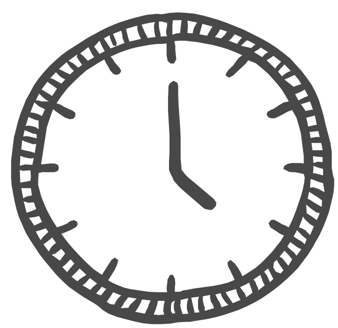
Macroeconomía Dinámica

EC3024.1 (CCM)

CLASE 14

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

- Revisión de datos y eventos macro
- Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
- Examen Final *Take-Home*

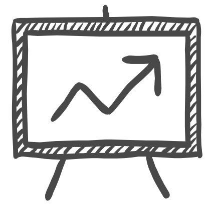
3

Nuestra agenda de hoy

- **Revisión de datos y eventos macro**
- Optimización de un modelo determinístico de tres periodos
- Examen Final *Take-Home*

4

PIB de México de 1T21



ESTIMACIÓN OPORTUNA DEL PRODUCTO INTERNO BRUTO DURANTE EL PRIMER TRIMESTRE DE 2021
CIFRAS DESESTACIONALIZADAS POR ACTIVIDADES ECONÓMICAS

Concepto	Variación % real respecto al trimestre previo	Variación % real respecto a igual trimestre de 2020
PIB Total	**0.4**	**(-) 2.9**
Actividades Primarias	(-) 1.3	2.8
Actividades Secundarias	0.0	(-) 2.3
Actividades Terciarias	0.7	(-) 3.6

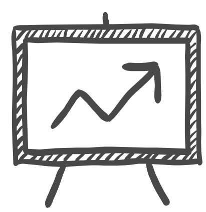
Notas: Cifras Oportunas. La estimación oportuna no reemplaza a la estimación tradicional.
La serie desestacionalizada del agregado se calcula de manera independiente a la de sus componentes.
Fuente: INEGI.

Fuente: INEGI

5

5

PIB de México de 1T21R



PRODUCTO INTERNO BRUTO DURANTE EL PRIMER TRIMESTRE DE 2021
CIFRAS DESESTACIONALIZADAS POR GRUPOS DE ACTIVIDADES ECONÓMICAS

Concepto	Variación % real respecto al trimestre previo	Variación % real respecto a igual trimestre de 2020
PIB Total	**0.8**	**(-) 2.8**
Actividades Primarias	0.7	2.6
Actividades Secundarias	0.5	(-) 2.0
Actividades Terciarias	0.9	(-) 3.4

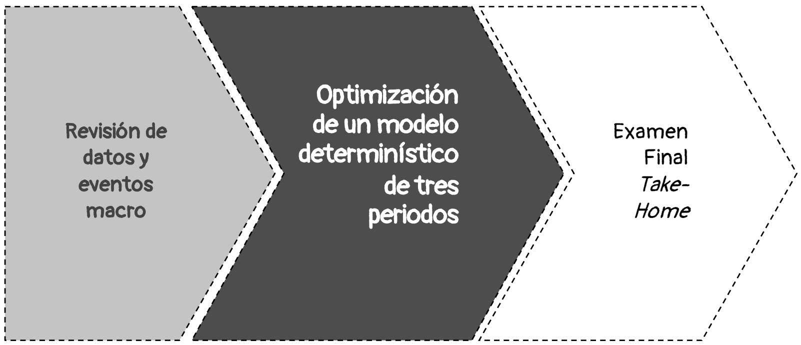
Nota: La serie desestacionalizada de los agregados se calcula de manera independiente a la de sus componentes.
Fuente: INEGI.

