Principios de modelación

Técnicas de linealización
Modelo de Hansen

U.B.G

Macroeconomía Dinámica

Contenido

1. Introducción

2. Linealización

3. Modelo de Hansen

Introducción

Principales puntos del curso

1. Técnicas de linealización
2. Introducción a Matlab
3. Discusión y simulación del modelo de Hansen[1].

Herramientas necesarias

- Matlab
- Caja de herramientas de Uhlig (link)
- Simuleditor (link)

[1] Hansen [2], George [1]

Dentro del campo de la economía, se acostumbra hacer uso del supuesto *ceteris paribus* para entender causas y efectos de variables económicas. No obstante, dada la mejora del poder computacional, ahora ya es posible resolver modelos matemáticos con más de una interacción.

Ejemplo 1
Suponga el siguiente modelo económico

$$U(\cdot) = C_t - \gamma H_t$$

$$C_t = w_t L_t$$

$$Y_t = \lambda_t K^{\theta} H^{1-\theta}$$

$$K_{t+1} = I_t + (1-\delta) K_t$$

Pasos para la simulación

1. Plantear un modelo económico;
2. Resolver el modelo económico para encontrar sus valores de estado estacionario;
3. Linealizar el modelo (determinar las perturbaciones alrededor del Estado Estacionario (E.E.));
4. Determinar las variables de estado, las variables endógenas y las variables exógenas;
5. Evaluar el efecto de las variables exógenas sobre el sistema;
6. Evaluar la interrelación de las variables endógenas.

Ejemplo IGAE

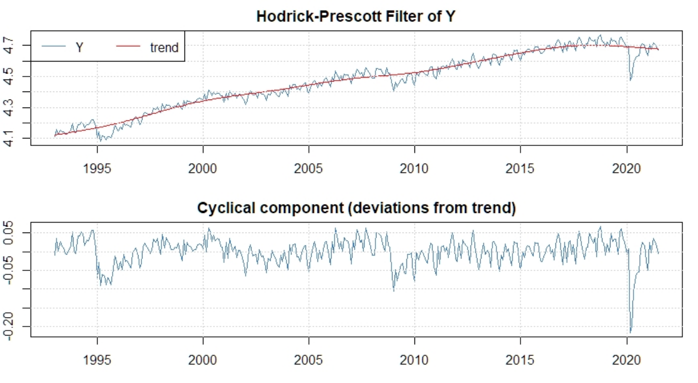

Figure 1: Tendencia y ciclo IGAE (1993m1 - 2021m8)

$$\sigma_Y = 0.03593$$

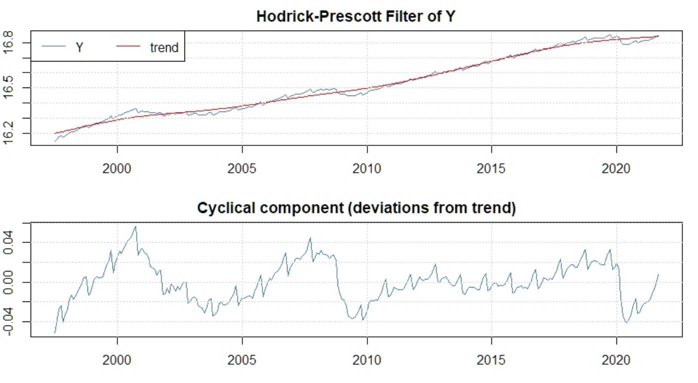

Figure 2: Tendencia y ciclo Asegurados al IMSS (1997m7 - 2021m10

$$\sigma_L = 0.0198$$

Ejemplo Tasa de interés

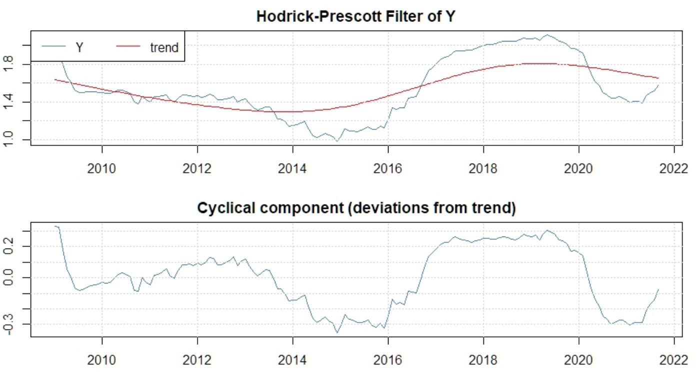

Figure 3: Tendencia y ciclo CETES 28 días (2009m1 - 2021m10)

