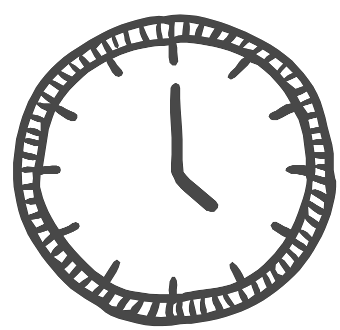
Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

CLASE 10

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro

Optimización de un modelo determinístico de tres periodos

Tarea

3

3

Nuestra agenda de hoy

Revisión de datos y eventos macro

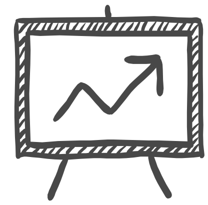
Optimización de un modelo determinístico de tres periodos

Tarea

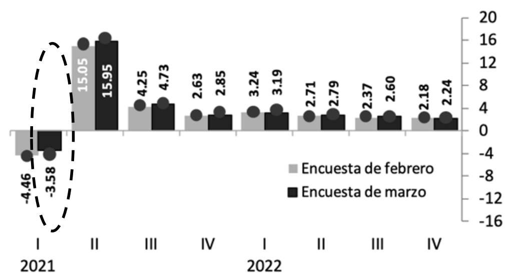
4

4

Se va a publicar el PIB de México de 1T21



Gráfica 10. Pronósticos de la variación del PIB trimestral
Tasa anual en por ciento[1/]

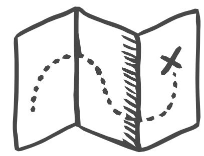


1/ Para cada trimestre, la barra y la cifra se refieren a la media, en tanto que el círculo rojo se refiere a la mediana. Las cifras correspondientes a la mediana se pueden consultar en el anexo de este reporte.

Fuente: Encuesta sobre las expectativas de los especialistas en economía del sector privado: marzo 2021. Liga: https://www.banxico.org.mx/publicaciones-y-prensa/encuestas-sobre-las-expectativas-de-los-especialis/%7BA9302B4A-04AD-4551-9877-028346F57E96%7D.pdf

Nuestra agenda de hoy

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

7

7

Problema de optimización con función de utilidad logarítmica

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$
$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

8

8

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \beta^0 \ln C_1 + \beta^1 \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

9

9

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

0

$$\mathcal{L} = \beta^0 \ln C_1 + \beta^1 \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

10

10

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

ERROR

11

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

1

$$\mathcal{L} = \beta^0 \ln C_1 + \beta^1 \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

12

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^0} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

13

13

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^0} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0$$

14

14

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\beta^0} \ln C_1 + \overset{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0$$

15

15

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\beta^0} \ln C_1 + \overset{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0$$

16

16

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^{0}} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^{1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0$$

17

17

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^{0}} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^{1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0$$

18

18

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^0} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}\ ?$$

Restricción con desigualdad

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \cancelto{1}{\beta^0} \ln C_1 + \cancelto{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}\ ?$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$$

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}$?

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

21

21

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}$?

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

22

22

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$…………….(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$…………….(2) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$…………….(3) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}$?

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

23

23

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$…………….(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$…………….(2) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$…………….(3) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}$?

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

24

24

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$…….(5)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4}$?

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

25

25

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$…….(5)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3) $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda_3 \leq 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0; \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

26

26

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2)\ = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3)\ = 0$…….(5)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda_3 \leq 0;\ A_4 \geq 0$

27

27

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\cancel{\beta^0}} \ln C_1 + \overset{\beta}{\cancel{\beta^1}} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2)\ = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3)\ = 0$…….(5)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda_3 \leq 0;\ A_4 \geq 0;\ A_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = 0$

28

28

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \overset{1}{\beta^0} \ln C_1 + \overset{\beta}{\beta^1} \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$…….(5)

$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda_3 \leq 0;\ A_4 \geq 0;\ A_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = 0}_{\text{Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker}}$

29

29

Modelo determinístico de tres periodos – Método de Lagrange

$$\mathcal{L} = \ln C_1 + \beta \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$…….(5)

$\underbrace{\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0 \Leftrightarrow -\lambda_3 \leq 0;\ A_4 \geq 0;\ A_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = 0}_{\text{Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker}}$

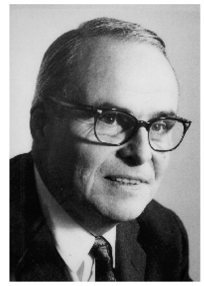
30

30

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

William Karush
(1917-1997)

Harold W. Kuhn
(1925-2014)



Albert W. Tucker
(1905-1995)

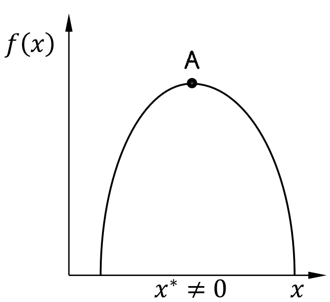
Fuente: William Karush (https://www.math.uni-bielefeld.de); Harold W. Kuhn (https://optienterazavala.wordpress.com/); Albert W. Tucker (Wikipedia)

