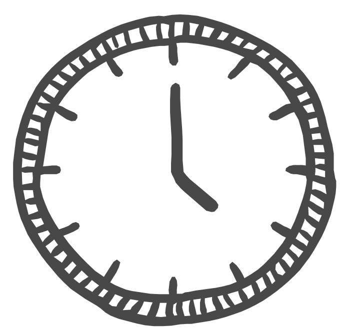
Macroeconomía Dinámica

EC3031 (CEM)

CLASE 7

1

RECESO



Hoy habrá **dos recesos** de 10 minutos:

4:50pm y 5:50pm

2

2

Nuestra agenda de hoy

- Reunión de política monetaria de Banxico
- Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto (parte 2)
- Tarea

3

3

Nuestra agenda de hoy

- Reunión de política monetaria de Banxico
- Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto (parte 2)
- Tarea

4

4

Banxico – 30-sep-2021

Pronósticos de la inflación General y Subyacente

Variación anual en por ciento

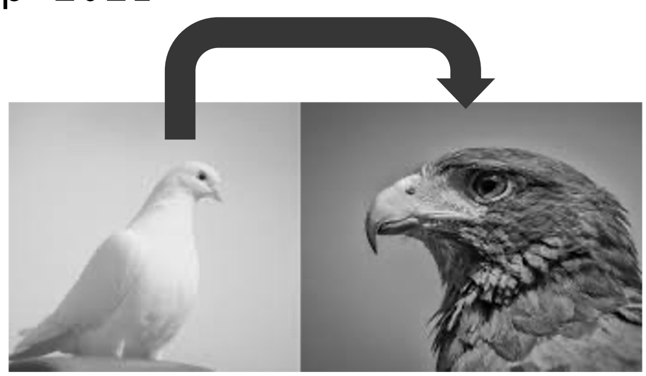
	2021				2022				2023		
	I	**II**	**III**	**IV**	**I**	**II**	**III**	**IV**	**I**	**II**	**III**
INPC											
Actual (30/09/2021)1/	4.0	6.0	5.8	6.2	5.6	4.3	3.5	3.4	3.3	3.2	3.1
Anterior (31/08/2021)2/	4.0	6.0	5.6	5.7	5.2	3.9	3.2	3.4	3.1	3.1	
Subyacente											
Actual (30/09/2021)1/	3.9	4.4	4.8	5.3	5.4	4.8	4.0	3.4	3.1	2.9	2.8
Anterior (31/08/2021)2/	3.9	4.4	4.7	5.0	5.1	4.4	3.6	3.3	3.1	3.0	

1/ Pronóstico a partir de septiembre de 2021.
2/ Pronóstico a partir de agosto de 2021. Informe trimestral abril - junio 2021.
Fuente: INEGI para datos observados y Banco de México para pronósticos.
Nota: Las áreas sombreadas corresponden a cifras observadas.

5

5

Banxico – 30-sep-2021



6

6

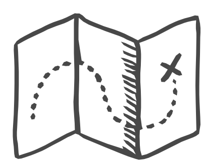
Nuestra agenda de hoy

- Reunión de política monetaria de Banxico
- Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto (parte 2)
- Tarea

7

7

¿Cómo vamos a aprender DP?



	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica

1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

8

8

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos

9

9

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$…

10

10

‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...

11

11

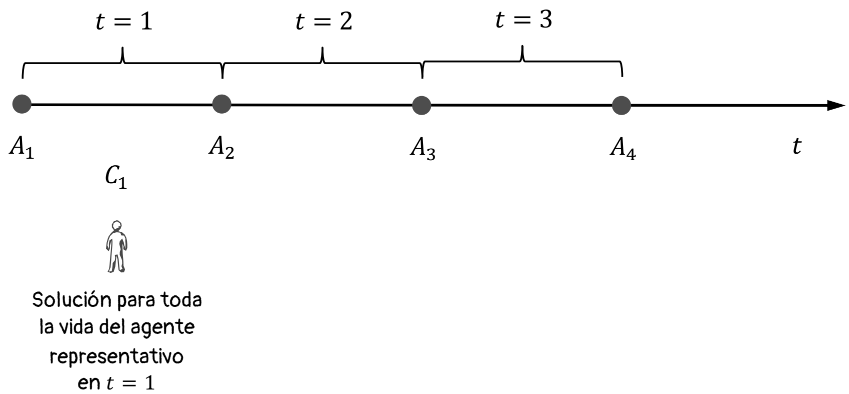
‘Función de política’ (*Policy Function*)

- Una vez más, vamos a utilizar el problema de optimización de la decisión consumo-ahorro (o de consumo inter-temporal) de un agente representativo que vive tres periodos
- Sin embargo, en lugar de resolver las trayectorias óptimas de consumo y nivel de activos para todo el periodo en cuestión desde la perspectiva inicial, *i.e.* $t = 1$...
- ...vamos a posicionarnos en algún momento intermedio en la vida del agente representativo (*i.e.* , $t = 2$ o $t = 3$, porque en $t = 4$ ya terminó) y resolver el problema de optimización...
- Las soluciones que vamos a obtener se conocen también como ‘funciones de política (económica)’, que son una ‘manera alternativa’ de expresar las soluciones óptimas en cada periodo de tiempo

12

12

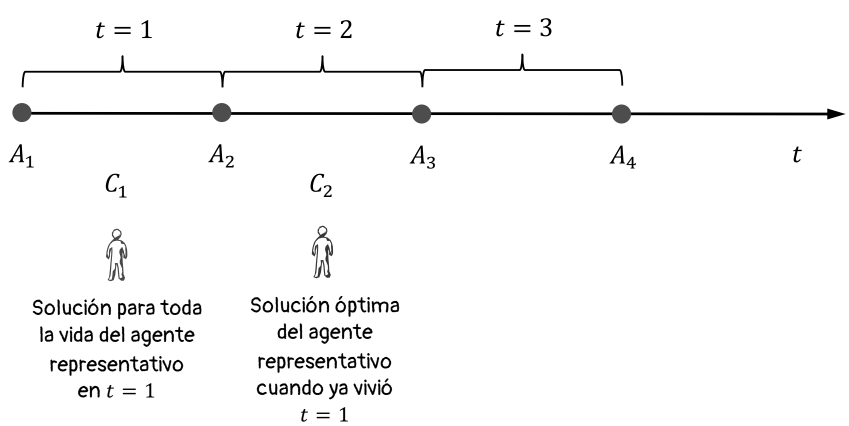
‘Funciones de política’



13

13

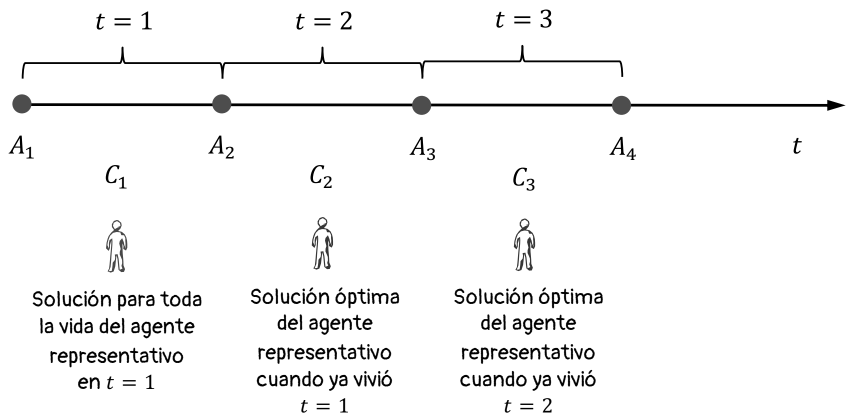
‘Funciones de política’