$$\sigma_r = 0.1946$$

Linealización

La linealización

Dada la naturaleza de los modelos económicos, existen ecuaciones matemáticas que buscan describir el comportamiento de los agentes de forma no lineal:

1. Función de Utilidad: $U(x) = ln|x|$
2. Función de Producción: $Y(K, L) = AK^{\theta}L^{\beta}$

Este tipo de ecuaciones no es posible introducirlas en procesos de optimización lineales.
Para evitar el problema, una solución (en teoría de ciclos económicos) es recurrir a la linealización de las series.

- Aproximación de Taylor
- Loglinealización

Notación para teoría de ciclos

Con la linealización, se podrán convertir funciones de cualquier tipo en sus aproximaciones lineales.
El punto de interés de teoría de ciclos consiste en estudiar las **perturbaciones alrededor del Estado Estacionario**

Notación básica

- x_t: variable x en el tiempo t;
- $\bar{x}$: variable x en su nivel de estado estacionario;
- $\tilde{x}_t$: perturbación de x alrededor del estado estacionario.

El objetivo es convertir todo el sistema de ecuaciones de los modelos de ciclos económicos en sus versiones lineales.

$$(x_t) \longrightarrow (\tilde{x}_t, \bar{x}_t)$$

Una de la maneras más sencillas de linealizar una función es a través de la linealización de Taylor:

$$h(x) \approx h(a) + h(a)'(x - a)$$

Perturbaciones

En términos de perturbaciones, se creará la variable del **nivel (en porcentaje) de diferencia con el nivel de Estado Estacionario (E.E.)**

$$\tilde{x}_t \approx ln|x_t| - ln|\bar{x}|$$

Perturbaciones alrededor del E.E. por la aprox. de Taylor
Partiendo de la definición de E.E.

$$\begin{aligned} \tilde{x}_t &\approx ln|x_t| - ln|\bar{x}| \\ &\approx ln|\frac{x_t}{\bar{x}}| \\ &\approx ln|1 + \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}| \end{aligned} \tag{1}$$

Aplicando al término derecho 1) la aproximación de Taylor alrededor del E.E.

$$\begin{aligned} ln|1 + \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}| &\approx ln|1| + \frac{1/\bar{x}}{1}(x_t - \bar{x}) \\ &\approx \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}} \\ &\approx \frac{x_t}{\bar{x}} - 1 \end{aligned} \tag{2}$$

De 1) tenemos que:

$$\tilde{x}_t \approx \frac{x_t}{\bar{x}} - 1$$

Despejando a x_t

$$\tilde{x}_t + 1 \approx \frac{x_t}{\bar{x}}$$

$$(\tilde{x}_t + 1)\bar{x} \approx x_t$$

Por último

$$x_t = (1 + \tilde{x}_t)\bar{x} \tag{3}$$

Partiendo de la definición de perturbación del E.E.

$$\tilde{x}_t \approx ln|x_t| - ln|\bar{x}|$$

$$ln|x_t| = ln|\bar{x}| + \tilde{x}_t$$

Tomando el exponente de la expresión:

$$x_t = e^{ln|\bar{x}| + \tilde{x}_t} = e^{ln|\bar{x}|} e^{\tilde{x}_t}$$

$$x_t = \bar{x} e^{\tilde{x}_t}$$

$$\frac{x_t}{\bar{x}} = e^{\tilde{x}_t} \tag{4}$$

Tomando la aproximación lineal (Taylor) de la expresión derecha alrededor del E.E. ($\tilde{x}_t \approx 0$)

$$e^{\tilde{x}_t} \approx e^0 + (e^0)(\tilde{x}_t - 0) = 1 + \tilde{x}_t$$

$$\frac{x_t}{\bar{x}} \approx 1 + \tilde{x}_t \tag{5}$$

$$x_t = (1 + \tilde{x}_t)\bar{x}_t$$

Generalización de la log linealización
¿Y si tuviéramos exponentes? ¿Multiplicaciones? ¿Divisiones?