Fuente: INEGI

6

6

Nuestra agenda de hoy

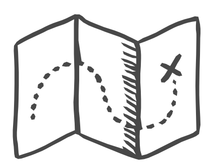


7

7

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

8

8

Richard E. Bellman

(1920-1984)
Matemático
Principal aportación:
Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman#/media/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg

9

9

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

Variable de control

sujeto a:

Variable de estado

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para toda } t$$

$$A_4 \geq 0$$

$$\mathcal{L} = \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t + \sum_{t=1}^{3} \lambda_t [(1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t - A_{t+1}]$$

10

10

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

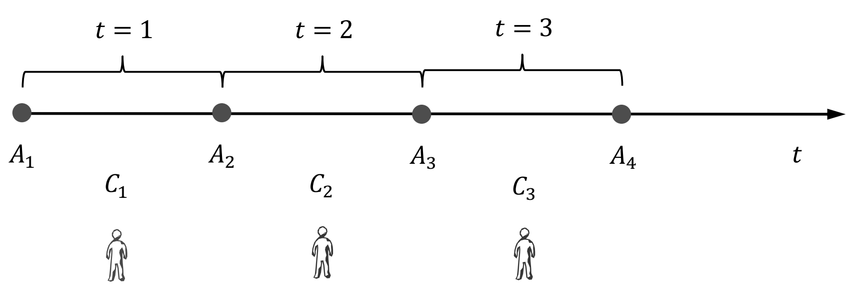
“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

11

11

‘Política óptima’



Solución para toda la vida del agente representativo en $t = 1$

Solución óptima o ‘política óptima’ del agente representativo cuando ya vivió $t = 1$ y optimiza hacia delante

Solución óptima o ‘política óptima’ del agente representativo cuando ya vivió $t = 2$ y optimiza hacia delante

12

12

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

13

13

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula ‘funciones valor’ que dependen de la ‘variable de estado’ en cada momento

14

14

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

15

15

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiones bajo incertidumbre

16

16

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'

17

17

La Ecuación de Bellman y la utilidad 'indirecta'

- Las 'funciones valor' en nuestro caso son similares al concepto de 'función de utilidad indirecta'

- La función de utilidad 'directa' describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de 'utilidad indirecta' refleja condiciones de optimización y precios de mercado

18

18

Digresión: Utilidad indirecta

$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$

19

19

Digresión: Utilidad indirecta

$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}$

Utilidad
'directa'

20

20

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad
'directa'

21

21

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad
'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

22

22

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \middle| p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 - p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\, x_1 - p_2x_2 = 0$$

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \middle| p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\, x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0. \iff m - p_1\, x_1 - p_2 x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2} x_1^{\frac{1}{2}} x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

25

25

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1 = 0$$

26

26

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

27

27

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$$

$$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$$

$$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2 p_1 x_1 \iff x_1^*(p, m) = \frac{m}{2 p_1}$$

$$x_2^*(p, m) = \frac{m}{2 p_2}$$

28

28

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$

$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

29

29

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - \cancel{p_2} \frac{p_1}{\cancel{p_2}} x_1 = 0$

$m - p_1 x_1 - p_1 x_1 = 0 \iff m = 2p_1 x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$

$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

La 'utilidad directa' es: $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p,m) = U(x_1^*, x_2^*)$

30

30

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ …

…Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

31

31

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ …

…Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p, m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}}$

32

32

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}$

33

33

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}}$

Utilidad 'indirecta'

34

34

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$

35

35

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
Decisiones óptimas	$x_1^*(p, m)$ $x_2^*(p, m)$	‘Demandas Marshallianas’	$\widehat{C_{T-1}}(a; r, w)$ $\widehat{A_T}(a; r, w)$	‘Funciones de política’

36

36

Utilidad indirecta | decisiones óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes		Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final	
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$		$U(C_{T-1}, A_T)$	
Decisiones óptimas	$x_1^*(p,m)$ $x_2^*(p,m)$	'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$ $\widehat{A_T}(a;r,w)$	'Funciones de política'
Utilidad indirecta	$v(p,m) = u[x_1^*(p,m), x_2^*(p,m)]$		$V_{T-1}(a) = U\left[\widehat{C_{T-1}}(a;r,w), \widehat{A_T}(a;r,w)\right]$ 'Función valor'	

37

37

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1+r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

38

38

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

$$V_t(a) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t) A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