14

14

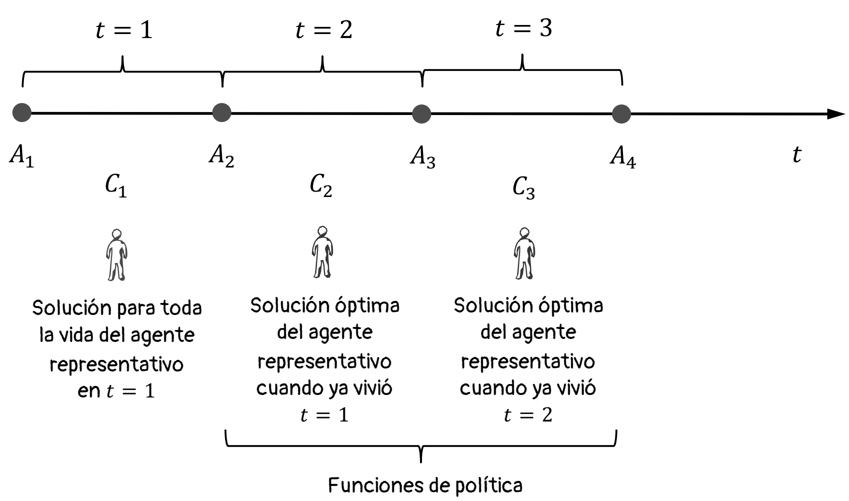
‘Funciones de política’



15

15

‘Funciones de política’



16

16

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$

17

17

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas

18

18

Soluciones 'condicionalmente óptimas'

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las 'funciones de política' son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué 'condicionalmente óptimas'? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente

19

19

Soluciones 'condicionalmente óptimas'

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las 'funciones de política' son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué 'condicionalmente óptimas'? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o 'gorrito' (e.g. $\widehat{C_2}$)

20

20

Soluciones ‘condicionalmente óptimas’

- Entonces vamos a resolver el problema de optimización del agente representativo para $t = 2$ y para $t = 3$
- A diferencia de las soluciones óptimas que obtenemos cuando resolvemos el problema para todo el periodo de tiempo, las ‘funciones de política’ son soluciones condicionalmente óptimas
- ¿Por qué ‘condicionalmente óptimas’? Porque son decisiónes óptimas, pero están condicionadas a los activos que se desea acumular en el periodo siguiente
- Vamos a denotarlas con un acento circunflejo o ‘gorrito’ (e.g. $\widehat{C_2}$)
- Vamos a ver este método como ‘paso intermedio’ para poder entender mejor el concepto de *Programación Dinámica*

21

21

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{c_2, c_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1 + r_1)\, A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)} = C_1 + \frac{C_2}{1+r_2} + \frac{C_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

22

22

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1+\overset{r_2}{\cancel{r_1}})\,\overset{a}{\cancel{A_1}} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

23

23

’Funciones de política’ para $t = 2$

Como vamos a optimizar la decisión del agente representativo en $t = 2$, entonces solo se maximiza la función de utilidad aditiva para los periodos 2 y 3 (en el cuarto periodo el agente representativo ya no puede obtener utilidad):

$$\max_{C_2, C_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

¿Sujeto a?

$$(1+\overset{r_2}{\cancel{r_1}})\,\overset{a}{\cancel{A_1}} + \cancel{w_1} + \frac{w_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)} = \cancel{C_1} + \frac{C_2}{\cancel{1+r_2}} + \frac{C_3}{\cancel{(1+r_2)}(1+r_3)}$$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1+r_3}$$

24

24

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2, c_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

25

25

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2, c_3}\{\ln C_2 + \beta \ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

Podríamos resolverlo con un lagrangiano. Sin embargo, en este caso es más sencillo despejar C_3 de la restricción e incorporar la expresión en la función objetivo. Así lo podemos resolverlo como un problema de optimización no restringido

26

26

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

27

27

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

28

28

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2$$

29

29

'Funciones de política' para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} = C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3}$$

$$C_2 + \frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$\frac{C_3}{1 + r_3} = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2$$

$$C_3 = (1 + r_3)\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2\right]$$

30

30

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

31

31

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0$$

32

32

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta(1+r_3)}{(1+r_3)\left[(1+r_2)a+w_2+\frac{w_3}{1+r_3}-C_2\right]} = 0$$

33

33

’Funciones de política’ para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1 + r_3) \left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a+w_2+\frac{w_3}{1+r_3}-C_2\right]} = 0$$

34

34

'Funciones de política' para $t = 2$

$$\max_{c_2} \left\langle \ln C_2 + \beta \ln \left\{ (1+r_3) \left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 \right] \right\} \right\rangle$$

FOC – Condición de primer orden:

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial C_2} = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{C_2} - \frac{\beta\cancel{(1+r_3)}}{\cancel{(1+r_3)}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2\right]} = 0$$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

35

35

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

36

36

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

37

37

’Función de política’ de C para $t = 2$

$$(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

$$C_2(1 + \beta) = (1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

38

38

'Función de política' de C para $t = 2$

$$(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3} - C_2 = \beta C_2$$

$$\beta C_2 + C_2 = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$C_2(1+\beta) = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$\boxed{\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]}$$

39

39

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$

40

40

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?

41

41

’Función de política’ de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser ‘el par en el tiempo’ de $\widehat{C_2}$

42

42

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*

43

43

'Función de política' de A en $t = 2$

- Ya tenemos $\widehat{C_2}$
- Ahora ¿Qué función de política nos falta para tener el equilibrio completo en $t = 2$?
- Podríamos pensar que $\widehat{A_2}$ por ser 'el par en el tiempo' de $\widehat{C_2}$
- Sin embargo, debido a que A_1 es un parámetro, A_2^* se tuvo que haber obtenido en $t = 1$, por lo que en $t = 2$ tenemos que obtener A_3^*
- No nos dimos cuenta de esto cuando resolvimos el problema de optimización para todo el periodo de tiempo, porque resolvimos todo de manera simultánea. Por esto no nos detuvimos a ver en qué momento en el tiempo el agente representativo toma la decisión sobre su nivel de activos para el siguiente periodo

44

44

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 \qquad \text{(8b)}$$

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces en $t = 2$ tenemos que obtener la función de política de los activos para $t = 3$, *i.e.* $\widehat{A_3}$
- Tomando la restricción o simplemente la expresión (8b):

$$A_3 = (1 + r_2)\, A_2 + w_2 - C_2 \text{...}(8b)$$

- Proponemos la función de política para los activos en $t = 3$:

$$\widehat{A_3} \; = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

47

47

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} \; = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} \; = (1 + r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

48

48

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

- Entonces substituimos $\widehat{C_2}$ en $\widehat{A_3}$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \widehat{C_2}$$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

