Macroeconomía Dinámica

EC3031 (CEM)

CLASE 10

1

RECESO

Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2


Nuestra agenda de hoy
Comentarios sobre las lecturas
Programación Dinámica – Benveniste-Scheinkman y modelos estocásticos
Tarea
3

3


Nuestra agenda de hoy
Programación Dinámica – Benveniste-Scheinkman y modelos estocásticos
Tarea
4

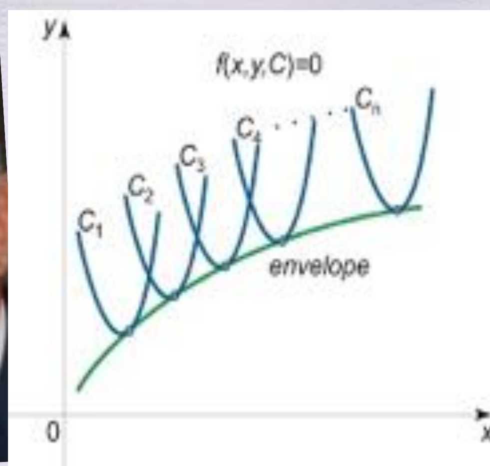
4

Nuestra agenda de hoy

- Comentarios sobre las lecturas
- **Programación Dinámica – Benveniste-Scheinkman y modelos estocásticos**
- Tarea

5

5



Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

Teorema de la Envolvente Dinámico

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

6

6

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

7

7

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

8

8

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros
- Larry Benveniste y Jose Scheinkman demostraron que hay una aplicación del 'Teorema de la Envolvente' para los modelos de optimización dinámica

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

9

9

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

10

10

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

11

11

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

Entonces:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

12

12

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

13

13

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

Vamos a factorizar $\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}$ y a utilizar la condición de primer orden $U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$, para probar que:

$V_2'(a) = (1+r_2)\, U'\left[\widehat{C_2}(a)\right]$

14

14

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} \right]$$

15

15

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a} \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta \frac{\partial V_3}{\partial a} \left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} \right]$$

16

16

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

17

17

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

18

18

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right) \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial V_3}{\partial a}$$

19

19

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right) \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2) \frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

20

20

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

21

21

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

22

22

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

23

23

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

24

24

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

25

25

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Aquí se muestra la relación que existe entre la función valor y la función de utilidad

26

26

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

27

27

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

28

28

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

29

29

Digresión: Benveniste-Scheinkman
Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

30

30

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$

Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

31

31

Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

32

32

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 33

33

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\,A_t + w_t - C_t$, $\forall t$

Lawrence M. Benveniste (¿? - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Jose A. Scheinkman (1948 - …)

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527) 34

34

Lawrence M. Benveniste
(¿? - …)

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\,A_t + w_t - C_t\,, \forall t,$ entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\,A_t$

Jose A. Scheinkman
(1948 - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

35

35

Lawrence M. Benveniste
(¿? - …)

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Generalizando para toda t

$$\frac{\partial V_t}{\partial a} = (1 + r_t)\,\frac{\partial U}{\partial a}$$

Cabe señalar que debido a que la restricción es $A_{t+1} = (1 + r_t)\,A_t + w_t - C_t\,, \forall t,$ entonces la 'función de transformación' de los activos es $f(A_t) = (1 + r_t)\,A_t$, por lo que la fórmula queda:

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Jose A. Scheinkman
(1948 - …)

Fórmula Benveniste-Scheinkman

Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

36

36

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

37

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \big| (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$$

38

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$

(2) Sustituir restricción en la función objetivo $\quad V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$

39

39

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t $\quad V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$

(2) Sustituir restricción en la función objetivo $\quad V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$

(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC) $\quad V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$

40

40

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \mid (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$
(2) Sustituir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c]\}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$

41

41

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \mid (1 + r_t)a + w_t = c + a^+\}$
(2) Sustituir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c]\}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$
(5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler	$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$

42

42

En este caso en particular $f(a) = (1 + r_t)a$

Resumen: Fórmula Benveniste-Scheinkman

$$V_t{}'(a) = f'(a)U'(a)$$

Ejemplo:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t \text{ s.a. } A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } A_4 \geq 0$$

(1) Proponer ecuación de Bellman para t	$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) \mid (1 + r_t)a + w_t = c + a^+ \}$
(2) Sustitutir restricción en la función objetivo	$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)a + w_t - c] \}$
(3) Obtener las Condiciones de Primer Orden (FOC)	$V_t'(a) = 0 \iff U'(c) = \beta V_{t+1}{}'(a^+)$
(4) Utilizar la fórmula de Benveniste-Scheinkman (BS) y encontrar $V_{t+1}{}'(a^+)$	$V_t{}'(a) = (1 + r_t)U'(c)$ Entonces $V_{t+1}{}'(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$
(5) Sustituir BS en las FOC para obtener la Ecuación de Euler	$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$ o $\frac{U'(c)}{U'(c^+)} = \beta(1 + r_{t+1})$

43

43

Macroeconomía Dinámica

EC3024.1

Modelo de Ramsey-Cass-Koopmans

(en tiempo discreto)

44

Frank P. Ramsey
(1903 - 1930)

David Cass
(1937 - 2008)

Tjalling Koopmans
(1910 - 1985)

Fuente: Imágenes de Ramsey, Cass y Koopmans y de las banderas (Wikipedia);

45

45

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeto a:

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t$$

46

46

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t)$$

Sujeto a:

$$k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t$$

En donde c_t es el consumo en el tiempo t, k es el capital en el tiempo t, β es un factor de descuento y δ es el factor de depreciación del capital.

