

Abhandlung 'Takeya, Quantenwellen und die Moiré-Revolution – Wie kleine Strukturen den Kosmos neu denken lassen' Alexander T. Engelbrecht 09.05.2025

I. Einleitung: Erschließung neuen Terrains auf Basis von Engelbrechts Synthese

A. Kontextualisierung von Engelbrechts Abhandlung aus dem Jahr 2025

Die (hypothetische) bahnbrechende Arbeit von A.T. Engelbrechts mit dem Titel 'Takeya, Quantenwellen und die Moiré-Revolution – Wie kleine Strukturen den Kosmos neu denken lassen', datiert auf den 09.05.2025, bildet den Ausgangspunkt für das vorliegende Promotionsvorhaben. Es wird angenommen, dass die zentrale These dieser Abhandlung darin besteht, dass das Zusammenwirken jüngster Durchbrüche im Verständnis von Takeya-Mengen, dem florierenden Feld der Moiré-Physik und spezifischen Quantenwellenphänomenen eine neue Linse bietet, durch die fundamentale physikalische Prinzipien untersucht werden können. Dies könnte potenziell zu einem Paradigmenwechsel führen – einem "Neudenken des Kosmos". Die Aktualität von Engelbrechts Arbeit wird durch den Meilenstein des Beweises der dreidimensionalen Takeya-Vermutung im März 2025 durch Hong Wang und Joshua Zahl unterstrichen ¹, ein Ereignis, das als "Jahrhundertergebnis" gefeiert wurde und wahrscheinlich maßgeblich in die Überlegungen der Abhandlung eingeflossen ist. ¹ Diese Entwicklung hat nicht nur ein jahrzehntealtes mathematisches Problem gelöst, sondern auch weitreichende Implikationen für die Harmonische Analyse und verwandte Gebiete eröffnet. ¹

B. Der Forschungsauftrag der Promotion: Von "neuen Erkenntnissen" zur rigorosen Untersuchung

Das primäre Ziel der vorgeschlagenen Doktorarbeit ist die systematische Untersuchung und Weiterentwicklung der von Engelbrechts postulierten "neuen Erkenntnisse" und Forschungsrichtungen. Das Promotionsprojekt wird sich nicht darauf beschränken, diese Gebiete lediglich zu rezensieren, sondern zielt darauf ab, neue Verbindungen zu knüpfen, spezifische offene Probleme zu lösen, die sich aus Engelbrechts Rahmenwerk ergeben, und die prognostizierten fundamentalen Implikationen zu erforschen. Der interdisziplinäre Charakter der vorgeschlagenen Forschung wird betont, der sich über reine Mathematik (geometrische Maßtheorie, harmonische Analysis), Festkörperphysik (Moiré-Systeme, topologische Materie), Quantenphysik (Wellenphänomene, Quanteninformation) und potenziell Grundlagenphysik erstreckt. Es gilt, die von Engelbrechts angestoßenen Ideen aufzugreifen und mit der notwendigen wissenschaftlichen Tiefe und Originalität zu verfolgen, um substantielle Beiträge zum jeweiligen Forschungsfeld zu leisten.

C. Tabelle 1: Zuordnung von Engelbrechts Kernkonzepten zu den vorgeschlagenen Forschungsschwerpunkten

Die folgende Tabelle stellt eine klare visuelle Verbindung zwischen den wichtigsten konzeptionellen Säulen von Engelbrechts Abhandlung (abgeleitet aus ihrem Titel und den Forschungsausschnitten) und den spezifischen Forschungsschwerpunkten des Promotionsplans her. Diese Zuordnung ist entscheidend, um unmittelbar zu demonstrieren, wie die vorgeschlagene Doktorarbeit direkt und systematisch aus der (hypothetischen) Grundlagenarbeit von Engelbrechts abgeleitet ist. Sie etabliert die Legitimität und den Fokus des Forschungsplans und versichert, dass die vorgeschlagene Arbeit keine zufällige Ansammlung von Themen ist, sondern eine kohärente Erforschung von Ideen, die aus einem bedeutenden intellektuellen Beitrag stammen.

Engelbrechts Kernkonzept	Entsprechender/e Forschungsschwerpunkt(e) der Promotion	Wichtige Quellen, die Engelbrechts Fokus stützen
Takeya-Vermutung & Geometrien	Schwerpunkt 1	¹
Quantenwellenphänomene	Schwerpunkt 2, Schwerpunkt 4	¹³
Die Moiré-Revolution	Schwerpunkt 3, Schwerpunkt 4	¹⁰
Kleine Strukturen denken den Kosmos neu	Schwerpunkt 4, Schwerpunkt 5 (Synthese)	⁵

D. Methodischer Überblick und Umfang

Die primären Methoden umfassen theoretische Analysen, mathematische Beweisführung, computergestützte Modellierung und potenziell phänomenologische Verbindungen zu experimentellen Möglichkeiten. Der Umfang ist vorwiegend theoretisch, jedoch mit einem ausgeprägten Bewusstsein für experimentelle Relevanz und das Potenzial, zukünftige Experimente, insbesondere in Moiré-Systemen, anzuleiten.

Die ambitionierte These von Engelbrechts, dass Takeya-Moiré-Wellen-Systeme Schlüssel zu neuer fundamentaler Physik enthalten, kann als eine Art "Engelbrechts-Vermutung" betrachtet werden, die als treibende Kraft für die gesamte Promotion dient. Engelbrechts Titel "Wie kleine Strukturen uns den Kosmos neu denken lassen" impliziert eine große, vereinheitlichende Vision. Die einzelnen Komponenten – der Takeya-Beweis und die Moiré-Physik – sind im Jahr 2025 hochaktuell. Eine Abhandlung vom Mai 2025 wäre eine der ersten, die diese sehr jungen Entwicklungen synthetisiert. Daher sind Engelbrechts "neue Erkenntnisse" wahrscheinlich kühn und verbinden scheinbar disparate Felder durch zugrundeliegende Prinzipien, die mit Geometrie, Information und Quantenmechanik auf kleinen Skalen zusammenhängen. Die Promotion kann dann als kritische Untersuchung und Entwicklung dieser "Erkenntnisse" positioniert werden, die effektiv die Gültigkeit und Reichweite von Engelbrechts zentralem, vereinheitlichendem Argument prüft. Dies hebt die Promotion über das Lösen isolierter Probleme hinaus.

II. Forschungsschwerpunkt 1: Kakeya-Geometrien – Vom mathematischen Beweis zu physikalischen Realisierungen und Informationsprinzipien

A. Vertiefung des Verständnisses von Kakeya-Mengen nach dem Beweis

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die Erforschung der mathematischen Landschaft, die durch Wang und Zahls Beweis der dreidimensionalen Kakeya-Vermutung im Jahr 2025 eröffnet wurde.¹ Dieser Beweis bestätigte, dass die Minkowski-Dimension einer Kakeya-Menge in drei Dimensionen drei sein muss, was eine sehr schwache Beziehung impliziert: Selbst wenn die Dicke der Röhren halbiert wird, wird nur ein Bruchteil des Volumens entfernt.¹

Spezifische Forschungsfragen:

- Welche unmittelbaren Konsequenzen hat der 3D-Beweis für den von Larry Guth erwähnten "Turm von Vermutungen" in der harmonischen Analysis?¹ Können die Techniken von Wang und Zahl angepasst werden, um Fortschritte bei den nächsten Vermutungen in diesem Turm oder bei der Kakeya-Vermutung in höheren Dimensionen (z.B. 4D, die offen bleibt¹) zu erzielen? Die vierdimensionale Kakeya-Vermutung bleibt eine Herausforderung, aber Guth ist optimistisch, dass der Sprung von zwei zu drei Dimensionen der schwierigste war und Wang und Zahls Beweis wahrscheinlich angepasst werden kann.¹
- Wie verfeinert der Beweis, der eine Minkowski-Dimension von drei festlegte¹, unser Verständnis der Beziehung zwischen Dimension und Maß von Kakeya-Mengen, insbesondere im Lichte von Besicovitchs früherer Arbeit über Null-Maß-Mengen in 2D?¹ Besicovitch konstruierte 1920 ein Beispiel einer Kakeya-Menge in der Ebene mit Lebesgue-Maß Null.⁴
- Untersuchung der Eigenschaften von "gekrümmten Kakeya-Mengen" und ihrer Beziehung zu Nikodym-Mengen auf Mannigfaltigkeiten mit konstanter Schnittkrümmung.⁴ Können die Beweistechniken von Wang und Zahl erweitert werden, um stärkere Ergebnisse für diese verwandten geometrischen Objekte zu liefern, insbesondere in $\mathbb{R}^d$? Eine Kakeya-Menge in $\mathbb{R}^d$ ist eine kompakte Menge $E \subset \mathbb{R}^d$, so dass für jede Richtung $e \in \mathbb{S}^{d-1}$ ein Punkt $x \in \mathbb{R}^d$ existiert, für den $x + te \in E$ für alle $t \in [-1, 1]$ gilt.⁴ Die Kakeya-Vermutung in $\mathbb{R}^d$ impliziert die Nikodym-Vermutung auf Mannigfaltigkeiten M_d mit konstanter Schnittkrümmung für jede Dimension $d \geq 2$.⁴

Methodik: Fortgeschrittene mathematische Analyse unter Nutzung von Techniken aus der geometrischen Maßtheorie, harmonischen Analysis und potenziell der Differentialgeometrie für mannigfaltigkeitsbezogene Fragen.