Dado nuestro principal resultado $x_t \approx (1 + \tilde{x}_t)\bar{x}$, un exponente implica multiplicar n veces la expresión: $x_t^n = x_t * x_t * x_t ...$

Al sustituir nuestra expresión

$$x_t^n = (1 + \tilde{x}_t)\bar{x} * (1 + \tilde{x}_t)\bar{x} * (1 + \tilde{x}_t)\bar{x} * ...$$

$$x_t^n = (1 + n\tilde{x}_t)\bar{x}^n$$

- Exponentes: $x_t^n = \bar{x}^n(1 + n\tilde{x}_t)$
- Multiplicaciones: $x_t y_t = (1 + \tilde{x}_t + \tilde{y}_t)\bar{x}\bar{y}$

Supongamos la función $k_{t+1} = Ak_t^{\theta} + (1-\delta)k_t;\ A, \theta, \delta \in (0,1)$

Aproximación de Taylor

1. Aproximando la función

$$k_{t+1} \approx A\bar{k}^{\theta} + (1-\delta)\bar{k} + [A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)](k_t - \bar{k})$$

2. Llevando la función original a su E.E.

$$k_{t+1} \approx \bar{k} + [A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)](k_t - \bar{k})$$

3. Dividiendo sobre $\bar{k}$

$$\frac{k_{t+1}}{\bar{k}} \approx 1 + \frac{1}{\bar{k}}[A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)](k_t - \bar{k})$$

4. Por la ecuación 3), sabemos que $\frac{x_t}{\bar{x}} = \tilde{x}_t + 1$

Aproximación de Taylor

4. Sustituyendo 3) en la anterior expresión:
   $\frac{k_{t+1}}{\bar{k}} \approx 1 + \frac{1}{\bar{k}}[A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)](k_t - \bar{k})$

$$1 + \tilde{k}_{t+1} \approx 1 + \frac{1}{\bar{k}}[A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)](k_t - \bar{k})$$

$$\tilde{k}_{t+1} \approx [A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)]\frac{(k_t - \bar{k})}{\bar{k}}$$

5. Por definición $\tilde{x}_t = \frac{x_t - \bar{x}}{\bar{x}}$ (eq 2)

$$\tilde{k}_{t+1} \approx [A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)]\tilde{k}_t$$

Ejemplos de linealización

Supongamos la misma función $k_{t+1} = Ak_t^\theta + (1-\delta)k_t$; $A, \theta, \delta \in (0,1)$

Linealización de Uhlig (sustitución)

1. Partiendo del resultado en 3) y en 5) $x_t \approx (1+\tilde{x}_t)\bar{x}$

$$(1+\tilde{k}_{t+1})\bar{k} = A[1+\theta\tilde{k}_t]\bar{k}^\theta + (1-\delta)(1+\tilde{k}_t)\bar{k}$$

2. Realizando la multiplicación

$$\bar{k} + \tilde{k}_{t+1}\bar{k} = A\bar{k}^\theta + A\theta\tilde{k}_t\bar{k}^\theta + (1-\delta)\bar{k} + (1-\delta)\tilde{k}_t\bar{k}$$

3. Por la condición de E.E.

$$\tilde{k}_{t+1}\bar{k} = A\theta\tilde{k}_t\bar{k}^\theta + (1-\delta)\tilde{k}_t\bar{k}$$

4. Dividiendo entre $\bar{k}$

$$\tilde{k}_{t+1} = A\theta\tilde{k}_t\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)\tilde{k}_t = [A\theta\bar{k}^{\theta-1} + (1-\delta)]\tilde{k}_t$$

Ejemplo linealización [Restricción de recursos]

