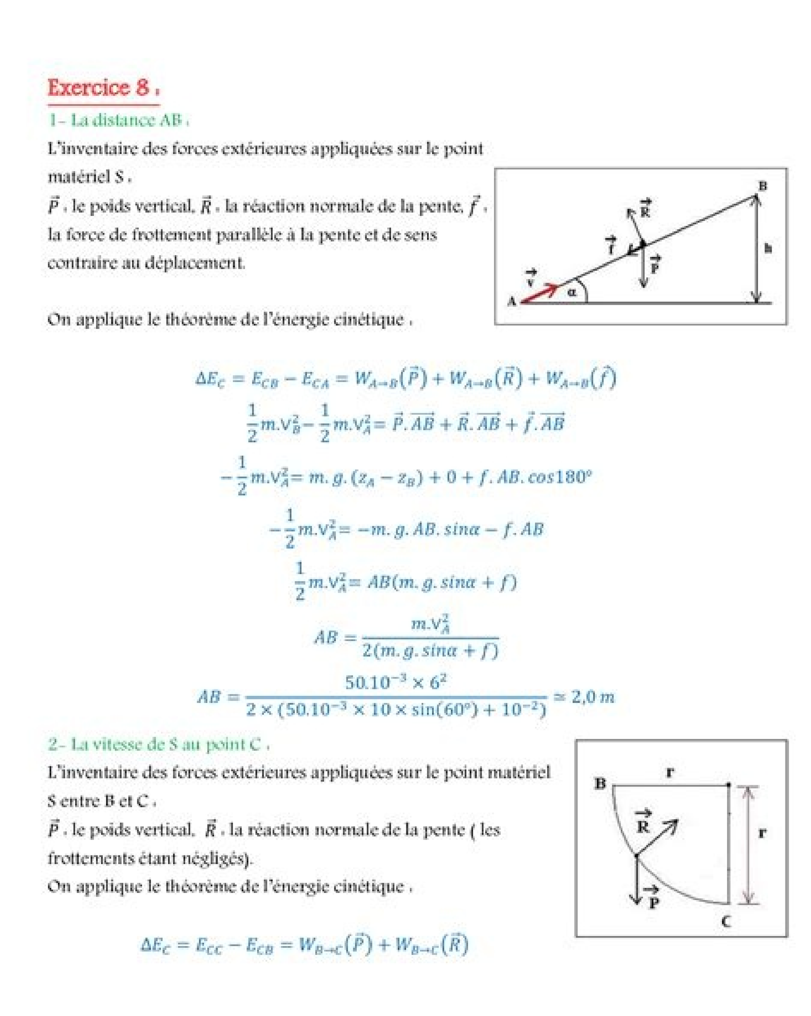
Théorème du moment cinétique exercices corrigés pdf