31

31

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

<u>Solución interior</u>

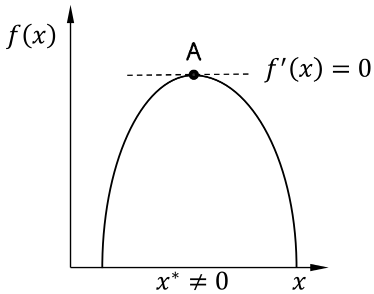


32

32

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior

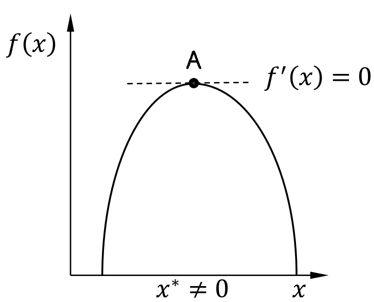


33

33

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior



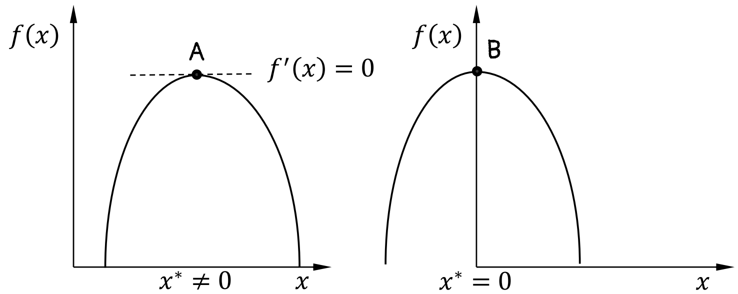
$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$

34

34

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior　　Solución de frontera



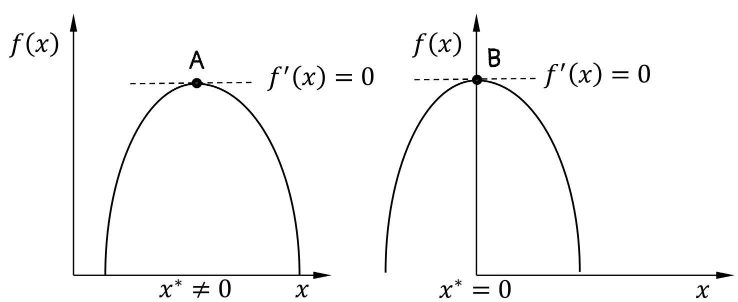
$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$

35

35

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior　　Solución de frontera



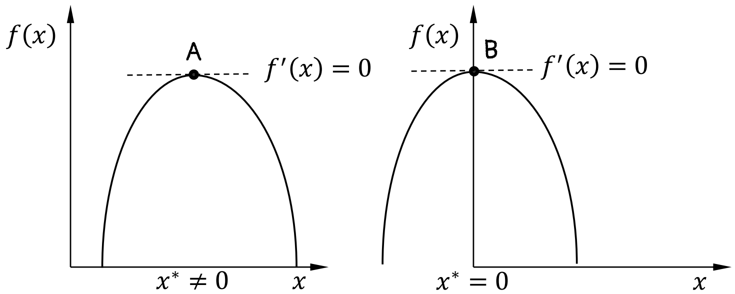
$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$

36

36

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior **Solución de frontera**



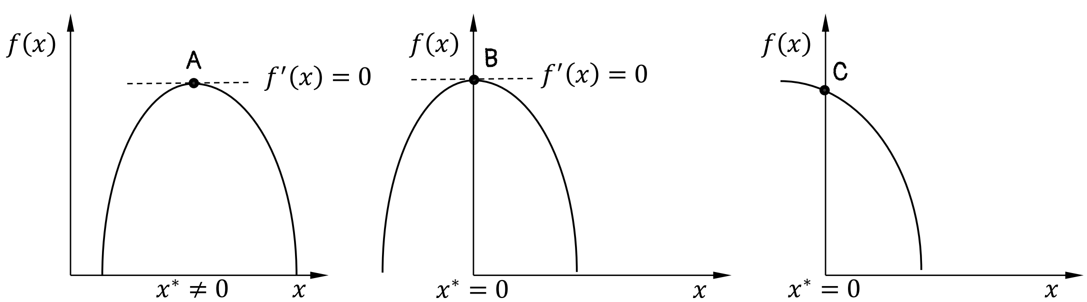
$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$ $x^* = 0$ y $f'(x) = 0$

37

37

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior **Solución de frontera** **Máximo local**[1]



$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$ $x^* = 0$ y $f'(x) = 0$

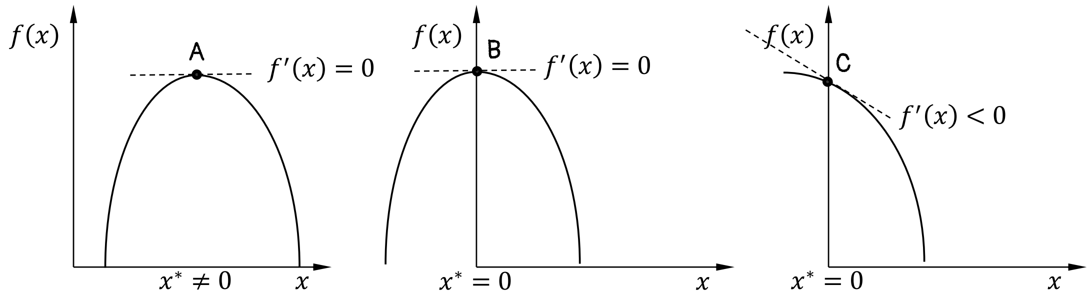
1. Puede ser también mínimo.