1. Supongamos la restricción de recursos siguiente: $y_t = c_t + i_t$
2. Sustituyendo nuestro resultado principal $x_t \approx (1 + \tilde{x}_t)\bar{x}$

$$(1 + \tilde{y}_t)\bar{y} = (1 + \tilde{c}_t)\bar{c} + (1 + \tilde{i}_t)\bar{i}$$

3. Multiplicando

$$\bar{y} + \tilde{y}_t\bar{y} = \bar{c} + \tilde{c}_t\bar{c} + \bar{i} + \tilde{i}_t\bar{i}$$

4. En E.E.

$$\tilde{y}_t\bar{y} = \tilde{c}_t\bar{c} + \tilde{i}_t\bar{i}$$

$$\tilde{y}_t = \frac{\bar{c}}{\bar{y}}\tilde{c}_t + \frac{\bar{i}}{\bar{y}}\tilde{i}_t$$

Ejemplo linealización [Ecuación intertemporal de Consumo]

1. Supongamos la restricción de recursos siguiente: $\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{1+r_{t+1}}{c_{t+1}} \right]$
2. Reacomodando la ecuación

$$c_t^{-1} = \beta E_t \left[(1 + r_{t+1}) c_{t+1}^{-1} \right]$$

3. Sustituyendo nuestro resultado principal $x_t \approx (1 + \tilde{x}_t)\bar{x}$; $x_t^n = (1 + n\tilde{x}_t)\bar{x}^n$

$$(1 - \tilde{c}_t)\bar{c}^{-1} = \beta E_t \left[(1 + (1 + \tilde{r}_{t+1})\bar{r})(1 - \tilde{c}_{t+1})\bar{c}^{-1} \right]$$

$$(1 - \tilde{c}_t) = \beta E_t \left[(1 + (1 + \tilde{r}_{t+1})\bar{r})(1 - \tilde{c}_{t+1}) \right]$$

4. Resolviendo la multiplicación del interés

$$(1 - \tilde{c}_t) = \beta E_t \left[(1 + \bar{r} + \tilde{r}_{t+1}\bar{r})(1 - \tilde{c}_{t+1}) \right]$$

Ejemplo linealización [Ecuación intertemporal de Consumo]

$$(1-\tilde{c}_t) = \beta E_t\left[(1+\bar{r}+\tilde{r}_{t+1}\bar{r})(1-\tilde{c}_{t+1})\right]$$

5. Resolviendo la multiplicación dentro de la expectativa. Ayuda: considerar a $1+\bar{r}$ como un sólo elemento.

$$(1-\tilde{c}_t) = \beta E_t\left[(1+\bar{r})-(1+\bar{r})\tilde{c}_{t+1}+\tilde{r}_{t+1}\bar{r}+\tilde{r}_{t+1}\bar{r}\tilde{c}_{t+1})\right]$$

6. En E.E. $\beta = \frac{1}{1+\bar{r}}$

$$(1-\tilde{c}_t) = E_t\left[1-\tilde{c}_{t+1}+\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}}\tilde{r}_{t+1}\right]$$

7. Aplicando esperanzas

$$0 = E_t\left[\tilde{c}_t-\tilde{c}_{t+1}+\frac{\bar{r}}{1+\bar{r}}\tilde{r}_{t+1}\right]$$

Modelo de Hansen

Modelo de Hansen

Supongamos una economía donde los hogares maximizan:

$$U(c_t, l_t) = max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t u(c_t, h_t)$$

Con una función de utilidad

$$u(c_t, l_t) = ln(c_t) + Aln(1 - h_t)$$

Las empresas enfrentan una tecnología

$$y(k_t, l_t) = \lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta}$$

Y además experimentan la Ley de Movimiento del Capital (LMK), un choque tecnológico y la restricción de recursos

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \epsilon_{t+1}$$

$$y_t = c_t + i_t$$

El problema del hogar
Los hogares deben maximizar la función de utilidad, que por la ecuación de Belman podemos reescribirla como:

$$V(k_t, \lambda_t) = \max_{c_t h_t} \{ln(c_t) + Aln(1 - h_t) + \beta E_t[V(k_{t+1}, \lambda_{t+1}|\lambda_t)]\} \tag{6}$$

sujeto a

$$c_t + i_t = \lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-h_t} \tag{7}$$

$$k_{t+1} = i_t + (1 - \delta)k_t \tag{8}$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \epsilon_{t+1} \tag{9}$$