49

49

'Función de política' de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

50

50

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

51

51

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

52

52

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta-1)(1+r_2)a + (1+\beta-1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

53

53

’Función de política’ de A en $t = 2$ $(\widehat{A_3})$

$$\widehat{A_3} = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - (1+r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+\beta)(1+r_2)a - (1+r_2)a + (1+\beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(\cancel{1}+\beta-\cancel{1})(1+r_2)a + (\cancel{1}+\beta-\cancel{1})w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$
$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1+r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

54

54

’Función de política’ de A en $t = 2$ ($\widehat{A_3}$)

$$\widehat{A_3} = (1 + r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - (1 + r_2)a - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta)(1 + r_2)a - (1 + r_2)a + (1 + \beta)w_2 - w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + \beta - 1)(1 + r_2)a + (1 + \beta - 1)w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{1}{1+\beta}\left[\beta(1 + r_2)a + \beta w_2 - \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\boxed{\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)}$$

55

55

’Funciones de política’ en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

56

56

’Funciones de política’ en $t = 2$

- Así, ya obtuvimos las dos funciones de política para el agente representativo en $t = 2$:
  $\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- Ambas son funciones condicionalmente óptimas porque están en función de a...
- ...por lo que para que $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ sean óptimas, se necesita que $a = A_2^*$

57

57

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:
  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$
  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

.

58

58

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

  $C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

  $A_3^* = (1+r_2)\,\left\langle(1+r_1)\,A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$

59

59

- Entonces las funciones de política $\widehat{C_2}$ y $\widehat{A_3}$ cuando $a = A_2^*$ son:

  $C_2^* = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)A_2^* + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

  $A_3^* = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)A_2^* + w_2]$- $\frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$
- ¿En qué se parecen las funciones de política –que son funciones condicionales-, a las soluciones óptimas para todo el periodo?

  $C_2^* = \frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

  $A_3^* = (1+r_2)\,\left\langle(1+r_1)A_1 + w_1 - \left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right\rangle + w_2 - \left\{\frac{\beta(1+r_2)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)\,A_1 + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}$

60

60

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + \cancel{A_4}^{0}$$

$$A_4 \geq 0$$

$$\max_{C_3}\{\ln[(1+r_3)a + w_3]\}$$

'Funciones de política' en $t = 3$

$$\max_{C_3}\{\ln C_3\}$$

sujeto a:

$$(1 + r_3)a + w_3 = C_3 + A_4$$

$$A_4 \geq 0$$

- Aquí ni siquiera hay necesidad de construir un lagrangiano, ni es necesario obtener alguna derivada. Debido a que sabemos que en óptimo el agente representativo se va a terminar sus recursos (*i.e.* $A_4 = 0$), simplemente con 'cumplir' con la restricción obtenemos el máximo restringido: $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

63

63

'Funciones de política' en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - (1 + r_3)a - w_3$$

64

64

’Funciones de política’ en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

65

65

’Funciones de política’ en $t = 3$

- $\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$
- Ahora, tomando la primera restricción y despejando A_4, la función de política de A_4 sería:

$$\widehat{A_4} = (1 + r_3)a + w_3 - \widehat{C_3}$$

$$\widehat{A_4} = \cancel{(1 + r_3)a} + \cancel{w_3} - \cancel{(1 + r_3)a} - \cancel{w_3}$$

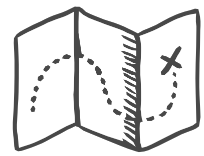
$$\widehat{A_4} = 0 = A_4^*$$

66

66

¿Cómo vamos a aprender DP?

	Número de periodos de tiempo	Determinístico / Estocástico	Método de solución
(1)	Tres	Determinístico	Lagrange
(2)	Tres	Determinístico	Función de política[1]
(3)	Tres	Determinístico	Programación Dinámica
(4)	Infinito	Determinístico	Programación Dinámica
(5)	Tres	Estocástico	Programación Dinámica
(6)	Infinito	Estocástico	Programación Dinámica



1. Realmente no es un método, sino una forma alternativa de expresar las soluciones óptimas, que ayuda a ilustrar la idea conceptual sobre la que descansa la programación dinámica.

Richard E. Bellman

(1920-1984)

Matemático

Principal aportación:

Programación Dinámica

- Lic. en Matemáticas
  Brooklyn College (1941)
- Maestría
  University of Wisconsin (1943)
- Doctorado
  Princeton University (1946)
- Profesor
  Princeton, Stanford, USC

Fuente: https://en.wikipedia.org/wiki/Richard_E._Bellman#/media/File:Richard_Ernest_Bellman.jpg

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para } t = 1,2,3$$
$$A_4 \geq 0$$

69

69

Problema de optimización determinístico de tres periodos (función logarítmica)

Variable de control

$$\max_{\{C_t\}_{t=1}^{3}\{A_t\}_{t=2}^{4}} \sum_{t=1}^{3} \beta^{t-1} \ln C_t$$

sujeto a:

Variable de estado

$$A_{t+1} = (1 + r_t)\, A_t + w_t - C_t \text{ , para } t = 1,2,3$$
$$A_4 \geq 0$$

70

70

‘Principio de Optimalidad’ de Bellman (1957)

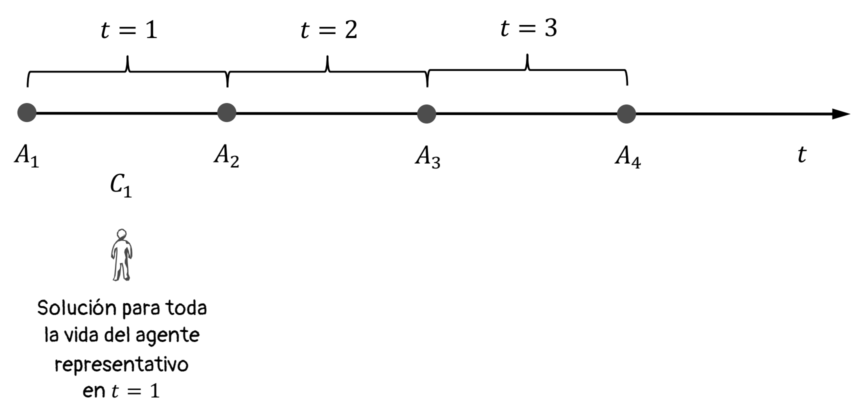
“Una política óptima tiene la propiedad de que cualquiera que haya sido el estado inicial y las decisiones que se hayan tomado, las decisiones hacia delante deben de constituir una política óptima, con respecto al estado que resulte de la primera decisión”

-- Richard Bellman (1957), p. 83

71

71

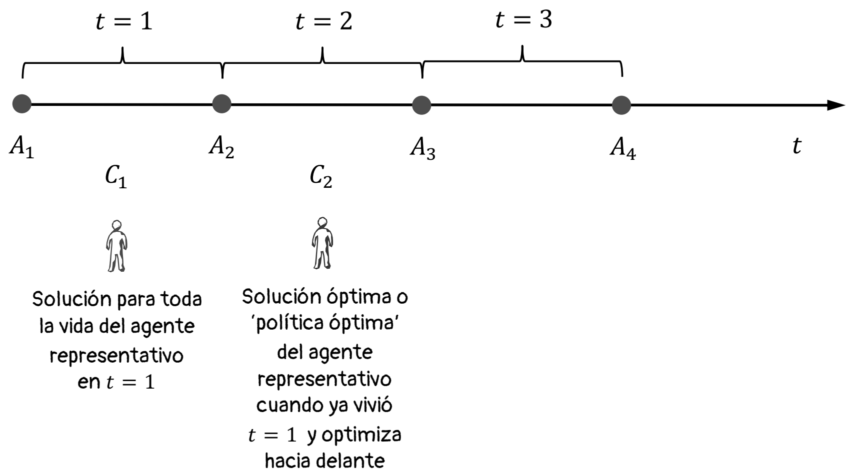
‘Política óptima’