B. Kakeya-Strukturen und Informationsdichte: Eine Brücke zum Compressed Sensing?

Dieser Abschnitt untersucht eine potenzielle konzeptionelle und mathematische Verbindung zwischen der effizienten Kodierung von Richtungsinformationen in Kakeya-Mengen und den Prinzipien der Wiederherstellung dünn besetzter Signale im Compressed Sensing.

Spezifische Forschungsfragen:

- Kakeya-Mengen sind minimale (in Bezug auf die Dimension) Strukturen, die Linien in alle Richtungen enthalten. Compressed Sensing⁵ beruht auf der Dünnbesetztheit (Sparsity) von Signalen für die Rekonstruktion aus wenigen Abtastwerten. Gibt es einen formalisierbaren Sinn, in dem Kakeya-Mengen eine optimale "dünn besetzte Repräsentation" vollständiger Richtungsinformation darstellen? Compressed Sensing basiert auf der Erkenntnis, dass bei Kenntnis der Dünnbesetztheit eines Signals dieses mit noch weniger Abtastwerten rekonstruiert werden kann, als es das Nyquist-Shannon-Abtasttheorem erfordert.⁵
- Der Beweis von Wang und Zahl beinhaltet "Körnigkeit" (graininess) und die Analyse von Überlappungen von "Körnern".¹ Kann diese "körnige" Struktur mit den dünn besetzten Basisrepräsentationen in Verbindung gebracht werden, die im Compressed Sensing verwendet werden? Wang und Zahl konzentrierten sich auf diese einfacheren "Körner" und zeigten, dass selbst in den am stärksten überlappenden Szenarien die Anzahl der Körner, die einen beliebigen Punkt schneiden, nicht übermäßig groß sein konnte.¹
- Könnten Erkenntnisse aus der Kakeya-Vermutung (z.B. über minimale Überdeckungen oder Projektionen) das Design effizienterer Abtastmatrizen oder Rekonstruktionsalgorithmen im Compressed Sensing beeinflussen, insbesondere für Signale mit geometrischen Dünnbesetztheitsmustern?

Methodik: Erforschung von Analogien zwischen den mathematischen Formalismen der Kakeya-Theorie (z.B. Fourier-analytische Methoden, geometrische Kombinatorik) und des Compressed Sensing (z.B. L1-Norm-Minimierung, Restricted Isometry Property).

Die Kakeya-Problematik befasst sich fundamental mit der *minimalen Struktur*, die erforderlich ist, um einen vollständigen Satz von Richtungen zu kodieren. Diese inhärente Minimalität und die im Beweis von Wang und Zahl offenbarte "körnige" Struktur¹ deuten stark auf eine Verbindung zur Dünnbesetztheit als fundamentales Prinzip der Informationskodierung hin, ähnlich dem Compressed Sensing.⁵ Die Forschung könnte untersuchen, ob Kakeya-artige Konstruktionen neue Paradigmen für eine optimale Informationsrepräsentation jenseits der traditionellen Signalverarbeitung bieten. Wenn Kakeya-Mengen die "dünn besetzteste" Art sind, alle Richtungen darzustellen, könnte ihre mathematische Struktur Aufschluss darüber geben, wie Dünnbesetztheit in anderen Bereichen definiert und gefunden werden kann oder wie Messschemata entworfen werden können, die für geometrisch strukturierte Informationen optimal sind. Dies verschiebt Kakeya von einem mathematischen Problem zu einem *Informationsdesignprinzip*. Dies könnte mit dem Thema des "Neudenkens des Kosmos" zusammenhängen, wenn fundamentale physikalische Gesetze selbst eine Form von Kakeya-ähnlicher Effizienz in der Strukturierung von Informationen (z.B. über Feldkonfigurationen oder Teilchenzustände) aufweisen.

C. Geometrische Informationstheorie und Minimalstrukturen

Dieser Abschnitt untersucht Kakeya-Mengen aus der Perspektive der geometrischen Informationstheorie, die Information durch geometrische Invarianten und topologischen Schutz betrachtet.⁶ Information kann auf fundamentalster Ebene durch geometrische Invarianten verstanden werden, die unter kontinuierlichen Deformationen bestehen bleiben, was natürliche Mechanismen für den Informationsschutz bietet.⁶

Spezifische Forschungsfragen:

- Können Kakeya-Mengen so verstanden werden, dass sie Informationen (Richtungen) mit einer bestimmten topologischen Robustheit oder geometrischen Effizienz kodieren, gemäß den Prinzipien in?⁶ Der Schutz von Informationen ergibt sich aus topologischem Schutz, Energie-Komplexitäts-Relationen und Periodenerhaltung.⁶
- ⁸ diskutiert die strukturelle Komplexität von Mineralien basierend auf dem Informationsgehalt. Kann ein ähnliches informationstheoretisches Maß für die "Komplexität" oder den "Informationsgehalt" von Kakeya-Mengen entwickelt werden, das ihre geometrischen Eigenschaften mit der Menge der von ihnen kodierten Richtungsinformationen in Beziehung setzt? Komplexe Strukturen speichern mehr Informationen als einfache.⁸
- Wie verhalten sich Kakeya-Mengen zum Konzept der "Minimalstrukturen" in der "Physik der Information" ⁹, wo Informationsmaße Struktur in biotischer und abiotischer Materie erfassen?

Methodik: Anwendung von Konzepten aus der geometrischen/topologischen Informationstheorie auf Kakeya-Mengen; Entwicklung neuer informationstheoretischer Maße, die auf geometrische Objekte zugeschnitten sind.

Die mathematische Verallgemeinerung auf "gekrümmte Kakeya-Mengen" und ihre Verbindung zu Nikodym-Mengen auf Mannigfaltigkeiten ⁴ ist nicht nur eine abstrakte Erweiterung. Sie deutet stark darauf hin, dass Kakeya-ähnliche Einschränkungen und Phänomene physikalisch realisiert oder emuliert werden könnten in Systemen, in denen effektive gekrümmte Geometrien entstehen, wie beispielsweise in Moiré-Supergittern oder anderen künstlich hergestellten Metamaterialien. Engelbrechts Abhandlung schlägt wahrscheinlich die Suche nach solchen Analogien vor. Die Kakeya-Vermutung wurde für R^3 (euklidischer Raum) bewiesen. Mathematiker untersuchen bereits Verallgemeinerungen wie "gekrümmte Kakeya-Mengen" und Verbindungen zu "Nikodym-Mengen auf Mannigfaltigkeiten M_d mit konstanter Schnittkrümmung".⁴ Moiré-Muster (Schwerpunkt 3) erzeugen Supergitter mit abstimmbaren Eigenschaften und können komplexe Elektronwellendynamiken beherbergen.¹⁰ Diese Supergitter können Quasiteilchen effektive, nicht-euklidische Geometrien aufzwingen. Engelbrechts könnte durch die Verknüpfung von Kakeya und Moiré hypothesieren, dass die geometrischen Einschränkungen, die Kakeya-Problemen innewohnen, physikalischen Ausdruck in der Art und Weise finden, wie sich Wellen oder Teilchen in diesen Moiré-induzierten effektiven Geometrien ausbreiten. Eine Forschungsfrage wäre, ob spezifische Moiré-Konfigurationen so gestaltet werden können, dass sie die Bedingungen von (gekrümmten) Kakeya-Mengen nachahmen, was zu beobachtbaren Phänomenen im Zusammenhang mit minimalen Pfadüberdeckungen oder gerichteter Fokussierung/Abschirmung von Quantenwellen führt. Dies wäre eine direkte physikalische Manifestation eines tiefen mathematischen Konzepts.

III. Forschungsschwerpunkt 2: Quantenwellenphänomene in künstlich erzeugten Moiré-Landschaften und geometrischen Zwangsbedingungen

A. Maßschneiderung der Quantenwellenausbreitung mit Moiré-Potentialen

Dieser Abschnitt untersucht, wie die hochgradig abstimmbaren Moiré-Supergitterpotentiale ¹⁰ genutzt

werden können, um die Ausbreitung von Quantenwellen (z.B. Elektronenwellen, Exzitonen, Plasmonen) zu kontrollieren und zu formen. Moiré-Muster entstehen, wenn zwei oder mehr atomar dünne Schichten mit einer leichten Fehlausrichtung gestapelt werden, was zu einer neuen Periodizität führt, die viel größer ist als die der zugrundeliegenden Atomgitter.¹⁰

Spezifische Forschungsfragen:

- Wie manifestieren sich die fundamentalen Eigenschaften von Wellen (Wellenlänge, Frequenz, Amplitude, Interferenz, Beugung – ¹³) für Quasiteilchen in Moiré-Systemen, und wie werden sie durch die Moiré-Periodizität und lokale atomare Relaxationen modifiziert?¹⁰ Alle Arten von Wellen weisen die gleichen fundamentalen Eigenschaften der Reflexion, Brechung, Beugung und Interferenz auf.¹³
- Können Moiré-Muster so gestaltet werden, dass neuartige quantenoptische Analoga entstehen, wie z.B. effektive Linsen, Wellenleiter oder Resonatoren für Elektronenwellen oder Moiré-Exzitonen?¹⁰ Moiré-Exzitonen bieten Möglichkeiten zur Abstimmung der elektronischen Bandstruktur von Materialien.¹⁰
- Untersuchung der Auswirkungen von "Drehwinkelfehlausrichtung, nanoskaliger Unordnung und atomarer Relaxation auf das Moiré-Potential und seine kollektiven Anregungen" ¹⁰ auf Wellenkohärenz und Transport.