47

47

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t\}$$

48

48

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \}$$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_t(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \left\{u(c_t) + \beta V_{t+1}(k_{t+1}) \middle| k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t\right\}$$

49

49

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Podemos resolverlo en el contexto de *Programación Dinámica*, obteniendo las condiciones de primer orden de la *Ecuación de Bellman* y utilizando la *Fórmula de Benveniste-Scheinkman*:

$$\max_{c_t, k_t} \sum_{t=0}^{\infty} \{\beta^t u(c_t) | k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t \}$$

Proponemos la ecuación de Bellman:

$$V_t(k_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \left\{u(c_t) + \beta V_{t+1}(k_{t+1}) \middle| k_{t+1} = f(k_t) + (1-\delta)k_t - c_t\right\}$$

Cambiamos la notación:

$$V_t(k) = \max_{c, k^+} \{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

50

50

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

51

51

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

52

52

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

Las condiciones de primer orden (FOC) son:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}'[f(k) + (1-\delta)k - c]$$

53

53

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

$$V_t(k) = \max_{c,k^+}\{u(c) + \beta V_{t+1}(k^+) | k^+ = f(k) + (1-\delta)k - c\}$$

Como 'ya es tradición', sustituimos la restricción en V_{t+1}:

$$V_t(k) = \max_{c}\{u(c) + \beta V_{t+1}[f(k) + (1-\delta)k - c]\}$$

Las condiciones de primer orden (FOC) son:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}'[f(k) + (1-\delta)k - c]$$

La fórmula de Benveniste-Scheinkman:

Fórmula: $V_t'(k) = \frac{\partial k^+}{\partial k} u'(c) \quad \Longleftrightarrow \quad V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$

54

54

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

55

55

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

56

56

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

Por lo que nos queda:

$$u'(c) = \beta[f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

57

57

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

Debido a que $V_t'(k) = [f'(k) + 1 - \delta]u'(c)$, podemos inducir que:

$$V_{t+1}'(k^+) = [f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Así, sustituimos $V_{t+1}'(k^+)$ en las condiciones de primer orden:

$$u'(c) = \beta V_{t+1}{}'[f(k) + (1 - \delta)k - c]$$

Por lo que nos queda:

$$u'(c) = \beta[f'(k^+) + 1 - \delta]u'(c^+)$$

Que es la Ecuación de Euler

58

58

Modelo Ramsey-Cass-Koopmans

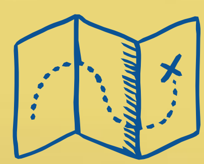
Regresando a la notación original:

$$u'(c_t) = \beta[f'(k_{t+1}) + 1 - \delta]u'(c_{t+1})$$

59

59

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

60

60

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, para toda t

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t

61

61

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, para toda t

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t

62

62

Modelo dinámico determinístico con un agente representativo inmortal

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, para toda t

$$\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

'Condición de Solvencia'. El valor presente del nivel de activos conforme el tiempo se acerca al infinito es cero. En pocas palabras, el agente representativo no se puede endeudar

En donde:

$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$

β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$

A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$

w_t es el salario que recibe en t

63

63

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)$ s.a. $A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t$, $\forall t$ y $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$

64

64

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + w_t - C_t\,,\ \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + w_t - C_t\,,\ \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para t -en lugar de para T-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

Problema dinámico determinístico de un agente representativo inmortal

El problema del agente representativo es:

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} \sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t) \text{ s.a. } A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + w_t - C_t \text{ , } \forall t \text{ y } \lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$$

- La naturaleza de *Programación Dinámica* es es empezar a resolver el problema en el periodo terminal y luego ir resolviendo hacia atrás
- Sin embargo, en este caso no hay periodo terminal
- Así, existen dos diferencias importantes para resolver este problema:

(1) Proponer una *Ecuación de Bellman* para t -en lugar de para T-, obtener las FOC y utilizar BS, para obtener la Ecuación de Euler; y

(2) Sustituir la Ecuación de Euler en la restricción 'para toda la vida del individuo' (utilizando la 'Condición de Solvencia')

69

69

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

70

70

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

71

71

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

72

72

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

73

73

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

74

74

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(1) Proponer Ecuación de Bellman para t:

$$V_t(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)\, a + w_t - c\}$$

(2) Substituir la restricción en la función objetivo:

$$V_t(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]\}$$

(3) Obtener FOC:

$$U'(c) = \beta V'_{t+1}[(1 + r_t)\, a + w_t - c]$$

75

75

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*:...

76

76

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

77

77

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

78

78

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

79

79

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*...

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

...y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

80

80

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(4) Utilizar la fórmula *Benveniste-Scheinkman*…

$$V'_t(a) = (1 + r_t)U'(c)$$

…y obtener $\beta V'_{t+1}$:

$$V'_{t+1}(a^+) = (1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

(5) Sustituir el resultado de BS en FOC y obtenemos la Ecuación de Euler:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^+)$$

81

81

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

82

82

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

83

83

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\,\frac{1}{c^{+}}$$

84

84

Ecuación de Bellman para t, obtener FOC y utilizar BS

(6) Como utilizamos la función de utilidad $\ln c$, entonces la Ecuación de Euler en este caso es:

$$U'(c) = \beta(1 + r_{t+1})U'(c^{+})$$

$$\frac{1}{c} = \beta(1 + r_{t+1})\frac{1}{c^{+}}$$

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

85

85

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

86

86

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

87

87

La importancia de la Ecuación de Euler

La Ecuación de Euler es muy relevante en este caso, debido a que nos permite conocer las soluciones óptimas para el consumo presente y futuro sin tener que obtener las funciones valor o las funciones de política óptima

$$c^{+} = \beta(1 + r_{t+1})c$$

o

$$C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$$

Leonhard Euler
(1707 – 1783)

Fuente: Imagen de Leonhard Euler (https://jjovel.wordpress.com/2015/12/26/leonhard-euler/)

88

88

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en la restricción 'para toda la vida' del agente representativo

89

89

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

- Para obtener las soluciones de consumo óptimo –y por lo tanto del nivel de activos-, necesitamos sustituir la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en la restricción 'para toda la vida' del agente representativo

- Pero ¿Cómo vamos a obtener esta restricción si el agente representativo es 'inmortal'?