72

72

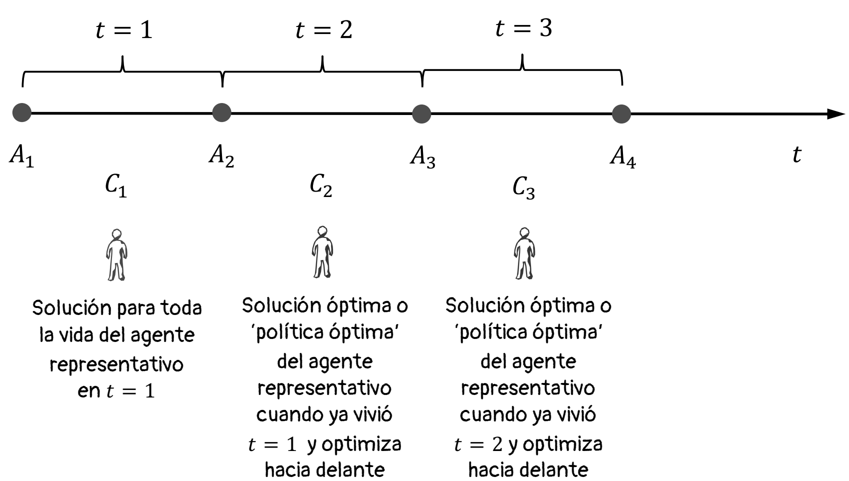
‘Política óptima’



73

73

‘Política óptima’



74

74

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver

75

75

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento

76

76

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'

77

77

Programación Dinámica y Ecuación de Bellman

- Intuitivamente, el método de Programación Dinámica divide un problema complejo de optimización dinámica en subproblemas más simples de resolver
- El método calcula 'funciones valor' que dependen de la 'variable de estado' en cada momento
- A la ecuación que relaciona las funciones valor en el tiempo se le llama 'Ecuación de Bellman'
- La Programación Dinámica puede ser especialmente útil en decisiónes bajo incertidumbre

78

78

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

79

79

La Ecuación de Bellman y la utilidad ’indirecta’

- Las ‘funciones valor’ en nuestro caso son similares al concepto de ‘función de utilidad indirecta’

- La función de utilidad ‘directa’ describe las preferencias, independientemente de lo que ocurre en los mercados, mientras que la función de ‘utilidad indirecta’ refleja condiciones de optimización y precios de mercado

80

80

Digresión: Utilidad indirecta

$$u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$$

81

81

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}}$$

Utilidad
'directa'

82

82

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} \middle| p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

83

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1,x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1,x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda p_1 = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff x_2^{-\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}} - \lambda p_2 = 0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff$$

84

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{2}{2} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{2}{2} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

85

85

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}}} \quad \max_{x_1, x_2} \left\{ 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} | p_1 x_1 + p_2 x_2 = m \right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1 x_1 + p_2 x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{-\frac{1}{2}} x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1} \left(\frac{x_2}{x_1} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} x_1^{\frac{1}{2}} x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2} \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0$$

86

86

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

87

87

Digresión: Utilidad indirecta

$$\boxed{u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}} \qquad \max_{x_1, x_2}\left\{2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} | p_1x_1 + p_2x_2 = m\right\}$$

Utilidad 'directa'

$$\mathcal{L} = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} + \lambda(m - p_1x_1 + p_2x_2)$$

FOC

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{-\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} - \lambda\, p_1 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \iff \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{-\frac{1}{2}} - \lambda\, p_2 = 0 \iff \lambda = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0$$

$$\frac{1}{p_1}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{p_2}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}} = \frac{p_1}{p_2}x_1^{\frac{1}{2}}x_1^{\frac{1}{2}}$$

$$x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

88

88

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

89

89

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1 x_1 - p_2 x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2} x_1$

$m - p_1 x_1 - p_2 \frac{p_1}{p_2} x_1 = 0$

90

90

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$

$m - p_1x_1 - \cancel{p_2}\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 0$

91

91

Digresión: Utilidad indirecta

$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$

$m - p_1x_1 - \cancel{p_2}\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 0$

$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0$

92

92

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - \cancel{p_2}\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \iff m = 2p_1x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

93

Digresión: Utilidad indirecta

$$m - p_1x_1 - p_2x_2 = 0 \qquad x_2 = \frac{p_1}{p_2}x_1$$

$$m - p_1x_1 - \cancel{p_2}\frac{p_1}{\cancel{p_2}}x_1 = 0$$

$$m - p_1x_1 - p_1x_1 = 0 \iff m = 2p_1x_1 \iff x_1^*(p,m) = \frac{m}{2p_1}$$

$$x_2^*(p,m) = \frac{m}{2p_2}$$

Funciones de demanda 'Marshalliana'

La 'utilidad directa' es: $U(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$, entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p,m) = U(x_1^*, x_2^*)$

94

Digresión: Utilidad indirecta

La 'utilidad directa' es $u(x_1, x_2) = 2x_1^{\frac{1}{2}}x_2^{\frac{1}{2}}$ ...

...Entonces la 'utilidad indirecta' es: $v(p, m) = U(x_1^*, x_2^*)$

$$v(p,m) = 2\left(\frac{m}{2p_1}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{m}{2p_2}\right)^{\frac{1}{2}} \iff \boxed{v(p,m) = \frac{m}{(p_1p_2)^{\frac{1}{2}}}}$$

Utilidad 'indirecta'

95

95

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$

96

96

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$
decisiónes óptimas	$x_1^*(p,m)$, $x_2^*(p,m)$ 'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$, $\widehat{A_T}(a;r,w)$ 'Funciones de política'

97

97

Utilidad indirecta | decisiónes óptimas vs. Función valor | funciones de política

Concepto	Problema estático de optimización de un consumidor con dos bienes	Problema dinámico de optimización de un individuo entre consumir y ahorrar un periodo antes del final
Utilidad directa	$u(x_1, x_2)$	$U(C_{T-1}, A_T)$
decisiónes óptimas	$x_1^*(p,m)$, $x_2^*(p,m)$ 'Demandas Marshallianas'	$\widehat{C_{T-1}}(a;r,w)$, $\widehat{A_T}(a;r,w)$ 'Funciones de política'
Utilidad indirecta	$v(p,m) = u[x_1^*(p,m), x_2^*(p,m)]$	$V_{T-1}(a) = U\left[\widehat{C_{T-1}}(a;r,w), \widehat{A_T}(a;r,w)\right]$ 'Función valor'

98

98

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

99

99

‘Ecuación de Bellman’