38

38

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior | **Solución de frontera** | **Máximo local[1]**



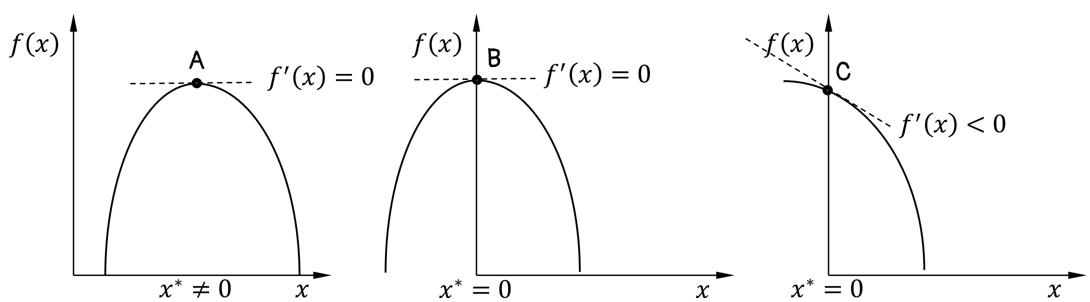
$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$

$x^* = 0$ y $f'(x) = 0$

1. Puede ser también mínimo.

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

Solución interior | **Solución de frontera** | **Máximo local[1]**



$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$

$x^* = 0$ y $f'(x) = 0$

$x^* = 0$ y $f'(x) < 0$

1. Puede ser también mínimo.

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$ $\qquad$ $x^* = 0$ y $f'(x) = 0$ $\qquad$ $x^* = 0$ y $f'(x) < 0$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$f'(x) \leq 0\,;\quad x \geq 0\,;\quad$ y $\quad xf'(x) = 0$

41

41

Digresión: Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker

$x^* \neq 0$ y $f'(x) = 0$ $\qquad$ $x^* = 0$ y $f'(x) = 0$ $\qquad$ $x^* = 0$ y $f'(x) < 0$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

$\underbrace{f'(x) \leq 0\,;\quad x \geq 0\,;}_{\text{La variable } x^* \text{ o } f'(x) \text{ pueden o no ser cero}}\quad$ y $\quad \underbrace{xf'(x) = 0}_{\text{Pero al menos una de las dos tiene que ser cero}}$

42

42

Para un problema de optimización no lineal con n variables y m restricciones, las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son:

Problema de maximización

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0; \qquad x_i \geq 0; \qquad x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \geq 0; \qquad \lambda_j \geq 0; \qquad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

Fuente: **Chiang, Alpha C.** (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3a edición. Nueva York; NY: McGraw-Hill, pp. 722-30.

43

43

Para un problema de optimización no lineal con n variables y m restricciones, las Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker son:

Problema de maximización

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \leq 0; \qquad x_i \geq 0; \qquad x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \geq 0; \qquad \lambda_j \geq 0; \qquad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

Problema de minimización

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} \geq 0; \qquad x_i \geq 0; \qquad x_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = 0 \quad \text{para } i = 1, 2, 3, \dots, n$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} \leq 0; \qquad \lambda_j \geq 0; \qquad \lambda_j \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_j} = 0 \quad \text{para } j = 1, 2, 3, \dots, m$$

Fuente: **Chiang, Alpha C.** (1984). *Fundamental Methods of Mathematical Economics*. 3a edición. Nueva York; NY: McGraw-Hill, pp. 722-30.

44

44

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker en la tercera restricción (expresión 6)

$$\mathcal{L} = \ln C_1 + \beta\ \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

Restricción: $A_4 \geq 0$

Condiciones de Karush-Kuhn-Tucker:

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} \leq 0;\quad A_4 \geq 0;\quad A_4 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_4} = 0$

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} \geq 0;\quad \lambda_3 \geq 0;\quad \lambda_3 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

$-\lambda_3 \leq 0;\quad A_4 \geq 0;\quad A_4(-\lambda_3) = 0$

$(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0;$

$\lambda_3 \geq 0;$

$\lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

45

45

$-\lambda_3 \leq 0;\quad A_4 \geq 0;\quad A_4(-\lambda_3) = 0$

$(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0;\quad \lambda_3 \geq 0;\quad \lambda_3[(1+r_3)\,A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

46

46

$-\lambda_3 \leq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$
$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0;$ $\quad \lambda_3 \geq 0;\ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

$\lambda_3 \geq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$
$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 \geq A_4;$ $\quad \lambda_3 \geq 0;\ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

47

47

$-\lambda_3 \leq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$
$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0;$ $\quad \lambda_3 \geq 0;\ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

$\lambda_3 \geq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$
$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 \geq A_4;$ $\quad \lambda_3 \geq 0;\ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

