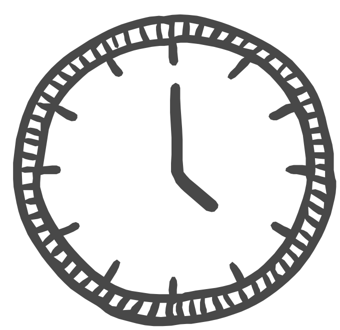
Macroeconomía Dinámica

EC3031 (CCM)

CLASE 8

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

- Inflación de septiembre
- Programación Dinámica

3

3

Nuestra agenda de hoy

- **Inflación de septiembre**
- Programación Dinámica

4

4

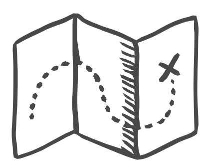
Nuestra agenda de hoy

5

5

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

6

6

Richard E. Bellman

(1920-1984)
Matemático
Principal aportación:
Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman#/media/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg

7

7

'Principio de Optimalidad' de Bellman (1957)

"Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión"

-- Richard Bellman (1957), p. 83

8

8

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

Variable de control

sujeto a:

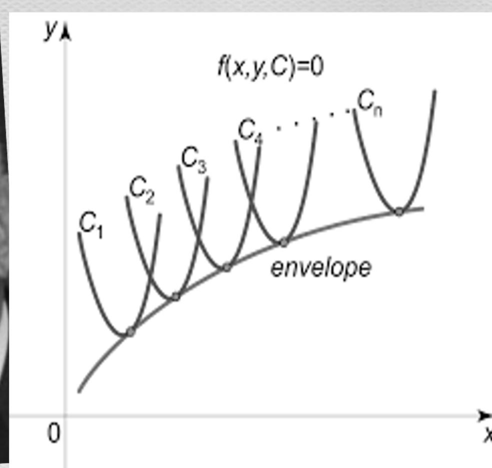
Variable de estado

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para } t = 1,2,3$$
$$A_4 \geq 0$$

9

9

Lawrence M. Benveniste
(¿? - …)



Teorema de la Envolvente Dinámico

Jose A. Scheinkman
(1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

10

10

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

11

11

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

12

12

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros
- Larry Benveniste y Jose Scheinkman demostraron que hay una aplicación del 'Teorema de la Envolvente' para los modelos de optimización dinámica

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

13

13

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

14

14

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

15

15

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

Entonces:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

16

16

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

17

17

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

Vamos a factorizar $\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}$ y a utilizar la condición de primer orden $U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$, para probar que:

$$V_2'(a) = (1+r_2)\,U'\left[\widehat{C_2}(a)\right]$$

18

18

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \quad \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

19

19

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \quad \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \quad \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

20

20

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

21

21

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

22

22

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

23

23

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

24

24

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

25

25

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

26

26

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

27

27

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

28

28

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a}} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

29

29

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a}} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Aquí se muestra la relación que existe entre la función valor y la función de utilidad

30

30

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

31

31

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

32

32

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

33

33

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

34

34

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

35

35

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

36

36

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\,A_t + w_t - C_t\ , \forall t$

Lawrence M. Benveniste (¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 37

37

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\,A_t + w_t - C_t\ , \forall t$, entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\,A_t$

Lawrence M. Benveniste (¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 38

38

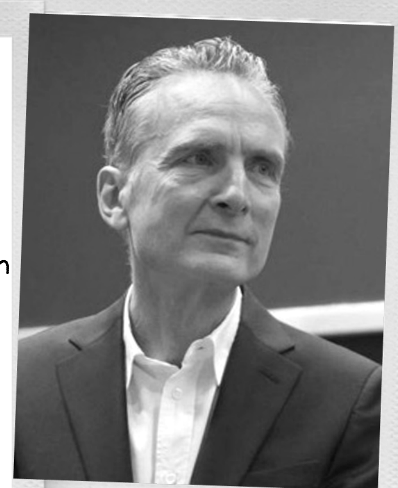
$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t\ , \forall t$, entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\, A_t$, por lo que la fórmula queda:

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$



Lawrence M. Benveniste (¿? - ...)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - ...)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

39

39

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$\max\limits_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t\ , \forall t$ y $A_4 \geq 0$

40

40

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$

41

41

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$

(2) Sustitutir restricción en la función objetivo $\quad V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c]\}$

42

42

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \vert (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$
(2) Sustitutir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \vert (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$
(2) Sustitutir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \vert (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$
(2) Sustituir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c]\}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$
(5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler	$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$

45

45

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \vert (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$
(2) Sustituir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c]\}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$
(5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler	$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$ o $\frac{U'(c)}{U'(c^+)} = \beta(1 + r_{t+1})$

46

46

Macroeconomía Dinámica

EC3024.1

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

(en tiempo discreto)

47

Fuente: Imágenes de Ramsey, Cass y Koopmans y de las banderas (Wikipedia);

48

48

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeto a:

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t - c_t$$

49

49

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeto a:

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1 - \delta)k_t - c_t$$

En donde c_t es el consumo en el tiempo t, k es el capital en el tiempo t, β es un factor de descuento y δ es el factor de depreciación del capital.

50

50

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t,k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \}$$

51

51

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t,k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \}$$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_t(k_t) = \max_{c_t,k_{t+1}} \left\{ u(c_t) + \beta V_{t+1}(k_{t+1}) \middle| k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \right\}$$

52

52

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \}$$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_t(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \left\{u(c_t) + \beta V_{t+1}(k_{t+1}) \middle| k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t\right\}$$

Cambiamos la notación:

$$V_t(k) = \max_{c, k^+} \{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

53

53

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c, k^+} \{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

54

54

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

55

55

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

Las condiciones de primer orden (FOC) son:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}'[f(k) + (1-\delta)k - c]$$

56

56

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

Las condiciones de primer orden (FOC) son:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[\underbrace{f(k) + (1-\delta)k - c}],$$

La fórmula de Benveniste-Scheinkman:

Fórmula: $V_t'(k) = \frac{\partial \boxed{k^+}}{\partial k} u'(c) \quad \Leftrightarrow \quad V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$

57

57

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

58

58

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

59

59

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

Por lo que nos queda:

$$u'(c) = \beta[f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

60

60

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

Por lo que nos queda:

$$u'(c) = \beta[f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Que es la Ecuación de Euler

61

61

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

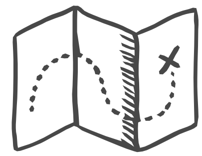
Regresando a la notación original:

$$u'(c_t) = \beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]u'(c_{t+1})$$

62

62

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

63

63

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, para toda t

En donde:

$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$

β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$

A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$

w_t es el salario que recibe en t

64

64

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t

65

65

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

'Condición de Solvencia'. El valor presente del nivel de activos conforme el tiempo se acerca al infinito es cero. En pocas palabras, el agente representativo no se puede endeudar

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t

66

66

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, $\forall t$ y $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$

67

67

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, $\forall t$ y $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás

68

68

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal

69

69

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal

- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

70

70

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t\ , \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para t -en lugar de para T-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

71

71

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t\ , \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para t -en lugar de para T-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

(2) Sustituir la Ecuación de Euler en la restricción 'para toda la vida del individuo' (utilizando la 'Condición de Solvencia')

72

72

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

73

73

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

74

74

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

75

75

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

76

76

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

77

77

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

$$U'(c) = \beta V'_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]$$

78

78

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:..

79

79

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:..

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

80

80

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

81

81

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

82

82

Ecuación de Bellman para *t*, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

83

83

Ecuación de Bellman para *t*, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

84

84

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

85

85

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

86

86

Ecuación de Bellman para *t*, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\,\frac{1}{c^+}$$

87

87

Ecuación de Bellman para *t*, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\,\frac{1}{c^+}$$

$$c^+ = \beta(1 + r_{t+1})c$$

88

88

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

89

89

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

90

90

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

o

$$C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

91

91

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en la restricción 'para toda la vida' del agente representativo

92

92

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en la restricción 'para toda la vida' del agente representativo
- Pero ¿Cómo vamos a obtener esta restricción si el agente representativo es 'inmortal'?