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la ‘Ecuación de Bellman’ es la siguiente:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo

100

100

'Ecuación de Bellman'

- Para nuestro modelo determinístico de consumo inter-temporal, la 'Ecuación de Bellman' es la siguiente:

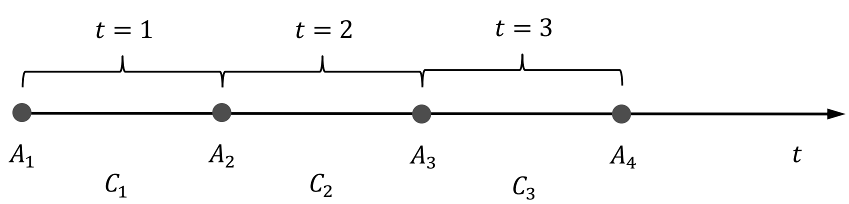
$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

- Es una función recursiva que relaciona las funciones valor en el tiempo
- La idea es resolver para el último periodo, después para los dos últimos periodos, luego para los tres últimos y así sucesivamente

10
1

101

Inducción 'hacia atrás' $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$\cancel{U(C_3) + \beta V_4(A_4)}$

sujeto a

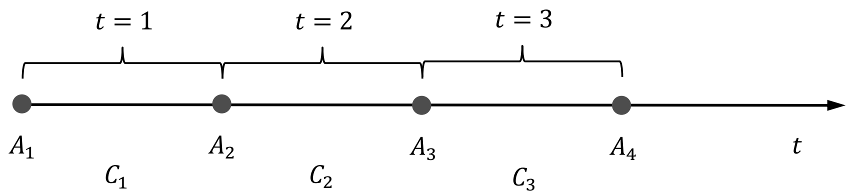
$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancel{A_4} \rightarrow 0$

$\Bigg\}$ Ecuación de Bellman $V_3(A_3)$

10
2

102

Inducción 'hacia atrás' $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar

$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$

sujeto a

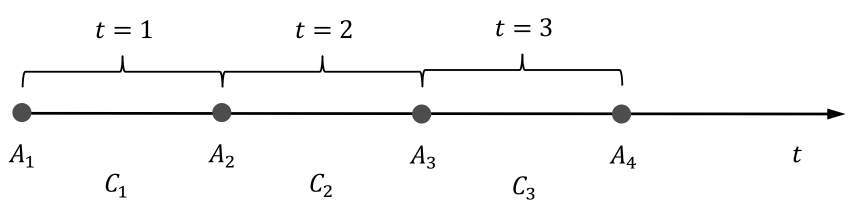
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman $V_2(A_2)$

10
3

103

Inducción 'hacia atrás' $t = 1$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 1$ y ya maximizó en $t = 2$ y $t = 3$

maximizar

$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$

sujeto a

$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

La 'función valor' V_2 ya incorpora las decisiónes óptimas en $t = 2$ y $t = 3$ (*i.e.* las funciones de política $\widehat{C_2}, \widehat{A_3}, \widehat{C_3}, \widehat{A_4}$)

Ecuación de Bellman $V_1(A_1)$

10
4

104

Notación en la 'Ecuación de Bellman'

La 'usanza' en cuanto a notación en Programación Dinámica es que no utilicemos el subíndice de tiempo (t) en las variables de control (C_t) y de estado (A_t) y que en su lugar utilicemos letras minúsculas (c y a). Adicionalmente, se sugiere utilizar el superíndice '$+$', para referirse al 'siguiente periodo' (*e.g.* $a = A_t$ y $a^+ = A_{t+1}$), por lo que el problema:

$$V_t(A_t) = \max_{C_t, A_{t+1}} \left\{ U(C_t) + \beta V_{t+1}(A_{t+1}) \middle| A_{t+1} = (1 + r_t)A_t + w_t - C_t \right\}$$

...quedaría:

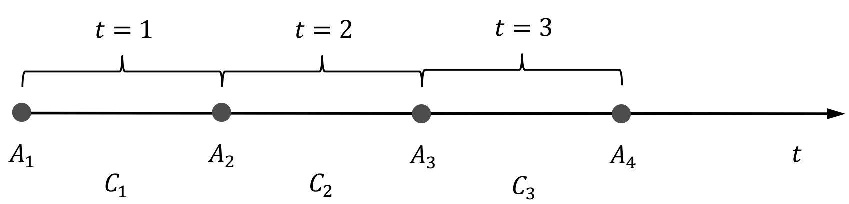
$$V_t(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_{t+1}(a^+) | a^+ = (1 + r_t)a + w_t - c \}$$

Además del superíndice '+' para referirse al periodo siguiente, algunos utilizan el apóstrofe '. Sin embargo, a veces se confunde con la derivada.

105

105

Ahora sí, empecemos en $t = 3$



Problema de optimización del agente representativo cuando solo le queda por vivir $t = 3$

maximizar

$$U(C_3) + \cancel{\beta V_4(A_4)}$$

sujeto a

$$(1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + \cancelto{0}{A_4}$$

Ecuación de Bellman $V_3(a)$

106

106

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4;\, A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

10
7

107

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4;\, A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+;\, a^+ \geq 0\}$$

10
8

108

Programación Dinámica en nuestro problema determinístico de tres periodos

Empecemos por resolver el problema[1] en $t = 3$:

$$V_3(A_3) = \max_{C_3,\, A_4}\{U(C_3) + \beta V_4(A_4) | (1 + r_3)A_3 + w_3 = C_3 + A_4; A_4 \geq 0\}$$

Cambiando la notación:

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_4(a^+) | (1 + r_3)a + w_3 = c + a^+; a^+ \geq 0\}$$

Ya sabemos que el agente representativo no vive en $t = 4$, por lo que no puede generar utilidad, *i.e.* $V_4(a^+) = 0$. Asimismo, sabemos que dejar activos sin consumir en $t = 4$, no incrementa el nivel de utilidad

10
9

109

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta \overset{0}{V_4(a^+)} | (1 + r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+}; a^+ \geq 0\}$$

…por lo que el problema se simplifica a:

11
0

110

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta \overset{0}{V_4(a^+)} | (1 + r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+};\ a^+ \geq 0\}$$

…por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U(c) | (1 + r_3)a + w_3 = c\}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

111

111

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta \overset{0}{V_4(a^+)} | (1 + r_3)a + w_3 = c + \overset{0}{a^+};\ a^+ \geq 0\}$$

…por lo que el problema se simplifica a:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U(c) | (1 + r_3)a + w_3 = c\}$$

Para resolverlo, despejamos c de la restricción presupuestaria y la sustituimos en la función objetivo $U(\cdot)$:

$$V_3(a) = \max_{c}\{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

112

112

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

11
3

113

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{C_3} &= (1 + r_3)a + w_3 \\ \widehat{A_4} &= 0 \end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

11
4

114

$t = 3$

$$V_3(a) = \max_c \{U[(1 + r_3)a + w_3]\}$$

Debido a que en este caso el máximo restringido se alcanza justo en la restricción $c = (1 + r_3)a + w_3$ y $a^+ = 0$, entonces para que $\widehat{C_3} = c$, se necesita que $\widehat{A_4} = a^+$, por lo que las funciones de política son:

$$\boxed{\begin{aligned} \widehat{C_3} &= (1 + r_3)a + w_3 \\ \widehat{A_4} &= 0 \end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

