Capítulo 1

Lomelí, Héctor y Beatriz Rumbos. Métodos dinámicos en economía matemática. Otra búsqueda del tiempo perdido. Ciudad de México, México: Thompson editores, 2003, capítulo 1, pp. 3-23.

En defensa de los modelos matemáticos

§1.1 Introducción

La profesión del economista se divide en macroeconomía, que observa lo que no puede explicarse, y microeconomía, que explica lo que no puede observarse.[1]

El uso de las matemáticas en economía es visto, con frecuencia, como el origen de un sinnúmero de terribles problemas en el mundo. Los enemigos más vociferantes de esta tendencia consideran a las matemáticas como invasoras en un campo que no les corresponde, pues restringen el desarrollo de la disciplina económica y la confinan en un marco de formalidad innecesaria. Por otro lado, la economía moderna, al menos desde un punto de vista académico, no existiría sin el uso exhaustivo del lenguaje matemático. Para corroborar esto, invitamos al lector a tomar cualquier revista académica especializada en economía y abrirla en una página al azar; imaginemos que desaparecen todos los símbolos matemáticos, ¿qué queda? Muy poco.

El estudiante de economía tiende a sentir ansiedad por saber si todos esos modelos repletos de matemáticas le serán útiles algún día. Dado que la aplicación esperada generalmente no es inmediata, debe aclararse el contexto en el que se justifica la sofisticación teórica del lenguaje matemático. En este capítulo nos proponemos defender la presencia de las matemáticas en las ciencias económicas, aunque con plena conciencia de que su empleo puede

[1]Nota anónima tomada de [19].

dar pie a posibles abusos. Esencialmente, el problema que tenemos enfrente es entender cuál es el origen, la pretensión y el objetivo de los modelos matemáticos, así como justificar su uso en la economía.

En este libro nos proponemos estudiar la herramienta matemática utilizada en los modelos en los que el tiempo es una variable. Nos parece pertinente hacer notar que el uso del tiempo en los modelos económicos es un hecho reciente, aunque desde el inicio de la economía se consideró que los modelos debían ser esencialmente dinámicos, es decir, tenían que involucrar una evolución temporal. Baste recordar la célebre "mano invisible" propuesta por Adam Smith, según la cual el tiempo se encargará de llevar los sistemas económicos al equilibrio óptimo. El interés tardío en la variable temporal acaso se pueda explicar por el hecho de que el enfoque estático planteó suficientes retos a los economistas. Una mejor explicación acaso sea que el uso del tiempo continuo es, en general, una abstracción que no surge de manera natural pues los procesos económicos se cumplen en periodos discretos.

Los modelos dinámicos han existido en las ciencias exactas casi desde su inicio. Junto con ellos, las matemáticas también han evolucionado. El mejor ejemplo de esto es la relación entre la llamada mecánica clásica y la teoría de los sistemas dinámicos o teoría de los sistemas no lineales. La pregunta principal que estas teorías pretenden contestar es acerca del comportamiento futuro de un sistema que evoluciona. Los sistemas dinámicos siguen, de este modo, la vieja tradición gitana de querer predecir aquello que va a ocurrir en el futuro. Tradicionalmente se piensa que esta capacidad de predicción es la que distingue a una verdadera ciencia exacta. La comparación de estas predicciones con la realidad es la que verifica o refuta, de forma inequívoca, la utilidad y el alcance de los modelos teóricos.

En contraste con esto, y más allá de la simple verificación, las matemáticas intentan moverse en el ámbito de las demostraciones y de la certeza lógica plena. Aunque Kurt Gödel demostró que tal certeza no es del todo posible,[2] esta distinción hace que las matemáticas sean una ciencia distinta a las demás. Las matemáticas no comparten la manera de proceder

[2]Kurt Gödel fue un matemático austríaco que demostró el teorema de incompletez, también conocido como teorema de Gödel que fue publicado en 1931 en un artículo titulado *Sentencias indecidibles de Principia Mathematica y sistemas afines.* El famoso teorema en cuestión consiste en la afirmación de que en cualquier sistema matemático suficientemente rico, existen proposiciones que no pueden ser probadas, ni rechazadas, dentro de los axiomas del sistema. El teorema es de gran importancia dentro de las matemáticas y la filosofía, pues durante años se había intentado establecer un conjunto de axiomas en el que se pudiesen basar todas las matemáticas. Varios matemáticos famosos lo habían intentado sin éxito; Gödel demostró que ese intento era inútil.

de las ciencias naturales. Son independientes a ellas, tienen existencia propia. Sin embargo, paradójicamente son las mejores servidoras de las ciencias exactas y sociales. Podríamos decir que las matemáticas no son animales ni vegetales: son un ente extraño que nos proporciona, al mismo tiempo, un lenguaje universal y una impecable estructura lógica.

El lenguaje natural, junto con el discurso literario que suele acompañarlo, puede, si es suficientemente persuasivo, carecer de algunos eslabones en el razonamiento. El lenguaje matemático previene contra esta falla y pone por buen camino el esfuerzo creativo dentro de un marco teórico con estructura propia, evitando que éste divague sin sentido e impidiendo interpretaciones subjetivas que a menudo empañan la discusión de las ideas.

Más allá de la capacidad de manipulación matemática, un científico debería ser apreciado por su capacidad de percibir e intuir los rasgos distintivos de un determinado fenómeno. En este sentido Einstein no era el mejor matemático de su época; cuando era joven ni siquiera fue reconocido como un estudiante brillante [36]. Sin embargo, le bastó un año –el *annus mirabilis* de 1905– para revolucionar la física. Los principios en los que basó sus teorías, eran generalmente simples. Su genialidad no consistió tanto en su habilidad matemática sino en su inmensa capacidad como modelador; otros fueron los que aportaron las matemáticas que le fueron necesarias para fundamentar el edificio teórico que diseñó.[3]

A continuación intentaremos responder la pregunta de qué es un modelo matemático. El estudio de la economía como ciencia, el uso de las matemáticas dentro de la misma, y en general la crítica a la profesión, se han aglutinado en algo que es conocido como metodología de la economía. Existen muchas obras que se podrían consultar para profundizar sobre el tema; en particular, remitimos al lector interesado a [9].

§1.2 ¿Qué es un modelo matemático?

Cómo conocemos el universo es, acaso, el problema de filosofía de la ciencia de mayor trascendencia (quizás el único). Nuestros sentidos, nuestra razón y nuestra experiencia nos muestra algo de lo que llamamos realidad. Esta realidad nos rodea y para conocerla a plenitud sería necesario tomar en cuenta todos sus aspectos. Desde un punto de vista puramente científico, esto es imposible. Una de las ideas de la ciencia moderna es estudiar la realidad en pequeñas porciones, limitando la pretensión del conocimiento a un área limitada. En conse-

[3] Sobre todo el matemático Hermann Minkowski, quien formuló el modelo de "conos de luz" para explicar la estructura espacio-temporal del universo.

cuencia, vemos cómo dentro de las disciplinas académicas, existe cada vez más una enorme especialización, y por ello es cada vez más difícil conocer algo en más de un aspecto.