Si al final de su vida, el agente representativo deja activos sin consumir, *i.e.* $A_4 > 0$, entonces $\lambda_3 = 0$ para que se cumpla la condición $A_4(-\lambda_3) = 0$

48

48

$$
\begin{array}{ll}
-\lambda_3 \leq 0; & A_4 \geq 0;\ \ A_4(-\lambda_3) = 0 \\
(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0; & \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_3 \geq 0; & A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0 \\
(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 \geq A_4; & \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0
\end{array}
$$

Si al final de su vida, el agente representativo deja activos sin consumir, *i.e.* $A_4 > 0$, entonces $\lambda_3 = 0$ para que se cumpla la condición $A_4(-\lambda_3) = 0$. Lambda (λ_3) se interpreta como cuánto puede incrementarse la utilidad del agente representativo ($\ln C_3$) si aumenta la restricción (*i.e.* A_4)

49

49

$$
\begin{array}{ll}
-\lambda_3 \leq 0; & A_4 \geq 0;\ \ A_4(-\lambda_3) = 0 \\
(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0; & \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\lambda_3 \geq 0; & A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0 \\
(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 \geq A_4; & \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0
\end{array}
$$

Si al final de su vida, el agente representativo deja activos sin consumir, *i.e.* $A_4 > 0$, entonces $\lambda_3 = 0$ para que se cumpla la condición $A_4(-\lambda_3) = 0$. Lambda (λ_3) se interpreta como cuánto puede incrementarse la utilidad del agente representativo ($\ln C_3$) si aumenta la restricción (*i.e.* A_4), por lo que si $\lambda_3 = 0$, eso quiere decir que la utilidad del agente representativo no aumenta al dejar activos sin consumir al final de su vida

50

50

$-\lambda_3 \leq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$

$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4 \geq 0;\ \ \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

$\lambda_3 \geq 0;$ $\quad A_4 \geq 0;\ A_4(-\lambda_3) = 0$

$(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 \geq A_4;\ \ \lambda_3 \geq 0;\ \ \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4] = 0$

Si al final de su vida, el agente representativo deja activos sin consumir, *i.e.* $A_4 > 0$, entonces $\lambda_3 = 0$ para que se cumpla la condición $A_4(-\lambda_3) = 0$. Lambda (λ_3) se interpreta como cuánto puede incrementarse la utilidad del agente representativo ($\ln C_3$) si aumenta la restricción (*i.e.* A_4), por lo que si $\lambda_3 = 0$, eso quiere decir que la utilidad del agente representativo no aumenta al dejar activos sin consumir al final de su vida. Desde esta perspectiva, es óptimo consumir todos los activos en vida, *i.e.* $A_4 = 0$

51

51

$$\mathcal{L} = \ln C_1 + \beta \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] + \lambda_2[(1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] + \lambda_3[(1 + r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$…………..(2) $\quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$…….(5)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$………….(3) $\quad A_4 = 0$…………………………………………….(6)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0;\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0$

52

52

$$\mathcal{L} = \ln C_1 + \beta \ln C_2 + \beta^2 \ln C_3 + \lambda_1[(1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2] +$$
$$\lambda_2[(1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3] +$$
$$\lambda_3[(1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 - A_4]$$

FOC (First-Order Conditions)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$..............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1+r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1+r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$..(6)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 0 \Leftrightarrow (1+r_1)\, A_1 + w_1 - C_1 - A_2 = 0$..(7)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2} = 0 \Leftrightarrow (1+r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3 = 0$..(8)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_3} = 0 \Leftrightarrow (1+r_3)\, A_3 + w_3 - C_3 = 0$..(9)

53

53

El objetivo aquí es que encontremos $C_1^*, C_2^*, C_3^*, A_2^*$ y A_3^* (A_1 es un parámetro y $A_4^* = 0$) en términos de los parámetros (*i.e.* $r_1, r_2, r_3, w_1, w_2, w_3$ y claramente β)

54

54

El objetivo aquí es que encontremos $C_1^*, C_2^*, C_3^*, A_2^*$ y A_3^* $(A_1$ es un parámetro y $A_4^* = 0)$ en términos de los parámetros (*i.e.* $r_1, r_2, r_3, w_1, w_2, w_3$ y claramente $\beta)$

Para para lograrlo, vamos a hacerlo en dos pasos:

55

55

El objetivo aquí es que encontremos $C_1^*, C_2^*, C_3^*, A_2^*$ y A_3^* $(A_1$ es un parámetro y $A_4^* = 0)$ en términos de los parámetros (*i.e.* $r_1, r_2, r_3, w_1, w_2, w_3$ y claramente $\beta)$

Para para lograrlo, vamos a hacerlo en dos pasos:

(1) Eliminar las lambdas utilizando las primeras seis condiciones de primer orden (1-6); y en lugar de utilizar las condiciones de primer orden asociadas a las restricciones (7, 8 y 9), vamos a…

56

56

El objetivo aquí es que encontremos $C_1^*, C_2^*, C_3^*, A_2^*$ y A_3^* (A_1 es un parámetro y $A_4^* = 0$) en términos de los parámetros (*i.e.* $r_1, r_2, r_3, w_1, w_2, w_3$ y claramente β)

Para para lograrlo, vamos a hacerlo en dos pasos:

(1) Eliminar las lambdas utilizando las primeras seis condiciones de primer orden (1-6); y en lugar de utilizar las condiciones de primer orden asociadas a las restricciones (7, 8 y 9), vamos a…

(2) Utilizar la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo (paso 'nuevo')

57

57

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$……………(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$……………(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$……………(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$…….(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$…….(5)

$A_4 = 0$…………………………………………….(6)

58

58

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$..............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$...(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

59

59

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$..............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$...(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

$\frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{C_1}$...................(1b)

60

60

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$.............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$..(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

$\frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{C_1}$..................(1b)

$\frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\beta}{C_2}$..................(2b)

61

61

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$.............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$..(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

$\frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{C_1}$..................(1b)

$\frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\beta}{C_2}$..................(2b)

$\frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{\beta^2}{C_3}$..................(3b)

62

62

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$.............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$..(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

$\frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{C_1}$...................(1b)

$\frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\beta}{C_2}$...................(2b)

$\frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{\beta^2}{C_3}$...................(3b)

Substituimos (1b) y (2b) en (4):

$\frac{\beta}{C_2}(1 + r_2) = \frac{1}{C_1}$ ....(10)

63

63

Paso 1: Eliminar las lambdas

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_1} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0$..............(1)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0$..............(2)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial C_3} = 0 \Leftrightarrow \frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0$.............(3)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_1 + \lambda_2(1 + r_2) = 0$.......(4)

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\lambda_2 + \lambda_3(1 + r_3) = 0$.......(5)

$A_4 = 0$..(6)

Despejamos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ de (1), (2) y (3)

$\frac{1}{C_1} - \lambda_1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{C_1}$...................(1b)

$\frac{\beta}{C_2} - \lambda_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda_2 = \frac{\beta}{C_2}$...................(2b)

$\frac{\beta^2}{C_3} - \lambda_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda_3 = \frac{\beta^2}{C_3}$...................(3b)

Substituimos (1b) y (2b) en (4):

$\frac{\beta}{C_2}(1 + r_2) = \frac{1}{C_1}$ ....(10)

Substituimos (2b) y (3b) en (5):

$\frac{\beta^2}{C_3}(1 + r_3) = \frac{\beta}{C_2}$...........................(11)

64

64

Paso 1: Eliminar las lambdas

Re arreglamos algunos términos en (10) y (11):

$$\frac{\beta}{C_2}(1+r_2) = \frac{1}{C_1} \iff \beta(1+r_2)C_1 = C_2$$

65

65

Paso 1: Eliminar las lambdas

Re arreglamos algunos términos en (10) y (11):

$$\frac{\beta}{C_2}(1+r_2) = \frac{1}{C_1} \iff \beta(1+r_2)C_1 = C_2 \iff C_2 = \beta(1+r_2)C_1 \text{……..(10b)}$$

66

66

Paso 1: Eliminar las lambdas

Re arreglamos algunos términos en (10) y (11):

$$\frac{\beta}{C_2}(1+r_2)=\frac{1}{C_1} \iff \beta(1+r_2)C_1=C_2 \iff C_2=\beta(1+r_2)C_1 \text{ ....(10b)}$$

$$\frac{\beta^2}{C_3}(1+r_3)=\frac{\beta}{C_2} \iff \beta^2(1+r_3)C_2=\beta C_3$$

67

67

Paso 1: Eliminar las lambdas

Re arreglamos algunos términos en (10) y (11):

$$\frac{\beta}{C_2}(1+r_2)=\frac{1}{C_1} \iff \beta(1+r_2)C_1=C_2 \iff C_2=\beta(1+r_2)C_1 \text{ ....(10b)}$$

$$\frac{\beta^2}{C_3}(1+r_3)=\frac{\beta}{C_2} \iff \beta^{\cancel{2}}(1+r_3)C_2=\cancel{\beta}C_3$$

68

68

Paso 1: Eliminar las lambdas

Re arreglamos algunos términos en (10) y (11):

$$\frac{\beta}{C_2}(1+r_2)=\frac{1}{C_1} \iff \beta(1+r_2)C_1 = C_2 \iff C_2=\beta(1+r_2)C_1 \text{ ....(10b)}$$

$$\frac{\beta^2}{C_3}(1+r_3)=\frac{\beta}{C_2} \iff \beta^{\cancel{2}}(1+r_3)C_2 = \cancel{\beta}C_3 \iff C_3=\beta(1+r_3)C_2 \text{ ....(11b)}$$

69

Paso 2: Substituir (10b) y (11b) en la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo

$$(1+r_1)\,A_1+w_1+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1+\frac{C_2}{1+r_2}+\frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

70

Paso 2: Substituir (10b) y (11b) en la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo

$$\underbrace{(1+r_1)\,A_1}_{\text{Activos iniciales}} + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

71

71

Paso 2: Substituir (10b) y (11b) en la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo

$$\underbrace{(1+r_1)\,A_1}_{\text{Activos iniciales}} + \underbrace{w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}_{\text{Valor presente de los sueldos que va a recibir el agente representativo}} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