90

90

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta T:

91

Restricción para 'toda la vida' del agente representativo inmortal

Empecemos con escribir la ecuación de acumulación de activos hasta T:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t, \forall t \left\{ \begin{array}{l} A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \\ A_{t+2} = (1 + r_{t+2})\, A_{t+1} + w_{t+1} - C_{t+1} \\ A_{t+3} = (1 + r_{t+3})\, A_{t+2} + w_{t+2} - C_{t+2} \\ \qquad\qquad \vdots \\ A_T = (1 + r_{T-1})\, A_{T-1} + w_{T-1} - C_{T-1} \end{array} \right.$$

92

Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta T se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

93

93

Ecuación de acumulación de activos

La ecuación de acumulación de activos hasta T se puede expresar así:

Valor presente de $A_T = (1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$

o

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

94

94

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

95

95

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\overset{0}{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

96

96

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\overbrace{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}}^{0} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

97

97

Ecuación de acumulación de activos

Claramente al aplicar la condición de solvencia $\lim_{T\to\infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1+r_t)} = 0$, nos queda la restricción para toda la vida del agente representativo:

$$\overbrace{\frac{A_T}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}}^{0} = (1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} - C_1 - \frac{C_2}{1+r_2} - \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} - \cdots - \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Esta es la versión hasta T de la restricción para 'toda la vida' que utilizamos cuando resolvimos el problema utilizando el Lagrangiano.

98

98

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

99

99

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1 + r_{t+1})C_t$ en:

$$(1 + r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1 + r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1 + r_3)C_2$ y así sucesivamente,...

100

100

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{C_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})}$$

Recordemos que $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$, que $C_3 = \beta(1+r_3)C_2$ y así sucesivamente,...

...en donde de manera recursiva podemos sustituir $C_2 = \beta(1+r_2)C_1$ en la expresión de C_3, *i.e.* $C_3 = \beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]$

101

101

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots = C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

102

102

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \frac{\beta(1+r_2)C_1}{1+r_2} + \frac{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]}{(1+r_2)(1+r_3)} + \frac{\beta(1+r_4)\{\beta(1+r_3)[\beta(1+r_2)C_1]\}}{(1+r_2)(1+r_3)(1+r_4)} + \cdots$$

10
3

103

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

10
4

104

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Habíamos estado usando la restricción hasta T para entenderla. Hagámosla hasta ∞

Sustituimos la Ecuación de Euler $C_{t+1} = \beta(1+r_{t+1})C_t$ en:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \frac{\beta\cancel{(1+r_2)}C_1}{\cancel{1+r_2}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}} + \frac{\beta\cancel{(1+r_4)}\{\beta\cancel{(1+r_3)}[\beta\cancel{(1+r_2)}C_1]\}}{\cancel{(1+r_2)}\cancel{(1+r_3)}\cancel{(1+r_4)}} + \cdots$$

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots + \frac{w_{T-1}}{(1+r_2)(1+r_3)\cdots(1+r_{T-1})} + \cdots =$$

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots$$

10
5

105

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^n x + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

10
6

106

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de 'toda la vida' queda:

10 7

107

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Utilizando las propiedades de las series:

Recordar que: $x + ax + a^2x + \cdots + a^{n-1}x + a^nx + \cdots = \frac{x}{1-a}$, si $|a| < 1$

Entonces, el lado derecho de la restricción de 'toda la vida' queda:

$$C_1 + \beta C_1 + \beta^2 C_1 + \beta^3 C_1 + \cdots = \frac{C_1}{1 - \beta}$$

10 8

108

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

10
9

109

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

11
0

110

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos C_1, vamos a obtener la solución de C_1^*

11
1

111

Sustituyendo la Ecuación de Euler en la restricción de 'toda la vida'

Así, la restricción de 'toda la vida' queda:

$$(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots = \frac{C_1}{1-\beta}$$

Por lo que si despejamos C_1, vamos a obtener la solución de C_1^*

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

11
2

112

Sustituyendo la solución óptima de C_1 en la restricción A_2

Y si sustituimos C_1^* en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1+r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos A_2^*:

11
3

113

Sustituyendo la solución óptima de C_1 en la restricción A_2

Y si sustituimos C_1^* en la expresión de acumulación de activos $A_2 = (1+r_1)A_1 + w_1 - C_1$, obtenemos A_2^*:

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \dots\right]$$

11
4

114

Solución óptima para el agente representativo 'inmortal'

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

11
5

115

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t=\infty$, para $t=3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} + \cdots\right]$$

11
6

116

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+ \cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+ \cdots}\right]$$

117

117

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

Si 'acotamos' la solución de $t = \infty$, para $t = 3$, queda:

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+ \cdots}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} \cancel{+ \cdots}\right]$$

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

118

118

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

11
9

119

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

12
0

120

Ejemplo con individuo que vive 3 periodos

$$C_1^* = (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)A_1 + w_1 - (1-\beta)\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

¿Son iguales a las que obtuvimos con el método de Lagrangiano?

$$C_1^* = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$A_2^* = (1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$$

121

121

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

122

122

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

Definimos que β puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

12
3

123

Beta

¿Qué valores puede tomar β?