El método de estudio de la realidad necesariamente viene dado por el objeto mismo. Ante un fenómeno intelectual, sentimental o místico no se pueden utilizar los métodos de la física, así como no puede juzgarse con justicia una obra literaria con criterios científicos. Esto delimita aún más el campo de estudio de las ciencias, pues casi por definición éstas tienen como único lenguaje a las matemáticas.

A partir de los trabajos de Galileo, las matemáticas tienen un papel central en la física y, en general, en toda la ciencia. Con una reducción consciente o inconsciente de lo que se entiende por realidad, se han ido perfilando distintas "leyes de la naturaleza". Estamos ante una limitación muy grande, pues en el pensamiento contemporáneo se ha identificado lo real con lo científico y, aunque la ciencia es un proyecto que evoluciona, pareciera que dentro de nuestro pensamiento moderno sólo estas "leyes" pueden identificarse plenamente con lo real.

La economía no ha escapado a esta manera de ver el mundo; desde el siglo XIX se dio a la tarea de "matematizarse", es decir, utilizar cada vez más las matemáticas como lenguaje de expresión. Dicen los detractores de ese lenguaje matemático que esto fue motivado por "envidia" de los éxitos de la física. Añaden que esto ha llevado a las ciencias sociales –en especial a la economía– a adoptar métodos y lenguajes que le son absolutamente ajenos. La mayor crítica quizá sea que el edificio teórico resultante no ha tenido la capacidad de predicción de las ciencias naturales. De ahí que para muchos la economía tiene la pretensión inalcanzable de ser una ciencia exacta.

Es un error comparar la economía con la física. Un economista tiene más en común con un meteorólogo que con un físico, ya que ambos comparten la frustración de predecir el futuro de manera muy limitada. Por otro lado, desde su nacimiento la economía lidia con conceptos cuantitativos: cantidades de bienes, precios, medidas de riqueza, etcétera, de manera que el lenguaje matemático sí es un medio ideal para la descripción de los fenómenos económicos.

¿Qué es, entonces, un modelo matemático? Pongámonos de acuerdo primero en lo que entendemos por *modelo*. Jesús Mosterín [66] indica que el término *modelo* se utiliza comúnmente en al menos dos sentidos, en ocasiones contrapuestos. Por un lado, identifica un "modelo" con el objeto representado, en el sentido en que un pintor hace el retrato de un modelo. La representación de este "modelo" constituye una teoría. Lo importante es que se puede conservar la abstracción de la teoría y así aplicarla a distintos "modelos" de ella. Así, por ejemplo, la mecánica de Kepler es una teoría para la cual nuestro sistema solar es un simple "modelo". Por otro lado, Mosterín reconoce que se puede dar otro significado a la palabra, identificándola con la teoría misma. Éste es el sentido que le daremos aquí a la palabra *modelo*, pues nos interesa añadir el adjetivo *matemático*. Nuestra acepción es la que a menudo se utiliza en el ámbito matemático y económico. Esto es, cuando digamos *modelo*, generalmente estaremos hablando de una teoría que, en principio, es una representación abstracta de la realidad.

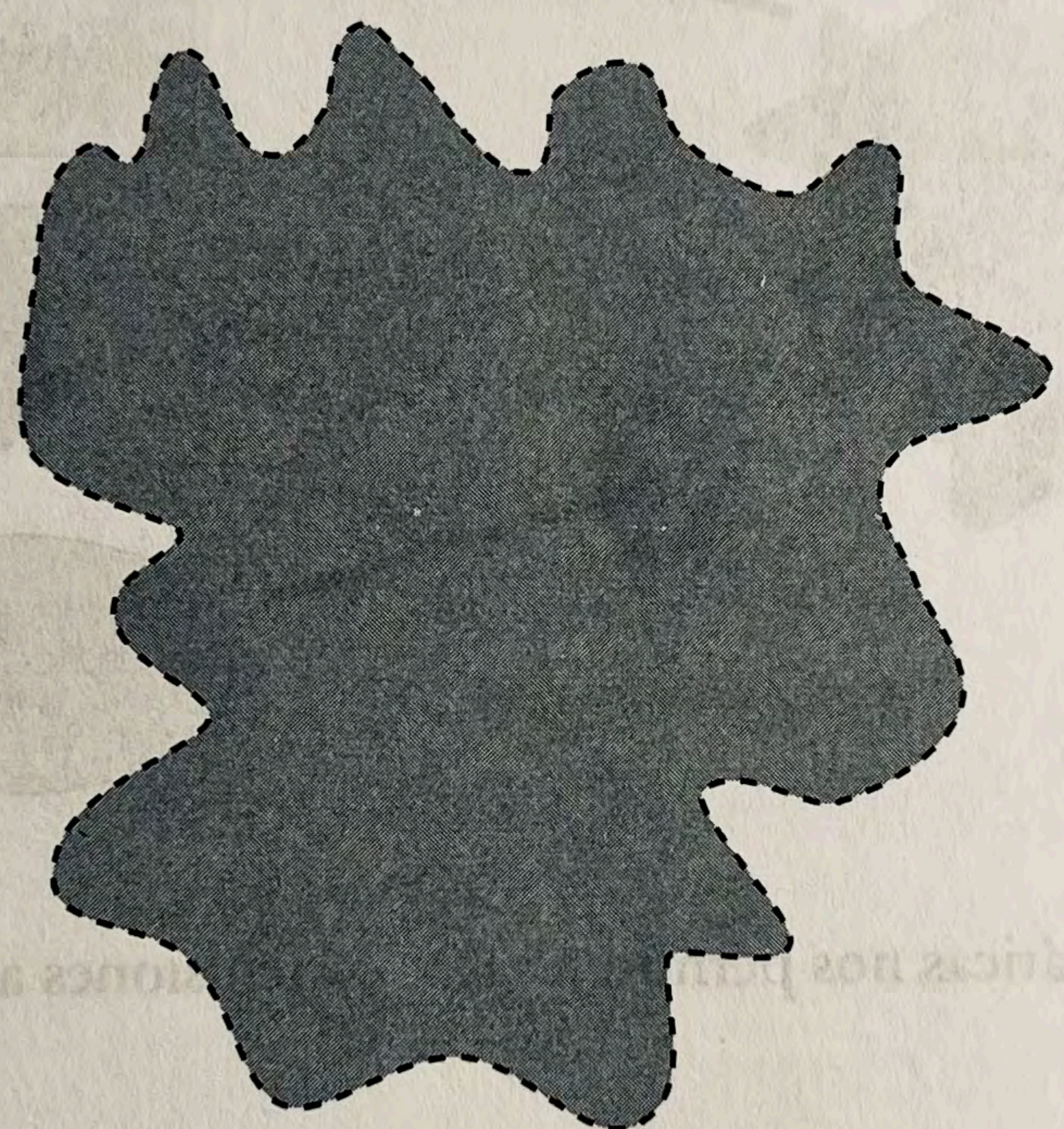

Figura 1.1 Una representación completamente inútil de la realidad.