Methodik: Theoretische Modellierung mittels Quantenmechanik (z.B. Tight-Binding-Modelle, Kontinuumsmodelle für Moiré-Systeme), Computersimulationen der Wellenpaketdynamik.

B. Wellenoptische Informationskodierung in Moiré-Systemen: Inspiriert von Primzahlsieben?

Dieser Abschnitt untersucht, ob Moiré-Systeme als physikalische Plattformen für die Realisierung von Konzepten dienen können, die analogen zu wellenoptischen Primzahlsieben sind ¹⁵, bei denen Informationen in Interferenzmustern kodiert werden. Primzahlen werden als Nullen identifiziert, die von Phasensingularitäten in einem physikalisch erzeugten Wellenfeld für ganzzahlige Impulse begleitet werden.¹⁵

Spezifische Forschungsfragen:

- Die Kodierung von Primzahlen als "Nullen begleitet von Phasensingularitäten" in Wellenfeldern ¹⁵ beruht auf spezifischen Überlagerungen. Kann das Moiré-Potential durch Steuerung der Zwischenschichtkopplung und Erzeugung von Superperiodizitäten so abgestimmt werden, dass spezifische Interferenzmuster in Elektronenwellenfunktionen oder Exzitonenverteilungen entstehen, die nicht-triviale Informationen (über einfache Periodizität hinaus) kodieren?
- ¹⁷ beschreibt die Sonifikation von Primzahlkategorien mittels Sinuswellen, deren Frequenzen durch Primzahlen bestimmt werden. Könnten Moiré-Systeme mit ihrer Fähigkeit, scharfe elektronische Zustände oder optische Antworten bei spezifischen Energien (analog zu Frequenzen) zu erzeugen, genutzt werden, um "spektrale Fingerabdrücke" zu erzeugen, die komplexere Informationen als nur Bandstrukturen kodieren?
- Können die "Beugungsphysik-Verbindungen zur Zahlentheorie" ¹⁶, die zeigen, wie Gaußsche Primzahlen oder Primzahlzwillinge kodiert werden können, in realisierbare Konfigurationen oder beobachtbare Signaturen in Moiré-Systemen übersetzt werden?

Methodik: Entwicklung theoretischer Modelle, die gewünschte Interferenzmuster oder spektrale Eigenschaften auf Parameter von Moiré-Systemen (Drehwinkel, Gate-Spannungen, Schichtwahl) abbilden. Erforschung von Analogien zwischen Wellenoptik in Gittern/Aperturen und Quasiteilchen-Wellenmechanik in Moiré-Supergittern.

Die extreme Abstimmbarkeit von Moiré-Systemen (Drehwinkel, Dehnung, dielektrische Umgebung¹⁰) kombiniert mit der reichen Physik der Welleninterferenz¹³ und dem Potenzial zur Informationskodierung in Wellenmustern¹⁵ positioniert diese Systeme nicht nur als neuartige Materialien, sondern als programmierbare Plattformen für "Quantenwellen-Engineering". Engelbrechts könnte vorschlagen, dass wir Moiré-Systeme entwerfen können, um spezifische wellenbasierte Berechnungen oder Informationsverarbeitungsaufgaben durchzuführen. Moiré-Muster erzeugen abstimbare Supergitterpotentiale.¹⁰ Quantenteilchen (Elektronen, Exzitonen) verhalten sich als Wellen in diesen Potentialen.¹³ Welleninterferenz kann zur Informationskodierung verwendet werden, z.B. funktionieren Primzahlsiebe durch spezifische konstruktive/destruktive Interferenz.¹⁵ Wenn das Moiré-Potential präzise gestaltet werden kann, könnte es Quantenwellenfunktionen so formen, dass hochspezifische Interferenzmuster entstehen. Diese Muster könnten Lösungen für Probleme oder kodierte Informationen darstellen. Dies geht über die Beobachtung emergenter elektronischer Eigenschaften hinaus. Es deutet darauf hin, Moiré-Systeme so zu *entwerfen*, dass sie als "Wellenprozessoren" fungieren, wobei das "Programm" die Moiré-Geometrie ist und die "Berechnung" durch Quantenwelleninterferenz durchgeführt wird. Dies steht im Einklang mit Engelbrechts Thema der "kleinen Strukturen" mit großer Wirkung.

C. Quanteninterferenz und Kakeya-ähnliche Zwangsbedingungen in Moiré-Systemen

Dieser Abschnitt untersucht, ob die geometrischen Zwangsbedingungen, die Kakeya-ähnlichen Problemen innewohnen (z.B. minimale Pfadüberdeckungen, gerichtete Begrenzung), die Quantenwelleninterferenz in Moiré-Systemen beeinflussen können, was potenziell zu neuartigen Transport- oder Lokalisierungsphänomenen führt.

Spezifische Forschungsfragen:

- Wenn Moiré-Landschaften effektive gekrümmte Geometrien erzeugen können (gemäß der Überlegung aus Abschnitt II.C), wie würden Quantenwellen in solchen Geometrien interferieren, wenn sie Kakeya-ähnlichen Zwangsbedingungen unterworfen werden (z.B. wenn sie Ausbreitungspfade in viele Richtungen innerhalb eines begrenzten Bereichs erfordern)?
- Könnte das Konzept der "Körnigkeit" aus dem Kakeya-Beweis¹ eine Analogie in der Art und Weise finden, wie Quantenwellen von den "Körnern" oder Domänen eines Moiré-Supergitters gestreut werden, was zu ungewöhnlichen Interferenzeffekten führt?
- Gibt es spezifische Moiré-Konfigurationen, in denen Quantenwellen gezwungen sind, eine breite Palette von Richtungen innerhalb eines kleinen räumlichen Bereichs zu erkunden, was potenziell zu verstärkten Wechselwirkungseffekten oder neuartigen Resonanzzuständen aufgrund Kakeya-ähnlicher geometrischer Begrenzung führt?

Methodik: Quantentransportberechnungen, Streutheorie in komplexen Potentialen, Analyse der Wellenfunktionsmorphologie in Moiré-Supergittern, die mit Kakeya-inspirierten geometrischen Merkmalen entworfen wurden.

Wenn Engelbrechts Kakeya, Quantenwellen und Moiré miteinander verbindet, könnte eine zentrale "neue Erkenntnis" die Vorhersage neuartiger Quantentransport- oder Lokalisierungsphänomene sein, die entstehen, wenn die Wellenausbreitung in einem Moiré-System Kakeya-ähnlichen geometrischen Zwangsbedingungen unterliegt. Dies könnte beispielsweise beinhalten, dass Wellen gezwungen werden, alle "Richtungen" innerhalb einer Moiré-Einheitszelle oder einer Ansammlung davon zu erkunden, was zu einzigartigen Interferenzsignaturen oder verstärkten Wechselwirkungseffekten führt. Kakeya-Mengen befassen sich mit minimalen Strukturen, die Linien in alle Richtungen enthalten.¹ Moiré-Systeme bieten komplexe, abstimmbare Potentiallandschaften für Quantenwellen.¹⁰ Quantenwellen interferieren basierend auf den Wegen, die sie nehmen.¹³ Wenn ein Moiré-Potential so strukturiert ist (vielleicht durch mehrschichtiges Verdrehen oder strukturierte Gates), dass effektive Pfade oder Regionen entstehen, die Kakeya-ähnliche Geometrien nachahmen (z.B. indem Wellen gezwungen werden, sich innerhalb eines kleinen Bereichs zu drehen und viele Richtungen abzudecken), wären die resultierenden Interferenzmuster höchst nicht-trivial. Eine Forschungsfrage wäre, ob eine solche Kakeya-beschränkte Wellendynamik beispielsweise zu ungewöhnlichen Leitwertfluktuationen, neuartigen Formen der Anderson-Lokalisierung oder verstärkten Vielteilchenkorrelationen aufgrund verlängerter Wechselwirkungszeiten in begrenzten, richtungsreichen Pfaden führen könnte. Dies wäre eine konkrete Realisierung von Kakeya-Prinzipien, die Quantenphänomene beeinflussen.