Soit un électron ayant une trajectoire circulaire autour du noyau d’un atome. On donne : Le rayon de sa trajectoire : $r=5{,}3\times 10^{-11}\,\mathrm{m}$; Sa fréquence de rotation à vitesse constante : $f=6{,}6\times 10^{15}\,\mathrm{Hz}$; La masse de l’électron : $m_\mathrm{e}=9{,}1\times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$. Calculer son moment cinétique par rapport au centre du noyau, donner le résultat avec le bon nombre de chiffres significatifs (et utiliser la mémoire de votre calculatrice pour ne pas utiliser arrondir les résultats des calculs intermédiaires). La Lune a un mouvement circulaire uniforme autour de la Terre. On donne : Le rayon de sa trajectoire : $r=3{,}8\times 10^{5}\,\mathrm{km}$; Sa période de révolution autour de la Terre : $T=27{,}3\,\mathrm{jours}$; La masse de la Lune : $m_\mathrm{L}=7{,}3\times 10^{22}\,\mathrm{kg}$. Calculer le moment cinétique de la Lune par rapport au centre de la Terre avec les mêmes précautions. On considère un satellite de masse 1 tonne en orbite elliptique autour de la Terre. Le satellite se maintient sur cette trajectoire car il est soumis à la force gravitationnelle qu’exerce sur lui la Terre. Cette force est en permanence dirigée vers le centre de la Terre.On note : O le centre de la Terre qui est un des foyers de l’ellipse ; C le centre de l’ellipse ; A l’apogée du satellite (point de l’orbite le plus éloignée de la surface de la Terre) ; P son périgée (point de l’orbite le plus proche de la surface de la Terre) ; A’ le point de la surface de la Terre qui fait face à A, l’apogée du satellite ; P’ le point de la surface de la Terre qui fait face à P, le périgée du satellite ; S le point tel que $\overrightarrow{CS}$, vertical dirigé vers le haut, représente le demi-petit axe de l’ellipse. On donne les grandeurs suivantes : Distance $\mathrm{CS} = 16715\,\mathrm{km}$; Distance $\mathrm{AA'} = 35000\,\mathrm{km}$; Distance $\mathrm{PP'} = 350\,\mathrm{km}$; Distance $\mathrm{OA'}=\mathrm{OP'} = R_\mathrm{T} = 6400\,\mathrm{km}$; On considère que le satellite est en mouvement dans un référentiel galiléen dont le centre est situé au centre de la Terre. Réaliser une figure comportant toutes les indications de l’énoncé. Représenter le satellite en S avec sa vitesse $\overrightarrow{v}$ et les vecteurs polaires $\overrightarrow{u}_r$ et $\overrightarrow{u}_{\theta}$. La vitesse en S est $v_S=14650\,\mathrm{km.h^{-1}}$. Calculer le moment cinétique du satellite en S par rapport au point O (un angle permettant de repérer le satellite peut être utile). En appliquant le théorème du moment cinétique, trouver la vitesse du satellite à son apogée A et à son périgée P. Un enfant glisse assis le long d’un toboggan. Celui-ci est une portion de cercle de centre O et de rayon $2.7\,\mathrm{m}$.Le centre de gravité de l’enfant, noté G, glisse tout au long de la descente à $20\,\mathrm{cm}$ au dessus du toboggan. L’angle que fait le rayon OG de la trajectoire de l’enfant avec l’horizontale est noté θ. Il est représenté sur la figure ci-contre. Initialement, l’enfant s’élance d’une position $\theta_0 = 15^{\circ}$, sans vitesse initiale.En sortie du toboggan, l’angle θ vaut 90°. On considère que tout frottement est négligeable. Le toboggan Indiquez sur le schéma les forces qui s’exerce sur G. Appliquez le théorème du moment cinétique au point G afin de déterminer l’équation de son mouvement. En déduire l’expression de la vitesse de l’enfant en fonction de l’angle θ. Indice : en multipliant les termes de l’équation différentielle par une même grandeur, il sera possible de l’intégrer.



Exercice 8 :

1- La distance AB :

L’inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente, $\vec{f}$: la force de frottement parallèle à la pente et de sens contraire au déplacement.

On applique le théorème de l’énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = W_{A\to B}(\vec{P}) + W_{A\to B}(\vec{R}) + W_{A\to B}(\vec{f})$$

$$\frac{1}{2}m.V_B^2 - \frac{1}{2}m.V_A^2 = \vec{P}.\overrightarrow{AB} + \vec{R}.\overrightarrow{AB} + \vec{f}.\overrightarrow{AB}$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = m.g.(z_A - z_B) + 0 + f.AB.\cos 180°$$

$$-\frac{1}{2}m.V_A^2 = -m.g.AB.\sin\alpha - f.AB$$

$$\frac{1}{2}m.V_A^2 = AB(m.g.\sin\alpha + f)$$

$$AB = \frac{m.V_A^2}{2(m.g.\sin\alpha + f)}$$

$$AB = \frac{50.10^{-3} \times 6^2}{2 \times (50.10^{-3} \times 10 \times \sin(60°) + 10^{-2})} \simeq 2{,}0\,m$$

2- La vitesse de S au point C :