El proceso de modelación matemática puede entenderse a partir de una abstracción de los elementos en juego. Ejemplificaremos a continuación este proceso (¿produciremos así un metamodelo?). Por un lado tenemos la realidad, a la cual consideramos infinita y sólo parcialmente accesible. Podríamos proponer un modelo de la realidad como en la figura 1.1, en donde la representación no proporciona ninguna información. Quisiéramos tener algo que nos fuera útil. La introducción de medidas en el modelo nos lleva a usar números; de este modo aparecen las matemáticas en juego. Hay en nuestra pequeña abstracción tres pasos que en mayor o menor grado determinan el proceso de *modelación*:

- abstracción,

- deducción a partir del modelo,
- verificación, predicción y usos.

Estos tres pasos, que adelante explicaremos con más detalle, se ilustran en la figura 1.2.

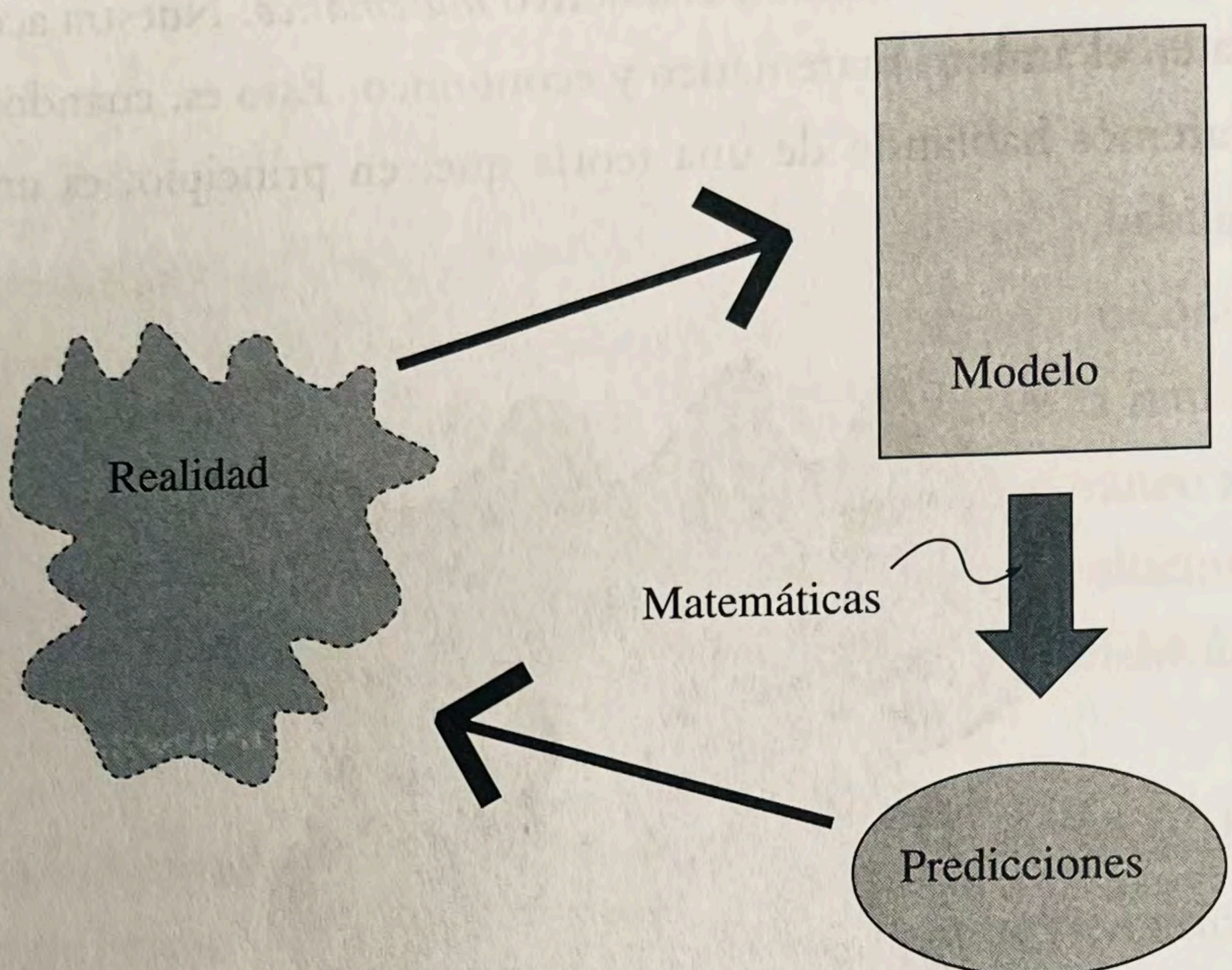

Figura 1.2 Las matemáticas nos permiten sacar conclusiones a partir de los modelos.

§1.2.1 Abstracción del mundo

Ante la avasalladora complejidad del mundo, en particular del mundo económico, podemos responder con un principio utilizado frecuentemente: *caeteris paribus*, frase del latín que literalmente quiere decir "todo lo demás igual". Es decir, en las explicaciones sólo se consideran ciertos factores y todo lo demás se mantiene constante. En realidad, este principio no tiene nada nuevo dentro de la ciencia, pues todo el conocimiento científico está basado en él. Sin embargo, bien ha hecho la economía en insistir y recalcar su importancia. Dada la imposibilidad de tomar en cuenta todos los aspectos de un objeto, se asume que ciertas variables son irrelevantes y se intenta identificar sólo las que producen el fenómeno que desea estudiarse. Esto es totalmente claro en ciertas ramas de las ciencias exactas, sobre todo aquellas en las que ciertos fenómenos pueden ser descritos por una teoría simple. La labor del modelador es, en estos casos, escoger las variables relevantes y emplear razonamientos deductivos que vayan de lo general a lo particular.[4]

Así, pues, el primer paso en el proceso de modelación matemática consiste en proponer una representación de esta realidad. Esta propuesta es arbitraria, pero generalmente (a partir de Galileo) se basa en la experiencia y la observación. La presunción de que podemos representar la realidad es una hipótesis fundamental y acaso atrevida. No en balde Einstein decía que lo más misterioso del mundo es que fuera inteligible.

En nuestro caso los modelos económicos se dedican a representar algunos aspectos de lo que podríamos llamar la realidad económica. ¿En qué consiste esta realidad económica? Dejando todo lo demás igual, tradicionalmente se piensa que un modelo económico es una representación del mundo de las relaciones entre agentes que poseen bienes y preferencias, buscan un mayor bienestar y están dispuestos al intercambio. Los modelos son creados a partir de la especulación acerca de las causas y los procesos que pudieron haber producido los efectos observados.[5] Quizá quepa recordar el cuento de Jorge Luis Borges acerca del imperio en el que la ciencia de la cartografía avanzó tanto que los mapas eran casi perfectos. Este cuento puede leerse en [11].