Definimos que β puede tomar valores entre 0 y 1, excluyendo 0 y 1

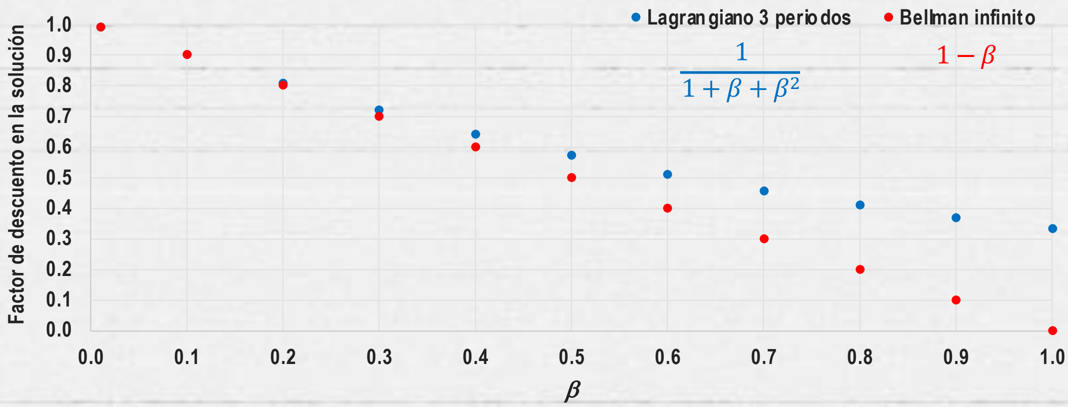
i.e. $0 < \beta < 1$

…o $\beta \in (0,1)$

12
4

124

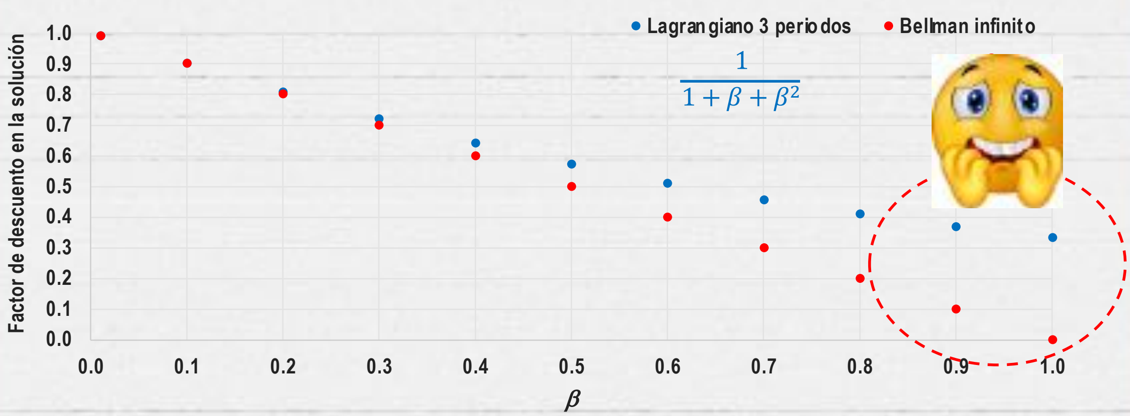
Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$



125

125

Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$



126

126

¿Qué hacemos con estas diferencias?

12
7

127

¿Qué hacemos con estas diferencias?

Theory Ahead of Business Cycle Measurement*

Edward C. Prescott
Adviser
Research Department
Federal Reserve Bank of Minneapolis
and Professor of Economics
University of Minnesota

This leaves β and ϕ still to be determined.

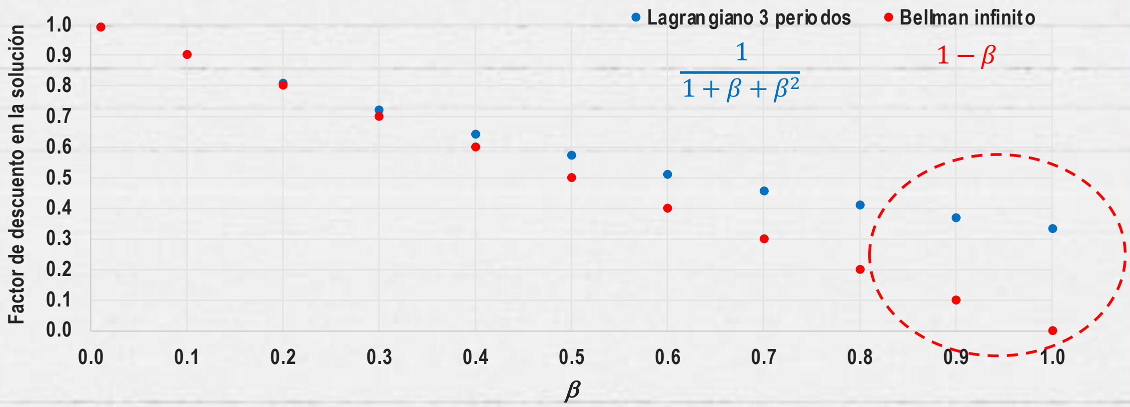
Hansen (1985b) has found that growing economies—that is, those with z_t having a multiplicative, geometrically growing factor $(1+\lambda)^t$ with $\lambda > 0$—fluctuate in essentially the same way as economies for which $\lambda = 0$. This justifies considering only the case $\lambda = 0$. If $\lambda = 0$, then the average interest rate approximately equals the subjective time discount rate.[3] Therefore, we set β equal to 0.96 per year or 0.99 per quarter.