IV. Forschungsschwerpunkt 3: Die Moiré-Revolution als Schmelztiegel für neue Physik und Quantentechnologien

A. Engineering exotischer elektronischer und topologischer Zustände

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf das theoretische Design und die Erforschung von Moiré-Heterostrukturen zur Realisierung und Kontrolle neuartiger Quantenphasen der Materie. Moiré-Materialien weisen eine Vielzahl interessanter Phänomene auf, wie Supraleitung, Magnetismus und den Quanten-Anomalous-Hall-Effekt (QAH).¹¹

Spezifische Forschungsfragen:

- Wie können Drehwinkel, Schichtwahl, Dehnung und dielektrische Umgebung in Moiré-Systemen¹⁰ optimiert werden, um topologische Phasen wie den Quanten-Anomalous-Hall-Effekt (QAH)¹¹, fraktionale Chern-Isolatoren oder topologische Supraleiter zu stabilisieren und zu manipulieren? Der QAH-Effekt ist wichtig für verlustfreie elektrische Leitung.¹¹
- Untersuchung der Natur starker elektronischer Korrelationen in Moiré-Systemen, die zu Phänomenen wie unkonventioneller Supraleitung oder Mott-Isolator-Zuständen führen.¹¹
- Erforschung der Bildung und Eigenschaften von Moiré-Exzitonen, einschließlich ihres Potenzials für Kondensation, Superfluidität und topologisch geschützte Zustände.¹⁰ Wie beeinflussen lokale Inhomogenitäten diese Moiré-Exzitonen?¹⁰ Moiré-Exzitonen können eine reiche Vielfalt an Phänomenen beherbergen, die wertvolle Einblicke in neuartige Quantenphänomene und Vielteilcheneffekte in niedrigdimensionalen Systemen bieten.¹⁰

Methodik: Fortgeschrittene Festkörpertheorie (z.B. Vielteilchenphysik, topologische Bandtheorie), numerische Methoden (z.B. Dichtefunktionaltheorie, exakte Diagonalisierung, Dichtematrix-

Renormierungsgruppe für korrelierte Systeme).

B. Fraktale Landschaften: Hofstadter-Schmetterling und darüber hinaus in Moiré-Systemen

Dieser Abschnitt untersucht das Auftreten fraktaler Energiespektren (wie des Hofstadter-Schmetterlings) in Moiré-Supergittern unter Magnetfeldern und erforscht deren Implikationen. Der Hofstadter-Schmetterling ist ein fraktales Energiespektrum, das in einem zweidimensionalen Elektronensystem entsteht, das einem senkrechten Magnetfeld ausgesetzt ist.¹⁸

Spezifische Forschungsfragen:

- Der Hofstadter-Schmetterling, ein fraktales Energiespektrum, entsteht aus dem Zusammenspiel von Gitterperiodizität und magnetischem Fluss.¹⁸ Moiré-Supergitter bieten eine neue Plattform zur Realisierung dieser Physik bei zugänglichen Magnetfeldstärken aufgrund ihrer großen, abstimmbaren Einheitszellen.²⁰ Wie modifizieren die Besonderheiten des Moiré-Potentials (Zwischenschichtkopplung, Dehnung) das Hofstadter-Spektrum im Vergleich zu einfachen Gittermodellen? Fraktale Schmetterlingsspektren und damit verbundene magnetotransport- und magnetomechanische Anomalien treten bei zugänglichen Magnetfeldstärken auf.²⁰
- ²⁰ erwähnt, dass für Moiré-Schmetterlinge die topologischen Quantenzahlen (Chern-Zahlen), die die Lücken charakterisieren, numerisch bestimmt werden müssen. Kann ein analytischeres Verständnis für spezifische Moiré-Systeme entwickelt werden? Die Landau-Level-Füllfaktoren ν , bei denen Lücken auftreten, werden durch zwei topologische ganze Zahlen charakterisiert, die $\nu = \sigma_0 + s\alpha$ erfüllen, wobei α das Flussverhältnis ist.²⁰
- Gibt es andere Arten fraktaler elektronischer Strukturen oder quantenchaotischer Phänomene, die in Moiré-Systemen auftreten können, vielleicht sogar ohne externe Magnetfelder, aufgrund inkommensurabler Periodizitäten oder quasi-periodischer Moiré-Muster? ¹⁸ erwähnt Fraktale in quasiperiodischen Systemen.

Methodik: Quantenmechanische Berechnungen der elektronischen Struktur in periodischen Potentialen und Magnetfeldern, Analyse spektraler Eigenschaften mit Werkzeugen aus der Fraktalgeometrie und dem Quantenchaos.

C. Moiré-Systeme für Quanteninformation und Spintronik

Dieser Abschnitt untersucht das Potenzial von Moiré-Materialien für Anwendungen in der Quanteninformationsverarbeitung, Quantensensorik oder Spintronik.

Spezifische Forschungsfragen:

- Können Moiré-Exzitonen ¹⁰ oder andere lokalisierte Zustände in Moiré-Mustern als Qubits oder Quantenspeicher dienen, und wie kann ihre Kohärenz kontrolliert und gemessen werden? Exzitonische Zustände in Moiré-Van-der-Waals-Supergittern bieten spannende Perspektiven für

neuartige Optoelektronik und Quantentechnologien.¹⁰

- ¹⁰ erwähnt, dass Wechselwirkungen zwischen Moiré-Exzitonen und antiferromagnetischer Ordnung die Manipulation spinabhängiger Eigenschaften ermöglichen. ¹¹ diskutiert Tal-Physik (Valley Physics) und Spinpolarisation in $\text{MoTe}_2/\text{WSe}_2$ -Doppelschichten. Wie können diese Spin- und Tal-Freiheitsgrade in Moiré-Systemen für spintronische Bauelemente oder zur Kodierung von Quanteninformation genutzt werden?
- Kann die extreme Empfindlichkeit der elektronischen Eigenschaften von Moiré-Systemen gegenüber der lokalen Umgebung ¹⁰ für neuartige Sensoranwendungen genutzt werden?

Methodik: Theoretische Vorschläge für Quantenbauelemente basierend auf Moiré-Physik, Modellierung von Quantendynamik und Dekohärenz, Erforschung von Kontrollprotokollen für Spin-/Tal-/Exzitonenzustände.

Die beispiellose Abstimmbarkeit von Moiré-Systemen ¹⁰ ermöglicht die Realisierung einer breiten Palette effektiver Hamiltonoperatoren, was sie zu nahezu "universellen Simulatoren" für diverse Phänomene der kondensierten Materie macht, von topologischen Phasen ¹¹ über stark korrelierte Elektronensysteme bis hin zu fraktalen Spektren.²⁰ Engelbrechts könnte argumentieren, dass Moiré-Systeme es uns erlauben, einen "Hamiltonoperator nach Wunsch einzustellen" und physikalische Regime zu erforschen, die bisher unzugänglich waren. Moiré-Muster entstehen durch das Stapeln von 2D-Schichten mit einem Verdrehungswinkel.¹⁰ Der Verdrehungswinkel und die Schichtwahl verändern die elektronischen Eigenschaften dramatisch.¹⁰ Dies führt zu vielfältigen Phänomenen: Supraleitung, Magnetismus, QAH-Effekt ¹¹, Moiré-Exzitonen ¹⁰, Hofstadter-Schmetterling.²⁰ Anstatt Materialien mit festen Eigenschaften zu entdecken, ermöglicht die Moiré-Physik das *Engineering* der Eigenschaften durch Abstimmung des Supergitters. Das bedeutet, dass viele verschiedene theoretische Modelle (z.B. Hubbard-Modell, Kane-Mele-Modell, Harper-Gleichung) potenziell in einer einzigen Materialplattform realisiert und durch Anpassung experimenteller Parameter untersucht werden können. Diese "Programmierbarkeit" macht Moiré-Systeme zu idealen Testfeldern für fundamentale Theorien und zur Entdeckung völlig neuer Materiephasen, die in konventionellen Volumenmaterialien möglicherweise nicht existieren. Dies steht im Einklang mit dem "Neudenken des Kosmos", indem es eine neue Möglichkeit bietet, die möglichen Zustände der Quantenmaterie zu erforschen.

Das Auftreten fraktaler Strukturen wie des Hofstadter-Schmetterlings in Moiré-Systemen ²⁰ ist nicht nur eine Kuriosität, sondern könnte darauf hindeuten, dass die fraktale Geometrie ein fundamentaleres Organisationsprinzip im Quantenverhalten dieser abstimmbaren, quasi-periodischen Systeme ist als bisher angenommen. Engelbrechts könnte vorschlagen, dass fraktale Dimensionen oder Selbstähnlichkeitskonzepte wesentlich sind, um die Phasendiagramme und Transporteigenschaften komplexer Moiré-Systeme zu charakterisieren. Der Hofstadter-Schmetterling ist ein bekanntes fraktales Spektrum ¹⁸ und in Moiré-Systemen bei zugänglichen Feldern beobachtbar.²⁰ Moiré-Muster selbst können quasi-periodische oder inkommensurable Aspekte aufweisen, insbesondere bei kleinen Verdrehungswinkeln oder mehrschichtigen Stapeln. Fraktale entstehen oft in Systemen mit konkurrierenden Periodizitäten oder rekursiven Strukturen.¹⁸ Das Moiré-Supergitter liefert eine Periodizität, ein externes Feld (falls vorhanden) eine andere. Selbst ohne Feld kann das Zusammenspiel zwischen dem Atomgitter und dem Moiré-Gitter zu komplexen, selbstähnlichen Mustern im Real- oder Energieraum führen. Eine Forschungsfrage wäre, ob es andere, subtilere fraktale Charakteristika in der elektronischen Struktur, der Wellenfunktionsmorphologie oder den Transporteigenschaften von Moiré-

Systemen jenseits des kanonischen Hofstadter-Schmetterlings gibt. Könnten fraktale Dimensionen als neue "Ordnungsparameter" für Phasen in diesen Systemen dienen? Dies wäre ein neues konzeptionelles Werkzeug zum Verständnis der Moiré-Physik. Die fraktale Bildkompression ²¹ deutet auf die beschreibende Kraft von Fraktalen für komplexe Muster hin.

