LA VIA DELLA MATEMATICA

VOL. 1 *I CONCETTI DELLA MATEMATICA DI BASE*



di **LEONARDO CABITTA**

illustrazioni di **LUCA GRASSI**

LA VIA DELLA MATEMATICA

VOL. 1 - I CONCETTI DELLA MATEMATICA DI BASE

di Leonardo Cabitta

illustrazioni di Luca Grassi

anno 2026/2027



©Leonardo Cabitta
laviadellamatematica.it

INDICE

INTRODUZIONE 5

PARTE PRIMA - *Il mondo dei numeri* 9

CAP. 1 Gli insiemi numerici 10

CAP. 2 Le 6 operazioni fondamentali 14

CAP. 3 mcm e MCD 21

CAP. 4 Le proporzioni 25

CAP. 5 Le percentuali 30

PARTE SECONDA - *Il mondo delle lettere* 33

CAP. 6 Che cos'è un monomio? 34

CAP. 7 I polinomi 38

CAP. 8 I prodotti notevoli 44

CAP. 9 Scomposizione in fattori dei polinomi 48

CAP. 10 Il teorema di Ruffini 56

CAP. 11 Le espressioni letterali: esempi 59

PARTE TERZA - *Le equazioni* 61

CAP. 12 Le equazioni lineari 62

CAP. 13 Esercizi svolti 69

INDICE

PARTE QUARTA - *La geometria: misurare il mondo* *73*

CAP. 14 Punto, linea, piano: l'alfabeto della geometria 74

CAP. 15 Angoli, parallelismo e perpendicolarità 76

CAP. 16 I poligoni: le figure fondamentali 79

CAP. 17 I triangoli: teoremi e criteri 83

CAP. 18 Il teorema di Pitagora 88

CAP. 19 Il cerchio 89

CAP. 20 La geometria nel piano cartesiano 91

INTRODUZIONE

L'idea di questo libro nasce dall'esigenza di semplificare e rendere accessibili quei concetti che, a volte, sembrano diventare inutilmente complicati a causa del linguaggio matematico con cui vengono presentati.
In queste pagine non troverete le classiche spiegazioni rigorose dei libri di testo, ma un modo diverso di avvicinarsi alla matematica di base: più semplice, più intuitivo e costruito a partire dalle domande che gli studenti si pongono più spesso.

Per questo motivo, questo libro non vuole sostituire il tradizionale manuale scolastico. Vuole piuttosto esserne un **compagno di viaggio**: un testo da consultare quando le cose si fanno troppo complicate, quando si sente il bisogno di tornare alle basi e di capire davvero che cosa si sta facendo e perché lo si sta facendo, elencando anche gli errori più comuni.

Dopo anni di insegnamento, ho deciso di raccogliere in un unico volume le spiegazioni, gli esempi e le immagini che hanno accompagnato le mie lezioni. Questo libro nasce innanzitutto per supportare il mio modo di insegnare, ma il mio augurio è che possa diventare uno strumento utile per molti altri studenti.
Se, grazie a un linguaggio semplice e a un approccio più vicino all'esperienza quotidiana, anche un solo argomento che sembrava difficile diventerà finalmente chiaro, allora questo libro avrà raggiunto il suo obiettivo.



COME LEGGERE IL LINGUAGGIO DELLA MATEMATICA

Prima di iniziare il nostro viaggio, può essere utile conoscere alcuni dei simboli che incontreremo più spesso.
La matematica ha un suo linguaggio: all'inizio può sembrare strano, ma con un po' di pratica diventerà naturale quanto leggere una frase.

Simbolo	*Si legge*	Significato
$=$	*uguale*	I due membri hanno lo stesso valore
$\neq$	*diverso*	I due valori non sono uguali
$+$	*più*	Addizione
$-$	*meno*	Sottrazione
$\times$ oppure $\cdot$	*per*	Moltiplicazione
$:$ oppure $\div$	*diviso*	Divisione
$<$	*minore di*	Il numero a sinistra è più piccolo
$>$	*maggiore di*	Il numero a sinistra è più grande
$\leq$	*minore o uguale*	Minore oppure uguale
$\geq$	*maggiore o uguale*	Maggiore oppure uguale
$\%$	*percento*	Significa "su cento"
$()$	*parentesi tonde*	Indicano quali operazioni svolgere prima
$[\,]$	*parentesi quadre*	Utilizzate nelle espressioni
$\{\,\}$	*parentesi graffe*	Utilizzate negli insiemi e nelle espressioni
$\sqrt{}$	*radice quadrata*	Cerca il numero che elevato al quadrato dà il risultato
$\sqrt[3]{}$	*radice cubica*	Cerca il numero che elevato al cubo dà il risultato
a^2	*a alla seconda*	Potenza di esponente 2
a^3	*a alla terza*	Potenza di esponente 3

a^n	*a alla n*	Potenza di esponente n
π	*pi greco*	Numero irrazionale circa uguale a 3,14
∞	*infinito*	Qualcosa che non ha fine

I SIMBOLI DEGLI INSIEMI NUMERICI

Simbolo	*Nome*	Esempi
$\mathbb{N}$	*numeri naturali*	1,2,3,4,…
$\mathbb{Z}$	*numeri interi*	…,−2,−1,0,1,2,…
$\mathbb{Q}$	*numeri razionali*	1/2, −3/4, 0,75, 0,33,…
$\mathbb{I}$	*numeri irrazionali*	$\sqrt{2}, \pi, \sqrt{3}$,…
$\mathbb{R}$	*numeri reali*	Tutti i numeri precedenti

I SIMBOLI DEGLI INSIEMI

Simbolo	*Si legge*	Significato
$\in$	*appartiene a*	Il numero fa parte di un insieme
$\notin$	*non appartiene a*	Il numero non fa parte di un insieme
$\subset$	*è contenuto in*	Un insieme è contenuto in un altro
$\subseteq$	*è contenuto o uguale*	Tutti gli elementi appartengono all'altro insieme
$\cup$	*unione*	Insieme formato dagli elementi di entrambi gli insiemi
$\cap$	intersezione	Elementi in comune tra due insiemi
$\varnothing$	insieme vuoto	Insieme senza elementi
$\wedge$	e	Congiunzione
$\vee$	o	Disgiunzione

PARTE PRIMA

IL MONDO DEI NUMERI

CAPITOLO 1

Gli insiemi numerici

In questo primo capitolo andremo a vedere come tutti i numeri che conosciamo possono essere raggruppati in vari insiemi, ovvero andremo a suddividere tutti i numeri che hanno delle caratteristiche comuni.
Tutti i numeri che conosciamo vanno sotto il nome di **numeri reali**. All'interno dei numeri reali andiamo a fare delle ulteriori distinzioni.

1° INSIEME - I NATURALI

Contare il mondo

Tutto inizia con un bisogno semplicissimo: contare. Quante penne ho? Quanti giorni mancano alla festa?

I numeri naturali

1,2,3,4,5,6,7…

Li indichiamo con $\mathbb{N}$

2° INSIEME - GLI INTERI

L'ascensore che scende

Immagina di essere in un ascensore e vuoi scendere nei piani sotterranei, che pulsante spingi? **I numeri negativi!**
I numeri naturali quindi non sono più sufficienti: non sanno andare "sotto lo zero", abbiamo bisogno dei numeri interi. Allarghiamo la nostra famiglia di numeri aggiungendo i numeri negativi:

I numeri interi

$\mathbb{N}$

…-3,-2,-1,0,1,2,3….