72

72

Paso 2: Substituir (10b) y (11b) en la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo

$$\underbrace{(1+r_1)\,A_1}_{\text{Activos iniciales}} + \underbrace{w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}_{\text{Valor presente de los sueldos que se van a recibir el agente representativo}} = \underbrace{C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}_{\text{Valor presente del consumo del agente representativo}}$$

73

73

Paso 2: Substituir (10b) y (11b) en la restricción presupuestaria consolidada de 'toda la vida' del agente representativo

$C_2 = \beta(1+r_2)C_1$ ……..(10b)

$C_3 = \beta(1+r_3)C_2$………..(11b)

en…

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

74

74

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)C_2}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

Substituir (10b) (*i.e.* $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$) en la última parte de la restricción…

75

75

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)C_2}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

Substituir (10b) (*i.e.* $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$) en la última parte de la restricción…

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

76

76

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejar C_1:

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta^2(1+r_3)(1+r_2)C_1}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta^2(1+r_3)(1+r_2)C_1}{(1+r_2)(1+r_3)} = (1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta^2\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} = (1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

77

77

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejar C_1:

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 = (1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

78

78

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejar C_1:

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 = (1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$(1 + \beta + \beta^2) C_1 = (1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

79

79

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejar C_1:

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 = (1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$(1 + \beta + \beta^2) C_1 = (1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}$$

$$\boxed{C_1^* = \frac{1}{1 + \beta + \beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1 + r_2} + \frac{w_3}{(1 + r_2)(1 + r_3)}\right]}$$

80

80

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \text{..........(12)}$$

Ahora solo nos faltan C_2^*,C_3^*, A_2^* y A_3^* …

81

81

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \text{..........(12)}$$

Ahora solo nos faltan C_2^*,C_3^*, A_2^* y A_3^* …

Podemos substituir C_1^* (12) en (10b)

$$C_2 = \beta(1+r_2)C_1 \text{ ....(10b)}$$

82

82

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \text{.........................} (13)$$

83

83

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \text{.........................} (13)$$

Podemos substituir C_2^* (13) en (11b)

$$C_3 = \beta(1+r_3)C_2 \text{...} (11b)$$

84

84

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_3^* = \frac{\beta^2(1+r_2)(1+r_3)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

85

85

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_3^* = \frac{\beta^2(1+r_2)(1+r_3)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (14)$$

Ahora ¿Cómo vamos a obtener A_2^* y A_3^*?

86

86

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

$$C_3^* = \frac{\beta^2(1+r_2)(1+r_3)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \text{..............(14)}$$

Ahora ¿Cómo vamos a obtener A_2^* y A_3^*?

→ Utilizando C_1^*, C_2^* y las condiciones de primer orden (7) y (8) …

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2 = 0 \text{........................(7)}$$

$$(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3 = 0 \text{........................(8)}$$

87

87

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_2 de (7)…

$$(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2 = 0 \text{........................(7)}$$

$$A_2 = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 \text{........................(7b)}$$

88

88

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_2 de (7)…

$(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2 = 0$……………………………………………(7)

$A_2 \;= (1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1$…………………………………………………(7b)

…y substituimos C_1^* de (12) en (7b):

$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$…………………………(12)

89

89

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_2 de (7)…

$(1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1 - A_2 = 0$……………………………………………(7)

$A_2 \;= (1+r_1)\,A_1 + w_1 - C_1$…………………………………………………(7b)

…y substituimos C_1^* de (12) en (7b):

$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$…………………………(12)

$$\boxed{A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}}$$

90

90

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_3 de (8)…

$(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3 = 0$……………………………………………(8)

$A_3 = (1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2$………………………………………………(8b)

91

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_3 de (8)…

$(1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 - A_3 = 0$……………………………………………(8)

$A_3 = (1+r_2)\,A_2 + w_2 - C_2$………………………………………………(8b)

…y substituimos A_2^* y C_2^* de (13) en (8b):

$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$…………………………(13)

92

Paso 2: Utilizar la restricción presupuestaria de 'toda la vida'

Despejamos A_3 de (8)…

$(1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 - A_3 = 0$……………………………………………(8)

$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2$……………………………………………(8b)

…y substituimos A_2^* y C_2^* de (13) en (8b):

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \quad \text{……………(13)}$$

$$\boxed{A_3^* = (1 + r_2)\left\langle (1 + r_1)\, A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}}$$

93

93

Equilibrio del agente representativo:

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \quad \text{……………(12)}$$

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \quad \text{……………(13)}$$

$$C_3^* = \frac{\beta^2(1+r_2)(1+r_3)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \quad \text{………(14)}$$

$$A_2^* = (1 + r_1)\, A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

$$A_3^* = (1 + r_2)\left\langle (1 + r_1)\, A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

94

94

Ejercicio numérico con parámetros:

Parámetro	Descripción	Número
ρ	Coeficiente de impaciencia	1.0938
β	Factor de descuento	0.4776
w_1	Salario en $t = 1$	0.7
w_2	Salario en $t = 2$	0.7
w_3	Salario en $t = 3$	0.7
r_1	Tasa de interés en $t = 1$	1.6658
r_2	Tasa de interés en $t = 2$	1.6658
r_3	Tasa de interés en $t = 3$	1.6658
A_1	Nivel de activos en $t = 1$	0

95

95

Ejercicio numérico con parámetros:

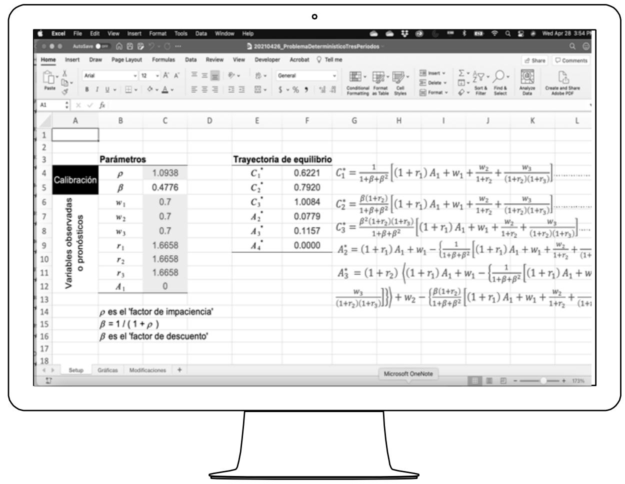
Parámetro	Descripción	Número
ρ	Coeficiente de impaciencia	1.0938
β	Factor de descuento	0.4776
w_1	Salario en $t = 1$	0.7
w_2	Salario en $t = 2$	0.7
w_3	Salario en $t = 3$	0.7
r_1	Tasa de interés en $t = 1$	1.6658
r_2	Tasa de interés en $t = 2$	1.6658
r_3	Tasa de interés en $t = 3$	1.6658
A_1	Nivel de activos en $t = 1$	0

$$\beta = \frac{1}{1-\rho}$$

96

96

…Hagamos el ejercicio en Excel

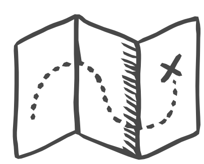


97

97

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

98

98

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos

99

99

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$…

100

100

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$,...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...

10
1

101

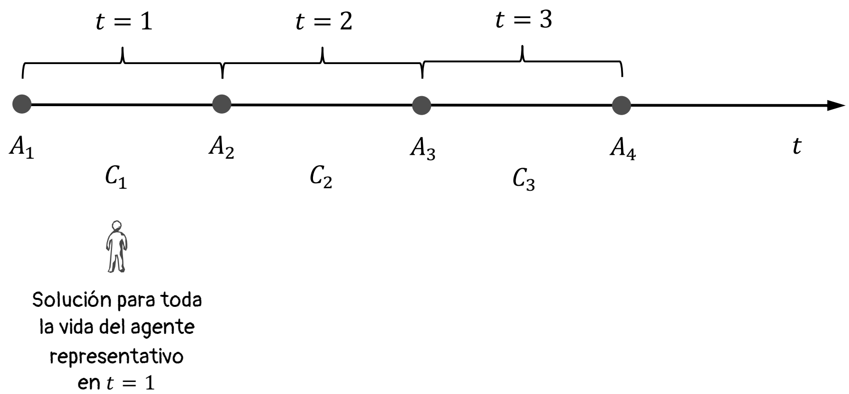
‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...
- Las soluciones que vamos a obtener se conocen también como ‘funciones de política (económica)’, que son una ‘manera alternativa’ de expresar las soluciones óptimas en cada periodo de tiempo

10
2

102

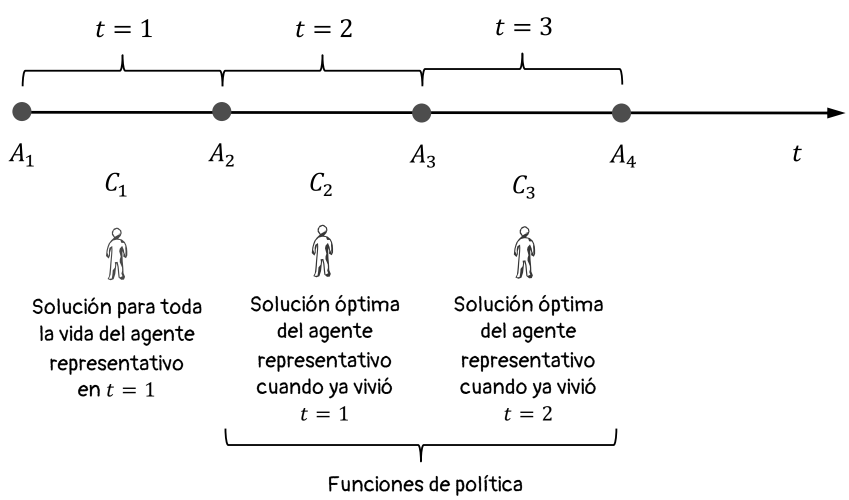
‘Funciones de política’



10
3

103

‘Funciones de política’



10
4

104

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$

10
5

105

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas

10
6

106

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente

10
7

107

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)

10
8

108

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiones óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)
- Vamos a ver este método como ‘paso intermedio’ para poder entender mejor el concepto de *Programación Dinámica*

10
9

109

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

11
0

110

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3} \{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

11
1

111

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3} \{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \overset{r_2}{\cancel{r_1}})\, A_1 + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

11
2

112

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \cancelto{r_2}{r_1})\,\cancelto{a}{A_1} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