Sustituyendo las ecuaciones 7) - 9) en 6) (eq. de Belman)

$$\begin{aligned} V(k_t, \lambda_t) = &\max_{k_{t+1} h_t} ln(\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1 - \delta)k_t - k_{t+1}) \\ &+ Aln(1 - h_t) \\ &+ \beta E_t[V(k_{t+1}, \lambda_{t+1}|\lambda_t)] \end{aligned} \tag{10}$$

Optimización de la ecuación de Belman

1. Obtener las CPO con respecto a k_{t+1} y h_t
2. Considerar las condiciones de optimalidad de la empresas

$$r_t = PMgK_t$$

$$w_t = PMgH_t$$

3. Resolver la ecuación de Belman
4. Reducir el sistema hasta encontrar tantas variables como ecuaciones

Retomando la ecuación de Belman

$$\begin{aligned} V(k_t,\lambda_t) = & \max_{k_{t+1}h_t} ln(\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}) \\ & + Aln(1-h_t) \\ & + \beta E_t[V(k_{t+1},\lambda_{t+1}|\lambda_t)] \end{aligned}$$

Obteniendo las derivadas

$$V'_{k_{t+1}} \longrightarrow \frac{-1}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \beta E_t[V'(k_{t+1},\lambda_{t+1}|\lambda_t)] = 0 \quad (11)$$

$$V'_{h_t} \longrightarrow \frac{(1-\theta)\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta_t}}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + A\frac{1}{a-h_t} = 0 \quad (12)$$

Solo restaría encontrar el valor de la expresión derecha de la ecuación 12), para ello obtenemos la derivada simple de la ecuación de Belman

$$V'_{k_t} = \frac{\theta\lambda_t k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} \quad (13)$$

Resolviendo el modelo

Iterando la ecuación 13)

$$V'(\cdot) = \frac{\theta \lambda_t k_{t+1}^{\theta-1} h_t^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)}{\lambda_t k_{t+1}^{\theta} h_{t+1}^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}} \tag{14}$$

Sustituyendo la ecuación 14) en la 11)

$$\frac{-1}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} + \beta E_t \frac{\theta \lambda_t k_{t+1}^{\theta-1} h_t^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)}{\lambda_t k_{t+1}^{\theta} h_{t+1}^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}} = 0 \tag{15}$$

$$\frac{1}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} = \beta E_t \frac{\theta \lambda_t k_{t+1}^{\theta-1} h_t^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)}{\lambda_t k_{t+1}^{\theta} h_{t+1}^{1-\theta_{t+1}} + (1-\delta)k_{t+1} - k_{t+2}} \tag{16}$$

Por 7) y 8), y las condiciones de equilibrio de mercado, sabemos que

$$c_t = \lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \qquad \theta \lambda_t k_t^{\theta-1} h_t^{1-\theta} = PMgK = r_t$$

$$\frac{1}{c_t} = \beta E_t \left[\frac{r_t + (1-\delta)}{c_{t+1}} \right] \tag{17}$$

Retomando la ecuación 12) (La derivada de la ecuación de Belman con respecto a h_t), tenemos:

$$\frac{(1-\theta)\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta_t}}{\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}} = -A\frac{1}{1-h_t}$$

$$(1-\theta)(1-h_t)\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta_t} = A\left[\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta_t} + (1-\delta)k_t - k_{t+1}\right]$$

Por 7) y 8), y las condiciones de equilibrio de mercado, sabemos que

$$c_t = \lambda_t k_t^{\theta} h_t^{1-\theta} + (1-\delta)k_t - k_{t+1} \qquad \theta\lambda_t k_t^{\theta} h_t^{-\theta} = PMgH = w_t$$

$$(1-h_t)w_t = Ac_t \tag{18}$$

El modelo entonces, viene dictado por las ecuaciones de optimalidad (18 y 17), las restricciones de tecnología y recursos (7 y 8), las de optimalidad de la empresa (w^* y r^*) y la ecuación de choque 9).