Li indichiamo con $\mathbb{Z}$

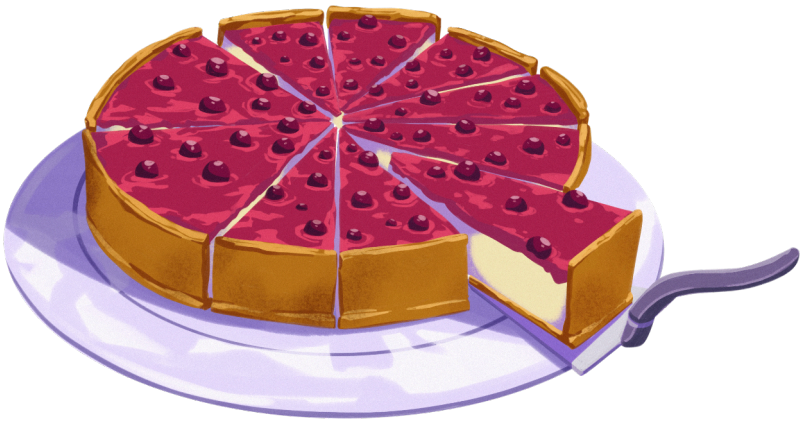
Ricorda!

$\mathbb{N}$ è incluso in $\mathbb{Z}$, cioè tutti i numeri naturali sono anche numeri interi.

3° INSIEME - I RAZIONALI

1.1. Tagliare la torta

Naturali e interi hanno ancora un limite: non sanno esprimere le parti.
Se divido una torta in 10 fette e ne prendo 1, quanto ho? Ne ho 1/10, **cioè 1 parte di 10**.
I numeri razionali sono tutti quelli che si possono scrivere come frazione di due numeri interi, con denominatore diverso da 0.



I numeri razionali

$\ldots -2, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 3, \ldots$

Li indichiamo con $\mathbb{Q}$

1.2. Due modi di scrivere gli stessi numeri

Ogni numero razionale può essere scritto in due modi diversi:

1. Frazione

$\ldots \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{2}, \frac{6}{8}, \ldots$

Alcune frazioni danno come risultato decimali infiniti che si ripetono:
sono i **numeri periodici.**

2. Numeri con la virgola

$\frac{1}{2} \rightarrow 0{,}5$

$\frac{3}{4} \rightarrow 0{,}75$

$\frac{5}{2} \rightarrow 2{,}5$

Numeri periodici

$\frac{2}{9} \rightarrow 0{,}2222\ldots \rightarrow 0{,}\overline{2}$

$\frac{5}{9} \rightarrow 0{,}5555\ldots \rightarrow 0{,}\overline{5}$

$\frac{7}{9} \rightarrow 0{,}7777\ldots \rightarrow 0{,}\overline{7}$

Per trasformare un numero periodico in frazione:

1. scrivi al numeratore l'intero numero senza virgola meno la parte non periodica;
2. scrivi al denominatore tanti 9 quante sono le cifre del periodo e tanti 0 quante sono le cifre dell'antiperiodo.

Da periodico a frazione

Antiperiodo

$$1,\overline{458} = \frac{1458-14}{990} = \frac{1444}{990}$$

Periodo

$$1,\overline{75} = \frac{175-1}{99} = \frac{174}{99}$$

Ricorda!

I numeri razionali sono molto importanti perché, grazie alle frazioni, possiamo generare numeri interi ($\mathbb{Z}$) e numeri decimali (finiti o infiniti periodici).

4° INSIEME - GLI IRRAZIONALI

I numeri ribelli

Esistono numeri che non possono essere scritti come rapporto tra due interi (non possono essere espressi come frazione).
Sono i **numeri irrazionali**.

Irrazionali

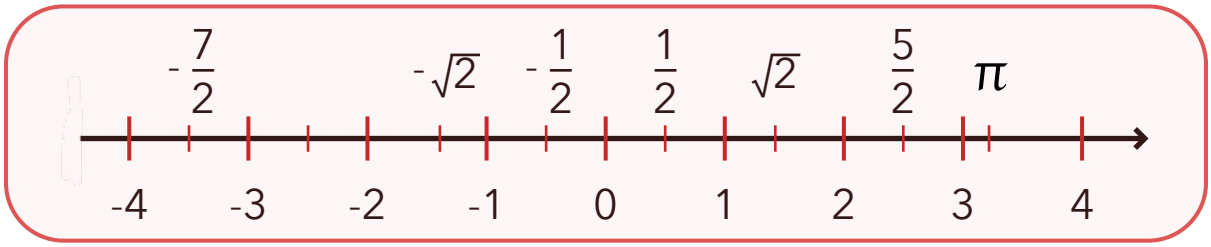
$\sqrt{2}, \sqrt{3}, e, \pi, \ldots$

Li indichiamo con $\mathbb{I}$

5° INSIEME - I REALI

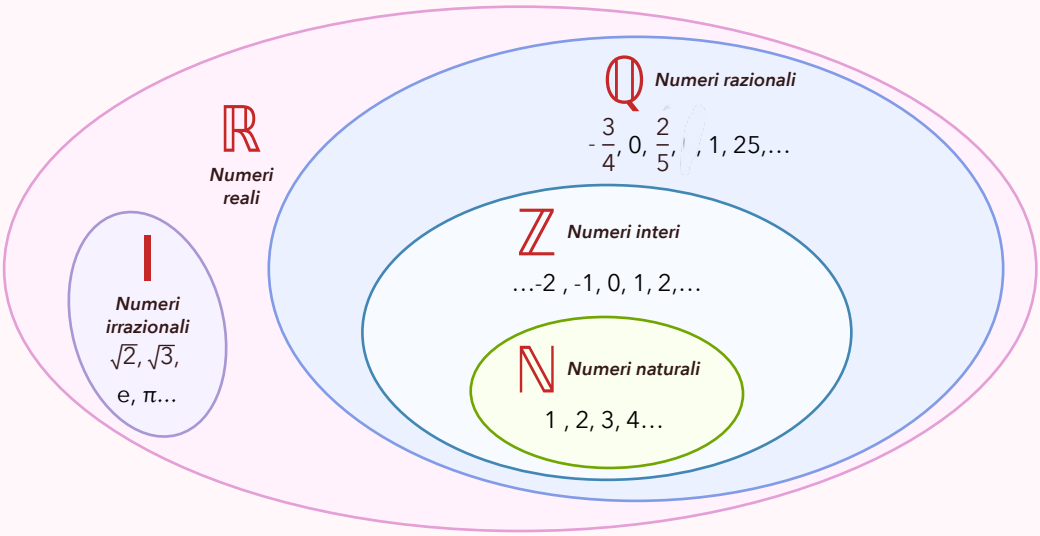
La famiglia completa

Unendo i numeri razionali con gli irrazionali otteniamo l'insieme dei numeri reali.
I numeri reali comprendono tutti i numeri che possono essere rappresentati sulla retta numerica.



Li indichiamo con $\mathbb{R}$

In sintesi



Fermati e verifica!

Per ciascun numero, indica a quale insieme (o insiemi) appartiene.

Numero	Insieme
9	
$-\frac{4}{3}$	
0	
$\sqrt{5}$	
2,3333...	

Hai capito?

Rispondi alle domande per verificare le **tue conoscenze**.

- Quali sono i numeri naturali?
- Che differenza c'è tra interi e naturali?
- Cosa sono i numeri razionali?
- Cosa sono gli irrazionali?
- Qual è l'insieme più grande che contiene tutti gli altri?

CAPITOLO 2

Le 6 operazioni fondamentali

+	−	X	÷	a^n	$\sqrt{a}$
Somma	*Sottrazione*	*Moltiplicazione*	*Divisione*	*Elevamento a potenza*	*Estrazione di radice*



Queste operazioni costituiscono gli **strumenti fondamentali** del calcolo e saranno utilizzate in tutti gli argomenti successivi della matematica.

L'obiettivo è quello di vedere come interagiscono i numeri con queste operazioni.

Un'idea fondamentale

Ogni operazione ha infatti una **corrispondente operazione inversa**, cioè un'operazione capace di annularne l'effetto e di riportarci al numero di partenza.

Riepilogo visivo

Somma ⇄ Sottrazione	Moltiplicazione ⇄ Divisione	Potenza ⇄ Radice
+ ⇄ −	X ⇄ ÷	a^n ⇄ $\sqrt{a}$
Aggiungere / Togliere	Formare gruppi / Separare gruppi	
La **sottrazione** annulla la **somma**.	La **divisione** annulla la **moltiplicazione**.	La **radice** annulla la **potenza** (con le opportune condizioni).