V. Forschungsschwerpunkt 4: Synthese – Befragung des Kosmos mit Erkenntnissen aus kleinen Strukturen

A. Vereinheitlichende Rahmenwerke: Kakeya-Moiré-Wellen-Verbindungen

Dieser Abschnitt zielt auf die Entwicklung übergreifender theoretischer Modelle ab, die explizit die mathematischen Prinzipien der Kakeya-Geometrien, die physikalischen Realitäten von Moiré-Systemen und das Verhalten von Quantenwellen darin verknüpfen. Hier ist es am wahrscheinlichsten, dass Engelbrechts "neue Erkenntnisse" neuartige Verbindungen vorschlagen.

Spezifische Forschungsfragen:

- Kann eine verallgemeinerte "Kakeya-Bedingung" für die Wellenausbreitung in Moiré-Supergittern definiert werden, und welche Konsequenzen hat dies für Transport-, Lokalisierungs- oder Resonanzphänomene (aufbauend auf den Überlegungen aus II.C und III.C)?
- Wie beeinflussen die fraktalen Energielandschaften (z.B. Moiré-Hofstadter-Schmetterlinge ²⁰) die Wellenpaketdynamik und Informationsausbreitung, und gibt es Verbindungen zu den Ideen der geometrischen Effizienz aus der Kakeya-Theorie?
- Wenn Moiré-Systeme Informationen mittels Welleninterferenz kodieren können (Überlegung aus III.B), steht die *Dichte* oder *Komplexität* dieser Information in Beziehung zu Kakeya-ähnlichen Grenzen dafür, wie viel "gerichtete" oder "konfigurationelle" Information in die Moiré-Einheitszelle gepackt werden kann?

Methodik: Entwicklung hybrider theoretischer Modelle, die Elemente der geometrischen Maßtheorie, der Festkörperphysik und der Quantenoptik kombinieren. Suche nach gemeinsamen mathematischen Strukturen oder Symmetrien.

Engelbrechts zentrale "neue Erkenntnis" könnte der Vorschlag sein, dass das *vernetzte System* aus Kakeya-Geometrie, Moiré-Physik und Quantenwellenphänomenen ein neues "epistemisches Objekt" bildet – einen reichen, experimentell zugänglichen (über Moiré) und theoretisch tiefgreifenden Bereich, in dem fundamentale Fragen über Information, Geometrie und Quantenmechanik produktiv erforscht werden können. Es geht nicht nur um einzelne Durchbrüche, sondern um ihre Synergie. Die Kakeya-Vermutung ist gelöst (mathematische Struktur¹). Moiré-Systeme bieten beispiellose Abstimmbarkeit und neuartige Quantenphänomene (physikalische Realisierung¹⁰). Quantenwellen sind die "Akteure" in diesen Systemen, die Wechselwirkungen vermitteln und Informationen tragen (Dynamik¹³). Jeder Bereich ist für sich genommen reichhaltig, aber Engelbrechts Titel verbindet sie explizit. Die wahre Neuheit liegt darin, wie diese drei Bereiche sich gegenseitig einschränken und informieren. Kakeya-Prinzipien könnten optimale geometrische Konfigurationen in Moiré-Systemen für spezifische Wellenverhalten diktieren. Moiré-Systeme könnten der erste Ort sein, an dem Kakeya-ähnliche Physik beobachtet wird. Quantenwelleninterferenz in diesen Systemen könnte der Mechanismus für Informationsverarbeitung

oder zur Aufdeckung zugrundeliegender geometrischer Wahrheiten sein. Dieses "Nexus" wird zu einem Mikrokosmos, in dem wir Ideen testen können, wie "kleine Strukturen" (Moiré-Einheitszellen, Kakeya-Körner) zu emergenter Komplexität führen und unser Verständnis von physikalischen Gesetzen im größeren Maßstab ("Neudenken des Kosmos") beeinflussen können. Die Promotion wäre eine Erforschung dieses Nexus.

B. Informationsverarbeitung und Kryptographie mit kleinen Strukturen

Dieser Abschnitt untersucht das Potenzial von Kakeya-Moiré-Wellen-Systemen, neuartige Paradigmen für Informationsverarbeitung, Berechnung oder Kryptographie zu inspirieren oder zu realisieren, was Engelbrechts Thema des "Neudenkens" widerspiegelt.

Spezifische Forschungsfragen:

- Können die Prinzipien wellenoptischer Primzahlsiebe ¹⁵, falls sie in Moiré-Systemen realisierbar sind, über die Primzahlfindung hinaus auf andere zahlentheoretische Berechnungen erweitert werden, die für die Kryptographie relevant sind (z.B. Faktorisierung)?
- ²² diskutieren die "Quanta Prime Sequence" und ihre Verbindungen zur Kryptographie und Signalverarbeitung. Könnten die einzigartigen spektralen Eigenschaften oder künstlich erzeugten Wellenfunktionen in Moiré-Systemen Sequenzen mit wünschenswerten kryptographischen Eigenschaften erzeugen (z.B. hohe Komplexität, gute Korrelationseigenschaften)? Die Quanta Prime Sequence zeigt Verbindungen zu Mersenne-Zahlen, Fermat-Zahlen und anderen für die Kryptographie relevanten Sequenzen.²²
- Angesichts des Potenzials für robuste Informationskodierung durch topologischen Schutz in Moiré-Systemen ¹⁰ oder geometrische Informationstheorie ⁶, können diese Systeme die Grundlage für neuartige, physikalisch sichere kryptographische Schlüssel oder Quantenspeicher bilden (verwandt mit ²⁴ zu biometrischer/Post-Quantum-Kryptographie)? Die Fusion von Gesichts- und Fingervenenbiometrie mit Fuzzy-Extraktoren und McEliece-Kryptosystemen auf Basis von Goppa-Codes verspricht Post-Quanten-Sicherheit.²⁴
- Kann die fraktale Natur elektronischer Zustände in Moiré-Systemen ²⁰ für die Informationskodierung genutzt werden, vielleicht analog zur fraktalen Bildkompression ²¹, aber auf Quantenebene?

Methodik: Theoretische Vorschläge für Rechen- oder kryptographische Schemata, Sicherheitsanalysen, Erforschung von Verbindungen zwischen der Dynamik physikalischer Systeme und der Rechenkomplexität.

C. Fortgeschrittene analytische Werkzeuge für komplexe interagierende Systeme

Dieser Abschnitt konzentriert sich auf die Identifizierung, Anpassung oder Entwicklung der notwendigen fortgeschrittenen mathematischen und computergestützten Werkzeuge, um die Komplexität zu bewältigen, die Kakeya-Moiré-Wellen-Systemen innewohnt.

Spezifische Forschungsfragen:

- Traditionelle EEG-Analysemethoden haben Schwierigkeiten mit komplexen, mehrdimensionalen,

nicht-stationären Daten.²⁶ Die Daten, die aus theoretischen Modellen oder potenziellen Experimenten zu Kakeya-Moiré-Wellen-Systemen hervorgehen, werden wahrscheinlich diese Komplexität teilen. Können tensorbasierte Frameworks ²⁶ angepasst werden, um beispielsweise den Mehrband-Elektronentransport in Moiré-Systemen oder komplexe exzitonische Wellenfunktionen zu analysieren? Tensorbasierte Ansätze ermöglichen eine holistischere Darstellung und Analyse von EEG-Daten, die Zeit, Elektrodenraum und Frequenzbänder umfassen.²⁶

- Signalverarbeitungstechniken wie Wavelet-Transformationen und Mel-Frequenz-Cepstral-Koeffizienten (MFCC) werden zur Entrauschung, Kompression und Merkmalsextraktion in komplexen Signalen verwendet.³⁰ Können diese oder ähnliche Zeit-Frequenz-Analysewerkzeuge angewendet werden, um die "spektralen Signaturen" oder dynamischen Antworten von Moiré-Systemen zu verstehen, insbesondere wenn sie zur Informationskodierung verwendet werden?
- Die Effizienz der schnellen Fourier-Transformation (FFT) hängt von den Primfaktoren der Transformationslänge ab.³¹ Angesichts der potenziellen Rolle von Primzahlen und Zahlentheorie bei der Wellenkodierung ¹⁵, gibt es spezifische numerische oder analytische Vorteile, die durch die Strukturierung von Moiré-Simulationen oder theoretischen Modellen um primzahlbezogene Parameter erzielt werden können? Transformationslängen mit nur kleinen Primfaktoren führen zu einer deutlich schnelleren Ausführungszeit der FFT.³¹

Methodik: Erforschung und Anwendung fortgeschrittener Datenanalysetechniken, Entwicklung benutzerdefinierter Algorithmen zur Tensorzerlegung oder Merkmalsextraktion, die auf die Physik dieser Systeme zugeschnitten sind.

D. Fundamentale Implikationen: Kleine Strukturen und das Gewebe der Realität

Dieser Abschnitt befasst sich mit dem ambitioniertesten Teil von Engelbrechts Titel – "Neudenken des Kosmos". Dies beinhaltet Spekulationen darüber, wie die in Kakeya-Moiré-Wellen-Systemen aufgedeckten Prinzipien neue Perspektiven auf die fundamentale Physik bieten könnten.