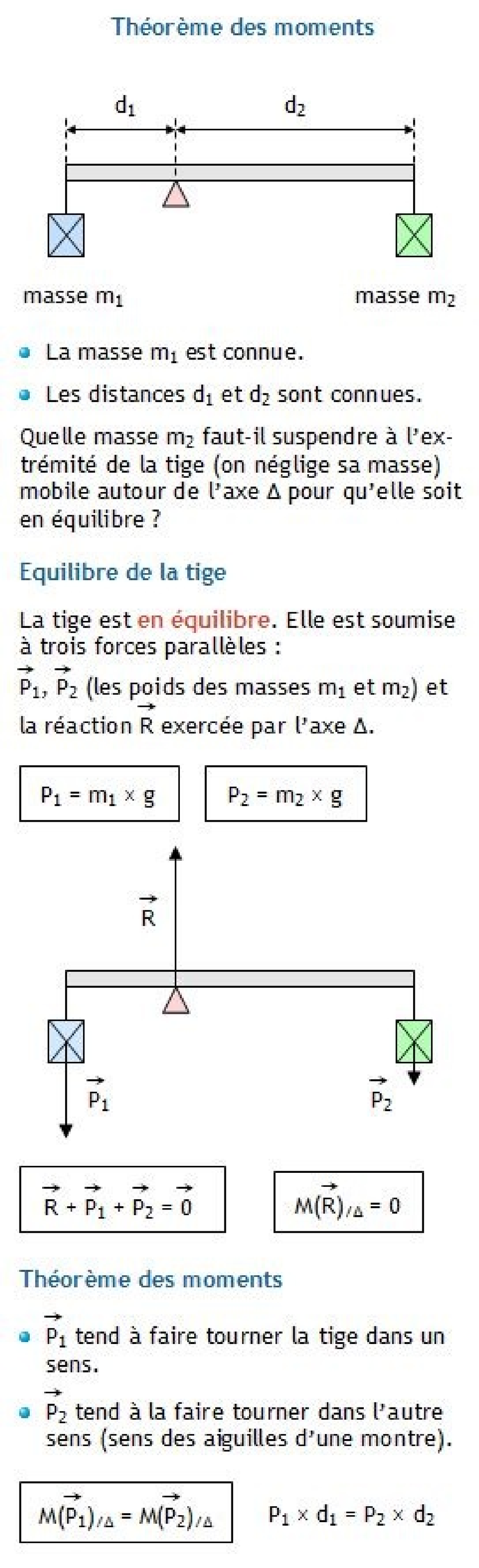
L’inventaire des forces extérieures appliquées sur le point matériel S entre B et C :

$\vec{P}$: le poids vertical, $\vec{R}$: la réaction normale de la pente (les frottements étant négligés).

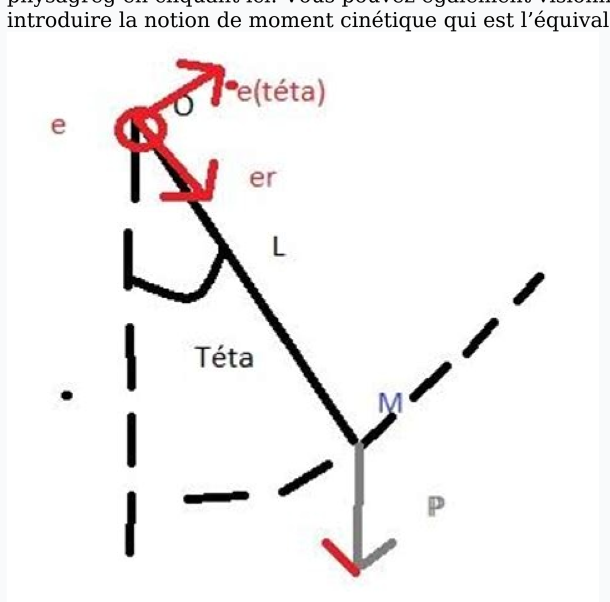
On applique le théorème de l’énergie cinétique :