SOMMA E SOTTRAZIONE

Se aggiungiamo una certa quantità e poi la togliamo, torniamo esattamente al punto di partenza.

$5 + 3 = 8$

Se partiamo da 8 e sottraiamo 3, otteniamo di nuovo 5:

$8 - 3 = 5$

Fermati e verifica!

1. $15 + 8 - 6 + 12 - 9$ = [ ]
2. $16 - 2 + 6 - 5$ = [ ]
3. $-7 + 2 + 8 + 2 - 5$ = [ ]
4. $18 - (7 + 4) + 15 - (6 - 2)$ = [ ]
5. $23 + (18 - 9) - (7 - 5) + 10$ = [ ]
6. $40 - (12 + 8) + (15 - 6) - (9 - 5)$ = [ ]

Ricorda!

Le **parentesi** hanno la precedenza. Svolgile per prime!

MOLTIPLICAZIONE E DIVISIONE

Anche la moltiplicazione ha la sua operazione inversa.

$4 \cdot 3 = 12$

Se partiamo da 12 e dividiamo per 3, otteniamo di nuovo 4:

$12 : 3 = 4$

Fermati e verifica!

1. $(6 + 2) \cdot 3 - 4$ = [ ]
2. $20 - (8 : 2 + 3)$ = [ ]
3. $(10 - 4) \cdot 2 + 5$ = [ ]
4. $18 : (3 + 3) + 6$ = [ ]
5. $(7 + 5) \cdot (2 - 1)$ = [ ]
6. $(18 : 3) + 7$ = [ ]

ELEVAMENTO A POTENZA E RADICE

1.1. Le potenze

Una potenza è una moltiplicazione ripetuta dello stesso numero.
Si scrive così:

Potenze

$a^n = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots a$ (*n* volte)

Ricorda!

- **a** è la base
- ***n*** è l'esponente
- a^n si legge "a alla n"

Esempi

$2^4 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16$ $\qquad$ $5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$

$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = 9$ $\qquad$ $(-2)^3 = (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) = -8$

Se la **base** è negativa e **esponente** pari, il **risultato** è positivo.

Se la **base** è negativa e **esponente** dispari, il **risultato** è negativo.

Errore comune

Molti pensano:
- $5^2 = 5 \cdot 2$ ✗

Invece:
- $5^2 = 5 \cdot 5$ ✓

1.2. Proprietà delle potenze

Le potenze con la stessa base seguono alcune regole:

Operazione	Regola	Esempi
Moltiplicazione	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^3 \cdot 2^5 = 2^{3+5} = 2^8$
Divisione	$a^m : a^n = a^{m-n}$ con $a \neq 0$ e $m \geq n$	$x^7 : x^3 = x^{7-3} = x^4$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$
Potenza di un prodotto	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$	$(2x)^3 = 2^3 \cdot x^3 = 8x^3$
Potenza di un quoziente	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ con $b \neq 0$	$\left(\frac{2x}{3}\right)^2 = \frac{2^2 \cdot x^2}{3^2} = \frac{4x^2}{9}$



Casi particolari

- $a^1 = a$
- $a^0 = 1 \ (a \neq 0)$

1.3. Proprietà delle potenze con lo stesso esponente

Le potenze con lo stesso esponente seguono alcune regole:

Operazione	Regola	Esempi
Moltiplicazione	$a^m \cdot b^m = (a \cdot b)^m$ con $a, b \neq 0$	$2^5 \cdot 3^5 = (2 \cdot 3)^5 = 6^5$
Divisione	$a^m : b^m = \left(\frac{a}{b}\right)^m$ con $b \neq 0$	$10^4 : 2^4 = \left(\frac{10}{2}\right)^4 = 5^4$
Potenza di potenza	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$ con $a \neq 0$	$(3^2)^4 = 3^{2 \cdot 4} = 3^8$
Potenza di un prodotto	$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$(2 \cdot 5)^3 = 2^3 \cdot 5^3$
Potenza di un quoziente	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$ con $b \neq 0$	$\left(\frac{12}{3}\right)^4 = \frac{12^4}{3^4} = 4^4$

LE RADICI

La radice è l'operazione inversa dell'elevamento a potenza.
La radice *n-esima* di un numero **a** è quel numero che, elevato alla *n*, restituisce **a**.
Si scrive così:

Regola

$\sqrt[n]{a} = b \longleftrightarrow b^n = a$ con $b \geq 0$

Ricorda!

Una radice di indice **pari** di un numero negativo non esiste nei numeri reali (*$\sqrt{-4}$ **non esiste** nei reali!*)

Radice quadrata

È la radice di indice 2.

- $\sqrt{9} = 3$ perché $3^2 = 9$
- $\sqrt{16} = 4$ perché $4^2 = 16$
- $\sqrt{25} = 5$ perché $5^2 = 25$
- $\sqrt{2}$ non è un numero intero (è un numero irrazionale) infatti $\sqrt{2} = 1{,}41421\ldots$

Radice *n*-esima

È la radice di indice *n*.

- $\sqrt[3]{8} = 2$ perché $2^3 = 8$
- $\sqrt[3]{-27} = -3$ perché $(-3)^3 = -27$
- $\sqrt[4]{16} = 2$ perché $2^4 = 16$
- $\sqrt[5]{32} = 2$ perché $2^5 = 32$

PROPRIETÀ DELLE RADICI

Anche le radici seguono regole precise:

Operazione	Regola	Esempi
Radice di un prodotto	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$ con $a \geq 0, b \geq 0$	$\sqrt{18} = \sqrt{9 \cdot 2} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
Radice di un quoziente	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ con $a \geq 0, b > 0$	$\sqrt{\frac{50}{2}} = \frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{25 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{25} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{5 \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = 5$
Radice di una potenza	$\sqrt[n]{a^n} = a^{n/n}$ con $a \geq 0$ e n intero	$\sqrt{3^2} = 3^{2/2} = 3^1 = 3$
Radice di radice	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a^n}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$ con $a \geq 0$	$\sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[6]{8}$

Fermati e verifica!

Semplifica le seguenti espressioni:

1. $2^3 \cdot 2^4$ = [ ]
2. $x^6 : x^2$ = [ ]
3. $(3x)^2$ = [ ]
4. $\sqrt{72}$ = [ ]
5. $\sqrt[3]{\frac{45}{5}}$ = [ ]
6. $\sqrt{64}$ = [ ]

IL LEGAME TRA POTENZE E RADICI

Le radici si possono scrivere come potenze con esponente frazionario e, viceversa, le potenze con esponente frazionario si possono scrivere come radici.

Dalla radice alla potenza

La radice *n*-esima di a si può scrivere come potenza con esponente $\frac{1}{n}$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

con $a \geq 0$

Dalla potenza alla radice

La potenza con esponente frazionario $\frac{1}{n}$ si può scrivere come radice *n*-esima.

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

con $n \geq 2$, $a \geq 0$

In generale, per $m, n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 2$ e $a \geq 0$;

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$ Viceversa $$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

Esempi

- $\sqrt[3]{8} = 8^{\frac{1}{3}} = 2$
- $\sqrt[4]{16} = 16^{\frac{1}{4}} = 2$
- $\sqrt[5]{32} = 32^{\frac{1}{5}} = 2$
- $9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3$
- $27^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{27} = 3$
- $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = (\sqrt[4]{16})^3 = 2^3 = 8$
- $81^{\frac{2}{4}} = \sqrt[4]{81^2} = (\sqrt[4]{81})^2 = 3^2 = 9$
- $a^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{a^3}$



Gli esponenti negativi

L'esponente negativo **ribalta** il numeratore con il denominatore:

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

con $a \neq 0$ e $n \in \mathbb{N}$

Un modo semplice per risolvere una potenza con esponente negativo è quello di risolvere prima il segno "−" ribaltando la frazione e poi elevarla.

Esempio $\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}$

STEP 1 $\left(\frac{2}{5}\right)^{3}$ *Ribalto*

STEP 2 $\frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$ *Risolvo*

Errore comune

Molti pensano:

$6^{-2} = -6^2$ ✗

Il segno dell'esponente non ha **nessuna relazione** con il segno della base.