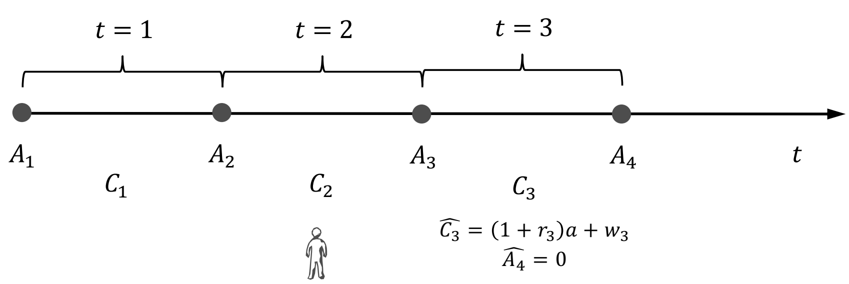
…y por lo tanto:

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

11
5

115

Ahora resolvamos en $t = 2$



Problema de optimización del agente representativo cuando va a vivir en $t = 2$ y ya maximizó en $t = 3$

maximizar
$U(C_2) + \beta V_3(A_3)$
sujeto a
$(1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3$

Ecuación de Bellman
$V_2(a)$

11
6

116

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3}\left\{U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

11
7

117

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3}\left\{U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2)A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+}\left\{U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

11
8

118

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \left\{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2) A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \left\{ U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2) a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción $[a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c]$ e incorporarlo en la función objetivo:

11
9

119

$t = 2$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 2$:

$$V_2(A_2) = \max_{C_2, A_3} \left\{ U(C_2) + \beta V_3(A_3) \middle| (1 + r_2) A_2 + w_2 = C_2 + A_3 \right\}$$

Cambiando la notación:

$$V_2(a) = \max_{c, a^+} \left\{ U(c) + \beta V_3(a^+) \middle| (1 + r_2) a + w_2 = c + a^+ \right\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción $[a^+ = (1 + r_2)a + w_2 - c]$ e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c} \{ U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c] \}$$

12
0

120

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+)\big|(1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

121

121

$t = 2$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+)\big|(1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

122

122

$$t = 2$$

$$V_2(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_3(a^+) \big| (1 + r_2)a + w_2 = c + a^+\}$$

Para resolverlo, podemos despejar a^+ de la restricción e incorporarlo en la función objetivo:

$$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$$

FOC

$$\frac{\partial(\cdot)}{\partial c} = 0 \iff \qquad U'(c) - \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c] = 0$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

12
3

123

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $\qquad V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$$t = 2$$

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

12
4

124

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\ \}$

$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$

125

125

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\ \}$

$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

126

126

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Sabemos que $U(c) = \ln c$, entonces $U'(c) = \frac{1}{c}$

Ahora solo nos falta obtener $V_3{}'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$

¿Cómo obtenemos V_3?

Es necesario incorporar las soluciones óptimas o funciones de política $\widehat{C_3}$ y $\widehat{A_4}$ en la función de utilidad en $t = 3$ y así obtener la 'función valor'

127

127

$\max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:

$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)]$

128

128

$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:

$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

12
9

129

$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:

$\widehat{C_3} = (1+r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$$

$$V_3(a) = \ln[(1+r_3)a + w_3]$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

13
0

130

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Las funciones de política en $t = 3$:

$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

La 'función valor' en $t = 3$, es decir $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$ es[1]:

$$V_3(a) = U[(1 + r_3)a + w_3]$$

$$V_3(a) = \ln[(1 + r_3)a + w_3]$$

Por lo que:

$$V_3'(a) = \frac{(1 + r_3)}{(1 + r_3)a + w_3}$$

1. La 'usanza' en Programación Dinámica es también ya no escribir de manera explícita los parámetros dentro de los paréntesis cuando nos referimos a las funciones. Es decir, en lugar de escribir $V_3(a; r, w) = U\left[\widehat{C_3}(a; r, w), \widehat{A_4}(a; r, w)\right]$, ahora solo la expresamos como $V_3(a) = U\left[\widehat{C_3}(a), \widehat{A_4}(a)\right]$

131

131

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$

132

132

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

13
3

133

$\max_c \{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

…y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$

13
4

134

$\max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1+r_2)a + w_2 - c]\}$ $V_3(a) = U[(1+r_3)a + w_3]$

$t = 2$

Sin embargo, necesitamos $V_3{}'(a^+)$, no $V_3{}'(a)$

Si $V_3'(a) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a+w_3}$, entonces $V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)a^+ + w_3}$

...y ya sabíamos que por la restricción: $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$

Por lo que entonces:

$$V_3'(a^+) = \frac{(1+r_3)}{(1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

13
5

135

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$$ Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3{}'[(1+r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

13
6

136

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

13
7

137

$t = 2$

Ahora sí podemos expresar la condición de primer orden:

$$U'(c) = \beta V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$$

Ecuación de Euler

Con $U'(c)$ y $V_3'[(1 + r_2)a + w_2 - c]$ de manera explícita:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1 + r_3)}{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c\,] + w_3}$$

Resolvemos para c y luego sustituir c en la restricción…

13
8

138

$$t = 2$$

$$\beta(1 + r_3)c \; = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

13
9

139

$$t = 2$$

$$\beta(1 + r_3)c \; = (1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta(1 + r_3)c}{1 + r_3} = \frac{(1 + r_3)[(1 + r_2)a + w_2 - c]}{(1 + r_3)} + \frac{w_3}{1 + r_3}$$

14
0

140

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

14
1

141

$t = 2$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

14
2

142

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

14
3

143

$$t = 2$$

$$\beta(1+r_3)c = (1+r_3)[(1+r_2)a + w_2 - c] + w_3$$

$$\frac{\beta\cancel{(1+r_3)}c}{\cancel{1+r_3}} = \frac{\cancel{(1+r_3)}[(1+r_2)a + w_2 - c]}{\cancel{(1+r_3)}} + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c + \beta c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$(1+\beta)c = (1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}$$

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
4

144

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

14
5

145

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

14
6

146

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

147

147

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{1+\beta-1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

148

148

$t = 2$

Sustituimos $c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$ en la restricción $a^+ = (1+r_2)a + w_2 - c$, para obtener a^+:

$$a^+ = (1+r_2)a + w_2 - \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{1+\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1} + \beta \cancel{- 1}}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

149

149

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

150

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^{+}$ y así:

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

15
1

151

$t = 2$

Las 'funciones de política' en $t = 2$ son:

$$c = \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

Para que $\widehat{C_2} = c$, se necesita que $\widehat{A_3} = a^{+}$ y así:

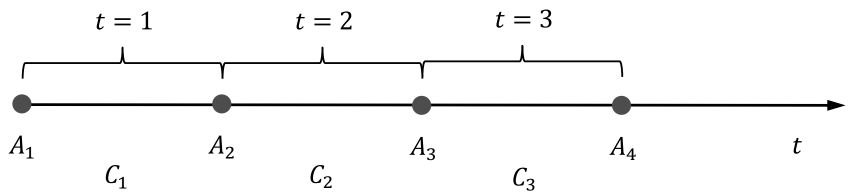
$$\boxed{\begin{aligned}\widehat{C_2} &= \frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\\ \widehat{A_3} &= \frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\end{aligned}}$$

Llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

15
2

152

Inducción 'hacia atrás'



$\widehat{C_3} = (1 + r_3)a + w_3$

$\widehat{A_4} = 0$

$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$

$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$

maximizar
$U(C_1) + \beta V_2(A_2)$
sujeto a
$(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2$

Ecuación de Bellman
$V_1(a)$

15
3

153

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2) \middle| (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \right\}$$

15
4

154

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) | (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) | (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

15
5

155

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2} \{ U(C_1) + \beta V_2(A_2) | (1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2 \}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+} \{ U(c) + \beta V_2(a^+) | (1 + r_1)a + w_1 = c + a^+ \}$$

FOC

$$U'(c) = \beta {V_2}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

15
6

156

$t = 1$

El problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$V_1(A_1) = \max_{C_1, A_2}\left\{U(C_1) + \beta V_2(A_2)\middle|(1 + r_1)A_1 + w_1 = C_1 + A_2\right\}$$

$$V_1(a) = \max_{c, a^+}\left\{U(c) + \beta V_2(a^+)\middle|(1 + r_1)a + w_1 = c + a^+\right\}$$

FOC

$$U'(c) = \beta {V_2}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Ahora, al igual que el problema en $t = 2$, necesitamos $U'(c)$ y ${V_2}'(a^+)$

157

157

$t = 1$

$$U(c) = \ln c$$

$$U'(c) = \frac{1}{c}$$

Ahora solo falta ${V_2}'(a^+)$ y para obtenerla, necesitamos la función valor en $t + 1$, *i.e.* $V_2(a)$

158

158

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$ $V_2(a) = U\left(\widehat{C_2}\right) + \beta V_3\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$

15
9

159

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_{c}\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$ $V_2(a) = U\left(\widehat{C_2}\right) + \beta V_3\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$

$V_2(a) = \ln\left(\widehat{C_2}\right) + \beta \ln\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$

16
0

160

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

16
1

161

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$ $V_2(a) = \max_c\{U(c) + \beta V_3[(1 + r_3)a + w_3]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = U(\widehat{C_2}) + \beta V_3\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$V_2(a) = \ln(\widehat{C_2}) + \beta \ln\left[(1 + r_3)\widehat{A_3} + w_3\right]$$

$$\widehat{C_2} = \frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_3} = \frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1 + r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1 + r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1 + r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

16
2

162

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+ r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3 \right\rangle$$

16
3

163

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+ r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3 \right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle (1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+ r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

16
4

164

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] + \frac{1+\beta-1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$$

165

165

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\} + w_3\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] - \frac{1}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right) + \frac{1+\beta}{1+\beta}\frac{1}{1+r_3}w_3\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta\ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}[(1+r_2)a + w_2] + \frac{\cancel{1}+\beta\cancel{-1}}{1+\beta}\left(\frac{w_3}{1+r_3}\right)\right\}\right\rangle$$

166

166

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

16 7

167

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

16 8

168

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

169

169

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\} + \beta \ln\left\langle(1+r_3)\left\{\frac{\beta}{1+\beta}\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}\right\rangle$$

$$V_2(a) = \overset{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln(1+r_3) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

170

170

$t = 1$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

17
1

171

$t = 1$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\beta^{\beta} - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^{\beta} + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

17
2

172

$t = 1$

$$V_2(a) = -\ln(1+\beta) + \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + \ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right] + \beta\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\beta^\beta - \ln(1+\beta) - \ln(1+\beta)^\beta + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

173

173

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

174

174

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

17
5

175

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$t = 1$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Regresamos a la condición de primer orden del problema de optimización del agente representativo en $t = 1$:

$$U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$$

Ecuación de Euler

Entonces obtenemos $V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$

17
6

176

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

17
7

177

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)(1+r_2)}{1+r_2}}{\frac{(1+r_2)a}{1+r_2} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

17
8

178

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

17
9

179

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{(1+\beta)(1+r_2)}{(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}}$$

Podemos simplicar:

$$V_2{}'(a) = \frac{\frac{(1+\beta)\cancel{(1+r_2)}}{\cancel{1+r_2}}}{\frac{\cancel{(1+r_2)}a}{\cancel{1+r_2}} + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
0

180

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
1

181

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\ \}$

$$t = 1$$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$...
...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

18
2

182

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...
...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ +\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
3

183

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2'(a)$, ahora nos falta $V_2'(a^+)$...
...en donde $a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$V_2'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^+ +\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
4

184

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1 + r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

$$V_2{}'(a) = \frac{1+\beta}{a+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ya tenemos $V_2{}'(a)$, ahora nos falta $V_2{}'(a^+)$…
…en donde $a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - c$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{a^++\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

$$V_2{}'(a^+) = \frac{1+\beta}{(1+r_1)a+w_1-c+\frac{w_2}{1+r_2}+\frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
5

185

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

18
6

186

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c \ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

18
7

187

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1 + r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c \ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

18
8

188

$t = 1$

Ecuación
de Euler

La condición de primer orden $U'(c) = \beta V_2{}'[(1+r_1)a + w_1 - c]$ queda:

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ahora despejamos c y substituimos la expresión que encontremos en la ecuación a^+

18
9

189

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación
de Euler

19
0

190

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta)\ = (1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

19
1

191

$t = 1$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta)\ = (1+r_1)a + w_1 - c\ + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c + c\beta(1+\beta)\ = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

19
2

192

$$t = 1$$

$$\frac{1}{c} = \frac{\beta(1+\beta)}{(1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}}$$

Ecuación de Euler

$$c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 - c + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c + c\beta(1+\beta) = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

$$c[1+\beta(1+\beta)] = (1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}$$

193

$$t = 1$$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

194

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\dots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

19
5

195

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

$\dots a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

19
6

196

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

…$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

19
7

197

$t = 1$

$$c = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Ahora sustituimos la expresión de c en la ecuación de a^+ ...

…$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - c$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = (1+r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

19
8

198

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

19
9

199

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
0

200

$t = 1$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2 \cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
1

201

$t = 1$

$$a^+ = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2 \cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^+ = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
2

202

$t = 1$

$$a^{+} = (1 + r_1)a + w_1 - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2 \cancel{-1}}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$a^{+} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
3

203

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^{+}$, entonces...

20
4

204

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces…

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
5

205

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces…

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

20
6

206

$t = 1$

$\widehat{C_1} = c$ si $\widehat{A_2} = a^+$, entonces…

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Una vez más, llegamos a las mismas funciones de política que en la sección anterior

207

207

$V_1(a) = \max_{c,a^+}\{U(c) + \beta V_2[(1+r_1)a + w_1 - c]\}$

$t = 1$

Ahora, a pesar de que haber obtenido las funciones de política óptima sería suficiente, considero que para entender todo el concepto de Programación Dinámica, es necesario calcular la función valor $V_1(a)$

$$V_1(a) = \max_{c,a^+} U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

208

208

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$t = 1$

Solo que recordemos que...