$$\Delta E_C = E_{CC} - E_{CB} = W_{B\to C}(\vec{P}) + W_{B\to C}(\vec{R})$$

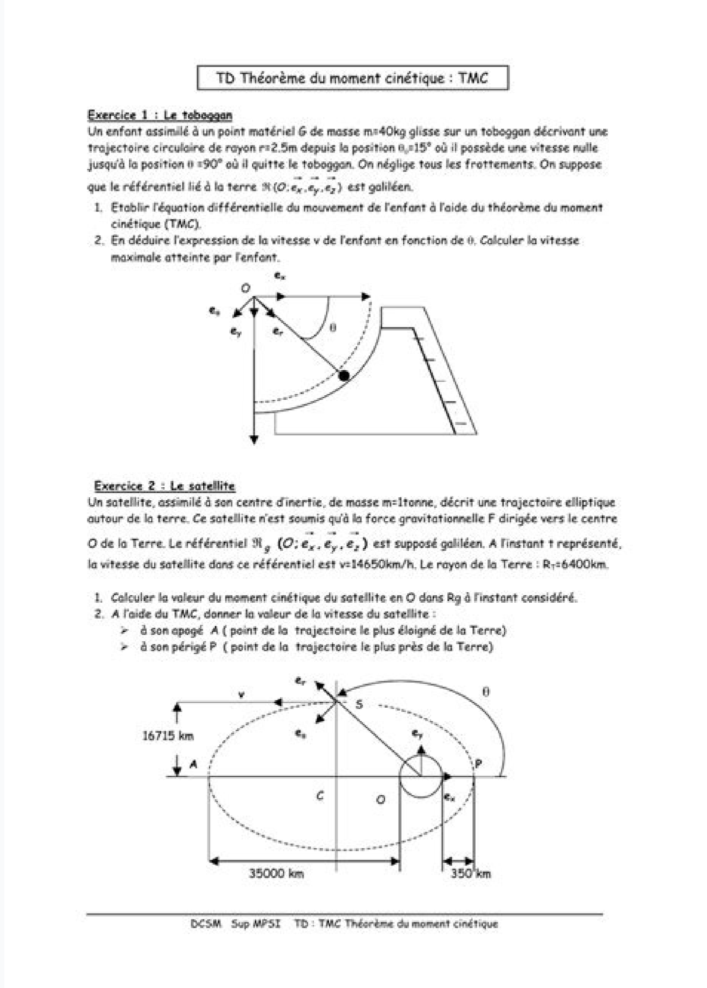
Calculer la vitesse maximale atteinte par l’enfant. Commenter. On obtient : $$\ddot{\theta} - \dfrac{g}{r}\,\cos\,\theta = 0$$ On a $v_G = r\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u}_{\theta}$ car r est constant. Il nous faut donc exprimer $\dot{\theta}$. Pour cela, il faut travailler l'équation différentielle est l'intégrer une fois. La constante d'intégration est déterminée grâce aux conditions initiales. On doit trouver : $v_G = 6.0 \mathrm{m.s^{-1}} = 21.7\,\mathrm{km.h^{-1}}$. On réalise un pendule simple à l’aide d’un mobile autoporteur sur table à coussin d’air. Le mobile de masse m est accroché à l’extrémité d’un fil de longueur ℓ dont l’autre extrémité est attachée à un point fixe O de la table.Le mobile peut alors se déplacer sans frottement dans un plan xOy. Pendule simple incliné Exprimer le moment cinétique de M par rapport à O. Identifier les forces et exprimer leur projection sur la base cylindrique $(\overrightarrow{u}_r, \overrightarrow{u}_{\theta}, \overrightarrow{u}_z)$.
IndiceLe poids est une force verticale, $\overrightarrow{P}$ appartient donc au plan xOz. On projettera d’abord cette force dans la base cartésienne $(\overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_{y}, \overrightarrow{u}_z)$ puis dans la base cylindrique.
Le principale problème de cette question est le travail sur la force poids.
Il faut d'abord projeter celle-ci sur la base cartésienne, puis projeter le tout sur la base cylindrique. Voici deux schémas qui peuvent être utile : On doit obtenir : $$\overrightarrow{P} = \begin{array}{|c} P\,\sin\, \alpha \,\cos\,\theta \\ - P\,\sin\, \alpha \,\sin\,\theta \\ - P\,\cos\,\alpha \end{array}$$ Appliquer le théorème du moment cinétique afin d’établir l’équation différentielle du mouvement dans le cas des petites oscillations. En déduire l’expression de la période des petites oscillations. Le pendule est lancé depuis sa position d’équilibre O’ avec un vitesse initiale v_0. Quel est l’angle maximal atteint (l’hypothèse des petites oscillations étant toujours valable) ? On considère une table à coussin d’air horizontale sur laquelle peut se mouvoir, sans frottement, un mobile autoporteur de masse m accroché à l’extrémité d’un ressort. La table forme le plan xOy, l’extrémité fixe du ressort est située en O. Ci-contre, un schéma représente le dispositif vu de dessus.Le champ de pesanteur est dirigé suivant -Oz : $\overrightarrow{g}=-\,g\,\overrightarrow{u}_z$. Le ressort a pour constante de raideur k et une longueur à vide ℓ_0. Mobile autoporteur accroché à un ressort sur une table à coussin d’air horizontale Faire un bilan des forces et montrer qu’il y a conservation du moment cinétique du point M par rapport à O.
A $t=0$, on lâche le point M depuis l’axe des abscisses, le ressort ayant pour longueur 1.2 fois sa longueur à vide : $\overrightarrow{OM}(t=0) = 1.2\,\ell_0\,\overrightarrow{u}_x$; la vitesse intiale est nulle. Calculer le moment cinétique par rapport à O du point M. En déduire la nature de la trajectoire. Si le moment cinétique se conserve, il a à tout instant la même valeur qu’il avait initialement ... En utilisant la relation fondamentale de la dynamique, établir l’expression de $OM(t)$ et préciser dans quel intervalle cette longueur évolue. Indices • Si une équation différentielle possède un second membre, il ne faut pas oublier de trouver une solution particulière de même forme que le second membre ; • Une équation différentielle du type $\ddot{x} + \omega_0^2\,x = 0$ admet une solution d’expression $x(t) = A\, \cos \omega_0\,t + B\, \sin\,\omega_0\,t$.