Esempi

- $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$
- $\left(\frac{3}{4}\right)^{-2} = \left(\frac{4}{3}\right)^{2} = \frac{16}{9}$
- $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0{,}1$
- $\frac{2^{-2} \cdot 3^{-2}}{6^{-2}} = \frac{6^{-2}}{6^{-2}} = 1$
- $5^{-3} = \frac{1}{5^3} = \frac{1}{125}$
- $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4} = \frac{1}{16}$
- $a^{-3} = \frac{1}{a^3}$ con $a \neq 0$
- $(5^{-2})^3 = 5^{-6} = \frac{1}{5^6}$

CAPITOLO 3

mcm e MCD

In questo capitolo introduciamo due concetti fondamentali che useremo spesso in seguito. Sono idee semplici ma molto potenti perché ci aiuteranno a risolvere tanti tipi di problemi in modo più veloce e organizzato.

Idea chiave

mcm	MCD
Minimo numero comune tra i multipli.	Massimo numero che divide esattamente più numeri.

Come funziona

1. Scomposizione

↓

Scomponiamo ogni numero in **fattori primi**.

→

2. mcm

↓

Si prendono **tutti** i fattori, comuni e non comuni, con l'esponente più grande.

3. MCD

↓

Si prendono **solo** i fattori comuni con l'esponente più piccolo.

Ricorda!

- **mcm:** maggiore o uguale al numero più grande tra quelli analizzati.
- **MCD:** minore o uguale al numero più piccolo tra quelli analizzati.

SCOMPOSIZIONE IN FATTORI PRIMI

La scomposizione in fattori primi consiste nello scrivere un numero come prodotto di numeri primi.

Numeri primi

Sono numeri naturali maggiori di 1 **divisibili solo** per 1 e se stessi.

2,3,5,7,11,13...

Ricorda!

- Il risultato non cambia se i fattori si scrivono in un ordine diverso;
- I fattori primi possono ripetersi.

Esempio 1

Scomponi 60 in fattori primi.

60	2
30	2
15	3
5	5
1	

60 = 2 • 2 • 3 • 5
60 = 2^2 • 3 • 5

Esempio 2

Scomponi 84 in fattori primi.

84	2
42	2
21	3
7	7
1	

84 = 2 • 2 • 3 • 7
84 = 2^2 • 3 • 7

Esempio 3

Scomponi 225 in fattori primi.

225	3
75	3
25	5
5	5
1	

225 = 3 • 3 • 5 • 5
225 = 3^2 • 5^2

Esempio 4

Scomponi 360 in fattori primi.

360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

360 = 2 • 2 • 2 • 3 • 3 • 5
360 = 2^3 • 3^2 • 5

Esempi di utilizzo

- **Trovare il mcm tra 12, 26 e 90**

$12 = 2^2 \cdot 3$
$26 = 2 \cdot 13$
$90 = 2 \cdot 3^2 \cdot 5$

→ • Prendo tutti i termini comuni e non comuni.
• Di quelli comuni prendo quelli con l'esponente più alto.

mcm (12, 26, 90) = $2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 13 =$ **2340**

- **Trovare il MCD tra 60 e 225**

$60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$
$225 = 3^2 \cdot 5^2$

→ • Prendo solo i termini comuni con l'**esponente più piccolo**: 3 e 5.

MCD (60,225) = $3 \cdot 5 =$ **15**

Fermati e verifica!

Trova il **mcm** dei seguenti numeri:

1. (6 ; 8) = [ ]
2. (12 ; 18) = [ ]
3. (15 ; 20) = [ ]
4. (9 ; 12 ; 18) = [ ]

Trova il **MCD** dei seguenti numeri:

1. (24 ; 36) = [ ]
2. (45 ; 75) = [ ]
3. (26 ; 42) = [ ]
4. (30 ; 48) = [ ]

SOMMARE E SOTTRARRE FRAZIONI USANDO L'mcm

L'**mcm** torna utile se devo sommare 2 o più frazioni che hanno denominatore diverso, infatti:

Esempio

- $\frac{2}{5} + \frac{8}{5} = \frac{10}{5}$ ✓
- $\frac{2}{5} + \frac{8}{7} = ?$

Se ho i **denominatori diversi** devo utilizzare l'mcm tra loro.

5	5
1	

$5 = 5$

7	7
1	

$7 = 7$

→ mcm: $5 \cdot 7 = 35$

35 quindi è il nuovo denominatore per entrambe le frazioni.

Devo dunque **moltiplicare** il numeratore per lo **stesso numero** che ha moltiplicato il denominatore.

$\frac{2}{5} \xrightarrow{\times 7} \frac{14}{35}$

$\frac{8}{7} \xrightarrow{\times 5} \frac{40}{35}$

$\frac{14}{35} + \frac{40}{35} = \frac{54}{35}$

Fermati e verifica!

1. $\frac{3}{4} + \frac{2}{3} = [\quad]$
2. $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} = [\quad]$
3. $\frac{3}{5} + \frac{7}{6} = [\quad]$
4. $\frac{7}{9} - \frac{1}{6} = [\quad]$

CAPITOLO 4

Le proporzioni

Le proporzioni non sono altro che un'uguaglianza di rapporti.
Facciamo un esempio trovando due rapporti che danno lo stesso risultato:

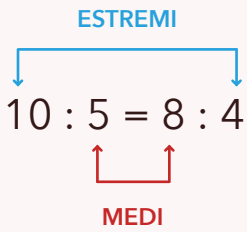
Esempio

$10 : 5 = 2$ ma anche $8 : 4 = 2$

↓ Quindi

$$10 : 5 = 8 : 4$$

Le due divisioni sono uguali perché diamo lo stesso risultato, cioè **2**.
La scrittura **10 : 5 = 8 : 4** prende il nome di **proporzione**, vediamo tutti gli elementi:



Proprietà importante

Il prodotto dei **medi** è uguale al prodotto degli **estremi**.
Infatti:

$5 \cdot 8 = 40$ ma anche $10 \cdot 4 = 40$

Altri esempi

1. $15 : 5 = 3$ ma anche $6 : 2 = 3$

↓ Quindi

$15 : 5 = 6 : 2$

- MEDI → $5 \cdot 6 = \mathbf{30}$
- ESTREMI → $15 \cdot 2 = \mathbf{30}$

2. $18 : 9 = 2$ ma anche $14 : 7 = 2$

↓ Quindi

$18 : 9 = 14 : 7$

- MEDI → $9 \cdot 14 = \mathbf{126}$
- ESTREMI → $18 \cdot 7 = \mathbf{126}$

La proprietà dei medi e degli estremi ci torna molto utile quando abbiamo un elemento della proporzione che è **incognito**:

$$4 : 2 = \boldsymbol{x} : 5$$

Sfruttando la proprietà sappiamo che:

Altri esempi

- MEDI → $2 \cdot x =$ (Deve fare **20**)
- ESTREMI → $4 \cdot 5 = \mathbf{20}$

Quindi $x = 10$ poiché è l'unico numero per cui $2 \cdot 10 = 20$.
Quindi:

$$4 : 2 = 10 : 5$$

2 2

ESERCIZI SVOLTI

Altri esempi

$$x : 2 = 24 : 8$$

- **MEDI** → $2 \cdot 24 = \mathbf{48}$
- **ESTREMI** → $x \cdot 8 =$ (Deve fare **48**)

$x = 6$ perché $6 \cdot 8 = 48$
Quindi:

$$\underset{\downarrow}{6} : 2 = 24 : \underset{\downarrow}{8}$$
$$3 \qquad\qquad 3$$

Altri esempi

$$4 : x = 20 : 5$$

- **MEDI** → $x \cdot 20 =$ (Deve fare **20**)
- **ESTREMI** → $4 \cdot 5 = \mathbf{20}$

$x = 1$ perché $1 \cdot 20 = 20$
Quindi:

$$\underset{\downarrow}{4} : 1 = 20 : \underset{\downarrow}{5}$$
$$4 \qquad\qquad 4$$

Altri esempi

$$18 : 6 = 9 : x$$

- **MEDI** → $6 \cdot 9 = \mathbf{54}$
- **ESTREMI** → $18 \cdot x =$ (Deve fare **54**)

$x = 3$ perché $18 : 3 = 6$
Quindi:

$$\underset{\downarrow}{18} : 6 = 9 : \underset{\downarrow}{3}$$
$$3 \qquad\qquad 3$$

LA PROVA DELLE PROPORZIONI



La ricetta

Nora vuole preparare la pasta al sugo con i suoi amici, in tutto sono in 4 e la ricetta consiglia:

- **600** g di pomodori
- **100** g di cipolla

All'ultimo si aggiungono 2 persone, quindi Nora decide di mettere **900** grammi di pomodoro, quanta cipolla dovrà mettere?