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

Entonces $\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

209

209

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

210

210

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$U(c) = \ln c$

21
1

211

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$U(c) = \ln c$

21
2

212

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

213

213

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

214

214

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

21
5

215

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a)$$

$$= \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

21
6

216

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

21
7

217

$t = 1$

$$V_1(a) = U(\widehat{C_1}) + \beta V_2(\widehat{A_2})$$

$$U(c) = \ln c$$

$$\widehat{C_1} = \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_2(a) = \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)a + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]$$

$$\widehat{A_2} = \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

21
8

218

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$V_1(a) = \ln\left(\widehat{C_1}\right) + \beta \left\{\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta)\ln\left[(1 + r_2)\widehat{A_2} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}$$

21
9

219

$t = 1$

$$V_1(a) = U\left(\widehat{C_1}\right) + \beta V_2\left(\widehat{A_2}\right)$$

$$V_1(a) = \ln\left(\widehat{C_1}\right) + \beta \left\{\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta)\ln\left[(1 + r_2)\widehat{A_2} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\}$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1 + r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle\ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta \ln(1 + r_3) + (1 + \beta)\ln\left[(1 + r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1 + r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

22
0

220

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

22
1

221

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + w_2 + \frac{w_3}{1+r_3}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

22
2

222

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

22
3

223

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left. r_1)a + w_1] + \frac{1+\beta+\beta^2-1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

22
4

224

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\right[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.r_1)a + w_1] - \frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\right[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.r_1)a + w_1] + \frac{\cancel{1}+\beta+\beta^2-\cancel{1}}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

225

225

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} +$$
$$\beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\right[(1+\right.\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

226

226

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta+\beta^2}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

22
7

227

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

22
8

228

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}[(1+r_1)a + w_1] + \frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[\frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

22
9

229

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^\beta}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

23
0

230

$t = 1$

$$V_1(a) = \ln\left\{\frac{1}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\} + \beta\left\langle \ln\left[\frac{\beta^{\beta}}{(1+\beta)^{1+\beta}}\right] + \beta\ln(1+r_3) + (1+\beta)\ln\left[(1+r_2)\left\{\frac{\beta(1+\beta)}{1+\beta+\beta^2}\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]\right\}\right]\right\rangle$$

$$V_1(a) = \ln(1) - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^{\beta}\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

231

231

$t = 1$

$$V_1(a) = \cancelto{0}{\ln(1)} - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^{\beta}\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

232

232

$t = 1$

$$V_1(a) = \cancel{\ln(1)}^{0} - \ln(1+\beta+\beta^2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln[\beta(1+\beta)] - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta\,(1+\beta)\ln[1+\beta+\beta^2] + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

23
3

233

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta\ln\left(\beta^\beta\right) - \cancel{\beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta)} + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) + \cancel{\beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta)} - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta\,(1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta\,(1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

23
4

234

$t = 1$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) - \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} + \beta (1+\beta)\ln(\beta) + \cancel{\beta (1+\beta)\ln(1+\beta)} - \ln(1+\beta+\beta^2) - \beta (1+\beta)\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + \ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right] + \beta (1+\beta)\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) + \beta (1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

235

235

$t = 1$

$V_1(a) = \beta \ln(\beta^\beta) + \beta (1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2 \ln(1+r_3) + \beta (1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

236

236

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta \ln\left(\beta^{\beta}\right) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta(1+\beta)]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

$$V_1(a) = \beta^2\ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

237

237

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta^2\ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\left[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\right]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

238

238

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\Big[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\Big]$$

$$V_1(a) = \beta(1+2\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\Big[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\Big]$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

239

239

$t = 1$

$$V_1(a) = \beta^2 \ln(\beta) + \beta\,(1+\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\Big[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\Big]$$

$$\boxed{V_1(a) = \beta(1+2\beta)\ln(\beta) - [1+\beta+\beta^2]\ln(1+\beta+\beta^2) + \beta^2\ln(1+r_3) + \beta\,(1+\beta)\ln(1+r_2) + [1+\beta(1+\beta)]\ln\Big[(1+r_1)a + w_1 + \frac{w_2}{1+r_2} + \frac{w_3}{(1+r_2)(1+r_3)}\Big]}$$

Aquí ya no voy a poner en rojo lo que voy a modificar, porque tendría que poner en rojo todo.

240

240

Nuestra agenda de hoy

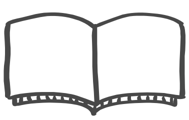
Reunión de política monetaria de Banxico

Introducción a modelos de optimización dinámica en tiempo discreto (parte 2)

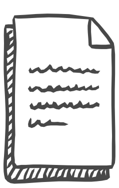
Tarea

24
1

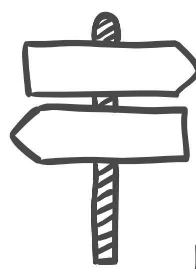
241

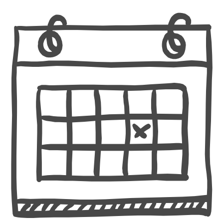


(1) Leer mi columna "¿Qué hará Banxico este jueves?" en *El Financiero* (28-sep)
1 página
https://www.elfinanciero.com.mx/opinion/gabriel-casillas/



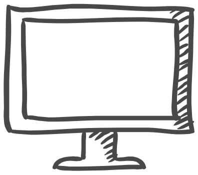
(2) Realizar 'a mano' la Tarea 7, que es un repaso de la solución de un modelo recursivo con función de 'política'
6 páginas
En el sitio de Internet www.gabrielcasillas.mx





24
2

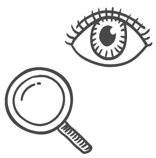
242



(3) Ver el documental "The Mysterious Man Behind The Bellman Equation"

1 hora 26 minutos

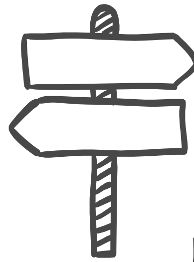
https://www.youtube.com/watch?v=B8I6LIV-c5I

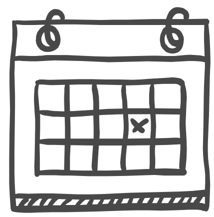


(4) Estar atentos y revisar los datos y eventos económicos que se van a publicar en la semana (en "Global: Flashes recientes")

1 página

https://www.banorte.com/wps/portal/ixe
-
xima/Home/inicio/!ut/p/z1/hY7LDoIwEEW
hQVbOkJBdNdgwjPiI0bsxoDBgimUFITfFx8bEx
-zu3PPmQyiKEG0TvuSpV0p6pSP-
UCto6tPbM9wIIwXoQHEX5u7DV65OAK0_wfQsYY
vQ-4-fSCOSzw8jQBi7OpA7GWAt-
ZMB996AT9uBIgyLrLnu6TODJshKvNzLnOpXeW4
LrquaecqqD

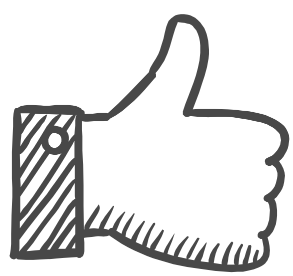




24
3

243

Muchas gracias!



24
4

244

Free templates for all your presentation needs

For PowerPoint and Google Slides

100% free for personal or commercial use

Ready to use, professional and customizable

Blow your audience away with attractive visuals

245