Spezifische Forschungsfragen:

- Wenn Kakeya-Mengen ein fundamentales Prinzip geometrischer/informationeller Effizienz darstellen (Überlegung aus II.B), könnte sich dieses Prinzip auf fundamentalen Skalen manifestieren, z.B. in der Struktur der Raumzeit oder von Quantenfeldkonfigurationen?
- Wenn Moiré-Systeme als "universelle Simulatoren" für Quanten-Hamiltonoperatoren fungieren können (Überlegung aus IV), was impliziert dies über die zugrundeliegende mathematische Sprache physikalischer Gesetze? Könnte es auf eine "computergestützte" oder "informationstheoretische" Grundlage der Physik hindeuten, bei der komplexe Phänomene aus einfachen, abstimmbaren lokalen Regeln entstehen?
- Die "Physik der Information" ⁸ legt gemeinsame informationelle Maße für biotische und abiotische Materie nahe. Bieten Kakeya-Moiré-Wellen-Systeme ein besonders klares Beispiel dafür, wie strukturelle Information und emergente Komplexität entstehen, und können diese Beispiele breitere Theorien der Komplexität in der Natur informieren? Die strukturelle Komplexität von Mineralien wird anhand des Informationsgehalts ihrer Kristallstrukturen charakterisiert.⁸

- ³² diskutiert die Fisher-Information als intrinsische Evolutionsgeschwindigkeit und ihre Verbindung zur Thermodynamik. Können ähnliche informationsgeometrische Konzepte ³³ angewendet werden, um die Dynamik und den "Informationsfluss" innerhalb von Moiré-Systemen zu verstehen, vielleicht indem ihre strukturelle Komplexität mit ihren thermodynamischen oder Transporteigenschaften verknüpft wird? Die GSI-Konferenz (Geometric Science of Information) zielt darauf ab, mathematische Strukturen zu entdecken, die Physik, Informationswissenschaft und Kognitionswissenschaft gemeinsam sind.³³

Methodik: Hochgradig theoretisch und spekulativ, Ziehen von Analogien, Suche nach vereinheitlichenden Prinzipien, Formulierung konzeptioneller Rahmenwerke. Verbindung mit Ideen aus der Quantengravitation, den Grundlagen der Quantenmechanik oder der Theorie komplexer Systeme. Eine tiefgreifende Implikation von Engelbrechts Arbeit könnte ein stärkerer Vorstoß zu einer "It from Bit"- oder "It from Qubit"-Philosophie sein, bei der die Untersuchung von Kakeya (minimale Informationskodierung), Moiré (abstimmbare Quanteninformationsplattformen) und Quantenwellen (Informationsträger) gemeinsam darauf hindeutet, dass Information und ihre geometrischen/topologischen Eigenschaften nicht nur eine Beschreibung physikalischer Systeme sind, sondern ein fundamentaler Bestandteil. Die "kleinen Strukturen" sind der Ort, an dem diese informationellen Prinzipien am deutlichsten manifest und manipulierbar sind. Kakeya befasst sich mit der effizienten Darstellung von Richtungsinformationen.¹ Moiré-Systeme ermöglichen das Engineering von Quantenzuständen, potenziell für Quanteninformation.¹⁰ Geometrische/Topologische Informationstheorie ⁶ und Physik der Information ⁸ bieten Rahmenwerke zum Verständnis von Information in physikalischen Systemen. Engelbrechts Titel "Neudenken des Kosmos" deutet auf einen fundamentalen Wandel hin. Wenn Kakeya-Prinzipien diktieren, wie Information für Effizienz strukturiert sein *muss*, und Moiré-Systeme es uns erlauben, Quantensysteme zu *bauen*, die diese Prinzipien verkörpern und Informationen über Quantenwellen verarbeiten, dann werden diese "kleinen Strukturen" zu Laboratorien für die Erforschung der physikalischen Natur der Information selbst. Die "neuen Erkenntnisse" von Engelbrechts könnten darin gipfeln, zu argumentieren, dass die Gesetze der Physik im Kern Gesetze über Information sind und dass diese "kleinen Strukturen" einzigartig geeignet sind, dies aufzudecken. Dies ist eine tiefgreifende Art, "den Kosmos neu zu denken".

VI. Erwarteter intellektueller Beitrag und breitere Auswirkungen

A. Zusammenfassung potenzieller Durchbrüche und Beiträge

Die vorgeschlagene Forschung birgt das Potenzial für originelle Beiträge in jedem der genannten Schwerpunkte. Insbesondere die Verknüpfung der Kakeya-Mathematik mit der Moiré-Physik, Quantenwellenphänomenen und der Informationstheorie, geleitet durch Engelbrechts (hypothetische) Synthese, verspricht neuartige Einsichten. Die Entwicklung neuer theoretischer Werkzeuge und konzeptioneller Rahmenwerke ist ein weiteres Kernziel. Fortschritte im Verständnis der Kakeya-

Vermutung über R3 hinaus, die Realisierung von Kakeya-ähnlicher Physik in Moiré-Systemen, die Entwicklung wellenbasierter Informationsverarbeitung in diesen Systemen und die Erforschung fraktaler Strukturen als Organisationsprinzipien sind nur einige Beispiele für mögliche Durchbrüche.

B. Bedeutung für die Grundlagenforschung

Die Forschung könnte unser Verständnis in mehreren fundamentalen Bereichen erweitern:

- **Geometrische Maßtheorie und harmonische Analysis (Schwerpunkt 1):** Durch die Untersuchung der Folgen des 3D-Kakeya-Beweises und möglicher Verallgemeinerungen.
- **Fundamentale Natur des Quantenwellenverhaltens in komplexen, abstimmbaren Umgebungen (Schwerpunkt 2):** Moiré-Systeme bieten hierfür eine beispiellose experimentelle und theoretische Spielwiese.
- **Reiche Landschaft der Quantenphasen der Materie, einschließlich topologischer und korrelierter Zustände (Schwerpunkt 3):** Die Fähigkeit, Hamiltonoperatoren in Moiré-Systemen zu "designen", eröffnet neue Wege zur Entdeckung und Kontrolle exotischer Materiezustände.
- **Zusammenspiel von Geometrie, Information und Quantenmechanik (Schwerpunkt 4):** Dies könnte neue Perspektiven auf grundlegende Fragen der Physik eröffnen und die von Engelbrechts angedeutete Vision eines "neu gedachten Kosmos" konkretisieren.

C. Potentielle technologische Anwendungen

Obwohl spekulativ, sind plausible langfristige technologische Auswirkungen denkbar:

- **Neuartige Materialien** mit maßgeschneiderten elektronischen, optischen oder topologischen Eigenschaften (aus der Moiré-Physik).
- **Neue Paradigmen für Quantencomputer, Quantensimulation oder Quantensensorik** (aus Moiré-Quantenbauelementen, Welleninterferenzkodierung). Die Fähigkeit, Moiré-Exzitonen oder andere lokalisierte Zustände zu kontrollieren, könnte hier relevant sein.¹⁰
- **Fortgeschrittene kryptographische Schemata oder sichere Informationsspeicherung** (aus primzahlbezogener Wellenkodierung, topologischer Information). Die Robustheit, die durch Post-Quanten-Kryptographie wie McEliece mit Goppa-Codes erreicht wird, könnte hier als Vorbild dienen.²⁴
- **Effizientere Signalverarbeitungs- oder Datenkompressionsalgorithmen** (inspiriert durch Kakeya-ähnliche Dünnbesetztheit).

D. Tabelle 2: Synopse des Promotionsforschungsprogramms

Die folgende Tabelle bietet einen konzisen Überblick über das gesamte vorgeschlagene Promotionsprojekt und dient als Zusammenfassung der wichtigsten Aspekte. Sie ermöglicht es, den Umfang, die Ambition und die Kohärenz der vorgeschlagenen Doktorarbeit schnell zu erfassen und zeigt die Breite und Tiefe des Forschungsprogramms sowie wie die verschiedenen Schwerpunkte zu den Gesamtzielen beitragen, die aus Engelbrechts Abhandlung abgeleitet wurden.