39

39

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

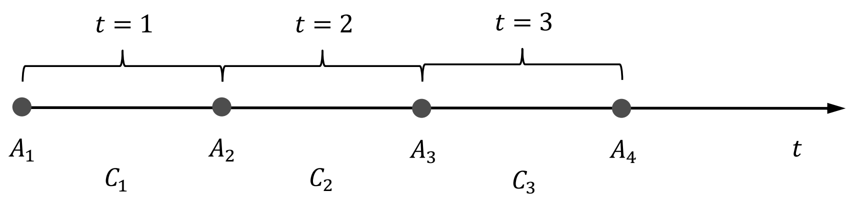
$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t) A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo
- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

40

40

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

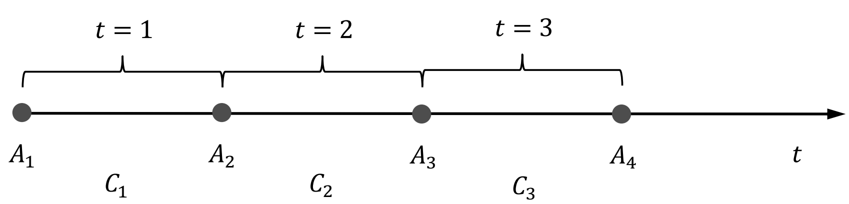
$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \to 0$

Ecuación de Bellman $V_3(A_3)$

41

41

Inducción ‘hacia atrás’ $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar

$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$

sujeto a

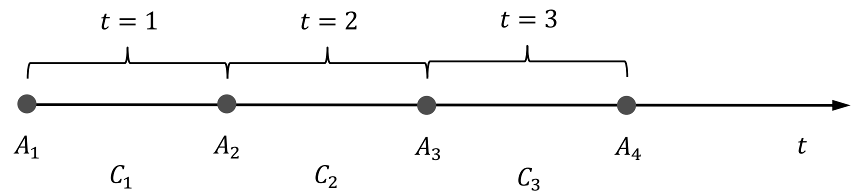
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman $V_2(A_2)$

42

42

Inducción 'hacia atrás' $t = 1$



La 'función valor' V_2 ya incorpora las decisiones óptimas en $t = 2$ y $t = 3$ (*i.e.* las funciones de política $\widehat{C_2}, \widehat{A_3}, \widehat{C_3}, \widehat{A_4}$)

Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

maximizar

$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$

sujeto a

$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

Ecuación de Bellman $V_1(A_1)$

43

43

Notación en la 'Ecuación de Bellman'

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control (C_t) y de estado (A_t) y que en su lugar utilicemos letras minúsculas (c y a). Adicionalmente, se sugiere utilizar el superíndice '$+$', para referirse al 'siguiente periodo' (*e.g.* $a = A_t$ y $a^+ = A_{t+1}$), por lo que el problema:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

...quedaría:

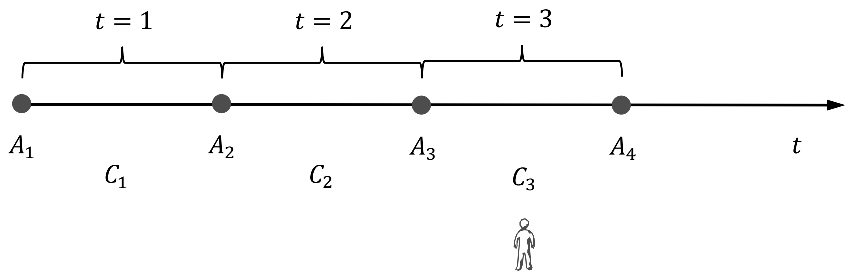
$$V_t(a) = \max_{c, a^+} \{U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)a + w_t - c\}$$

Además del superíndice '+' para referirse al periodo siguiente, algunos utilizan el apóstrofe '. Sin embargo, a veces se confunde con la derivada.