Del rigor en la ciencia

> En aquel Imperio, el Arte de la Cartografía logró tal perfección que el mapa de una sola provincia ocupaba toda una ciudad, y el mapa del Imperio, toda una provincia. Con el tiempo, estos mapas desmesurados no satisficieron y los Colegios de Cartógrafos levantaron un mapa del Imperio, que tenía el tamaño del Imperio y coincidía puntualmente con él. Menos adictas al estudio de la Cartografía, las generaciones siguientes entendieron que ese dilatado mapa era inútil y no sin impiedad lo entregaron a las inclemencias del Sol y de los inviernos. En los desiertos del Oeste perduran despedazadas ruinas del mapa,

[4]Como un ejemplo clásico de esto tenemos la mecánica de fluidos. Las ecuaciones de los fluidos llevan ya muchos años de estar bien establecidas (ecuaciones de Navier-Stokes). El mayor problema es *resolverlas*, es decir, sacar conclusiones a partir de ellas. En la práctica, lo que generalmente se hace es *desechar* la mayor parte de las variables y usar el resto en una versión simplificada de la teoría. Ésta sería una típica aplicación del principio *caeteris paribus* en física. Desgraciadamente, en economía aún no existen teorías con la generalidad de las ecuaciones de Navier-Stokes, por lo que cada modelo parece ser construido *ad hoc*.

[5]Véase [51].

habitadas por animales y por mendigos; en todo el país no hay otra reliquia de las Disciplinas Geográficas (Suárez Miranda: *Viajes de Varones Prudentes*, libro cuarto, cap. XIV, Lérida, 1658).

Cuando los cartógrafos del relato se dieron a la tarea de crear el mapa perfecto, el resultado fue una réplica exacta del objeto a representar: el mapa *era* el Imperio. Lo relevante de esta metáfora, para nuestro problema, es el hecho de que todo mapa es imperfecto o, dicho de otro modo, toda representación de la realidad necesariamente carece de algunos detalles. En particular, todo modelo matemático es imperfecto. Además, una representación perfecta sería completamente inútil: más aún, sería la más inútil posible. Podemos ver un atractivo contraste entre la figura 1.1, que es del todo inútil pues no contiene información, y el ficticio mapa descrito por Borges, que también es inútil ya que posee toda la información sobre la realidad que pretendía representar.

Otra consecuencia de estas ideas es que, dado que un modelo sólo representa algunos aspectos del objeto, pueden existir distintos modelos de un mismo objeto. Pensemos en una vaca. Mucha gente puede interesarse por estudiar este animal. Sin embargo, puede verse que, según el punto de vista del sujeto que estudia a la vaca, las abstracciones serán distintas (véase la discusión en [22]). Por ejemplo, el economista quizá la verá como una fuente de riqueza y el biólogo como un mamífero bovino, el chef como materia prima y el hindú como un ser sagrado. Aunque parezca absurdo, el estudio de las vacas ha tenido recientemente mucha relevancia desde el punto de vista de la economía (recordemos, por ejemplo, el problema de las vacas locas).

En un modelo matemático, la abstracción adecuada del objeto de estudio incluye la identificación y medición de los factores que se consideran relevantes. Asimismo, se tiene una conjetura de las relaciones que existen entre ellos y su comportamiento. Mediante el análisis matemático, el modelo en último término debe ser capaz de producir conclusiones, y pasamos así al proceso deductivo.

§1.2.2 Deducción a partir del modelo

Lo primero que debe tenerse en mente al obtener conclusiones referentes a nuestro modelo es que éstas se refieren al modelo y no al fenómeno real que lo originó. El modelo es una representación simplificada del objeto de estudio y está construido con base en observaciones de ciertos factores, las cuales nunca son perfectas y normalmente contienen errores de medición en mayor o menor grado. Es importante tomar en cuenta estas limitaciones antes de inferir cualquier cosa acerca del comportamiento de la realidad.

John Maynard Smith, en *Mathematical Ideas in Biology* [63], afirma que el propósito de su libro es mostrar que "el razonamiento matemático es, en ocasiones, iluminador". A continuación hace una defensa del uso de las matemáticas en biología, más allá de la estadística. Nos dice:

> En general se asume –y en especial lo hacen los estadísticos– que la única rama de las matemáticas necesaria para la biología es la estadística. No comparto esta visión. La estadística es necesaria en biología, pues no existen dos organismos idénticos, pero tengo la impresión de que la estadística, y en particular la rama que trata con las pruebas de significancia, ha sido sobreestimada(...)

La misma opinión puede darse con respecto a la economía. Durante mucho tiempo se ha visto a la econometría como la rama de las matemáticas más directamente relacionada con el estudio de los fenómenos económicos. Reconocemos el inmenso valor de esta herramienta, pero quisiéramos insistir en que la cosa no termina ahí. Otras ramas de las matemáticas pueden utilizarse para iluminar los procesos económicos, sobre todo aquellos en los que el tiempo participa explícitamente como variable y que son el tema principal de este libro.

Dentro del esquema propuesto para los modelos matemáticos en economía, de manera burda podríamos concebir a la econometría como la herramienta que nos permite medir las variables propuestas por el modelo. De este modo, la situaríamos más cercana de la realidad, tanto en el proceso de modelación como en aquel en que se obtienen las predicciones. El resto de las matemáticas serviría para sacarle más jugo al modelo en cuestión. La naturaleza de dichas conclusiones estaría limitada por el modelo de donde surgen. Así, las conclusiones no necesariamente serían adecuadas a la realidad. De hecho, la calidad de éstas ha servido como parámetro para juzgar al modelo: cuanto mejor sean las conclusiones, mejor será el modelo.

Recordemos que Bertrand Russell decía que "Cabe definir la matemática como la materia en la que nunca sabemos de qué estamos hablando, o si lo que decimos es verdad." Con mejor tino Einstein dijo "En la medida en que las leyes de las matemáticas conciernen a la realidad, no son ciertas; y en cuanto que son ciertas, no conciernen a la realidad."[6]

[6] Ambas citas se pueden leer en [21].

En principio, la deducción a partir de un modelo podría hacerse con otras herramientas. Cabe señalar que algunos autores han tratado de minimizar la importancia de las matemáticas, relegándolas a un papel puramente sintáctico, o sea, se pueden usar como un lenguaje abreviado, mas no como un motor para la investigación. Según este punto de vista, puede pensarse –erróneamente– que las ecuaciones no son más que síntesis de algo que ya se sabía de manera intuitiva.