El modelo quedará integrado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[\frac{r_t + (1-\delta)}{C_{t+1}} \right]$$

$$(1 - H_t) w_t = A C_t$$

$$C_t = \lambda_t k_t^{\theta} H_t^{1-\theta} + (1-\delta) K_t - K_{t+1}$$

$$Y_t = \lambda_y K_T^{\theta} H_t^{1-\theta}$$

$$r_t = PMgK_t$$

$$w_t = PMgH_t$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \epsilon_{t+1}$$

Variables: $\{C_t,\ H_t,\ r_t,\ w_t,\ K_t,\ Y_t,\ \lambda_t\}$

Simplificando el modelo

El modelo puede simplificarse para centrar la atención en las variables de mayor relevancia. Un ejemplo sería la *eliminación* de la variable w_t
Sabemos $w_t = PMgL = (1-\theta)\lambda_t K_t^{\theta} H_t^{-\theta}$
Si multiplicamos por H_T

$$w_t H_t = (1-\theta)\lambda_t K_t^{\theta} H_t^{1-\theta}$$

El lado derecho de la expresión corresponde con la tecnología de la empresas

$$w_t H_t = (1-\theta) Y_t$$
$$w_t = (1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} \tag{19}$$

Ahora, podemos sustituir, en el sistema de ecuaciones, el valor de w_t

El modelo quedará integrado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t \left[\frac{r_{t+1} + (1-\delta)}{C_{t+1}} \right] \tag{20}$$

$$(1 - H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} = AC_t \tag{21}$$

$$C_t = Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \tag{22}$$

$$Y_t = \lambda_y K_T^{\theta} H_t^{1-\theta} \tag{23}$$

$$r_t = (\theta)\frac{Y_t}{K_t} \tag{24}$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \epsilon_{t+1} \tag{25}$$

Variables: $\{C_t,\ H_t,\ r_t,\ K_t,\ Y_t,\ \lambda_t\}$

El modelo quedará integrado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t\left[\frac{r_{t+1} + (1-\delta)}{C_{t+1}}\right] \longrightarrow \frac{1}{\bar{C}} = \beta E_t\left[\frac{\bar{r} + (1-\delta)}{\bar{C}}\right] \longrightarrow \bar{r} = \frac{1}{\beta} + (1-\delta)$$

$$(1-H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} = AC_t \longrightarrow (1-\bar{H})(1-\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{H}} = A\bar{C}$$

$$C_t = Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \longrightarrow \bar{C} = \bar{Y} + (1-\delta)\bar{K} - \bar{K} \longrightarrow \bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K}$$

$$Y_t = \lambda_y K_T^{\theta} H_t^{1-\theta} \longrightarrow \bar{Y} = \bar{\lambda}\bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}$$

$$\bar{r} = (\theta)\frac{\bar{Y}}{\bar{K}}$$

$$\bar{\lambda} = 1$$

Ahora debemos escribir el modelo en su forma recursiva.

Redactando el modelo en su forma recursiva
Para comenzar, necesitamos calibrar el modelo

$$\beta = 0.99$$

$$\delta = 0.025$$

$$\theta = 0.36$$

$$A = 2$$

Del resultado de la Ecuación de Euler:

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} + (1 - \delta)$$

Tomar la ecuación en E.E. de la relación consumo-ocio, sustituir la ecuación de la LMK y la ecuación de la productividad marginal del capital y, dado que ya conocemos el valor de $\bar{r}$, despejar para $\bar{H}$

$$\bar{H} = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\theta}(1 - \frac{\delta\theta}{\bar{r}})}$$

Redactando el modelo en su forma recursiva
Para comenzar, necesitamos calibrar el modelo Ahora que ya conocemos a $\bar{H}$ Tomamos el anterior resultado y lo sustituimos en el criterio de optimalidad del capital (PMgK) y despejamos para K

$$\bar{K} = \left(\frac{\theta}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \bar{H}$$