RISOLUZIONE

Il rapporto tra i pomodori e la cipolla non deve cambiare:

$$600 : 100 = 900 : x$$

Quindi utilizzando la proprietà dei **medi** e degli **estremi** sappiamo che:

- **MEDI** → $100 \cdot 900 =$ **90000**
- **ESTREMI** → $600 \cdot x =$ (Deve fare **90000**)

- $600 \cdot x = 90000$ → $x = \frac{90000}{600} =$ **150** g

Ci vorranno **150** g di cipolla!

Ricorda!

Quando due grandezze sono direttamente proporzionali, se una raddoppia, l'altra raddoppia. Se una triplica, l'altra triplica. Hanno lo **stesso rapporto!**



Per risolvere le proporzioni quindi basta usare la proprietà dei medi e degli estremi.

In alternativa puoi sempre ricordarti che stai facendo l'uguaglianza di due rapporti il cui risultato è quindi lo stesso, ti faccio vedere:

Un esempio

$$14 : 7 = 8 : x$$

- Il primo rapporto è 14 : 7 che fa **2**
- Il secondo rapporto è 8 : *x* che deve fare **2**

Quindi qual è quel valore che messo al posto della ***x*** mi dà 8 : *x* = 2? IL **4**.
Infatti:

- $14 : 7 = \mathbf{2}$
- $8 : 4 = \mathbf{2}$

I 2 rapporti sono uguali e posso scrivere:

↓

$$14 : 7 = 8 : 4$$

CAPITOLO 5

Le percentuali

La parola percentuale significa "per cento". Indica una parte su 100.
Quindi vogliamo intendere una parte del totale.
Facendo subito un esempio, se parliamo del 50% perché stiamo prendendo la metà?

Esempio

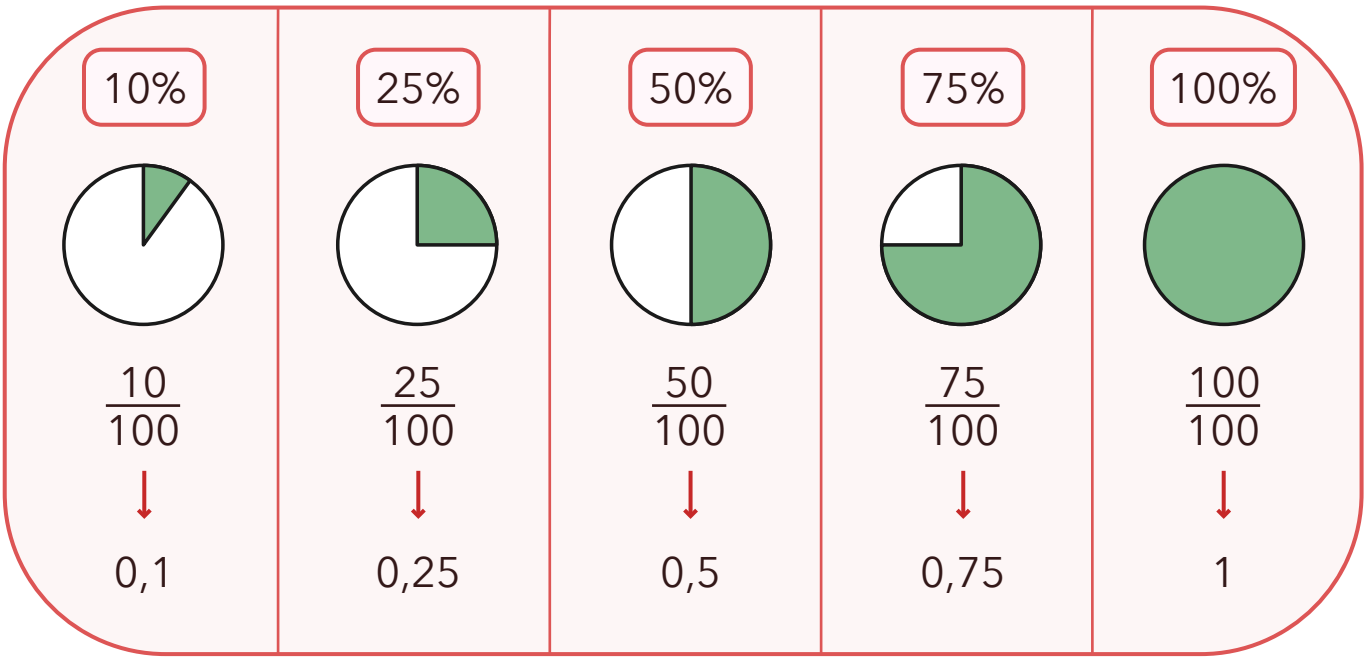
$$50\% \text{ sarebbe } \frac{50}{100} = \frac{1}{2}$$

Quindi il 50% di una quantità corrisponde alla metà:

1. 50% di $80 \longrightarrow \frac{50}{100} \cdot 80 = \frac{1}{2} \cdot 80 = \mathbf{40}$

2. 50% di $30 \longrightarrow \frac{50}{100} \cdot 30 = \frac{1}{2} \cdot 30 = \mathbf{15}$

Nelle percentuali quindi:
100 = TOTALE



Esempio

Se una felpa costa 40€ e viene scontata del 20%, qual è il prezzo finale?

STEP 1 Calcolare il 20% di 40€

1. 20% di $40€ \longrightarrow \frac{20}{100} \cdot 40 = 0{,}2 \cdot 40 = \mathbf{8€}$

STEP 2 Calcolare il prezzo finale

Abbiamo trovato lo sconto che è di 8€, quindi facciamo il prezzo iniziale meno lo sconto:

2. $40€ - 8€ = \mathbf{32€}$ (prezzo finale)

Esempio

Se un biglietto costa 30€ e viene aumentato del 10%, qual è il prezzo finale?

STEP 1 Calcolare il 10% di 30€

1. 10% di $30€ \longrightarrow \frac{10}{100} \cdot 30 = 0{,}1 \cdot 30 = \mathbf{3€}$

STEP 2 Calcolare il prezzo finale

Abbiamo un aumento di 3€, quindi il prezzo iniziale più l'aumento:

2. $30€ + 3€ = \mathbf{33€}$ (prezzo finale)

PARTE SECONDA

IL MONDO DELLE LETTERE

CAPITOLO 6

Che cos'è un monomio?

Una singola espressione formata da numeri e lettere moltiplicati tra loro si chiama **monomio**. Si tratta quindi di un prodotto tra un coefficiente numerico e lettere con esponenti **NATURALI**. I monomi senza lettere si chiamano monomi costanti (es. 5).

Esempi monomi

$a \mid 3a \mid 5x \mid 2ab \mid -7xy$

Le 3 caratteristiche di ogni monomio

$+ 2xy$

- **Segno**: + oppure −
- **Coefficiente**: parte numerica
- **Parte letterale**: formata dalle lettere



Dare un nome agli oggetti

Per indicare gli oggetti in modo generico, in matematica usiamo delle lettere.



Sedia → a



Tavolo → b

OPERAZIONI TRA MONOMI

1.1. Somma e sottrazione

Monomi simili

Stessa parte letterale



$a + a = 2a$

- $a + a = 2a$
- $3b + 4b = 7b$
- $2ac + 5ac = 7ac$

possiamo **sommare**!