Lo que debería ponerse a discusión en este punto es si un modelo matemático, y en especial las matemáticas involucradas, pueden generar conocimiento nuevo. ¿No son más bien sólo la expresión simbólica de una idea? El famoso economista Paul Krugman[7] nos aporta algunas ideas a este respecto. Primero, reconoce que más allá de servir de lenguaje y prueba de consistencia, las matemáticas son, en muchos casos, "fuentes de intuición". Es decir, la investigación económica se lleva a cabo a través de una serie de modelos, cada vez más complicados, en los que las matemáticas aportan claves e "intuiciones" cada vez más complejas. Sin embargo, algunas veces esto tiene un costo: el modelador puede convertirse en sirviente del modelo y, en consecuencia, ver la realidad sólo con los ojos que convienen a la teoría. La crítica en este caso está en el hecho de que fácilmente nos podemos sesgar en favor de la simplicidad y la elegancia teóricas.[8]

En conclusión, las matemáticas nos permiten ver lo que no es obvio. Esto lleva ya varios siglos manifestándose en la práctica, sobre todo en las ciencias exactas. Pensemos, por ejemplo, en la teoría cuántica, la cual se refiere a fenómenos de escala subatómica. Nuestra intuición no nos permite de ningún modo aproximarnos a la realidad descrita por esa teoría. En ese caso, simplemente debemos dejarnos llevar por las matemáticas e interpretarlas. La cuestión de la interpretación puede ser muy controvertida. Sin entrar en mayores detalles, podemos recordar que las diversas interpretaciones de la teoría cuántica produjeron un inmenso debate en dos escuelas de pensamiento encabezadas por Einstein por un lado y Bohr en el otro. En economía también se dan estos debates; baste recordar, por ejemplo, la crítica de Lucas a Keynes. La culpa no es de las matemáticas sino de las limitaciones del tercer paso de nuestro esquema de modelación que se expone enseguida.

---

[7] Véase, por ejemplo, [50].

[8] ¿No es un ejemplo de esto la insistencia en utilizar con abrumadora frecuencia las funciones de tipo Cobb-Douglas, o el formalismo de algunos autores que exponen la economía con el método axiomático (axioma, definición, teorema), propio de las matemáticas puras?

§1.2.3 Verificación, predicción y usos

En el paso definitivo del proceso de modelación, se confronta la conclusión puramente matemática con la realidad que se pretendía estudiar en un principio. Esto puede hacerse de distintas maneras. En el caso de las ciencias exactas, la verificación se da mediante la predicción de comportamientos que pueden ser observados a través de experimentos controlados, o bien mediante la explicación de fenómenos que no podían entenderse. De este modo, tradicionalmente se evalúa la calidad de un modelo según su habilidad de predecir y explicar correctamente otros hechos. Decimos que un modelo es **robusto** si sus conclusiones no dependen del cumplimiento exacto de los supuestos; de no ser así, se dice que el modelo es **frágil**.

Pensemos en las primeras aplicaciones de las teorías de Galileo. Las observaciones del sabio italiano lo llevaron a concluir que un buen modelo para el movimiento de una bala de cañón implicaba necesariamente que la trayectoria fuera una curva parabólica. Esto tuvo aplicaciones inmediatas en el arte de la guerra: se podía predecir con cierta exactitud en dónde caería una bala. Otras conclusiones implícitas del modelo imponen un alcance máximo a cada arma. Aunque estos hechos nos parecen obvios, no lo eran del todo en la época de Galileo.

Isaac Newton fue realmente el iniciador de la física como la conocemos hoy en día. A partir de principios básicos que son bastante cercanos a nuestra intuición –las tres leyes de movimiento y la ley de gravitación–, logró crear una teoría del universo que durante muchos años se pensó que era definitiva.[9] Quizás el momento cumbre de esta nueva teoría, el punto en el que todos los científicos quedaron convencidos de su valor, haya sido aquel en el que las leyes de Kepler surgieron como una consecuencia. Kepler había pasado muchos años intentando describir las trayectorias de los planetas observables en su época. Un colega suyo, el astrónomo Tycho Brahe, le facilitó los datos de las observaciones que había realizado durante años. La conclusión de Kepler de que todas esas observaciones tuvieran algo en común es un hecho sorprendente; más sorprendente aún es, sin embargo, el hecho de que las leyes de Kepler estén implícitas en las leyes de Newton.

Se podrían dar muchos otros ejemplos del éxito de la capacidad de predicción de las ciencias exactas. ¿Qué se puede decir, en cambio, de la economía? La economía ha procedido de una manera similar a la de las ciencias exactas. La literatura especializada está llena de

[9] Hasta que la teoría de la relatividad general de Einstein reinterpretó la ley de gravitación de Newton.

modelos que pretenden representar la realidad económica. Sin embargo, si nos basamos únicamente en la capacidad de predicción, los modelos económicos aún se encuentran en su infancia pues esta capacidad es limitada; pero un buen modelo debería, si no predecir, al menos explicar adecuadamente el fenómeno en cuestión. En este punto podemos traer a colación las críticas de Roberto Velasco [95] a los economistas. Para él, esa profesión es vista con suspicacia y tiene muchos asuntos poco definidos, desde los ideológicos hasta los prácticos y éticos. No obstante, Velasco insiste en el hecho de que la economía –a pesar de su inadecuación con la realidad– es de suma importancia y está en plena construcción.

Las razones por las cuales los modelos económicos no tienen la objetividad y capacidad de predicción de las ciencias exactas son claras: los fenómenos que se estudian son no sólo complejos, sino muy difíciles de aislar. La actividad económica se desarrolla dentro de un marco legal, técnico, social y político que evoluciona constantemente. No puede ignorarse los efectos que esto tiene sobre los fenómenos económicos y, sin embargo, difícilmente podemos cuantificar estos efectos. En las ciencias exactas pueden llevarse a cabo experimentos para verificar los modelos propuestos, mientras que en economía casi nunca pueden realizarse. Cabe mencionar que una excepción se encuentra en la microeconomía, específicamente dentro del área del comportamiento humano. Desde hace unos 20 años, la llamada **economía experimental** ha intentado poner a prueba el comportamiento del *hommo œconomicus* en condiciones controladas que simulan situaciones reales. Se ha concluido que, por ejemplo, los modelos clásicos de oferta y demanda son sumamente robustos, mas no así el modelo de utilidad esperada.

En economía se corre el grave peligro de creer que los modelos matemáticos necesariamente funcionan como si fueran leyes de la física. Como mencionamos antes, la economía está lejos de ser una ciencia exacta y su capacidad de predicción es limitada. Por esta razón debe tenerse mucha cautela al tratar de imponer a la realidad las ideas surgidas de los modelos económicos. El uso de las conclusiones de un modelo ciertamente constituye un **problema ético.** ¿Está la economía más allá de la ética? ¿Cómo se debe usar lo que nos dicen los modelos económicos? En un contexto distinto, Richard Feynman [34]se hacía la pregunta de si la ciencia –y en nuestro caso la economía– tiene algún valor:

> (...)una vez en Hawaii fui llevado a un templo budista. En el templo, un hombre me dijo: "te voy a decir algo que nunca olvidarás". A continuación me dijo lo siguiente: "a cada hombre se le dan las llaves de la puerta del cielo. Las mismas llaves abren el infierno".

> Es lo mismo con la ciencia. Es, en cierto modo, una llave de las puertas del cielo y la misma llave abre el infierno y no tenemos la seguridad de qué puerta es cuál. ¿Debemos desechar la llave y nunca entrar al cielo? O más bien, ¿no deberíamos luchar con el problema de cuál es el mejor modo de usar la llave? Ésta es, claro está, una pregunta bastante seria, pero pienso que no podemos despreciar el valor de las llaves de las puertas del cielo.