93

93

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta T:

94

94

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta T:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t, \forall t \quad \begin{cases} A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \\ A_{t+2} = (1 + r_{t+2})\, A_{t+1} + w_{t+1} - C_{t+1} \\ A_{t+3} = (1 + r_{t+3})\, A_{t+2} + w_{t+2} - C_{t+2} \\ \vdots \\ A_T = (1 + r_{T-1})\, A_{T-1} + w_{T-1} - C_{T-1} \end{cases}$$

95

95

Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta T se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

96

96

Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta T se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

o

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

97

97

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

98

98

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\cancelto{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

99

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\cancelto{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

10
0

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\overbrace{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}}^{0} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Esta es la versión hasta T de la restricción para 'toda la vida' que utilizamos cuando resolvimos el problema utilizando el Lagrangiano.

101

101

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

102

102

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1+r_3)C_2$ y así sucesivamente,...

10
3

103

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1+r_3)C_2$ y así sucesivamente,...

...en donde de manera recursiva podemos sustituir $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$ en la expresión de C_3, *i.e.* $C_3 = \beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]$

10
4

104

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

105

105

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

106

106

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

10
7

107

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$
$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots$$

10
8

108

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de ‘toda la vida’

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

10
9

109

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de ‘toda la vida’

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de ‘toda la vida’ queda:

11
0

110

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de ‘toda la vida’

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^n x + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de ‘toda la vida’ queda:

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

11
1

111

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de ‘toda la vida’

Así, la restricción de ‘toda la vida’ queda:

11
2

112

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

11
3

113

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos C_1, vamos a obtener la solución de C_1^*

11
4

114

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos C_1, vamos a obtener la solución de C_1^*

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

11
5

115

Sustituyendo la solución óptima de C_1 en la restricción A_2

Y si sustituimos C_1^* en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1 + r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos A_2^*:

11
6

116

Sustituyendo la solución óptima de C_1 en la restricción A_2

Y si sustituimos C_1^* en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1 + r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos A_2^*:

$$A_2^* = (1 + r_1)A_1 + w_1 - (1 - \beta)\left[(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

Solución óptima para el agente representativo 'inmortal'

$$C_1^* = (1 - \beta)\left[(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1 + r_1)A_1 + w_1 - (1 - \beta)\left[(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

11
9

119

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+ \cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+} \cdots\right]$$