Les conditions initiales permettent de déterminer A et B.
On lance à présent le mobile autoporteur pour lui donner un mouvement de rotation autour de l’axe Oz. Ainsi, on a : • $\overrightarrow{OM}(t=0) = \ell_1\,\overrightarrow{u}_x$; • $\overrightarrow{v_0} =\ell_1\,\omega\,\overrightarrow{u}_y$. Le mouvement étant toujours plan, on pourra travailler soit en coordonnées cartésiennes soit en coordonnées polaires. Exprimer le moment cinétique par rapport à O du mobile autoporteur : d’abord en fonction de r et $\dot{\theta}$, puis en fonction des conditions initiales. Indice Les forces qui s’exercent sur le mobile, donc leur moment, n’ont pas changées. Montrer qu’il y a conservation de l’énergie mécanique du mobile. Indice Écrire le théorème de l’énergie cinétique sur un déplacement élémentaire du mobile. Rappeler l’expression de l’énergie potentielle élastique puis donner l’expression de l’énergie mécanique en fonction : • Des conditions initiales ; • De r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$, m, k et ℓ_0. Montrer que cette énergie peut être écrite sous la forme $E_\mathrm{m} = \dfrac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_\mathrm{peff}(r)$ où E_peff est appelée énergie potentielle effective et est fonction de r et de L, norme du vecteur moment cinétique. Donner l'expression de E_peff. Tracer l’allure de la fonction $E_\mathrm{peff}(r)$ et en déduire pourquoi la masse ne peut pas s’éloigner du pôle d’attraction O. Références "Physique Tout-en-un MPSI PCSI PTSI" - Marie-Noëlle Sanz / Anne-Emmanuelle Badel / François Clausset - Editions Dunod 2008 ; "Précis Mécanique PCSI" - C.Clerc / P.Clerc - Bréal ; Vous souhaitez vous familiarisez avec ce chapitre en vidéos ? Retrouvez la playlist dédiée sur la chaine youtube de physagreg en cliquant ici: Vous pouvez également visionner le chapitre séquence par séquence : Introduction Dans les mouvements de rotation il est préférable d’utiliser un autre théorème que le principe fondamental de la dynamique ou le théorème de l’énergie cinétique : ce théorème s’appelle le théorème du moment cinétique. Nous allons donc introduire la notion de moment cinétique qui est l’équivalent pour la rotation de ce qu’est la quantité de mouvement pour les mouvements de translation. Ainsi, il ne sera plus question d’utiliser les forces elle-mêmes, mais leur moment.



Nous étudierons alors un exemple d’application classique de ce théorème : le pendule simple.



TD Théorème du moment cinétique : TMC

Exercice 1 : Le toboggan

Un enfant assimilé à un point matériel G de masse m=40kg glisse sur un toboggan décrivant une trajectoire circulaire de rayon r=2.5m depuis la position θ_0=15° où il possède une vitesse nulle jusqu'à la position θ =90° où il quitte le toboggan. On néglige tous les frottements. On suppose que le référentiel lié à la terre $\Re(O;\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ est galiléen.

1. Etablir l'équation différentielle du mouvement de l'enfant à l'aide du théorème du moment cinétique (TMC).
2. En déduire l'expression de la vitesse v de l'enfant en fonction de θ. Calculer la vitesse maximale atteinte par l'enfant.

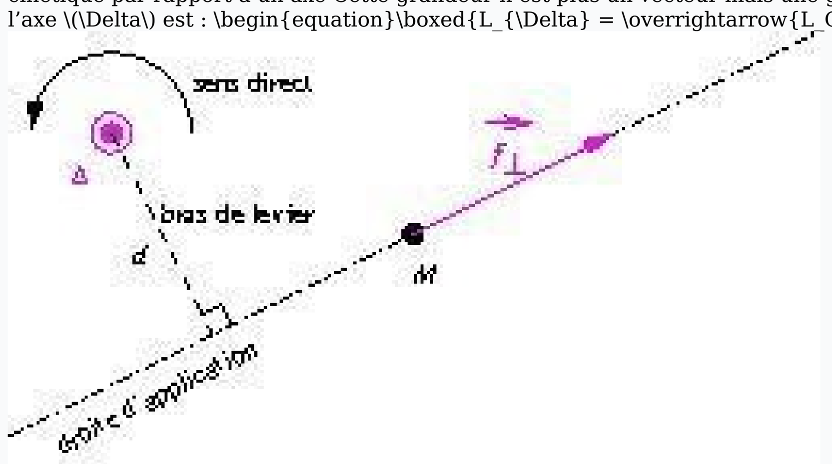
Exercice 2 : Le satellite

Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse m=1tonne, décrit une trajectoire elliptique autour de la terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force gravitationnelle F dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel $\Re_g$ $(O;\vec{e_x},\vec{e_y},\vec{e_z})$ est supposé galiléen. A l'instant t représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiel est v=14650km/h. Le rayon de la Terre : R_T=6400km.

1. Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans Rg à l'instant considéré.
2. A l'aide du TMC, donner la valeur de la vitesse du satellite :
   - à son apogé A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre)
   - à son périgé P (point de la trajectoire le plus près de la Terre)

Même si on ne s'intéressera principalement qu'à la mécanique du point dans ce chapitre, nous ferons une petite parenthèse sur la mécanique du solide en parlant du moment d'inertie et de sa signification. Moment cinétique Définition du moment cinétique par rapport à un point Soit un point M de masse m, de vitesse $\overrightarrow{v}$ et de quantité de mouvement $\overrightarrow{p}=m\,\overrightarrow{v}$. Son moment cinétique en un point O est défini par : $$\boxed{\overrightarrow{L_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v}}$$ On peut exprimer la norme de ce moment cinétique en fonction de l'angle que forme la droite (OM) et le vecteur $\overrightarrow{v}$: $$L_O(M) = \left|\left|\overrightarrow{L_O}(M) \right|\right|=OM \times m\,v \times \sin \alpha$$ Le moment cinétique s'exprime donc en $\mathrm{kg.m^2.s^{-1}}$. Moment cinétique d'un point M en un point O Sens du vecteur moment cinétique Le vecteur $\overrightarrow{L_O}(M)$ semble venir vers nous dans la figure ci-dessus : ce sens est obtenu par le fait que la base ($\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{L_O}(M)$) est directe.

Pour le retrouver, on peut utiliser les trois doigts de la main droite (pour former le trièdre) ou la règle du tire-bouchon. Remarque Étudiant le mouvement de ce point par rapport à un référentiel $\cal{R}$, on n'indicera pas les différentes quantités mais ces indices sont sous-entendus. Dans le cas de l'étude du mouvement d'un point, on ne travaille qu'avec un seul vecteur, le vecteur moment cinétique ou le vecteur quantité de mouvement, car ceux-ci sont liés. Pour l'étude du mouvement d'un solide, les deux vecteurs sont à considérer puisque chaque point du solide aura un moment cinétique différent et/ou un vecteur quantité de mouvement différent. Exemple du moment cinétique en coordonnées polaires Soit un point M se déplaçant dans un mouvement circulaire par rapport au référentiel $\mathcal{R}$. $\left|\begin{array}{l} \text{Sa position en coordonnées polaires est : } \overrightarrow{OM}=r\,\overrightarrow{e_r}\\ \text{Sa vitesse est : } \overrightarrow{v} = r\,\overset{\cdot}{\theta}\,\overrightarrow{e_{\theta}} \end{array}\right.$ En effet, la composante suivant $\overrightarrow{e_r}$ ($\overset{\cdot}{r}\,\overrightarrow{e_r}$) est nulle puisque r est constant (mouvement circulaire). Son moment cinétique s'écrit donc : $$\begin{aligned} \overrightarrow{L_O}(M) &= \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v} \\ &= m\,r\,\overrightarrow{e_r} \wedge (\overset{\cdot}{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\,\overset{\cdot}{\theta}\,\overrightarrow{e_{\theta}}) \\ &= m \, r^2 \overset{\cdot}{\theta} \,\overrightarrow{e_z}\end{aligned}$$ Moment cinétique en O' différent de O Le moment cinétique dépend du point où on le calcule. On peut établir une relation entre le moment cinétique en un point O' et celui en un point O : $$\begin{aligned} \overrightarrow{L_{O'}}(M) &= \overrightarrow{O'M} \wedge \overrightarrow{p} \\ &= (\overrightarrow{O'O}+\overrightarrow{OM}) \wedge \overrightarrow{p}\\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{p} + \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{p}\\ &= \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{p} + \overrightarrow{L_O}(M)\end{aligned}$$ $$\Longrightarrow \boxed{\overrightarrow{L_{O'}}(M) = \overrightarrow{L_O}(M) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{p}}$$ Moment cinétique par rapport à un axe Cette grandeur n'est plus un vecteur mais une grandeur algébrique.Soit Δ un axe orienté par un vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_{\Delta}$. Soit O un point de cet axe et M un point dont on connaît le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}(M)$ par rapport à O.Le moment cinétique de M par rapport à l'axe Δ est : $$\boxed{L_{\Delta} = \overrightarrow{L_O}(M) \cdot \overrightarrow{u}_{\Delta}}$$ Il est la projection du moment cinétique par rapport à un point de l'axe sur celui-ci. Moment cinétique d'un point M par rapport à un axe Cette projection est indépendante du point de l'axe choisi.