Los distintos pasos de la modelación matemática también expresan la idea de que el científico recibe algo llamado su *formación profesional.* Esta idea está plenamente vinculada con los pasos del proceso de modelación. La formación pretende hacer que el individuo vea el mundo de una cierta manera. Constituye, en definitiva, la capacidad de ver lo esencial de la realidad desde el punto de vista de su propia disciplina.[10] Por eso, sin temor a equivocarnos, podemos decir que la mejor manera de entender qué es un modelo matemático es en la práctica. La modelación matemática, más que una ciencia, es un arte y podemos afirmar que en un futuro se reconocerá que las matemáticas utilizadas en economía son tanto o más complicadas que las utilizadas en las ciencias exactas.

Mencionemos, para terminar, un uso poco explorado del proceso de modelación, que consiste en recurrir al modelo y, en particular las conclusiones de éste, de una manera más que nada cualitativa.

Pensemos por un momento en la teoría de la evolución. Es ya clásico el periplo que trajo como consecuencia la genial idea de Darwin. Hoy nos resulta un tanto complicado entender las implicaciones inmediatas de la innovación de Darwin: por primera vez se podía ver el mundo biológico como algo en desarrollo. Y no sólo eso, pues el mecanismo mediante el cual se transforma puede explicarse de manera simple: la lucha por la vida y la supervivencia del más apto. Si nos detenemos a pensar un momento, la teoría de Darwin no predice nada en concreto. No nos dice, por ejemplo, cuándo aparecerá una nueva especie de hormiga o cuánto tiempo pasó para que un ser humano dejara de parecerse a sus ancestros. Lo importante de la teoría de Darwin es que propuso un mecanismo y una explicación cualitativos para un sinnúmero de fenómenos.

[10]Como antídoto a los excesos de este punto de vista, muchos han propuesto recurrir a la "interdisciplinariedad".

Pero la aportación de Darwin no termina ahí. La idea de evolución se filtró en casi todos los ámbitos de la actividad humana.[11] Baste recordar que, dentro del mundo de los negocios, se utiliza precisamente el lenguaje evolutivo: adaptación de la empresa a nuevos retos, supervivencia del más fuerte, cambio de estructuras, etcétera. En cuanto a lo que nos interesa, podríamos decir, acaso de manera atrevida, que el verdadero uso de los modelos es servir de "metáforas" de fenómenos de los que, en principio, se puede decir poco. De este modo, el objetivo es crear conceptos con una fuerza tal que puedan explicar muchos fenómenos, aunque la explicación no sea cuantitativamente exacta. Esto es de particular importancia en economía, pues la mayor parte de los modelos son de índole cualitativa.

§1.3 El uso del tiempo en economía

El proceso de matematización de la economía se inició con modelos estáticos. No fue sino hasta los últimos 50 años que se comenzaron a utilizar, de manera estándar, los modelos en los que el tiempo es una variable. Naturalmente, los modelos más interesantes por fuerza incluyen la variable temporal, que se ha utilizado de dos maneras: tiempo discreto y tiempo continuo. El discreto corresponde a la idea de periodos: primer año, segundo año, etcétera. El continuo, en cambio, incluye los periodos y todos los instantes intermedios.

El tiempo discreto se ajusta mejor a la realidad económica, pues en general se consideran periodos económicos. Sin embargo, el tiempo continuo es una abstracción que ha mostrado su utilidad cuando se aproximan procesos en donde la evolución de una situación a la siguiente no es muy brusca, y además se tiene la posibilidad de hablar de los estados intermedios. Dentro de la ciencia, esta idea tiene una larga tradición. Ya en los trabajos de Newton se encuentran muchas de las bases de la teoría que describe la evolución temporal. Incluso la notación empleada actualmente, que como todas es una manera "arbitraria" de escribir matemáticas, es herencia de los primeros trabajos de Newton y de Leibniz en el siglo XVII. De hecho, algunos de los problemas que hoy en día se estudian son problemas que vienen de entonces. No hubo un uso generalizado del tiempo discreto sino hasta el advenimiento de la tecnología computacional, ya que la solución a estos problemas involucra procesos de iteración con muchas variables que pueden ser sumamente tediosos.

[11] Desgraciadamente esta influencia ha sido, en ciertos casos, muy negativa. Baste recordar la "justificación" nazi de la idea de la existencia de razas superiores. Se ha llegado a calificar de "teoría sospechosa" a cualquier intento de transferencia de modelos biológicos en las ciencias sociales. Véase [80], pág. 352.

Con riesgo de caer en una sobresimplificación, podríamos decir que los modelos de tiempo continuo, y por lo tanto las matemáticas que los describen, están mejor adaptados a procesos con una evolución regular (como la mayoría de los procesos físicos). Pensemos, por ejemplo, en el camino que sigue un planeta. La órbita puede describirse con una trayectoria continua, de manera que en cada instante el astro se encuentra en una posición determinada. Cabe reconocer ésta como una de las ideas más antiguas de la ciencia. De hecho, el cálculo y el análisis matemático tienen su origen, entre otros, en el problema de cuantificar el grado de variación de las variables de los distintos modelos físicos propuestos por la astronomía. De ahí surgieron aplicaciones a toda la ciencia.

En el caso de los modelos surgidos de las ciencias económicas, el uso del tiempo continuo es, en general, una abstracción que no surge de manera natural. Quizá por ello se pospuso la consideración del tiempo como variable y se inició con modelos estáticos.

El modelo clásico de la microeconomía, basado en agentes, preferencias y alocaciones, es un modelo esencialmente estático. A partir de un conjunto de hipótesis básicas sobre los agentes, se llega a la conclusión de la existencia de un equilibrio entre las fuerzas económicas. Sin embargo, la conclusión fundamental de este modelo tiene la grave deficiencia de no describir cómo se llega al equilibrio, es decir, podría darse el caso de que el modelo predijera la existencia de un equilibrio inestable al que nunca se llega.

La rama de las matemáticas que describe la evolución temporal de las variables es la teoría de los **sistemas dinámicos**. Esta teoría toca una gran diversidad de aspectos de las matemáticas, unidos por un común denominador: la idea de cambio o evolución. Generalmente se piensa que es un cambio temporal y siempre puede conceptualizarse como un proceso que evoluciona desde un pasado y hacia un futuro. La pregunta, hablando de una manera muy general, es acerca de lo que sucederá en el futuro.

La teoría de los sistemas dinámicos tiene su origen en los trabajos del matemático francés Henri Poincaré[12], que en 1890 publicó una primera versión de su artículo "Sur le Probléme des Trois Corps" ("Sobre el problema de los tres cuerpos"). No fue sino hasta los años sesenta del siglo pasado cuando varios autores volvieron a descubrir muchas de las ideas de Poincaré y con ellas se creó formalmente el área de los sistemas dinámicos dentro de las matemáticas. En el transcurso de la siguiente década, estas ideas se popularizaron entre una gran cantidad

[12]Para más detalles del origen de la teoría de sistemas dinámicos, véase la obra histórico-matemática de Barrow-Green [3].

de científicos y matemáticos. El advenimiento de las computadoras permitió explorar más profundamente los conceptos teóricos, si bien las observaciones numéricas producen, a su vez, nuevos resultados teóricos.