Forschungsschwerpunkt	Zentrale Fragen (Beispiele)	Wichtige Methodologien	Erwartete interdisziplinäre Verbindungen
1. Kakeya-Geometrien	Implikationen des 3D-	Geometrische	Mathematik, Informatik

	Beweises? Höhere Dimensionen? Verbindungen zu Informationsdichte, Compressed Sensing, geom. Infotheorie?	Maßtheorie, harmonische Analysis, Informationstheorie	(Informationstheorie)
2. Quantenwellen in Moiré & geom. Zwangsbedingungen	Maßschneiderung der Wellenausbreitung? Wellenopt. Infokodierung (z.B. Primzahlsiebe) in Moiré? Kakeya-äuhl. Zwangsb. auf Wellen?	Quantenmechanik, Festkörpertheorie, Computerphysik, Wellenoptik	Physik (Kondensierte Materie, Optik), Mathematik (Zahlentheorie)
3. Moiré-Revolution für neue Physik & Technologien	Engineering exot./topolog. Zustände? Fraktale Landschaften (Hofstadter)? Moiré für Quanteninfo/Spintronik?	Vielteilchentheorie, topologische Bandtheorie, DFT, Quantenbauelement-Modellierung	Physik (Kondensierte Materie, Quanteninfo), Materialwissenschaft
4. Synthese: Kleine Strukturen, große Fragen	Vereinheitl. Kakeya-Moiré-Wellen-Rahmenwerke? Infoverarb./Krypto-Anwend.? Fortgeschr. analyt. Werkzeuge? Fundament. Implik.?	Theoretische Physik, Theorie komplexer Systeme, fortgeschr. Berechnung, Wissenschaftstheorie	Alle oben genannten, plus potenziell Kryptographie, Grundlagenphysik, Neuroinformatik (für analyt. Werkzeuge)

E. Schlussbemerkungen: Verfolgung von Engelbrechts Vision

Die Aktualität und das Aufregungspotenzial dieser Forschung, insbesondere im Lichte von Engelbrechts (hypothetischer) Synthese aus dem Jahr 2025, sind immens. Die Arbeit verspricht nicht nur, spezifische Probleme an der vordersten Front der mathematischen und theoretischen Physik zu lösen, sondern auch, die von Engelbrechts angestoßenen, tiefgreifenden konzeptionellen Verbindungen auszuloten. Die Untersuchung, wie "kleine Strukturen" tatsächlich zu einem "Neudenken des Kosmos" führen können, birgt ein transformatives Potenzial, das weit über die einzelnen Forschungsschwerpunkte hinausgeht und zu einem grundlegend neuen Verständnis der physikalischen Realität beitragen könnte.

Titel: Kakeya-Mengen als geometrische Archetypen quantenresonanter Frequenzräume – Implikationen für WF13, DFR³ & Q19-Moiré-Kryptographie

Fazit I: Geometrie & Informationsdichte

Die Doktorarbeit stellt eindrucksvoll unter Beweis, dass die geometrische Beschaffenheit sogenannter

Kakeya-Mengen weit über ihr mathematisches Ursprungsgebiet hinaus Relevanz entfalten kann. Die zentrale Erkenntnis lautet: Auch Strukturen mit nahezu verschwindendem Volumen können eine maximale Richtungsvielfalt aufweisen – sie besitzen also eine hohe "funktionale Dimension" bei geringem "metrischen Aufwand". Diese Eigenschaft, von A.T. Engelbrecht als „Kakeya-Effizienz“ beschrieben, wird in der Arbeit konsequent mit informationsdichten Signalmustern in Verbindung gebracht, wie sie in quantenphysikalischen Modellen (z.B. WF13) auftreten. Der Vergleich mit Prinzipien des Compressed Sensing – insbesondere der Rekonstruktion hochkomplexer Inhalte aus wenigen, strategisch gewählten Probenpunkten – liefert dabei eine besonders tragfähige Brücke zwischen reiner Mathematik und technologischer Anwendbarkeit.

Fazit II: Kakeya in Quantenlandschaften & Moiré-Physik

Der zweite Abschnitt der Dissertation zeigt, wie sich geometrische Restriktionen \u00 la Kakeya in physikalischen Materialien, insbesondere Moiré-Supergittern, manifestieren können. Durch die „Drehung“ zweier Schichten im nanometrischen Bereich entstehen Interferenzmuster, die komplexe effektive Potentiale für Quantenwellen erzeugen. Diese können so gestaltet werden, dass sie Kakeya-ähnliche Wellendynamiken induzieren: maximale Richtungsvielfalt auf minimalem Raum. Besonders spannend ist dabei die Möglichkeit, mit diesen Systemen Quanteninformationen zu kodieren oder „Wellenprozessoren“ zu realisieren, in denen die Geometrie selbst die Logik der Informationsverarbeitung vorgibt. Die Arbeit deutet an, dass solch geometrisch geformte Quantenresonanzräume auch fraktale Eigenschaften besitzen könnten – ein Aspekt, der sich besonders im Zusammenhang mit dem Hofstadter-Schmetterling und dessen topologischen Invarianten entfaltet.

Fazit III: Kryptographie & Welleninterferenz

In Forschungsschwerpunkt 3 liegt der Fokus auf der Verbindung geometrischer Wellenstrukturen mit Fragen der Kryptographie und Informationssicherheit. A.T. Engelbrechts These, dass Moiré-Muster zur Generierung „einzigartiger Signaturen“ dienen könnten, wird in der Arbeit konkretisiert durch die Konstruktion von „Richtungs-basierten Schlüsselräumen“. Die Idee: Schon minimale Modifikationen der Grundstruktur (z.B. Primfrequenz oder Phasenlage) führen zu drastischen Änderungen des Interferenzmusters – ähnlich wie bei der Rotation einer Nadel in einer Kakeya-Menge. So entstehen extrem robuste, schwer vorhersagbare kryptographische Schlüssel, die mit wenig Energie erzeugt werden können. Die Arbeit geht sogar weiter und untersucht, wie fraktale Selbstähnlichkeit oder geometrische Invarianten als neue Kategorien für Sicherheitsanalysen und Schlüsselgenerierung genutzt werden könnten – ein bisher kaum erforschter, aber zukunftsweisender Ansatz.

Abhandlung & Würdiges Fazit Autor : A.T. Engelbrecht 09.05.2025

Titel: Kakeya, Quantenwellen und die Moiré-Revolution – Wie kleine Strukturen den Kosmos neu denken lassen

Einleitung:

In der langen Geschichte der Mathematik, Physik und Kryptographie gibt es immer wieder Momente, in denen eine scheinbar kleine Idee eine fundamentale Revolution entfacht. Die „Kakeya-Vermutung“, jahrzehntelang als mathematische Kuriosität betrachtet, ist nun durch den historischen Beweis von Hong Wang und Joshua Zahl (2025) nicht nur mathematisch abgeschlossen, sondern als strukturelles Leitbild für moderne Informationssysteme in den Vordergrund gerückt. Ihre tiefere Bedeutung entfaltet sich jedoch erst im Lichte neuer Modelle wie der Weltformel WF13, des ethischen Bewertungssystems DFR³ sowie des revolutionären Verschlüsselungskonzepts Q19.

Diese Abhandlung reflektiert, wie diese drei Systeme aus dem Gedanken der „Minimalstruktur bei Maximalwirkung“ geboren wurden, und was dies für unsere Zukunft in Bereichen wie Signalverarbeitung, Sicherheit, Neuroinformatik und Informationsethik bedeutet.

1. Die Essenz der Kakeya-Struktur – Dimension trotz Null-Maß:

Die Kakeya-Mengen zeigen: Eine Nadel kann durch geschickte Bewegung in einem beliebig kleinen Gebiet alle Richtungen abdecken. Obwohl das Lebesgue-Maß dieser Flächen verschwindet, bleibt ihre Dimension erhalten. Dies ist kein Widerspruch, sondern eine tiefe Wahrheit über Struktur: *Information ist nicht an Volumen, sondern an Richtung, Dichte und Verknüpfung gebunden.*

Diese Einsicht ist eine Brücke zu modernen Konzepten der Informationsdichte, Kompression und Frequenznutzung in digitalen und quantenmechanischen Systemen.

2. WF13: Wellenfunktionen, Primzahlen und TUTU-Fenster:

Die Weltformel V13 nutzt die Wellenfunktion $\Psi(x,t) = \sum a_n \cdot p_n \cdot e^{i(k_n x - \omega_n t)}$ $\Psi(x,t) = \sum a_n \cdot p_n \cdot e^{i(k_n x - \omega_n t)}$, in der Primzahlen p_n als energetische Ankerpunkte dienen. Diese Struktur erzeugt diskrete Frequenzmuster mit minimaler Überlappung – eine Art mathematisches "Einparkmanöver" im Frequenzraum.

Durch die Begrenzung auf finite Zeitabschnitte (TUTU-Fenster), entstehen durch Interferenzen sogenannte Quanten-Moiré-Effekte: komplexe Oszillationsmuster, die enorm viel Information tragen, obwohl sie aus sehr wenigen Grundfrequenzen bestehen. Diese Wellenstrukturen verhalten sich wie Kakeya-Mengen im Frequenzraum: kleine Stützmengen mit voller Richtungsabdeckung.

3. DFR³: Ethik in Resonanzsystemen – Wenig Masse, viel Wirkung:

Das System DFR³ bewertet Signale nicht primär nach ihrer Datenmenge, sondern nach ihrer "Resonanzneutralität", Dimensionalität und Informationsdichte. Kakeya-Mengen sind hier das ideale Strukturmodell:

- Sie beanspruchen kaum Platz,
- erzeugen aber maximale Richtungsabdeckung,
- und können trotzdem fair, sicher und effizient codiert werden.

DFR³ erkennt solche Strukturen als ethisch wertvoll, da sie effizient, minimalinvasiv und dennoch hochfunktional sind. In neuronaler Echtzeitverarbeitung (z. B. bei Anomalien im EEG) zeigt sich dies als Überlegenheit gegenüber klassischen linearen Modellen.

4. Q19-Moiré-Kryptographie: Sicherheit durch Richtungsraum:

In Q19 werden nicht einfache Schlüsselreihen, sondern *Richtungsfelder* im Frequenzraum genutzt. Die Interferenz verschiedener Primfrequenzen bildet Moiré-Muster, deren geometrische Gestalt (Phasenwinkel, Richtungsvielfalt) als Schlüssel dient. Diese Struktur ist:

- extrem schwer zu erraten (wegen der Fraktalstruktur),
- robust gegen Störung (Resonanzunempfindlichkeit),
- effizient erzeugbar (niedrige Rechenlast durch Prime-Gap-Modulation).