12
0

120

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+\cdots}\right]$$

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

121

121

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

122

122

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

123

123

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

124

124

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

12
5

125

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

Definimos que β puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

12
6

126

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

Definimos que β puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

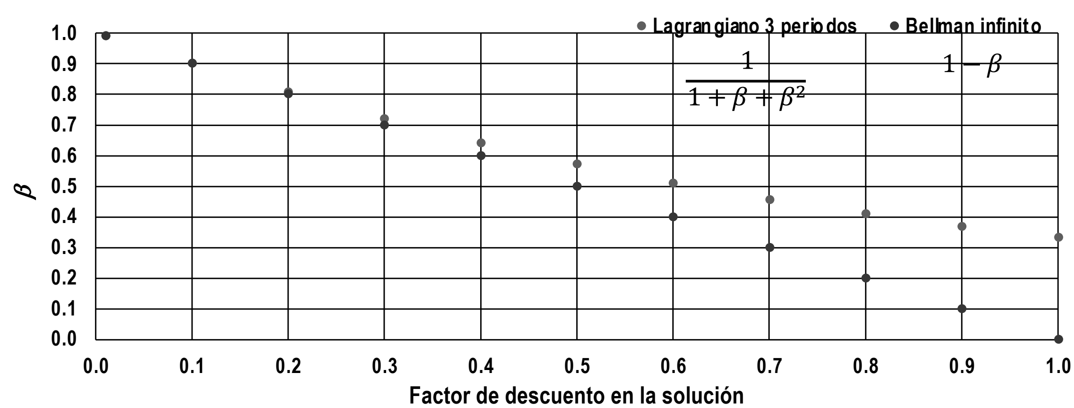
i.e. $0 < \beta < 1$

...o $\beta \in (0,1)$

12
7

127

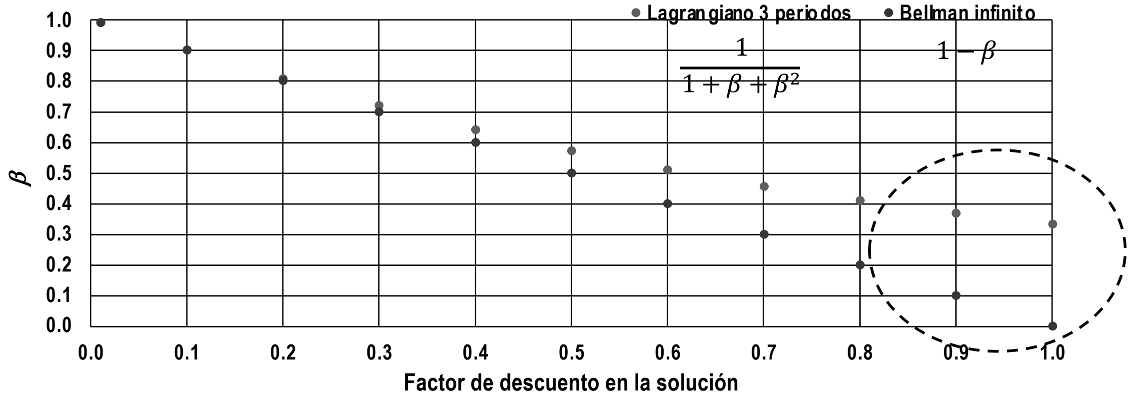
Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$



12
8

128

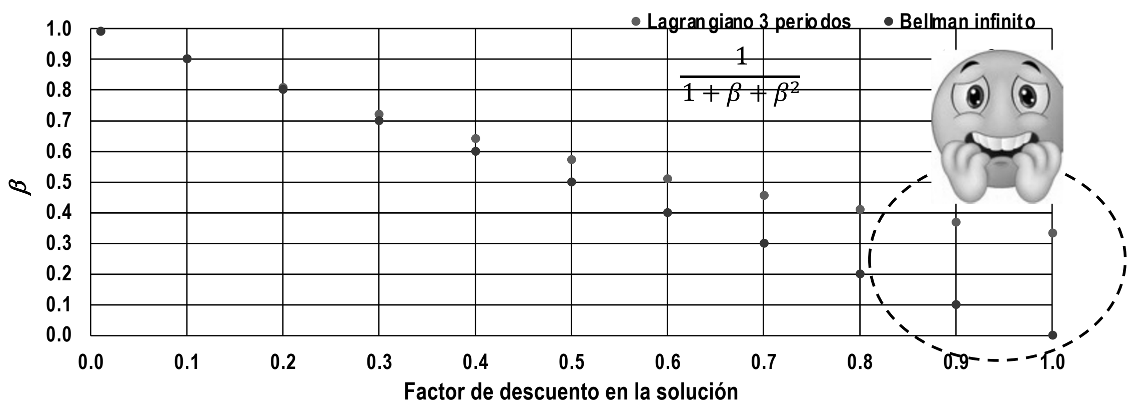
Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$



12
9

129

Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$



13
0

130

¿Qué hacemos con estas diferencias?

13
1

131

¿Qué hacemos con estas diferencias?

Federal Reserve Bank of Minneapolis
Quarterly Review Fall 1986

Theory Ahead of Business Cycle Measurement*

Edward C. Prescott
Adviser
Research Department
Federal Reserve Bank of Minneapolis
and Professor of Economics
University of Minnesota

This leaves β and ϕ still to be determined.