44

44

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$

sujeto a

$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \to 0$

Ecuación de Bellman

$V_3(a)$

45

45

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

46

46

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

47

47

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c, a^+}\{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

Ya sabemos que el agente representativo no vive en $t = 4$, por lo que no puede generar utilidad, *i.e.* $V_4(a^+) = 0$. Asimismo, sabemos que dejar activos sin consumir en $t = 4$, no incrementa el nivel de utilidad

48

48

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_4(\overset{0}{a^+})|(1+r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+}; a^+ \geq 0\}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

49

49

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_4(\overset{0}{a^+})|(1+r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+}; a^+ \geq 0\}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U(c)|(1+r_3)a + w_3 = c\}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

50

50

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta \overset{0}{V_4(a^+)} | (1 + r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+};\ a^+ \geq 0\,\}$$

...por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U(c) | (1 + r_3)a + w_3 = c\,\}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U[(1 + r_3)a + w_3]\,\}$$

51

51

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c}\{U[(1 + r_3)a + w_3]\,\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

52

52

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

53

53

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

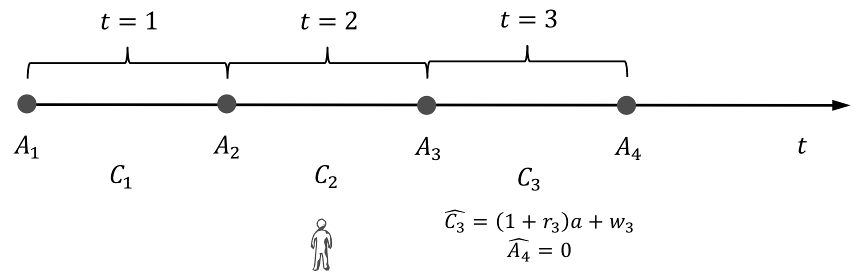
...y por lo tanto:

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

54

54

Ahora resolvamos en $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar
$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
sujeto a
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman
$V_2(a)$

55

55

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \left\{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

56

56

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2,A_3}\{U(C_2) + \beta V_3(A_3) | (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+) | (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

57

57

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2,A_3}\{U(C_2) + \beta V_3(A_3) | (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+) | (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción [$a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$] e incorporarlo en la función objetivo:

58

58

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \left\{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \left\{ U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción [$a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c$] e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c} \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

59

59

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \left\{ U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c} \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

60

60

$$t = 2$$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

61

61

$$t = 2$$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\left\{U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

62

62

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\ \}$

$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

63

63

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\ \}$

$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

64

64

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$ Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

65

65

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$ Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política $\widehat{C_3}$ y $\widehat{A_4}$ en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

66

66

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\ \}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a;r,w) = U\left[\widehat{C_3}(a;r,w), \widehat{A_4}(a;r,w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ 67

67

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\ \}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:
$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$
$\widehat{A_4} = 0$
La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a;r,w) = U\left[\widehat{C_3}(a;r,w), \widehat{A_4}(a;r,w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ 68

68

$\max_{c}\{U(c)+\beta V_3[(1+r_2)a+w_2-c]\}$ $V_3(a)=U[(1+r_3)a+w_3]$

$t=2$

Las funciones de política en $t=3$:

$\widehat{C_3}=(1+r_3)a+w_3$

$\widehat{A_4}=0$

La 'función valor' en $t=3$, es decir $V_3(a)=U\left[\widehat{C_3}(a),\widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a)=U[(1+r_3)a+w_3]$$

$$V_3(a)=\ln[(1+r_3)a+w_3]$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a;r,w)=U\left[\widehat{C_3}(a;r,w),\widehat{A_4}(a;r,w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a)=U\left[\widehat{C_3}(a),\widehat{A_4}(a)\right]$

69

69

$\max_{c}\{U(c)+\beta V_3[(1+r_2)a+w_2-c]\}$ $V_3(a)=U[(1+r_3)a+w_3]$

$t=2$

Las funciones de política en $t=3$:

$\widehat{C_3}=(1+r_3)a+w_3$

$\widehat{A_4}=0$

La 'función valor' en $t=3$, es decir $V_3(a)=U\left[\widehat{C_3}(a),\widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a)=U[(1+r_3)a+w_3]$$

$$V_3(a)=\ln[(1+r_3)a+w_3]$$

Por lo que:

$$V_3'(a)=\frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a;r,w)=U\left[\widehat{C_3}(a;r,w),\widehat{A_4}(a;r,w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a)=U\left[\widehat{C_3}(a),\widehat{A_4}(a)\right]$

70

70

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$

71

71

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^++w_3}$

72

72

$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\ \}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^{+})$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^{+}) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^{+}+w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^{+} = (1 + r_2)a + w_2 - c$

73

73

$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\ \}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^{+})$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^{+}) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^{+}+w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^{+} = (1 + r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^{+}) = \frac{(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

74

74

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

75

75

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

76

76

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción…

77

77

$t = 2$

$$\beta(1 + r_3)c \ = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

78

78

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1+r_3)c}{1+r_3} = \frac{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c]}{(1+r_3)} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

79

79

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

80

80

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

81

81

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

82

82

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

83

83

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

84

84

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

85

85

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

86

86

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{1+\beta-1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

87

87

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1}+\beta\cancel{-1}}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

88

88

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

89

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^{+}$ y así:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

90

90

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

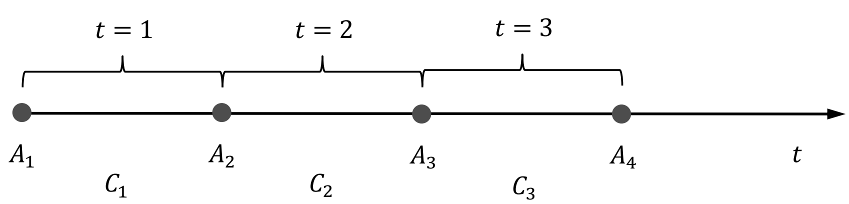
$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^+$ y así:

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_2} &= \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] \\ \widehat{A_3} &= \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

Inducción 'hacia atrás'



$$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$$
$$\widehat{A_4} = 0$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

maximizar
$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$
sujeto a
$(1+r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

Ecuación de Bellman
$V_1(a)$

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \big| (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

93

93

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) \big| (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) \big| (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

94

94

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2)\middle|(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\right\}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+}\left\{U(c) + \beta V_2(a^+)\middle|(1 + r_1)a + w_1 = c + a^+\right\}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

95

95

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2)\middle|(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\right\}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+}\left\{U(c) + \beta V_2(a^+)\middle|(1 + r_1)a + w_1 = c + a^+\right\}$$

FOC

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y $V_2{}'(a^+)$

96

96

$t = 1$

$$U(c) = \ln c$$

$$U'(c) = \frac{1}{c}$$

Ahora solo falta $V_2{}'(a^+)$ y para obtenerla, necesitamos la función valor en $t+1$, *i.e.* $V_2(a)$

97

97

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$ $V_2(a) = U\left(\widehat{C_2}\right) + \beta V_3\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$

98

98

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$ $\quad$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

99

99

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$ $\quad$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

10
0

100

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln\left[(1+r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

101

101

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

102

102

$t = 1$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+\right.\right.$
$\left.\left.r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+\right.\right.$
$\left.\left.r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$

10
3

103

$t = 1$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+\right.\right.$
$\left.\left.r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+\right.\right.$
$\left.\left.r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$

$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+\right.\right.$
$\left.\left.r_2)a + w_2] + \frac{1+\beta-1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$

10
4

104

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] + \frac{\cancel{1}+\beta\cancel{-1}}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$$

10
5

105

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

10
6

106

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

10
7

107

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

10
8

108

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

109

109

$t = 1$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

110

110

$t = 1$

$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

111

111

$t = 1$

$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

112

112

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1 + r_3) + (1 + \beta)\ln\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

11
3

113

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1 + r_3) + (1 + \beta)\ln\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

11
4

114

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Entonces obtenemos $V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$