Por último, una vez conocidos los valores de $\bar{K}$ y de $\bar{H}$, es sencillo encontrar el valor de Y

$$\bar{Y} = \bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}$$

Por último, de la Ley del Movimiento del Capital tenemos que:

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K}$$

El modelo para simular estará integrado por las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{C_t} = \beta E_t\left[\frac{r_{t+1} + (1-\delta)}{C_{t+1}}\right] \longrightarrow 0 \approx \tilde{C}_t - E_t\tilde{C}_{t+1} + \beta\bar{r}\tilde{r}_{t+1} \tag{26}$$

$$(1-H_t)(1-\theta)\frac{Y_t}{H_t} = AC_t \longrightarrow 0 \approx \tilde{Y}_t - \frac{1}{1-\bar{H}}\tilde{H}_t - \tilde{C}_t \tag{27}$$

$$C_t = Y_t + (1-\delta)K_t - K_{t+1} \longrightarrow 0 \approx \bar{Y}\tilde{Y}_t - \bar{C}\tilde{C}_t + \bar{K}(1-\delta)\tilde{K}_t - \bar{K}\tilde{K}_{t+1} \tag{28}$$

$$Y_t = \lambda_y K_T^{\theta} H_t^{1-\theta} \longrightarrow 0 \approx \tilde{\lambda}_t + \theta\tilde{K}_t + (1-\theta)\tilde{H}_t - \tilde{Y}_t \tag{29}$$

$$r_t = (\theta)\frac{Y_t}{K_t} \longrightarrow 0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t \tag{30}$$

$$\lambda_{t+1} = \lambda_t + \epsilon_{t+1} \longrightarrow \tilde{\lambda}_{t+1} \approx \gamma\tilde{\lambda}_t + u_{t+1} \tag{31}$$

Variables: $\{C_t,\ H_t,\ r_t,\ K_t,\ Y_t,\ \lambda_t\}$

Log desviaciones

Ecuación de Euler (intert. consumo)

$$0 \approx \tilde{C}_t - E_t\tilde{C}_{t+1} + \beta\bar{r}\tilde{r}_{t+1} \tag{32}$$

Relación de consumo y ocio

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \frac{1}{1-\bar{H}}\tilde{H}_t - \tilde{C}_t \tag{33}$$

Ley de movimiento del capital

$$0 \approx \bar{Y}\tilde{Y}_t - \bar{C}\tilde{C}_t + \bar{K}(1-\delta)\tilde{K}_t - \bar{K}\tilde{K}_{t+1} \tag{34}$$

Función de producción

$$0 \approx \tilde{\lambda}_t + \theta\tilde{K}_t + (1-\theta)\tilde{H}_t - \tilde{Y}_t \tag{35}$$

Optimalidad de la empresa (PMgK)

$$0 \approx \tilde{Y}_t - \tilde{K}_t - \tilde{r}_t \tag{36}$$

Choque tecnológico

$$\tilde{\lambda}_{t+1} \approx \gamma\tilde{\lambda}_t +_{t+1} \tag{37}$$

Variables: $\{C_t,\ H_t,\ r_t,\ K_t,\ Y_t,\ \lambda_t\}$

Estado estacionario

$$\beta = 0.99$$

$$\delta = 0.025$$

$$\theta = 0.36$$

$$A = 2$$

$$\bar{r} = \frac{1}{\beta} + (1-\delta)$$

$$\bar{H} = \frac{1}{1 + \frac{A}{1-\theta}(1 - \frac{\delta\theta}{\bar{r}})}$$

$$\bar{K} = \left(\frac{\theta}{\bar{r}}\right)^{\frac{1}{1-\theta}} \bar{H}$$

$$\bar{Y} = \bar{K}^{\theta}\bar{H}^{1-\theta}$$

$$\bar{C} = \bar{Y} - \delta\bar{K}$$

References

[1] McCandless George. *The ABCs of RBCs: An Introduction to Dynamic Macroeconomic Models*. Harvard University Press, 2008.

[2] Gary Hansen. Indivisible labor and the business cycle. *Journal of Monetary Economic*, 16:309–327, 1985.