Monomi diversi

Parte letterale diversa



$2a + b = 2a + b$

- $a + b = a + b$
- $3x + 2y = 3x + 2y$
- $5ab + 2a = 5ab + 2a$

non possiamo sommare!

Ricorda!

Si possono sommare o sottrarre soltanto i monomi simili, cioè quelli che hanno la **stessa parte letterale**. I monomi diversi devono rimanere **separati**.

1.2. Moltiplicazione

Due monomi, anche se diversi, possono sempre essere moltiplicati.

Esempi

- $a \cdot b = ab$
- $5a \cdot 4d = 20ad$
- $2ab \cdot 3c = 6abc$

Ricorda!

Quando una stessa lettera compare più volte, invece di ripeterla usiamo una potenza.

$a \cdot a = a^2$

si legge **"a alla seconda"**

Come non sbagliare mai la moltiplicazione tra monomi

Segui sempre questo ordine:

1. Calcola il SEGNO

- + con + = +
- + con − = −
- − con − = +

2. Moltiplica i NUMERI.

I coefficienti si moltiplicano tra loro.

3. Moltiplica le LETTERE.

Le lettere si moltiplicano tra loro con le regole delle potenze.

1.3. Divisione

Anche la divisione, in molti casi, è possibile.

Esempi

- $10ab : 5a = 2b$
- $12x^2 : 3x = 4x$



Casi particolari

La divisione presenta alcune particolarità che vedremo più avanti.

Esempio 1

$2a \cdot 4b$

1. **SEGNO:** + con + = +
2. **NUMERI:** $2 \cdot 4 = 8$
3. **LETTERE:** $a \cdot b = ab$

$2a \cdot 4b = 8ab$

Esempio 2

$(-3b) \cdot 2c$

1. **SEGNO:** – con + = –
2. **NUMERI:** $3 \cdot 2 = 6$
3. **LETTERE:** $b \cdot c = bc$

$(-3b) \cdot 2c = -6bc$

Esempio 3

Quando le lettere sono uguali

$a \cdot a = aa = a^2$

$2x \cdot 3x = 6xx = 6x^2$

$5ab \cdot 2a = 10aba = 10a^2b$



Fermati e verifica!

Somma e sottrazione

1. $3 + 5x$ = [ ]
2. $7mn + 2mn$ = [ ]
3. $9a - 4a$ = [ ]
4. $10y^2 - 6y^2$ = [ ]

Moltiplicazione e divisione

1. $4a \cdot 2a$ = [ ]
2. $5xy \cdot (-3y)$ = [ ]
3. $12x^3 : 4x$ = [ ]
4. $20a^2b^2 : 5ab$ = [ ]

IL GRADO DI UN MONOMIO

Finora abbiamo imparato a riconoscere un monomio e le sue parti.
Adesso possiamo aggiungere una nuova caratteristica: **il grado.**

Come si calcola

Basta sommare gli esponenti di tutte le lettere.

ESEMPIO 1

$5x^2$

- x^2

Grado: **2**

ESEMPIO 2

$3ab$

- a^1
- b^1

Grado: 1 + 1 = **2**

ESEMPIO 3

$7a^2b^3$

- a^2
- b^3

Grado: 2 + 3 = **5**

ESEMPIO 4

$4x^3y^2z$

- x^3
- y^2
- z^1

Grado: 3 + 2 + 1 = **6**

Ricorda!

1. **REGOLA:** Il grado di un monomio è l**a somma degli esponenti** della parte letterale.
2. Il coefficiente **NON** influisce sul grado. →
   - $2x^2$ → Grado: **2**
   - $100x^2$ → Grado: **2**

Casi particolari

- 8 → Grado: **0**

Se non ho lettere
il grado è sempre **0**.

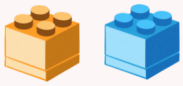
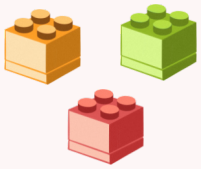
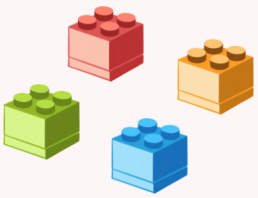
CAPITOLO 7

I polinomi

Un polinomio è un'espressione algebrica costituita dalla somma algebrica di **più monomi.**

Come si calcola

In base al numero dei monomi, un polinomio assume nomi diversi.

1 TERMINE	2 TERMINI	3 TERMINI	4 TERMINI	PIÙ DI 4 TERMINI
$3x$	$x + 2$	$x^2 + 3x + 1$	$x^3 + x^2 + x + 1$	...
				
Monomio	**Binomio**	**Trinomio**	**Quadrinomio**	**Polinomio**

I polinomi si sommano e sottraggono con le stesse regole dei monomi, quindi:

$$(a + 2b + x) + (2a + 3b + x) = 3a + 5b + 2x$$

Anche un polinomio possiede un **grado**.
Per determinarlo bisogna osservare il grado di ciascun monomio.
Il grado del polinomio è il **grado più alto** tra i suoi monomi.

Esempio 1

$$5x^3 + 5x^2 + 7$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

• 3 • 2 • 0

Grado del polinomio: **3**

Esempio 2

$$4ab^2 + 5a^2b^3 + 2a$$

$\downarrow$ $\downarrow$ $\downarrow$

• 3 • 5 • 1

Grado del polinomio: **5**

In sintesi

Grado del monomio	Grado del polinomio	Nomenclatura
Somma degli esponenti della parte letterale.	Il grado più alto tra i monomi che lo compongono.	■ 1 termine = monomio ■ 2 termini = binomio ■ 3 termini = trinomio ■ 4 termini = quadrinomio ■ più di 4 termini = polinomio

SOMMA E SOTTRAZIONE DI POLINOMI

Sommare o sottrarre polinomi significa mettere insieme i loro **monomi simili**.
È la stessa regola che abbiamo visto per i monomi!

L'idea chiave

Ogni polinomio è una costruzione fatta di mattoncini.
Quando sommiamo o sottraiamo, uniamo solo i **mattoncini simili**.



Raggruppiamo i mattoncini uguali



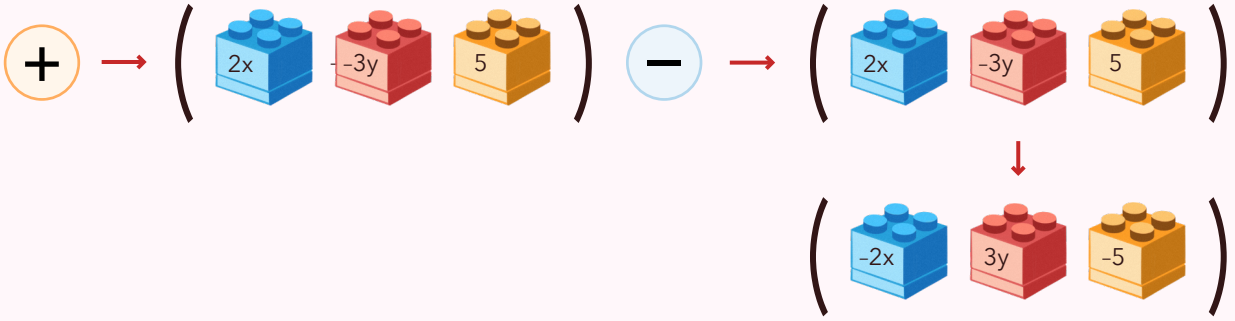
- $4x$
- 4
- 0

Ricorda!

Puoi sommare o sottrarre solo termini che hanno la stessa parte letterale.
I termini diversi rimangono **separati**!

- $2x$ e $5x$ sono simili ✓
- $2x$ e $5x^3$ non sono simili ✗

Attenzione al segno "–" davanti alla parentesi



I segni restano **uguali**.

Tutti i segni **cambiano**!