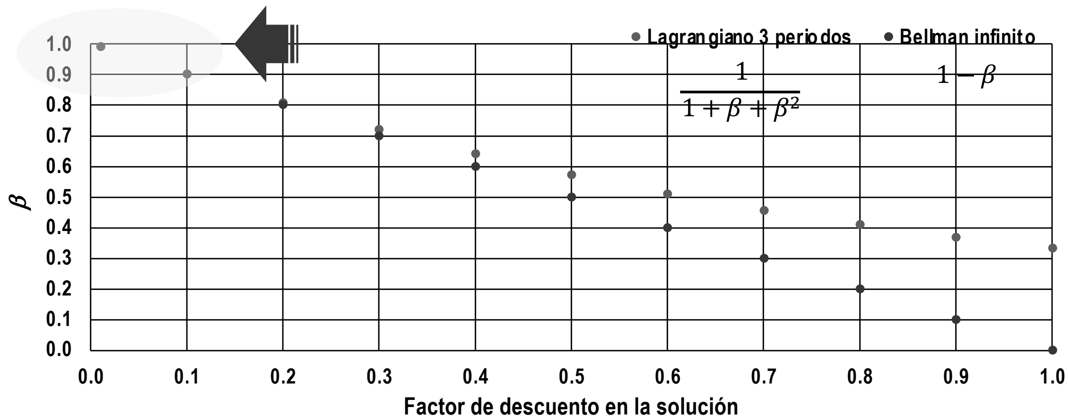
Hansen (1985b) has found that growing economies—that is, those with z_t having a multiplicative, geometrically growing factor $(1+\lambda)^t$ with $\lambda > 0$—fluctuate in essentially the same way as economies for which $\lambda = 0$. This justifies considering only the case $\lambda = 0$. If $\lambda = 0$, then the average interest rate approximately equals the subjective time discount rate.[3] Therefore, we set β equal to 0.96 per year or 0.99 per quarter.

Fuente: **Prescott, Edward C.** "Theory ahead of business cycle measurement". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10, Fall 1986, pp- 9-22 (https://www.minneapolisfed.org/research/quarterly-review/theory-ahead-of-business-cycle-measurement)

13
2

132

Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$

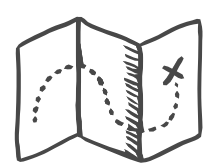


13
3

133

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

13
4

134

El problema del agente representativo

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$, para toda t

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t, con un choque estocástico η_t

135

135

Regresamos a al agente representativo que solo vive tres periodos

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$, para $t = 1, 2\ y\ 3$

$$A_4 \geq 0$$

136

136

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov*.

137

137

Definamos el choque estocástico η_t

- La mayoría de los modelos macroeconómicos dinámicos y estocásticos, utiliza dos herramientas clave: (1) Programación Dinámica; y (2) choques estocásticos tipo 'Cadena de Márkov'
- *Cadena de Márkov*: Es una secuencia de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente, pero es independiente de la historia de dicha variable

Andréi Márkov
(1856 – 1922)

Fuente: Imagen de Andréi Márkov (https://es.wikipedia.org/wiki/Andréi_Márkov)

138

138

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov.*

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica η_t se denotan con la variable e_i, definida por tres estados ($i = 1, 2, 3$):

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{estado 'bueno'} \end{cases}$$

13
9

139

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov.*

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica η_t se denotan con la variable e_i, definida por tres estados ($i = 1, 2, 3$):

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{estado 'bueno'} \end{cases}$$

(2) El agente representativo tiene un *nivel de productividad* 'promedio' *al nacer*, es decir, $\eta_1 = e_2$ y de hecho, toma el valor de 1, *i.e.* $e_2 = 1$;

14
0

140

Definamos el choque estocástico η_t

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \mathrm{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

14
1

141

Definamos el choque estocástico η_t

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \mathrm{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* P entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