Fuente: **Prescott, Edward C.** "Theory ahead of business cycle measurement". *Federal Reserve Bank of Minneapolis Quarterly Review* 10, Fall 1986, pp- 9-22 (https://www.minneapolisfed.org/research/quarterly-review/theory-ahead-of-business-cycle-measurement)

12
8

128

Comportamiento del factor de descuento en las diferentes soluciones para $t = 3$

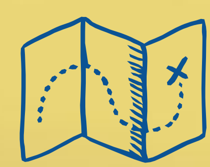


129

129

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

130

130

El problema del agente representativo

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{\infty}\{A_t\}_{t=2}^{\infty}} E\left[\sum_{t=1}^{\infty} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$, para toda t

$$\lim_{T \to \infty} \frac{A_T}{\prod_{t=2}^{T-1}(1 + r_t)} = 0$$

En donde:
$U(C_t)$ es una función de utilidad a partir del consumo en t o C_t, $U'(C_t) > 0$ y $U''(C_t) < 0$
β es un factor de descuento, tal que $0 < \beta < 1$
A_t son los activos que tiene en t, $A_1 \geq 0$
w_t es el salario que recibe en t, con un choque estocástico η_t

13
1

131

Regresamos a al agente representativo que solo vive tres periodos

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)\right]$$

Sujeto a:

$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t$, para $t = 1, 2\ y\ 3$

$$A_4 \geq 0$$

13
2

132

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov*.

13
3

133

Definamos el choque estocástico η_t

- La mayoría de los modelos macroeconómicos dinámicos y estocásticos, utiliza dos herramientas clave: (1) Programación Dinámica; y (2) choques estocásticos tipo 'Cadena de Márkov'
- *Cadena de Márkov*: Es una secuencia de valores de una variable aleatoria en las que el valor de la variable en el futuro depende del valor de la variable en el presente, pero es independiente de la historia de dicha variable

Andréi Márkov
(1856 – 1922)

Fuente: Imagen de Andréi Márkov (https://es.wikipedia.org/wiki/Andréi_Márkov)

13
4

134

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov.*

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica η_t se denotan con la variable e_i, definida por tres estados ($i = 1, 2, 3$):

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{estado 'bueno'} \end{cases}$$

135

135

Definamos el choque estocástico η_t

En la realidad, el ingreso futuro siempre enfrenta riesgos. Así, se incorpora un choque η_t a la productividad laboral que sigue un *Proceso de Markov.*

(1) Los *valores realizados u observados* de la variable estocástica η_t se denotan con la variable e_i, definida por tres estados ($i = 1, 2, 3$):

$$\eta_t \in \begin{cases} e_1 \rightarrow \text{estado 'malo'} \\ e_2 \rightarrow \text{estado 'promedio'} \\ e_3 \rightarrow \text{estado 'bueno'} \end{cases}$$

(2) El agente representativo tiene un *nivel de productividad* 'promedio' *al nacer*, es decir, $\eta_1 = e_2$ y de hecho, toma el valor de 1, *i.e.* $e_2 = 1$;

136

136

Definamos el choque estocástico η_t

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \mathrm{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

13
7

137

Definamos el choque estocástico η_t

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \mathrm{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* P entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

13
8

138

Definamos el choque estocástico η_t

(3) $p_{i,j}$ es la *probabilidad de 'transición'*. Es decir, la probabilidad de que el estado de la productividad sea e_j en el siguiente periodo $t+1$, dado que en t el estado fue e_i , *i.e.* $p_{i,j} = \text{Prob}(\eta_{t+1} = e_j | \eta_t = e_i)$ en donde $0 < p_{i,j} < 1$;

(4) Entonces, la *matriz de probabilidades de transición* P entre los tres estados es:

$$P = \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

...en donde $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, *e.g.* $p_{1,1} + p_{1,2} + p_{1,3} = 1$

13
9

139

Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

14
0

140

Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

14
1

141

Definamos el choque estocástico η_t

(5) Además de las probabilidades de transición para los diferentes estados, necesitamos las probabilidades de ocurrencia de los estados en cada momento en el tiempo, es decir, las *probabilidades no condicionales,* denotadas por los vectores π_t:

$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix}$, en donde $\pi_{1,2}$, por ejemplo, es la probabilidad de que el estado que se observe sea el 2 (o 'promedio') en el tiempo $t = 1$

Cabe recordar que $\pi_{1,1} + \pi_{1,2} + \pi_{1,3} = 1$

14
2

142

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

Definamos el choque estocástico η_t

(6) Ahora hay que relacionar las matrices de probabilidad de transición, con las de probabilidad no condicional:

La matriz de probabilidad no condicional en $t = 1$ es muy sencilla:

Debido a que al nacer, el agente representativo tiene un nivel de productividad dado, *i.e.* $\eta_1 = e_2 = 1$, la matriz de probabilidad no condicional π_1 es:

$$\pi_1 = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} \\ \pi_{1,2} \\ \pi_{1,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

145

145

Definamos el choque estocástico η_t

(6) ...

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

146

146

Definamos el choque estocástico η_t

(6) ...

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

14
7

147

Definamos el choque estocástico η_t

(6) ...

No obstante lo anterior, hay que obtener π_2 y π_3:

$\pi_2' = \pi_1' P$ y $\pi_3' = \pi_2' P$

Así, $\pi_2' = \pi_1' P$:

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}]_{1\times 3} = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}]_{1\times 3} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

14
8

148

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

14
9

149

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi_{1,1} & \pi_{1,2} & \pi_{1,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \pi_{2,1} & \pi_{2,2} & \pi_{2,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

15
0

150

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

15
1

151

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

15
2

152

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$,

15
3

153

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

15
4

154

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_2' = \pi_1' P$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [\pi_{1,1} \quad \pi_{1,2} \quad \pi_{1,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [0 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}]$$

Debido a que $\sum_{j=1}^{3} p_{i,j} = 1$, entonces $p_{2,1} + p_{2,2} + p_{2,3} = 1$

$$[\pi_{2,1} \quad \pi_{2,2} \quad \pi_{2,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad 1 - p_{2,1} - p_{2,2}]$$