La popularización de algunos de estos resultados originó la **teoría del caos**, que en realidad es sólo un subconjunto de resultados de la teoría de sistemas dinámicos. En nuestra opinión, no estamos frente a una verdadera revolución científica ni un cambio de paradigma. El concepto de **caos** ha sido utilizado erróneamente por muchos autores y esto ha llegado a filtrarse en las ciencias sociales. En particular, en muchos casos se ha utilizado el "caos" de manera poco seria. El "caos matemático" no se refiere a la acepción común de caos en la vida cotidiana. Recientemente, Sokal y Bricmont [87] denunciaron ésta y otras confusiones que intentan crear o justificar una visión equivocada de la ciencia.

Un sinnúmero de aplicaciones [69] ha demostrado la utilidad de la teoría; sin embargo, al popularizarse las ideas relacionadas con lo caótico también se ha dado origen a una serie de abusos y confusiones que han perjudicado la difusión de las verdaderas ideas. El teorema de Gödel y el descubrimiento de algunos fenómenos matemáticos que de cierto modo son impredecibles ocasionaron gran malestar dentro de la comunidad que los descubrió. La falta de capacidad de predicción viene, en este caso, no de la inhabilidad del modelador matemático, sino de las ecuaciones mismas. De este modo, el caos no se identifica con lo aleatorio o estocástico, sino que es un fenómeno esencialmente determinista.[13]

Es de suma importancia que el modelador económico tenga plena conciencia de que la falta de predictibilidad de sus modelos puede tener por lo menos dos orígenes muy distintos. El primero es que las variables del modelo sean intrínsecamente estocásticas y, por lo tanto, su evolución es impredecible hasta cierto punto. El segundo es que las variables involucradas sean de origen determinista pero su evolución esté descrita por un sistema dinámico no lineal que presente comportamiento caótico. En el capítulo 6 damos una breve introducción a este concepto.

[13] Para una discusión de esta diferencia y otros aspectos de lo caótico, véase el artículo de Markarian en [59].

§1.4 Un ejemplo

El siguiente ejemplo de modelo económico no dinámico es sumamente sencillo desde el punto de vista matemático; sin embargo, muestra los pasos principales del típico proceso de modelación. Seguiremos los pasos esbozados en las secciones anteriores teniendo en cuenta que, en general, no todos los modelos se hacen del mismo modo. Sería un error, por lo tanto, insistir en ser exhaustivos en la descripción del proceso de modelación. Sin embargo, podemos reconocer que casi siempre se hace algo parecido a lo que haremos como ejemplo. Recordemos que no siempre las matemáticas son números o fórmulas: el razonamiento matemático consiste más que nada en conceptos.

Un modelo clásico en economía es el que describe los efectos del salario mínimo en el mercado laboral. El salario mínimo es una cota inferior que se impone al salario de manera que, legalmente, el empleador no puede pagar un salario menor al mínimo. En la práctica existen salarios mínimos diferenciados, es decir, los salarios mínimos se asignan según el tipo de actividad productiva, región geográfica, etc. El problema que se quiere tratar es el de analizar los efectos de la existencia del salario mínimo sobre los trabajadores (empleados y desempleados). El propósito del modelo no es hacer predicciones cuantitativas, sino describir el comportamiento cualitativo de las variables relevantes.

§1.4.1 Abstracción del mundo

Este proceso lo vamos a subdividir en varios pasos que no necesariamente siguen un orden cronológico. Lo importante es que entendamos que, en la abstracción de la realidad, necesariamente hacemos simplificaciones. Para abstraer, se hacen supuestos acerca del fenómeno a estudiar que capturen, de la manera más simple posible, el comportamiento observado o la hipótesis de trabajo.

Variables relevantes y notación

Haciendo una gran simplificación, se identifican las siguientes como variables relevantes en el mercado laboral: el salario (el que existiría de no existir el salario mínimo), el salario mínimo, el número de trabajadores que están dispuestos a trabajar por un salario determinado (oferta laboral) y el número de trabajadores que las empresas están dispuestas a contratar a un salario dado (demanda laboral).

Nótese que, como en todos los modelos económicos, estamos utilizando el principio *caeteris paribus*, pues se mantienen muchas otras variables como constantes. En particular, el tiempo no transcurre.

Utilizamos la siguiente notación:

- $w =$ salario,
- $w_{\text{mín}} =$ salario mínimo y
- $L =$ número total de trabajadores.

Supuestos

- Tomamos un sector "representativo" de la economía, por ejemplo el sector manufacturero.
- El mercado es competitivo en el siguiente sentido: tanto trabajadores como empleadores toman al salario como dado.
- El salario es la variable independiente, la oferta y la demanda laboral las dependientes.
- El salario mínimo está dado en forma externa (por alguna autoridad gubernamental, por ejemplo).
- Existe un equilibrio en el mercado de trabajo: cuando la oferta y la demanda laborales coinciden.

Relaciones entre las variables

- La oferta laboral puede representarse por una función del salario, continua y creciente, digamos $L = f(w)$, y
- la demanda laboral se representa por una función continua y decreciente, por ejemplo, $L = g(w)$.
- Si w^* es el salario de equilibrio existente, se cumple $w^* \geq w_{\text{mín}}$ ya que el salario mínimo es una cota inferior al salario.

Nótese que el buen comportamiento de las funciones es una enorme simplificación. En muchas ocasiones estas simplificaciones (por ejemplo de continuidad, diferenciabilidad o convexidad) son naturales dentro de una familia de modelos, aunque en realidad se hacen con el objetivo de hacer manejable el problema.

§1.4.2 Deducción a partir del modelo

El equilibrio en el mercado laboral se obtiene al intersecar las funciones de oferta y demanda laborales. Las cantidades de equilibrio, obtenidas cuando $f(w) = g(w)$, son w^* y L^*. En este equilibrio no existe desempleo involuntario (ningún trabajador que desee trabajar con dicho salario está desempleado). Al imponer un salario mínimo mayor a w^*, la oferta laboral aumenta a $L_1 > L^*$ y la demanda disminuye a $L_2 < L^*$. La cantidad $D = L_1 - L_2$ de trabajadores serán desempleados involuntarios. De estos, $L^* - L_2$ perdieron su empleo y $L_1 - L^*$ ahora desean trabajar por el salario mínimo. La cantidad L_2 de trabajadores que conservan su empleo incrementa su salario a $w_{\text{mín}}$. La figura 1.3 representa estas consideraciones. Ésta será la única ocasión en la cual el precio (el salario, en este caso) se presente en el eje horizontal y la cantidad en el vertical. En economía normalmente se consideran las funciones inversas de manera que los ejes se invierten.