11
3

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + \cancelto{r_2}{r_1})\,\cancelto{a}{A_1} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

11
4

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

Podríamos resolverlo con un lagrangiano. Sin embargo, en este caso es más sencillo despejar C_3 de la restricción e incorporar la expresión en la función objetivo. Así lo podemos resolverlo como un problema de optimización no restringido

11
5

115

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

11
6

116

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

11
7

117

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2$$

11
8

118

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1+r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\frac{C_3}{1+r_3} = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2$$

$$C_3 = (1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]$$

11
9

119

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]\right\}\right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

12
0

120

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{C_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta(1+r_3)}{(1+r_3)\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

12
1

121

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{C_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

12
2

122

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a+w_2+\frac{w_3}{1+r_3}-C_2\right]} = 0$$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

12
3

123

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

12
4

124

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

12
5

125

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$C_2(1 + \beta) = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

12
6

126

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$C_2(1 + \beta) = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1 + \beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}\right]$$

12
7

127

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$C_2(1 + \beta) = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = \frac{1}{1 + \beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}\right]}$$

12
8

128

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$

12
9

129

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?

13
0

130

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser ‘el par en el tiempo’ de $\widehat{C_2}$

13
1

131

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser ‘el par en el tiempo’ de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*

13
2

132

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*
- No nos dimos cuenta de esto cuando resolvimos el problema de optimización para todo el periodo de tiempo, porque resolvimos todo de manera simultánea. Por esto no nos detuvimos a ver en qué momento en el tiempo el agente representativo toma la decisión sobre su nivel de activos para el siguiente periodo

13
3

133

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$

13
4

134

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 \quad \text{(8b)}$$

13
5

135

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\,A_2 + w_2 - C_2 \quad \text{(8b)}$$

- Proponemos la función de política para los activos en $t = 3$:

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

13
6

136

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

13
7

137

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

13
8

138

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

13
9

139

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
0

140

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
1

141

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
2

142

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
3

143

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1 + r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
4

144

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1 + r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

145

145

'Función de política' de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1 + r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\boxed{\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)}$$

146

146

'Funciones de política' en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

14
7

147

'Funciones de política' en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a…

14
8

148

’Funciones de política’ en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a…
- …por lo que para que $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ sean óptimas, se necesita que $a = A_2^*$

149

149

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:
  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

150

150

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

$$C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_3^* = (1+r_2)\left\langle(1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

15
1

151

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

$$C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

$$C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_3^* = (1+r_2)\left\langle(1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

15
2

152

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

15
3

153

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$
$$A_4 \geq 0$$

- Aquí ni siquiera hay necesidad de construir un lagrangiano, ni es necesario obtener alguna derivada. Debido a que sabemos que en óptimo el agente representativo se va a terminar sus recursos (*i.e.* $A_4 = 0$), simplemente con 'cumplir' con la restricción obtenemos el máximo restringido: $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

15
4

154

’Funciones de política’ en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

  $\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$

15
5

155

’Funciones de política’ en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

  $\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$

  $\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - (1 + r_3)a - w_3$

15
6

156

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

15
7

157

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

$$\widehat{A_4} = 0 = A_4^*$$

15
8

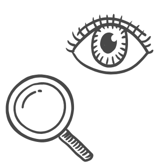
158

Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
- **Tarea**

15
9

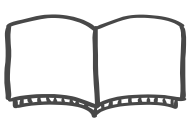
159



(1) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana

2 páginas

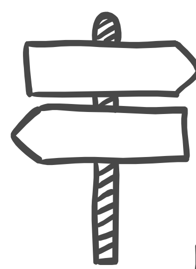
https://www.banorte.com/cms/casadebolsabanorteixe/analisisyestrategia/analisiseconomico/otros/20210426_Calendario.pdf

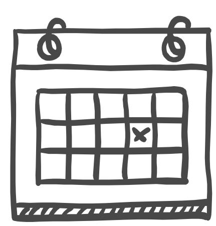


(2) Leer mi columna en El Financiero (martes 27-abr) sobre la aprobación de las modificaciones a las leyes secundarias del Poder Judicial

1 página

https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/





16
0

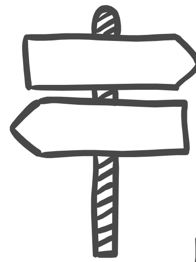
160

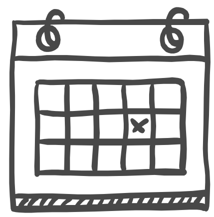
(3) Escuchar el podcast 'Norte Económico' episodio 15 de la Temporada 2 (mié 28-abr) - Entrevista con Alejandro Werner (FMI)

45 minutos

https://podcasts.apple.com/mx/podcast/norte-económico/id1515320115

(4) Desarrollar una hoja de cálculo en Excel con el modelo determinístico de optimización dinámica de tres periodos.

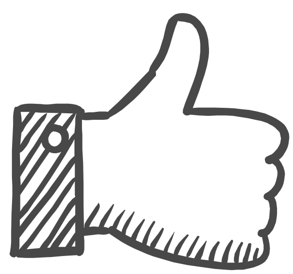




16
1

161

Muchas gracias!



16
2

162

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

163