Moment d'une force Comme la quantité de mouvement était reliée aux forces dans le principe fondamental de la dynamique, le moment cinétique est relié au moment des forces dans le théorème du moment cinétique.

Définition du moment d'une force par rapport à un point Soit une force $\overrightarrow{F}$ appliqué en un point M. Alors son moment $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})$ par rapport au point O est défini par : $$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F}}$$ Sens du vecteur moment Comme pour le vecteur moment cinétique, le sens du vecteur moment est donné par la règle de la main droite ou la règle du tire-bouchon. Moment d'une force par rapport à un point On peut également exprimer le module de ce moment de force en fonction de l'angle θ : $$\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = \left|\left|\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F})\right|\right| = \left|\left|\overrightarrow{OM}\right|\right| \times \left|\left|\overrightarrow{F}\right|\right|\times \sin \theta$$ Le moment d'une force s'exprime donc en $\mathrm{N.m}$. Notion de bras de levier Le bras de levier est la distance $d=OH$, où H est le projeté orthogonal de O sur la droite d'action de la force $\overrightarrow{F}$. Sur la figure [momentO], on voit que le $\sin \theta$ peut être relié au bras de levier.En effet : $$\sin \theta = \dfrac{d}{\left|\left|\overrightarrow{OM}\right|\right|} \Longleftrightarrow \left|\left|\overrightarrow{OM}\right|\right| \times \sin \theta = d$$ Ainsi l'expression de la norme du moment devient : $$\boxed{\mathcal{M}_O(\overrightarrow{F}) = d \times \left|\left|\overrightarrow{F}\right|\right|}$$ Elle ne dépend que du bras de levier.

Cela peut être une méthode de calcul du moment, en associant cette expression à la règle de la main droite ou du tire-bouchon pour connaître le sens du vecteur moment. Moment de force en O' différent de O Avec le même raisonnement que celui utilisé pour le moment cinétique, on a : $$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_{O'}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{F}}$$ Moment d'une force par rapport à un axe Toujours en faisant un parallèle avec ce qui a été vu sur le moment cinétique, si Δ est un axe orienté par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_{\Delta}$, le moment d'une force par rapport à l'axe (Δ) s'écrit : $$\boxed{\mathcal{M}_{\Delta}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u}_{\Delta}}$$ avec O un point de l'axe. Interprétation physique du moment de force Dans le domaine du bricolage, on fait souvent appel à la notion de bras de levier, sans le savoir. Par exemple, si vous voulez retirer une vis récalcitrante, il vaut mieux utiliser une clé à cliquet munie d'un embout de vissage plutôt qu'un tournevis :En effet, avec un tournevis, on force en étant au dessus de la vis, le bras de levier (donc le moment de la force appliquée) est tout petit. Avec une clé à cliquet, l'endroit où l'on applique la force est déportée ce qui implique un grand bras de levier.

Pour obtenir le même moment de force qu'avec le tournevis, la force à appliquer pour faire tourner la vis est moins importante. Notion de mécanique du solide : moment d'inertie Nous avons dit précédemment que le moment cinétique était équivalent pour la rotation à ce qu'est la quantité de mouvement pour la translation. Ainsi, comme la quantité de mouvement est reliée à la masse inertielle (grandeur qui exprime la résistance qu'oppose un corps au changement de son mouvement) et à la vitesse linéaire, le moment cinétique est relié à une quantité représentant l'inertie de rotation d'un corps, appelée moment d'inertie, et à la vitesse angulaire. En général, on cherche à faire tourner un corps autour d'un axe, on utilise alors le moment d'inertie par rapport à cet axe que l'on note J_{Δ}. On peut alors exprimer le moment cinétique d'un corps par rapport à un axe de la façon suivante : $$\boxed{L_{\Delta}= J_{\Delta} \times \omega}$$ Ce moment cinétique caractérise la tendance d'un objet à continuer à tourner autour de Δ, du fait de son inertie. Exemples de moment d'inertie Au vu de sa définition, le moment d'inertie dépend de la répartition de masse du corps en question. Cependant pour des corps homogènes et de formes géométriques simples, l'expression du moment d'inertie est simple : Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un cerceau de masse m et de rayon R : $J_{\Delta} = mR^2$; Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'un cylindre ou d'un disque de masse m et de rayon R : $J_{\Delta} = \frac{1}{2}mR^2$; Moment d'inertie par rapport à son axe de révolution d'une sphère de masse m et de rayon R : $J_{\Delta} = \frac{2}{5}mR^2$; Théorème du moment cinétique Par rapport à un point fixe Soit O un point fixe du référentiel d'étude $\mathcal{R}$.Écrivons ce théorème mathématiquement : $$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i})}$$ Littéralement, cela devient : la dérivée par rapport au temps du moment cinétique d'un point M par rapport à un point O est égale à la somme des moments des forces par rapport à O appliquées à ce point M.