§1.4.3 Verificación y conclusiones

El modelo propuesto indica que la imposición de un salario mínimo aumenta las percepciones de algunos trabajadores a costa de un incremento en el desempleo. Una observación importante es que la magnitud de estos efectos depende de las pendientes de las curvas de oferta y demanda. Aquí no obtenemos ninguna conclusión cuantitativa; sin embargo, podrían estimarse las funciones de oferta y demanda laboral en forma empírica, a partir de datos reales.

La situación presentada hace una gran cantidad de simplificaciones, entre otras cosas, supone que el mercado de trabajo es como el de cualquier otro bien, que carece de imperfecciones, que existe el equilibrio, que las ganancias y pérdidas no están cuantificadas, que no nos ocupamos de la obtención formal de las funciones de oferta y demanda, etc. A pesar de que existe un gran número de críticos al modelo y a sus conclusiones, la mayor parte de los economistas lo aceptan como una representación cualitativa adecuada de la realidad.[14]

---

[14] Como ejemplo, recordemos que en 1995 causó gran revuelo una publicación de los economistas David

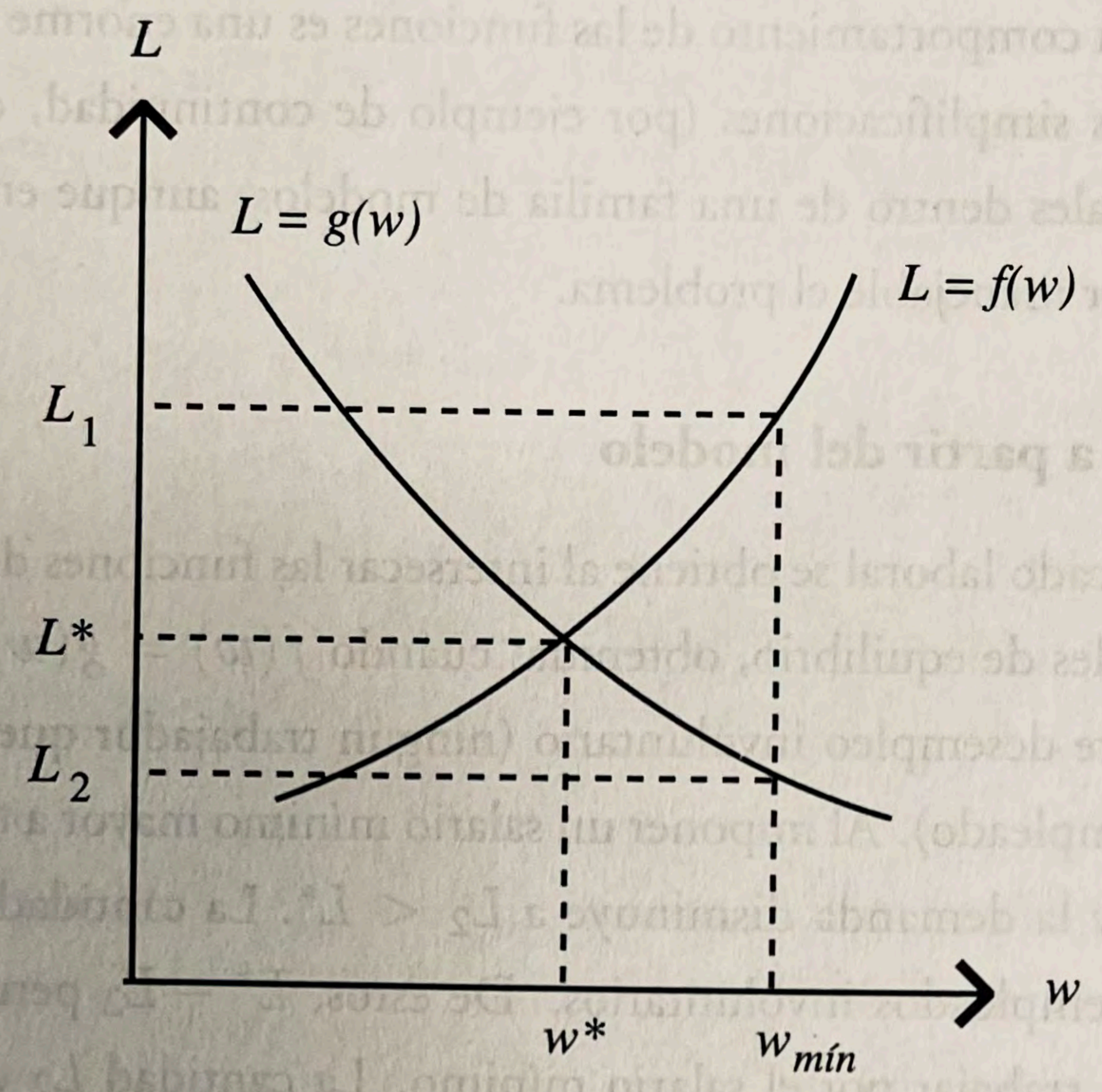

Figura 1.3 Las cantidades w^* y L^* representan el equilibrio del mercado de trabajo. Al imponer el salario mínimo $w_{\text{mín}} > w^*$, se crea una diferencia entre la cantidad ofrecida y la demandada de trabajo $L_1 - L_2$.

Ejercicios

▷ **1.1** Los siguientes escenarios describen vagamente fenómenos hipotéticos que se desea estudiar. Para cada caso, identificar un problema específico y las variables relevantes, proponer relaciones entre ellas y justificar. (Evidentemente, las respuestas pueden variar.)

a) ¿Es el momento de comprar un auto nuevo?

b) La población de perros callejeros en la ciudad de México es alarmante.

c) Se desea sustituir los "microbuses" urbanos por autobuses eficientes operados por el gobierno de la ciudad.

d) La Secretaría de Salud se interesa por conocer la eficiencia de una nueva vacuna contra el sarampión.

Card y Alan Krueger (véase [16]). En ella se realizó un estudio en las cadenas de restaurantes de comida rápida en New Jersey y Pennsylvania, cuya conclusión fue que el aumento al salario mínimo no tenía efecto en el empleo. El estudio fue utilizado con fines políticos por la administración del presidente Clinton. Las críticas no se hicieron esperar y los métodos estadísticos utilizados en el estudio han sido puestos bajo sospecha.

e) Nos preguntamos si debemos ahorrar una porción de nuestro ingreso.

▷ **1.2** El fenómeno de **difusión social** (o *proceso del chisme*) describe cómo se expande la información dentro de una sociedad. Los miembros de la población se dividen en dos clases: los que poseen la información y los que carecen de ella. En una población conocida (digamos de N individuos), es razonable suponer que la tasa de difusión de la información es proporcional al producto del número de individuos que poseen la información por el de aquéllos que no la tienen. Nombrar las variables relevantes y describir un modelo que proporcione el número de individuos que poseen la información después de n días.

▷ **1.3** Se ha observado que el ahorro de los individuos depende de su ingreso y de la tasa de interés del mercado. Asimismo, el ahorro es sumamente sensible a los cambios en el ingreso, pero cambia poco ante variaciones de la tasa de interés. Describir un modelo que represente estas consideraciones.