Esempio guida

- $(2x + 3y - 4) - (x - 2y + 5)$

↓

1º STEP

Elimino le parentesi e cambio i segni

$2x + 3y - 4 - x + 2y - 5$

↓

2º STEP

Raggruppo i termini simili

$(2x - x) + (3y + 2y) + (-4 - 5) = x + 5y - 9$

Altri esempi

- $(4a - 2b + 7) + (-3a + b - 2)$

↓ I segni **non cambiano**

$4a - 2b + 7 \overbrace{-3a + b - 2}$

↓

$(4a - 3a) + (-2b + b) + (7 - 2)$

↓

$a - b + 5$

- $(5x^2 + 3x - 1) - (2x^2 - 4x + 3)$

↓ I segni **cambiano**

$5x^2 + 3x - 1 \overbrace{- 2x^2 + 4x - 3}$

↓

$(5x^2 - 2x^2) + (3x + 4x) + (-1 - 3)$

↓

$3x^2 + 7x - 4$

In sintesi

1. **SEGNO "+" DAVANTI**

I segni non cambiano.

$$+ (2x - 3y + 5)$$

$$\downarrow$$

$$2x - 3y + 5$$

2. **SEGNO "–" DAVANTI**

Tutti i segni cambiano.

$$- (2x - 3y + 5)$$

$$\downarrow$$

$$- 2x + 3y - 5$$



Fermati e verifica!

Elimina le parentesi e semplifica

1. $(2x + 3) + (4x - 1)$ = [ ]

2. $(5a - 2b) - (a + 3b)$ = [ ]

3. $(3x - 2y + 4) - (x + y - 7)$ = [ ]

4. $(2a + 5b - 6) + (-3a - 2b + 1)$ = [ ]

MOLTIPLICAZIONE TRA POLINOMI

La partita dei termini

Esempio

Immaginiamo di voler moltiplicare **due binomi**:

SQUADRA A	SQUADRA B
$(x + 2)$	$(x - 3)$

1. **La regola della partita**

Ogni giocatore della **SQUADRA A** deve stringere la mano a tutti i giocatori della **SQUADRA B.**
Ogni stretta di mano rappresenta una moltiplicazione!

	x	-3
x	$x \cdot x = x^2$	$x \cdot -3 = -3x$
2	$2 \cdot x = 2x$	$2 \cdot -3 = -6$

2. Ora dobbiamo solo sommarli!

$$x^2 - 3x + 2x - 6 = \boxed{x^2 - x - 6}$$

Esempio

Immaginiamo di voler moltiplicare **due binomi**:

SQUADRA A	SQUADRA B
$(2x - 1)$	$(x + 4)$

	x	$+4$
$2x$	$2x \cdot x = 2x^2$	$2x \cdot 4 = 8x$
-1	$-1 \cdot x = -x$	$-1 \cdot 4 = -4$

Sommiamo i risultati!

$$2x^2 + 8x - x - 4 = \boxed{2x^2 + 7x - 4}$$

Perchè funziona

La moltiplicazione tra polinomi è distributiva: ogni termine del primo polinomio deve essere moltiplicato per ogni termine del secondo polinomio.
In generale:

SQUADRA A

$(a + b + c)$

SQUADRA B

$(d + e + f)$

$$ad + ae + af + bd + be + bf + cd + ce + cf$$



Fermati e verifica!

Moltiplica e semplifica

1. $(x + 3) \cdot (x - 2)$ = [ ]
2. $(2x + 1) \cdot (x - 5)$ = [ ]
3. $(x + 4) \cdot (x + 4)$ = [ ]
4. $(3x - 2) \cdot (2x + 1)$ = [ ]

CAPITOLO 8

I prodotti notevoli

I prodotti notevoli sono particolari moltiplicazioni che seguono regole fisse. Conoscerli ti permette di svolgere i calcoli più velocemente e di riconoscere le strutture utili nelle espressioni algebriche.



SOMMA PER DIFFERENZA

Il prodotto della somma per la differenza degli stessi due termini è uguale alla differenza dei quadrati dei due termini.

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Esempi

Sviluppa:

- $(x + 6)$
- $(x - 6)$

$\longrightarrow$ $(x + 6) \cdot (x - 6) = x^2 - 6^2$

$\downarrow$

$x^2 - 6^2 = x^2 - 36$

Errore comune

I due termini sommati e sottratti devono essere identici:

- $(4x + 2y) \cdot (4x - 2y)$ ✓
- $(3a + 5b) \cdot (2a - 7b)$ ✗

Fermati e verifica!

Sviluppa i seguenti prodotti.

1. $(x + 5)(x - 5)$ = [ ]
2. $(2x + 3)(2x - 3)$ = [ ]
3. $(x + 2)(x - 2)$ = [ ]

QUADRATO DI UN BINOMIO

Il quadrato di un binomio è uguale al quadrato del primo termine più il quadrato del secondo termine più il primo termine per il secondo per due:

$$(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$$

Esempi

Sviluppa:

- $(x + 3)^2 \longrightarrow x^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 3$

  $\downarrow$

  $x^2 + 9 + 6x$

- $(2x - 5)^2 \longrightarrow (2x)^2 + (-5)^2 + 2 \cdot (2x) \cdot (-5)$

  $\downarrow$

  $4x^2 + 25 - 20x$



Fermati e verifica!

Sviluppa i seguenti quadrati.

1. $(x + 4)^2$ = [ ]
2. $(3a - 2)^2$ = [ ]
3. $(5 - y)^2$ = [ ]

CUBO DI UN BINOMIO

Il cubo di un binomio è uguale al cubo del primo termine più il cubo del secondo termine più il triplo del quadrato del primo per il secondo più il triplo del primo per il quadrato del secondo:

$$(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3a^2b + 3ab^2$$

Esempi

Sviluppa:

- $(x + 2)^3 \longrightarrow x^3 + 2^3 + 3 \cdot x^2 \cdot 2 + 3 \cdot x \cdot 2^2$

$$\downarrow$$

$$x^3 + 8 + 6x^2 + 12x$$

- $(2x - 1)^3 \longrightarrow (2x)^3 + (-1)^3 + 3 \cdot (2x)^2 \cdot (-1) + 3 \cdot (2x) \cdot (-1)^2$

$$\downarrow$$

$$8x^3 - 1 - 12x^2 + 6x$$

Fermati e verifica!

Sviluppa utilizzando i prodotti notevoli.

1. $(x + 5)^3$ = [ ]
2. $(x - 3)^3$ = [ ]
3. $(2x + 1)^3$ = [ ]
4. $(3x - 2)^3$ = [ ]

QUADRATO DI TRINOMIO

Il quadrato di trinomio è uguale al quadrato del primo, secondo, terzo termine più il doppio prodotto del primo con il secondo, del primo con il terzo e del secondo con il terzo. (ricorda molto il quadrato di un binomio)

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

Esempi

- $(x + 2y + 3)^2 \longrightarrow x^2 + (2y)^2 + 3^2 + 2 \cdot x \cdot 2y + 2 \cdot x \cdot 3 + 2 \cdot 2y \cdot 3$

$$\downarrow$$

$$x^2 + 4y^2 + 9 + 4xy + 6x + 12y$$

Saper riconoscere questi prodotti notevoli tornerà molto utile, facendovi risparmiare tempo e fatica. L'unico modo per ricordarli non è solo memorizzare la regola, ma svolgere anche tanti esercizi, così da consolidare attraverso la pratica e la ripetizione.



Fermati e verifica!

Sviluppa utilizzando i prodotti notevoli.

1. $(x + y + 5)^2$ = [ ]
2. $(2a - b + 4)^2$ = [ ]
3. $(-3 - 4x - b)^2$ = [ ]
4. $(a + b - 2c)^2$ = [ ]

CAPITOLO 9

Scomposizione in fattori dei polinomi

Come smontare un polinomio

Scomporre in fattori significa scrivere un polinomio come prodotto di polinomi più semplici.



CHE COSA SIGNIFICA SCOMPORRE?