Schon minimale Änderungen in der Eingabe führen zu massiven Veränderungen der Signaturstruktur – wie eine kleine Nadelbewegung die gesamte Kakeya-Fläche verändert.

5. Meta-Resonanz: Die Lehre aus Kakeya für die Zukunft

Kakeya lehrt uns: *Große Wirkung kommt nicht von großer Masse, sondern von richtiger Struktur*. In WF13, DFR³ und Q19 leben diese Prinzipien weiter:

- Information wird nicht durch Größe, sondern durch Frequenzstruktur getragen.
 - Ethik entsteht durch Neutralität im Resonanzraum, nicht durch Länge von Datenschlüsseln.
 - Sicherheit entsteht durch geometrische Unvorhersagbarkeit, nicht durch kryptographische Überladung.
-

Fazit:

Die Weltformel 13, die auf DFR³ und Q19 aufbaut, ist nicht nur ein theoretisches Modell. Sie ist Ausdruck eines neuen Denkens: *Das Kleine ist nicht einfach. Es ist oft der Schlüssel zu allem.*

Mit Kakeya haben wir einen archetypischen Beweis dafür. Es ist ein mathematisches Spiegelbild einer tieferen Wahrheit: Die Zukunft gehört nicht dem Großen, sondern dem Resonanten.

Oder, um es in einem Satz zu sagen:

"Resonanz ist nicht dort am stärksten, wo der Raum groß ist, sondern wo er richtig geformt ist."

Fazit IV: Die „Engelbrechtsche“ Synthese – Von kleinen Strukturen zum Kosmos

Die abschließende Synthese ist der ambitionierteste Teil der Dissertation. Hier wird die „Engelbrechts-Vermutung“ voll entfaltet: Kleine, geometrisch raffinierte Strukturen (wie Kakeya-Mengen oder Moiré-Zellen) können nicht nur Informationssysteme effizienter machen, sondern sind möglicherweise Spiegel eines tieferliegenden Prinzips, das auch in der fundamentalen Physik wirkt. Die Arbeit bringt diesen Gedanken mit Konzepten wie der geometrischen Informationstheorie, der fraktalen Bildkompression und der Fisher-Information in Verbindung. Daraus entsteht ein neuer konzeptioneller Raum, in dem Information, Geometrie und Quantenresonanz nicht nur technische Disziplinen, sondern Bausteine einer tieferen Wirklichkeitsbeschreibung sind. Die Dissertation endet mit der These, dass wir durch die Untersuchung solcher minimaler, hochdimensionaler Strukturen „den Kosmos neu denken“ können – nicht im Sinne eines überhöhten Anspruchs, sondern als ernstzunehmender Beitrag zur Strukturwissenschaft der Realität.

Referenzen

1. 'Once in a Century' Proof Settles Math's Kakeya Conjecture | Quanta ..., Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.quantamagazine.org/once-in-a-century-proof-settles-maths-kakeya-conjecture-20250314/>
2. Mathematicians Move the Needle on Decades-Old Problem - NYU, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.nyu.edu/about/news-publications/news/2025/march/mathematicians-move-the-needle-on-decades-old-problem.html>
3. 'Once in a Century' Proof Settles Math's Kakeya Conjecture - Institute for Advanced Study, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.ias.edu/news/once-century-proof-settles-maths-kakeya-conjecture>
4. arxiv.org, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://arxiv.org/pdf/2503.11574>
5. Compressed sensing - Wikipedia, Zugriff am Mai 9, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Compressed_sensing
6. Geometric Holographic Memory: Efficient and Error-resilient Data Storage - ResearchGate, Zugriff am Mai 9, 2025, https://www.researchgate.net/publication/387705536_Geometric_Holographic_Memory_Efficient_and_Error-resilient_Data_Storage
7. A unified Method for assessing the Observability of Dynamic Complex Systems - bioRxiv, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.biorxiv.org/content/10.1101/2022.01.21.477230v2.full.pdf>
8. (PDF) Structural complexity of minerals: Information storage and processing in the mineral world - ResearchGate, Zugriff am Mai 9, 2025, https://www.researchgate.net/publication/263493880_Structural_complexity_of_minerals

- [Information storage and processing in the mineral world](#)
9. What did Erwin mean? The physics of information from the materials genomics of aperiodic crystals and water to molecular information catalysts and life - Journals, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://royalsocietypublishing.org/doi/10.1098/rsta.2015.0067>
 10. Review: Spatial inhomogeneities, moiré potential and moiré excitons. - arXiv, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://arxiv.org/html/2402.19236v1>
 11. Another Twist in the Understanding of Moiré Materials - Physical Review Link Manager, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://link.aps.org/doi/10.1103/Physics.17.45>
 12. Bilayer graphene interface with a Quantum Twisting Microscope, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://diposit.ub.edu/dspace/bitstream/2445/215218/1/MART%C3%8DN%20RODR%C3%8DGUEZ%20ALEJANDRO.pdf>
 13. Fundamentals of waves - Science Learning Hub, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.sciencelearn.org.nz/resources/119-fundamentals-of-waves>
 14. Wave theory - (Principles of Physics II) - Vocab, Definition, Explanations | Fiveable, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://library.fiveable.me/key-terms/principles-physics-ii/wave-theory>
 15. link.aps.org, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.122.090201#:~:text=The%20primes%20are%20identified%20as,of%20a%20single%20vibrating%20resonator.>
 16. Simple Wave-Optical Superpositions as Prime Number Sieves ..., Zugriff am Mai 9, 2025, https://www.researchgate.net/publication/331577303_Simple_Wave-Optical_Superpositions_as_Prime_Number_Sieves
 17. Prime Frequencies (info) | m H z, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://millihertz.net/pf-info>
 18. Fractals in Quantum Mechanics: The Hofstadter Butterfly and Its Algorithmic Generation Douglas C. Youvan - ResearchGate, Zugriff am Mai 9, 2025, https://www.researchgate.net/profile/Douglas-Youvan/publication/389427173_Fractals_in_Quantum_Mechanics_The_Hofstadter_Butterfly_and_Its_Algorithmic_Generation/links/67c1c86896e7fb48b9d38bb6/Fractals-in-Quantum-Mechanics-The-Hofstadter-Butterfly-and-Its-Algorithmic-Generation.pdf
 19. Hofstadter's butterfly - Wikipedia, Zugriff am Mai 9, 2025, https://en.wikipedia.org/wiki/Hofstadter%27s_butterfly
 20. (PDF) Moiré butterflies in twisted bilayer graphene - ResearchGate, Zugriff am Mai 9, 2025, https://www.researchgate.net/publication/258012495_Moire_butterflies_in_twisted_bilayer_graphene
 21. Fractal image coding: a review - Semantic Scholar, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.semanticscholar.org/paper/a342433140a5b013c3a21f5e8d8588d7542800b7>
 22. On the emergence of the Quanta Prime sequence - Taylor & Francis Online, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.tandfonline.com/doi/pdf/10.1080/25765299.2024.2445377>
 23. On the emergence of the Quanta Prime sequence - Taylor & Francis Online, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/25765299.2024.2445377>
 24. Cryptographic key generation using deep learning with ... - Frontiers, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.frontiersin.org/journals/artificial-intelligence/articles/10.3389/frai.2025.1545946/full>
 25. A Comprehensive Review on Cryptography Algorithms Methods and Comparative

- Analysis, Zugriff am Mai 9, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/389218936_A_Comprehensive_Review_on_Cryptography_Algorithms_Methods_and_Comparative_Analysis
26. Multi-Dimensional Framework for EEG Signal Processing and Denoising Through Tensor-based Architecture - arXiv, Zugriff am Mai 9, 2025,
<https://arxiv.org/html/2401.05589v1>
 27. Survey on the research direction of EEG-based signal processing - Frontiers, Zugriff am Mai 9, 2025, <https://www.frontiersin.org/journals/neuroscience/articles/10.3389/fnins.2023.1203059/full>
 28. Advances, challenges, and prospects of electroencephalography-based biomarkers for psychiatric disorders: a narrative review, Zugriff am Mai 9, 2025,
<https://pmc.ncbi.nlm.nih.gov/articles/PMC11534409/>
 29. Multi-Dimensional Framework for EEG Signal Processing and Denoising Through Tensor-based Architecture - arXiv, Zugriff am Mai 9, 2025,
<https://arxiv.org/pdf/2401.05589>
 30. Time-Frequency Analysis, Denoising, Compression, Segmentation, and Classification of PCG Signals - ResearchGate, Zugriff am Mai 9, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/344049950_Time-Frequency_Analysis_Denoising_Compression_Segmentation_and_Classification_of_PCG_Signals
 31. fft - Fast Fourier transform - MATLAB - MathWorks, Zugriff am Mai 9, 2025,
<https://www.mathworks.com/help/matlab/ref/fft.html>
 32. Stochastic Time Evolution, Information Geometry, and the Cramér-Rao Bound, Zugriff am Mai 9, 2025,
https://www.researchgate.net/publication/342207918_Stochastic_Time_Evolution_Information_Geometry_and_the_Cramer-Rao_Bound