14
2

142

Definamos el choque estocástico η_t

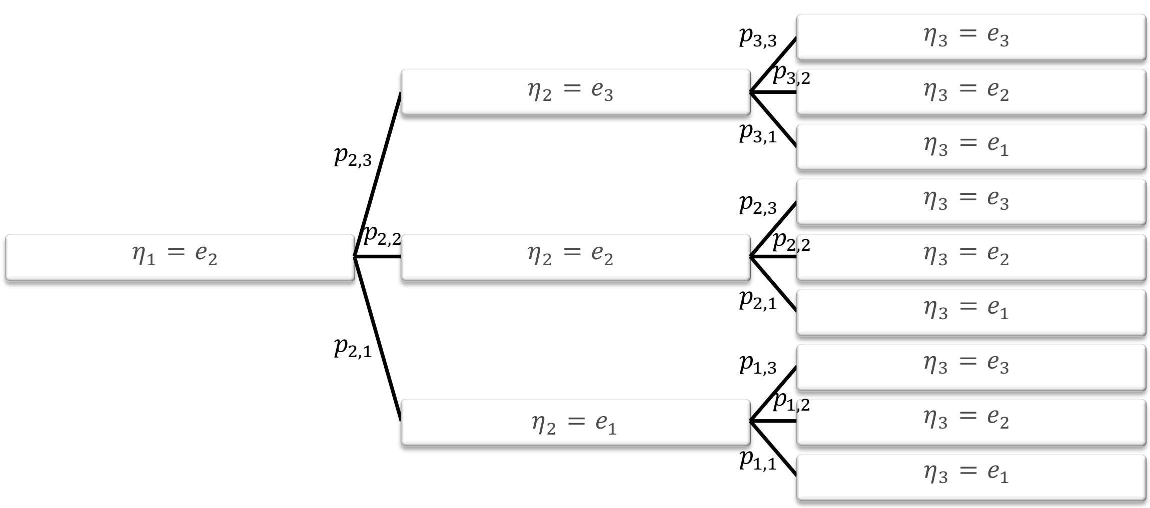
(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \text{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* P entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

...en donde $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, *e.g.* $p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} = 1$

Definamos el choque estocástico η_t



Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

14
5

145

Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

14
6

146

Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

Cabe recordar que $\pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{1,3} = 1$

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

14
9

149

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

Debido a que al nacer, el agente representativo tiene un nivel de productividad dado, *i.e.* $\eta_1 = e_2 = 1$, la matriz de probabilidad no condicional π_1 es:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

15
0

150

Definamos el choque estocástico η_t

(6) …

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

15
1

151

Definamos el choque estocástico η_t

(6) …

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

15
2

152

Definamos el choque estocástico η_t

(6) ...

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}]_{1\times 3} = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}]_{1\times 3} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

15
3

153

Definamos el choque estocástico η_t

(6) ... $\pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

15
4

154

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix}\pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{bmatrix}$$

15
5

155

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix}\pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}\pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3}\\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3}\\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3}\end{bmatrix}$$

15
6

156

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

157

157

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$,

158

158

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \end{bmatrix}$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

15
9

159

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \end{bmatrix}$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{2,1} & p_{2,2} & 1 - p_{2,1} - p_{2,2} \end{bmatrix}$$

16
0

160

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$[\pi_{3,1} \quad \pi_{3,2} \quad \pi_{3,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

Para visualizar mejor la multiplicación, mejor vemos de manera transpuesta:

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

16
1

161

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

Simplificando (y ordenando):

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}(p_{1,1} + p_{2,2}) + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{1,2}p_{2,1} + p_{2,2}^2 + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{1,3}p_{2,1} + p_{2,3}(p_{2,2} + p_{3,3}) \end{bmatrix}'$$

16
2

162

Definamos el choque estocástico η_t

(6) …

La interpretación de $\pi_{3,j}$ es la probabilidad que le asigna el agente representativo en $t = 1$ a estar en el estado j en el periodo $t = 3$

16
3

163

Así, regresamos al problema de optimización del agente representativo

- Iniciemos con el método 'tradicional' y luego procedemos a resolverlo con *Programación Dinámica*

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

- Método 'tradicional': Debido a que es un problema que ya conocemos y en el que podemos sustituir la restricción –despejando C_t-, en la función objetivo, no es necesario resolverlo con el método de Lagrange

16
4

164

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

16
5

165

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada...