155

155

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$[\pi_{3,1} \quad \pi_{3,2} \quad \pi_{3,3}] = [p_{2,1} \quad p_{2,2} \quad p_{2,3}] \begin{bmatrix} p_{1,1} & p_{1,2} & p_{1,3} \\ p_{2,1} & p_{2,2} & p_{2,3} \\ p_{3,1} & p_{3,2} & p_{3,3} \end{bmatrix}$$

Para visualizar mejor la multiplicación, mejor vemos de manera transpuesta:

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

156

156

Definamos el choque estocástico η_t

(6) $\ldots \pi_3' = \pi_2' P$

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}p_{1,1} + p_{2,2}p_{2,1} + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{2,1}p_{1,2} + p_{2,2}p_{2,2} + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{2,1}p_{1,3} + p_{2,2}p_{2,3} + p_{2,3}p_{3,3} \end{bmatrix}'$$

Simplificando (y ordenando):

$$\begin{bmatrix} \pi_{3,1} \\ \pi_{3,2} \\ \pi_{3,3} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} p_{2,1}(p_{1,1} + p_{2,2}) + p_{2,3}p_{3,1} \\ p_{1,2}p_{2,1} + p_{2,2}^2 + p_{2,3}p_{3,2} \\ p_{1,3}p_{2,1} + p_{2,3}(p_{2,2} + p_{3,3}) \end{bmatrix}'$$

15
7

157

Definamos el choque estocástico η_t

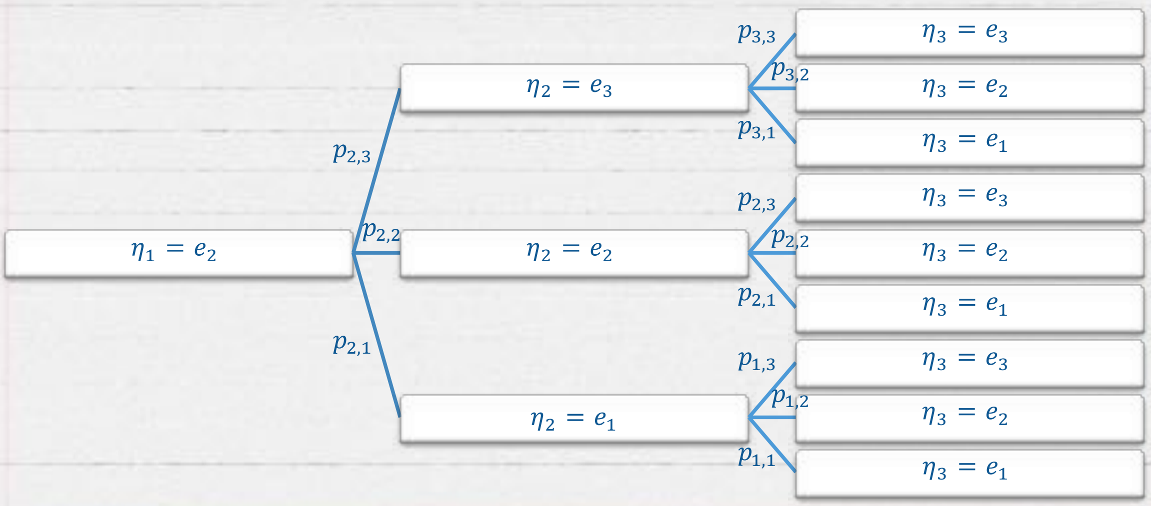
(6) …

La interpretación de $\pi_{3,j}$ es la probabilidad que le asigna el agente representativo en $t = 1$ a estar en el estado j en el periodo $t = 3$

15
8

158

Definamos el choque estocástico η_t



159

159

Así, regresamos al problema de optimización del agente representativo

- Iniciemos con el método 'tradicional' y luego procedemos a resolverlo con *Programación Dinámica*

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\, A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

- Método 'tradicional': Debido a que es un problema que ya conocemos y en el que podemos sustituir la restricción –despejando C_t-, en la función objetivo, no es necesario resolverlo con el método de Lagrange

160

160

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

16
1

161

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

16
2

162

Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)\,\middle|A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t = 1 \qquad \beta^{0} U(C_1) \qquad\qquad C_1 = (1+r_1)\,A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

163

163

Método ‘tradicional’

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t)\,\middle|A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t = 1 \qquad \beta^{\overset{1}{0}} U(C_1) \qquad\qquad C_1 = (1+r_1)\,A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$

164

164

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$	$\overset{1}{\beta^0} U(C_1)$	$C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$
$t=2$	$\beta^1\,U(C_2)$	$C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$

16
5

165

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3}\beta^{t-1}U(C_t)\,\middle|A_{t+1}=(1+r_t)\,A_t+\eta_t w_t-C_t, A_4\geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada…

$t=1$	$\overset{1}{\beta^0} U(C_1)$	$C_1=(1+r_1)\,A_1+\eta_1 w_1-A_2$
$t=2$	$\beta^1\,U(C_2)$	$C_2=(1+r_2)\,A_2+\eta_2 w_2-A_3$

16
6

166

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada...

1

$t=1$	$\beta^0 U(C_1)$	$C_1 = (1+r_1)\,A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$
$t=2$	$\beta^1 U(C_2)$	$C_2 = (1+r_2)\,A_2 + \eta_2 w_2 - A_3$
$t=3$	$\beta^2 U(C_3)$	$C_3 = (1+r_3)\,A_3 + \eta_3 w_3 - A_4$

16
7

167

Método 'tradicional'

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} E\left[\sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} U(C_t) \,\middle|\, A_{t+1} = (1+r_t)\,A_t + \eta_t w_t - C_t, A_4 \geq 0\right]$$

Concentrémonos en la utilidad esperada...