11
5

115

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

11
6

116

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)(1+r_2)}{1+r_2}}{\frac{(1+r_2)a}{1+r_2} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

11
7

117

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

11
8

118

$t = 1$

$$V_2'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

119

119

$$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$$

$t = 1$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

120

120

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$…
…en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

12
1

121

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$…
…en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ + \frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
2

122

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c] \}$

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$…
…en donde $a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^++\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
3

123

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c] \}$

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$…
…en donde $a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^++\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{(1+r_1)a+w_1-c+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
4

124

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

12
5

125

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c \ + \dfrac{w_2}{1+r_2} + \dfrac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

12
6

126

$t = 1$

Ecuación de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta {V_2}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^{+}

12
7

127

$t = 1$

Ecuación de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta {V_2}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^{+}

12
8

128

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c \ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

12
9

129

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c \ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta) \ = (1+r_1)a + w_1 - c \ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

13
0

130

$$t = 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c + c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

13
1

131

$$t = 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c + c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c[1 + \beta(1+\beta)] = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

13
2

132

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

13
3

133

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\ldots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

13
4

134

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\ldots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

13
5

135

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\ldots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

13
6

136

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\ldots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

137

137

$t = 1$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

138

138

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

13
9

139

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2\cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
0

140

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2\cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
1

141

$$t = 1$$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2\cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
2

142

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces...

14
3

143

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces...

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
4

144

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces…

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
5

145

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces…

$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_1} &= \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] \\ \widehat{A_2} &= \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\end{aligned}}$$

Una vez más, llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

14
6

146

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

Ahora, a pesar de que haber obtenido las funciones de política óptima sería suficiente, considero que para entender todo el concepto de Programación Dinámica, es necesario calcular la función valor $V_1(a)$

$$V_1(a) = \max_{c,a^+} U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

14
7

147

$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$t = 1$

Solo que recordemos que…

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Entonces $\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

14
8

148

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

14
9

149

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$U(c) = \ln c$

15
0

150

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$U(c) = \ln c$

15
1

151

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$U(c) = \ln c$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

15
2

152

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

15
3

153

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

15
4

154

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

15
5

155

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

15
6

156

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a)$$
$$= \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

15
7

157

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$V_1(a) = \ln(\widehat{C_1}) + \beta\left\{\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\widehat{A_2} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}$$

15
8

158

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$V_1(a) = \ln\left(\widehat{C_1}\right) + \beta\left\{\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\widehat{A_2} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

15
9

159

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

16
0

160

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

16
1

161

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

16
2

162

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

163

163

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] \cancel{+} \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2\cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

164

164

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

165

165

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

166

166

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

16
7

167

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

16
8

168

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

169

169

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

170

170

$t = 1$

$$V_1(a) = \overbrace{\ln(1)}^{0} - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
1

171

$t = 1$

$$V_1(a) = \overbrace{\ln(1)}^{0} - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
2

172

$t = 1$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^{\beta}) - \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} + \beta (1+\beta)\ln(\beta) + \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta (1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta (1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

173

173

$t = 1$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^{\beta}) - \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} + \beta (1+\beta)\ln(\beta) + \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta (1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta (1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^{\beta}) + \beta (1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

174

174

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta \ln\left(\beta^{\beta}\right) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
5

175

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta \ln\left(\beta^{\beta}\right) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta^2\ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
6

176

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

177

177

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta(1+2\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