16
6

166

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0 \right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t = 1$ $\quad \beta^0 U(C_1) \quad\quad C_1 = (1+r_1)\, A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

16
7

167

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0 \right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t = 1$ $\quad \overset{1}{\beta^0} U(C_1) \quad\quad C_1 = (1+r_1)\, A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

16
8

168

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada...

$t = 1$ $\quad \beta^{0} U(C_1)$ $\quad C_1 = (1+r_1)\, A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

1

$t = 2$ $\quad \beta^{1}\, U(C_2)$ $\quad C_2 = (1+r_2)\, A_2 + \eta_2 w_2 - A_3$

16
9

169

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada...

$t = 1$ $\quad \beta^{0} U(C_1)$ $\quad C_1 = (1+r_1)\, A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

1

$t = 2$ $\quad \beta^{1} U(C_2)$ $\quad C_2 = (1+r_2)\, A_2 + \eta_2 w_2 - A_3$

17
0

170

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$	$\overset{1}{\beta^{0}}U(C_1)$	$C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$
$t=2$	$\beta^{1}U(C_2)$	$C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$
$t=3$	$\beta^{2}U(C_3)$	$C_3=(1+r_3)\,A_3+\eta_3 w_3-A_4$

171

171

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$	$\overset{1}{\beta^{0}}U(C_1)$	$C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$
$t=2$	$\beta^{1}U(C_2)$	$C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$
$t=3$	$\beta^{2}U(C_3)$	$C_3=(1+r_3)\,A_3+\eta_3 w_3-A_4$

En donde el agente representativo tiene 'visión perfecta' *('perfect foresight'* en cuanto a las tasas de interés y al salario (*i.e.* no hay agregación de incertidumbre) y conoce las características del proceso estocástico

172

172

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

17
3

173

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

17
4

174

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - \, A_2]$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - \, A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - \, A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - \, A_3] \end{cases}$$

17
5

175

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - \, A_2]$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - \, A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - \, A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - \, A_3] \end{cases}$$

$$t = 3 \qquad \beta^2 \begin{cases} \pi_{3,1} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - \, A_4] \\ \pi_{3,2} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - \, A_4] \\ \pi_{3,3} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - \, A_4] \end{cases}$$

17
6

176

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

17
7

177

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$E_1[\Lambda_1] = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \cdots$$

17
8

178

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} + \cdots
\end{aligned}
$$

17
9

179

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\}
\end{aligned}
$$

18
0

180

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

¿Ahora qué hacemos?

18
1

181

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

¿Ahora qué hacemos?

Las variables de decisión ahora son A_2, A_3 y A_4

18
2

182

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

18
3

183

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0$$

18
4

184

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$E_1[\Lambda_1] \\ = U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ + \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ + \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$$

185

185

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$E_1[\Lambda_1] \\ = U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ + \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ + \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0$$

186

186

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,2} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} = 0$$

18
7

187

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,2} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U'[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} = 0$$

18
8

188

Condiciones de primer orden:

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 -\ A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 -$
$A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 -\ A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 -\ A_3]\} = 0$

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 -\ A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 -$
$A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 -\ A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 -$
$A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 -\ A_4] + \pi_{3,3}U'[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 -\ A_4]\} = 0$

Debido a que ya sabemos que $A_4^* = 0$, entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas (A_2 y A_3) … Tal vez solo utilizando la función de utilidad explícita, $\ln C_t$, podríamos obtener las soluciones óptimas explícitas para A_2^* y A_3^* y sustituyéndolas, obtener C_1^* , C_2^* y C_3^*

18
9

189

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita

19
0

190

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*

19
1

191

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*
- De manera similar como lo hicimos en el problema de optimización de tres periodos, en esta caso vamos a empezar en $t = 3$, luego en $t = 2$ y por último en $t = 1$

19
2

192

Muchas gracias!

19
3

193

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

194