1

$t=1$	$\beta^0 U(C_1)$	$C_1 = (1+r_1)\,A_1 + \eta_1 w_1 - A_2$
$t=2$	$\beta^1 U(C_2)$	$C_2 = (1+r_2)\,A_2 + \eta_2 w_2 - A_3$
$t=3$	$\beta^2 U(C_3)$	$C_3 = (1+r_3)\,A_3 + \eta_3 w_3 - A_4$

En donde el agente representativo tiene 'visión perfecta' *('perfect foresight'* en cuanto a las tasas de interés y al salario (*i.e.* no hay agregación de incertidumbre) y conoce las características del proceso estocástico

16
8

168

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

16
9

169

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

17
0

170

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3] \end{cases}$$

17
1

171

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Incorporemos las restricciones de cada t en la función de utilidad de dicho momento en el tiempo y propongamos la utilidad esperada para cada t :

$t = 1 \qquad U(C_1) = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2]$

$$t = 2 \qquad \beta \begin{cases} \pi_{2,1} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,2} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\ \pi_{2,3} & U(C_2) = U[(1 + r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - A_3] \end{cases}$$

$$t = 3 \qquad \beta^2 \begin{cases} \pi_{3,1} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] \\ \pi_{3,2} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\ \pi_{3,3} & U(C_3) = U[(1 + r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - A_4] \end{cases}$$

17
2

172

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

17
3

173

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$E_1[\Lambda_1] = U[(1 + r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \cdots$$

17
4

174

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$E_1[\Lambda_1]$$
$$= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2]$$
$$+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3]$$
$$+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} + \cdots$$

17
5

175

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$E_1[\Lambda_1]$$
$$= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2]$$
$$+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3]$$
$$+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\}$$
$$+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4]$$
$$+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}$$

17
6

176

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

¿Ahora qué hacemos?

17
7

177

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Así, la utilidad esperada que ya incorpora las restricciones queda:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] \\
&+ \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] \\
&+ \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\}
\end{aligned}
$$

¿Ahora qué hacemos?

Las variables de decisión ahora son A_2, A_3 y A_4

17
8

178

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\}
\end{aligned}
$$

17
9

179

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$
\begin{aligned}
&E_1[\Lambda_1] \\
&= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - \,A_2] \\
&+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - \,A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - \,A_3]\} \\
&+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - \,A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - \,A_4]\}
\end{aligned}
$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0$$

18
0

180

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$\begin{aligned} &E_1[\Lambda_1] \\ &= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ &+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ &+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} = 0$$

18
1

181

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$\begin{aligned} &E_1[\Lambda_1] \\ &= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2 w_1 - A_2] \\ &+ \beta\{\pi_{2,1} U[(1+r_2)\,A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U[(1+r_2)\,A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U[(1+r_2)\,A_2 + e_3 w_2 - A_3]\} \\ &+ \beta^2\{\pi_{3,1} U[(1+r_3)\,A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_2 w_3 - A_4] + \pi_{3,3} U[(1+r_3)\,A_3 + e_3 w_3 - A_4]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0$$

18
2

182

Utilidad esperada $\sum_{i=1}^{3} p_i U(\cdot)$

Podemos derivar la utilidad esperada con respecto a A_2, A_3 y A_4 , igualar a cero y resolver las ecuaciones para obtener C_1^*, C_2^* y C_3^* y A_2^*, A_3^* y A_4^*:

$$\begin{aligned} &E_1[\Lambda_1] \\ &= U[(1+r_1)\,A_1 + e_2w_1 - A_2] \\ &+ \beta\{\pi_{2,1}U[(1+r_2)\,A_2 + e_1w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U[(1+r_2)\,A_2 + e_2w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U[(1+r_2)\,A_2 + e_3w_2 - A_3]\} \\ &+ \beta^2\{\pi_{3,1}U[(1+r_3)\,A_3 + e_1w_3 - A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_2w_3 - A_4] + \pi_{3,3}U[(1+r_3)\,A_3 + e_3w_3 - A_4]\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_1w_3 - A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_2w_3 - A_4] + \pi_{3,3}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_3w_3 - A_4]\} = 0$$

18
3

183

Condiciones de primer orden:

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\,A_1 + e_2w_1 - A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3w_2 - A_3]\} = 0$$

$$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_1w_2 - A_3] + \pi_{2,2}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_2w_2 - A_3] + \pi_{2,3}U'[(1+r_2)\,A_2 + e_3w_2 - A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_1w_3 - A_4] + \pi_{3,2}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_2w_3 - A_4] + \pi_{3,3}U'[(1+r_3)\,A_3 + e_3w_3 - A_4]\} = 0$$

18
4

184

Condiciones de primer orden:

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_2} = 0 \Leftrightarrow -U'[(1+r_1)\, A_1 + e_2 w_1 - \ A_2] + \beta(1+r_2)\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - \ A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - \ A_3]\} = 0$

$\frac{\partial E_1[\Lambda_1]}{\partial A_3} = 0 \Leftrightarrow -\beta\{\pi_{2,1} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_1 w_2 - \ A_3] + \pi_{2,2} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_2 w_2 - A_3] + \pi_{2,3} U'[(1+r_2)\, A_2 + e_3 w_2 - \ A_3]\} + \beta^2(1+r_3)\{\pi_{3,1} U'[(1+r_3)\, A_3 + e_1 w_3 - A_4] + \pi_{3,2} U'[(1+r_3)\, A_3 + e_2 w_3 - \ A_4] + \pi_{3,3} U'[(1+r_3)\, A_3 + e_3 w_3 - \ A_4]\} = 0$

Debido a que ya sabemos que $A_4^* = 0$, entonces tenemos un sistema de dos ecuaciones, con dos incógnitas (A_2 y A_3) … Tal vez solo utilizando la función de utilidad explícita, $\ln C_t$, podríamos obtener las soluciones óptimas explícitas para A_2^* y A_3^* y sustituyéndolas, obtener C_1^* , C_2^* y C_3^*