178

178

$$t = 1$$

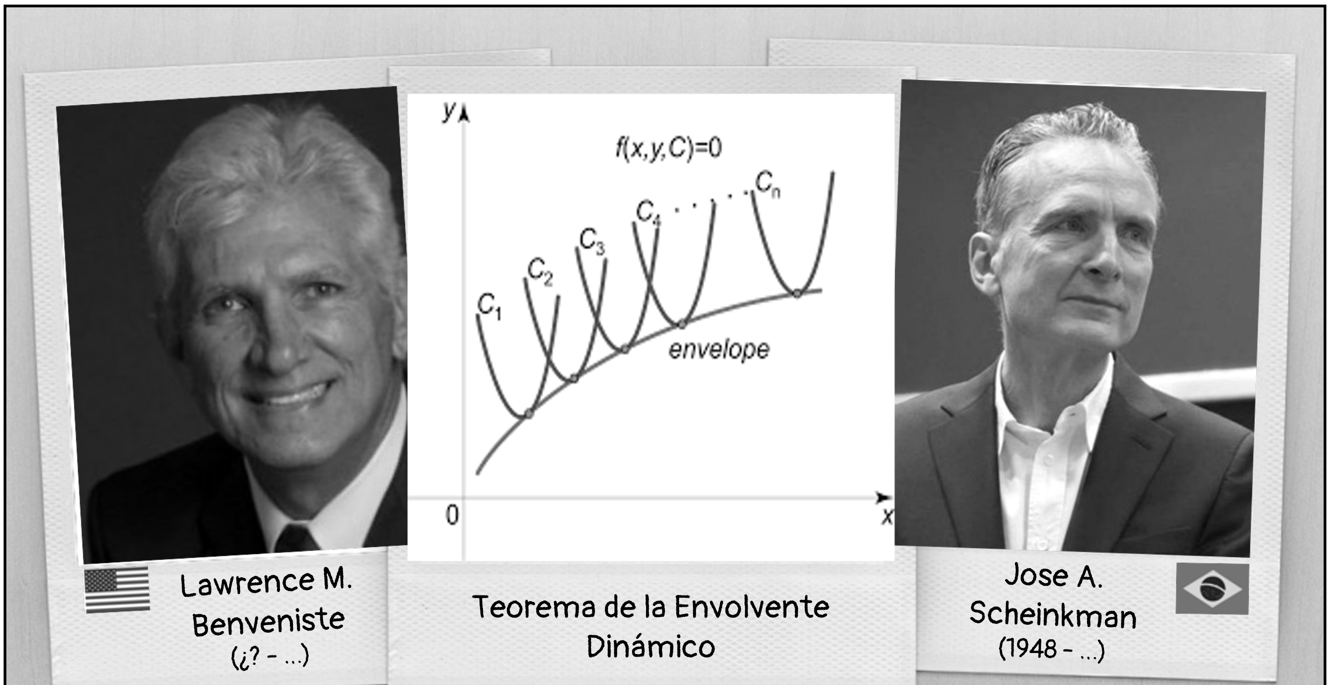
$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\boxed{V_1(a) = \beta(1+2\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]}$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

17
9

179



Fuente: Benveniste (https://goizueta.emory.edu/faculty/profiles/lawrence-benveniste); Scheinkman (https://epoca.globo.com/economia/perdemos-tres-anos-de-crescimento-diz-professor-de-columbia-24780527)

18
0

180

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
1

181

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización

- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
2

182

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema de la Envolvente dinámico

- El 'Teorema de la Envolvente' es un resultado muy importante en matemáticas y economía sobre las propiedades de diferenciación de una 'función valor' de un problema parametrizado de optimización
- El Teorema muestra que, en ciertos casos, cambios en los parámetros causan cierta variación de la función objetivo, independientemente si la(s) variable(s) de decisión cambian, como consecuencia del cambio de los parámetros
- Larry Benveniste y Jose Scheinkman demostraron que hay una aplicación del 'Teorema de la Envolvente' para los modelos de optimización dinámica

Benveniste, Lawrence M. y Jose A. Scheinkman (1979). On the Differentiability of Value Functions in Dynamic Models of Economics". *Econometrica*, 47: pp. 727-32.

18
3

183

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

18
4

184

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

18
5

185

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Vamos a ilustrar el Teorema Benveniste-Scheinkman (1979) con la función valor en $t = 2$:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]$$

Recordemos que $\widehat{A_3}(a) = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)$...