Démonstration Montrons que ce théorème est une conséquence directe du principe fondamental de la dynamique. On dérive l'expression du vecteur moment cinétique, donc le produit vectoriel : $$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v}\right) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\wedge m\,\overrightarrow{v} + \overrightarrow{OM} \wedge m \, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t}$$ Or $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}=\overrightarrow{v}$ donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}\wedge m\,\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ (produit vectoriel de deux vecteurs colinéaires).Et on a, d'après le principe fondamental de la dynamique : $m \, \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\overrightarrow{a} = \displaystyle{\sum_i} \overrightarrow{F_i}$. D'où : $$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{OM} \wedge \sum_i \overrightarrow{F_i} = \sum_i \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_i} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F_i})$$ RemarqueOn peut également utiliser ce théorème en l'appliquant en un point non fixe du référentiel.

Dans ce cas, un terme vient s'ajouter à la formule initiale ce qui complique les calculs. On essaye donc de choisir dans la mesure du possible un point fixe. Par rapport à un axe Pour obtenir son expression, il suffit de projeter le théorème par rapport à un point fixe.

On obtient aisément : $$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}L_{\Delta}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_{\Delta}(\overrightarrow{F_i})}$$ Interprétation : le patineur Une des figures classiques du patinage artistique est réalisée par le patineur tournant rapidement, sur place, autour de lui-même. Ce qui est apprécié des juges, c'est un changement de rythme dans la vitesse de rotation : pour réaliser cela, le patineur change la répartition de sa masse en positionnant ses bras ou une jambe plus ou moins loin de son corps.En faisant cela, il modifie son moment d'inertie. Étant donné qu'une fois la rotation engagée, la somme des moments des forces appliquées au patineur est nulle, le moment cinétique doit être constant. En minimisant son moment d'inertie, le patineur augmente sa vitesse angulaire, en l'augmentant, en écartant les bras par exemple, il diminue sa vitesse angulaire. Exemple du pendule simple Référentiel : du laboratoire considéré galiléen ; Système : masse m considérée ponctuelle en un point M ; Forces : poids $\overrightarrow{P}$; tension du fil $\overrightarrow{T}$. Vu la physionomie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques. Présentation du pendule simple Appliquons le théorème du moment cinétique au point d'attache fixe O du pendule : $$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} =\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T})$$ Moment cinétique et sa dérivée Exprimons tout d'abord le moment cinétique en O : $$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v} = \begin{array}{|cc|cc|c} \ell & & 0 & & 0\\ 0 &\wedge & m\,\ell\,\overset{\cdot}{\theta} & =& 0 \\ 0 & & 0 & & m\,\ell^2\,\overset{\cdot}{\theta} \end{array}$$ Puis sa dérivée : $$\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} = m\,\ell^2\,\overset{\cdot\cdot}{\theta}\,\overrightarrow{u}_z$$ Moments de force En ce qui concerne les moments de force : On a $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T})= \overrightarrow{OM}\wedge \overrightarrow{T}$ mais la droite d'action de $\overrightarrow{T}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ et le produit vectoriel est nul : $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{0}$; Pour le moment du poids, on a : $$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P})= \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P} = \begin{array}{|cc|cc|c} \ell & & m\,g\,\cos \theta & & 0\\ 0 &\wedge & - m\,g\,\sin \theta & =& 0 \\ 0 & & 0 & &- m\,g\,\ell\,\sin \theta \end{array}$$ Théorème L'écriture du théorème donne : $$\begin{aligned} \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{L_O}(M)}{\mathrm{d}t} &=\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{P}) + \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{T}) \\ \Longleftrightarrow m\,\ell^2\,\overset{\cdot\cdot}{\theta}\,\overrightarrow{u}_z &= - m\,g\,\ell\,\sin \theta \,\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$ $$\Longleftrightarrow \boxed{\overset{\cdot\cdot}{\theta} + \dfrac{g}{\ell} \sin\,\theta = 0} \label{equadiff}$$ L'équation est une équation bien connue qui peut être retrouvée facilement à l'aide de la relation fondamentale de la dynamique ou à l'aide de la conservation de l'énergie mécanique (car $\overrightarrow{T}$ ne travaille pas et $\overrightarrow{P}$ est conservative).La méthode du théorème du moment cinétique n'est dans ce cas pas meilleure qu'une autre. Références