185

185

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita

186

186

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*

18
7

187

Condiciones de primer orden:

- No obstante lo anterior, no hay solución explícita
- Entonces, para esto es muy relevante utilizar *Programación Dinámica*
- De manera similar como lo hicimos en el problema de optimización de tres periodos, en esta caso vamos a empezar en $t = 3$, luego en $t = 2$ y por último en $t = 1$

18
8

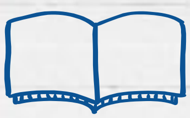
188

Nuestra agenda de hoy

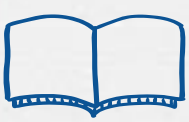
Comentarios sobre las lecturas → Programación Dinámica – Benveniste-Scheinkman y modelos estocásticos → **Tarea**

18
9

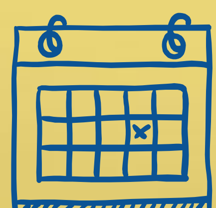
189



(1) Leer mi columna en *El Financiero* "¿Podría Banxico acelerar el ciclo de alza de tasas de interés?" (26-oct-21)
1 página
https://gabrielcasillas.mx/columna-1



(2) Leer mi columna en *El Financiero* "Banxico: ¿Gradualidad o consistencia con el nuevo regimen?" (2-nov-21)
1 página
https://gabrielcasillas.mx/columna-1



19
0

190

(3) Leer el capítulo 6 “Coyuntura macroeconómica, ciclos y mercados” del volumen I del libro “Lecturas en lo que indican los indicadores” (Heath ed, 2021)

19 páginas

https://gabrielcasillas.mx/otras-publicaciones

19
1

191

(4) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana (en “Global: Flashes recientes”)

1 página

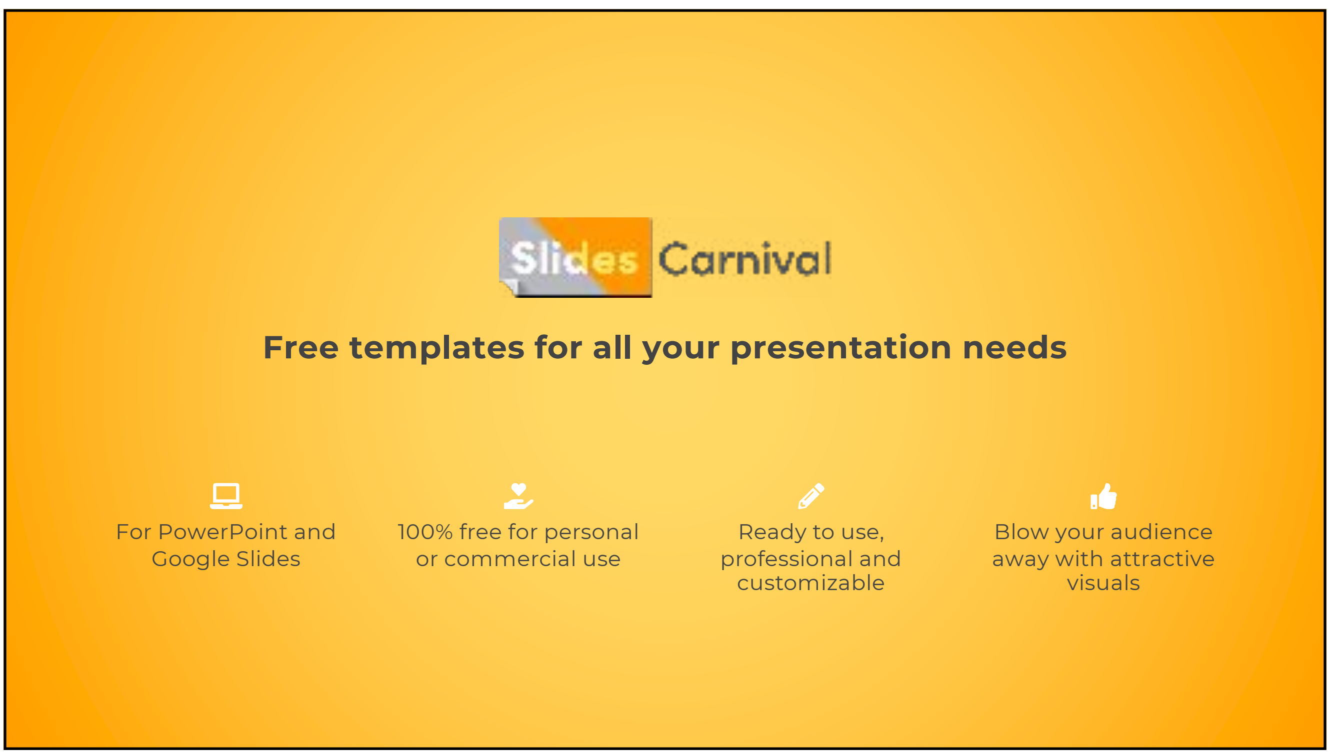
https://www.banorte.com/wps/portal/ixe-xima/Home/inicio/!ut/p/z1/hY7LDoIwEEW_hQVbOkJBdNdqwjPiI0bsxoDBqimUFITfFx8bEx-zu3PPmQyiKEG0TvuSpV0p6pSP-UCto6tPbM9wIIwXoQHEX5u7DV65OAK0_wfQsYYvQ-4-fSCOSzw8jQBi7OpA7GWAt-ZMB996AT9uBIqyLrLnu6TODJshKvNzLnOpXeW4LrquaecqqD

19
2

192


Muchas gracias!
193

193


SlidesCarnival
Free templates for all your presentation needs
For PowerPoint and Google Slides
100% free for personal or commercial use
Ready to use, professional and customizable
Blow your audience away with attractive visuals

194