Entonces:

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

18
6

186

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

18
7

187

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$V_2(a) \equiv U\left[\widehat{C_2}(a)\right] + \beta V_3\left[(1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}(a)\right]$$

Entonces si obtenemos la derivada de $V_2(a)$ con respecto a a, queda:

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U\left[\widehat{C_2}(a)\right]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3\left[\widehat{A_3}(a)\right]}{\partial a}\left[(1 + r_2) - \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\right]$$

Vamos a factorizar $\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}$ y a utilizar la condición de primer orden $U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$, para probar que:

$V_2'(a) = (1 + r_2)\, U'\left[\widehat{C_2}(a)\right]$

18
8

188

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

18
9

189

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

19
0

190

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

19
1

191

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2(a)}{\partial a} = \frac{\partial U[\widehat{C_2}(a)]}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3[\widehat{A_3}(a)]}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}(a)}{\partial a}\ \right]$$

Por simplicidad, quitemos los paréntesis de las funciones:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\left[(1+r_2) - \ \frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}\ \right]$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \frac{\partial U}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

19
2

192

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

19
3

193

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1 + r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta \frac{\partial V_3}{\partial a}$:

19
4

194

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

19
5

195

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta {V_3}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\,\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\,\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

19
6

196

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

19
7

197

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a} - \frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

19
8

198

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a}} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

19
9

199

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

Utilizamos la condición de primer orden: $U' = \beta V_3{}'$ o $\frac{\partial U}{\partial a} = \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}$:

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\frac{\partial U}{\partial a} - \beta\frac{\partial V_3}{\partial a}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + \beta(1+r_2)\frac{\partial V_3}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = \left(\cancel{\frac{\partial U}{\partial a}} - \cancel{\frac{\partial U}{\partial a}}\right)\frac{\partial \widehat{C_2}}{\partial a} + (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

$$\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1+r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$$

Aquí se muestra la relación que existe entre la función valor y la función de utilidad

20
0

200

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

20
1

201

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

20
2

202

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

203

203

Digresión: Benveniste-Scheinkman Teorema del Envolvente dinámico

Otra forma de ver la relación entre la función valor (o 'utilidad indirecta', en este caso) y la función de utilidad es la siguiente:

Despejemos $\frac{\partial U}{\partial a}$ de $\frac{\partial V_2}{\partial a} = (1 + r_2)\frac{\partial U}{\partial a}$:

Este resultado va a ser muy útil en el modelo en el que el agente representativo vive de manera infinita

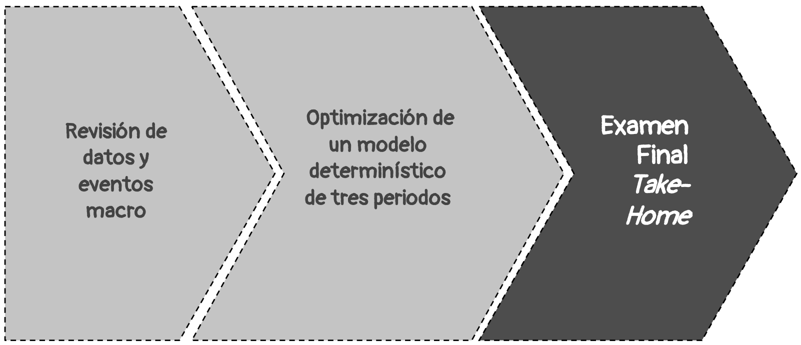
$$\frac{\partial U}{\partial a} = \frac{\frac{\partial V_2}{\partial a}}{1 + r_2}$$

La utilidad marginal es igual al valor presente de la derivada de la función valor (o utilidad marginal 'indirecta') en el mismo momento en el tiempo

204

204

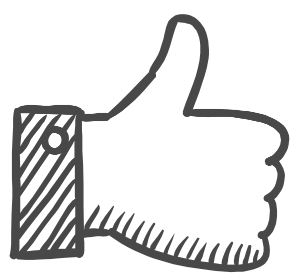
Nuestra agenda de hoy



20
5

205

Muchas gracias!



20
6

206

Slides Carnival

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

207