La scomposizione in fattori è l'operazione inversa della moltiplicazione tra polinomi.
Per esempio, sappiamo che:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

PERCORRIAMO LA STRADA OPPOSTA →

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

A volte la costruzione nasconde un prodotto notevole che abbiamo già incontrato, altre volte troviamo pezzi uguali da raccogliere.
L'obiettivo è sempre lo stesso: individuare i blocchi nascosti all'interno della struttura.

Le tecniche che useremo

Ogni tecnica è uno strumento per smontare la costruzione e ritrovare i pezzi originali.

1.	2.	3.
Raccoglimento a fattor comune	Raccoglimento parziale	Indovinare il prodotto notevole

RACCOGLIMENTO A FATTOR COMUNE

C'è qualche mattoncino uguale presente in tutti i termini?
Se la risposta è sì, possiamo raccoglierlo.

Esempio 1

$$3a + 3b = 3(a + b)$$

Fattore comune: **3**

Esempio 2

$$4x^2 + 8x = 4x(x + 2)$$

Fattore comune: **4x**

Ricorda!

È come accorgersi che tutte le costruzioni hanno lo stesso pezzo di base e decidere di metterlo in comune.

RACCOGLIMENTO PARZIALE

Se non esiste un fattore comune a tutti i termini, possiamo creare dei piccoli gruppi.

Esempio

$$\underbrace{ax + ay}_{\text{In comune la } \boldsymbol{a}} + \underbrace{bx + by}_{\text{In comune la } \boldsymbol{b}}$$

$$\downarrow$$

$$\underbrace{a(x + y) + b(x + y)}_{\text{In comune la } \boldsymbol{(x + y)}}$$

$$\downarrow$$

$$(x + y) \cdot (a + b)$$

INDOVINARE IL PRODOTTO NOTEVOLE

1.1. Differenza di quadrati (2 termini)

Se troviamo una forma del tipo "$a^2 - b^2$" possiamo usare il prodotto notevole già studiato.

$$a^2 - b^2 = (a + b) \cdot (a - b)$$

Esempio

$$x^2 - 25 = (x + 5) \cdot (x - 5)$$

1.2. Trinomio quadrato perfetto (3 termini)

Esempio 1

Se troviamo:

$$a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$$

Facciamo un esempio:

- $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

Perché:

- x^2 è il quadrato di x
- 9 è il quadrato di 3
- $6x$ è il doppio prodotto: $2 \cdot x \cdot 3$

Esempio 2

Se troviamo:

$$a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$$

Facciamo un esempio:

- $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$



La storia si ripete

Riconosciamo una costruzione già incontrata: non stiamo inventando nulla!

1.3. Trinomio speciale (3 termini)

Il metodo vale per il trinomio del tipo $x^2 + bx + c$.
Cerca due numeri che, moltiplicati diano il termine noto (c) e sommati diano il coefficiente di x (b).
Se non trovi i due quadrati allora il trinomio potrebbe essere di questo tipo:

Esempio 2

$x^2 + 5x + 6$



- $2 + 3 = 5$ → Somma = **5**
- $2 \cdot 3 = 6$ → Prodotto = **6**

$x^2 + 5x + 6 = (x + 2) \cdot (x + 3)$



Osserva

È come cercare due pezzi mancanti sapendo quali caratteristiche devono avere.

Ricorda!

Scomporre un polinomio significa scriverlo come prodotto di polinomi più semplici, quindi come smontare una costruzione per ritrovare i mattoncini con cui è stata realizzata.
Ogni tecnica è soltanto un modo diverso per capire come quei mattoncini erano stati assemblati.

$a = 2x$ e b

1.4. Cubo di binomio (4 termini)

Bisogna riconoscere i due cubi.

Scomposizione

$$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = \boxed{(a + b)^3}$$

Esempio 1

$$x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$$

Riconosco il cubo di un binomio con:

- $a = x$ e $b = y$

Quindi:

- $(x + y)^3$

Possiamo fare la prova:

- $(x + y)^3 = x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2$

Esempio 2

$$8x^3 - 12x^2 + 6x - 1$$

Riconosco il cubo di un binomio con:

-

Quindi:

- $(2x - 1)^3$

Prova:

- $(2x - 1)^3 = 8x^3 - 1 - 12x^2 + 6x$

Come fare

1. Controlla che il polinomio abbia 4 termini.
2. Verifica che esistano i 2 cubi.
3. Scrivi il cubo di binomio e fai la prova.

1.5. Quadrato di trinomio (6 termini)

Bisogna riconoscere i tre quadrati.

Scomposizione

$$a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc = (a + b + c)^2$$

Esempio 1

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz$$

Riconosco il quadrato di un trinomio con:

- $a = x$ e $b = y$ e $c = z$

Quindi:

- $(x + y + z)^2$

Esempio 2

$$9a^2 + 4b^2 + c^2 + 12ab + 6ac + 4bc$$

Riconosco il quadrato di un trinomio con:

- $a = 3a$ e $b = 2b$ e $c = c$

Quindi:

- $(3a + 2b + c)^2$

Come fare

1. Controlla che il polinomio abbia 6 termini.
2. Verifica che ci siano tre quadrati perfetti: a^2, b^2, c^2.
3. Scrivi il quadrato di trinomio e fai la prova.

Scomposizione in fattori: schema riassuntivo

1. Controlla se puoi fare un **raccoglimento totale;**

2. Controlla se puoi fare un **raccoglimento parziale;**

3. Controlla se trovi qualche **prodotto notevole** da scomporre:

2 TERMINI

- **Differenza di quadrati**
  - $(x^2 - 9)$
  - $(x + 3)(x - 3)$

3 TERMINI

- **Quadrato di binomio**
  - $(x^2 + 2x + 1)$
  - $(x + 1)^2$
- **Trinomio speciale**
  - $(x^2 - 5x + 6)$
  - $(x - 2)(x - 3)$

4 TERMINI

- **Cubo di binomio**
  - $(x^3 + 8 + 6x^2 + 12x)$
  - $(x + 2)^3$

6 TERMINI

- **Quadrato di trinomio**
  - $a^2 + 4b^2 + c^2 + 4ab + 2ac + 4bc$
  - $(a + 2b + c)^2$



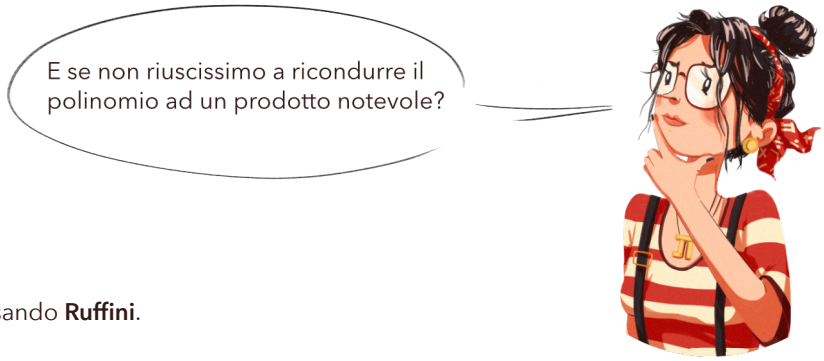
Fermati e verifica!

Scomponi in fattori

1. $(16a^2b^2 - 4x^2)$ = [ ]
2. $(9b^2 - 30b + 25)$ = [ ]
3. $(b^3 - 3b^2 + 3b - 1)$ = [ ]
4. $(x^2 + y^2 + 4 + 2xy - 4x - 4y)$ = [ ]

CAPITOLO 10

Il teorema di Ruffini



Allora possiamo scomporlo usando **Ruffini**.
Facciamo subito un esempio!

Esercizio svolto

Il polinomio da scomporre è:

$$x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$

Dopo aver capito che non possiamo fare:

- **Raccoglimento totale**
- **Raccoglimento parziale**
- Ricondurlo ad un **prodotto notevole**

L'obiettivo è quello di scomporre il polinomio in prodotto di altri 2 polinomi.
Passiamo al **metodo di Ruffini**.

Si tratta prima di tutto:

1. Trovare un numero che messo al posto della x mi annulla il polinomio.
Proviamo con **1**:

- $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

$\downarrow$

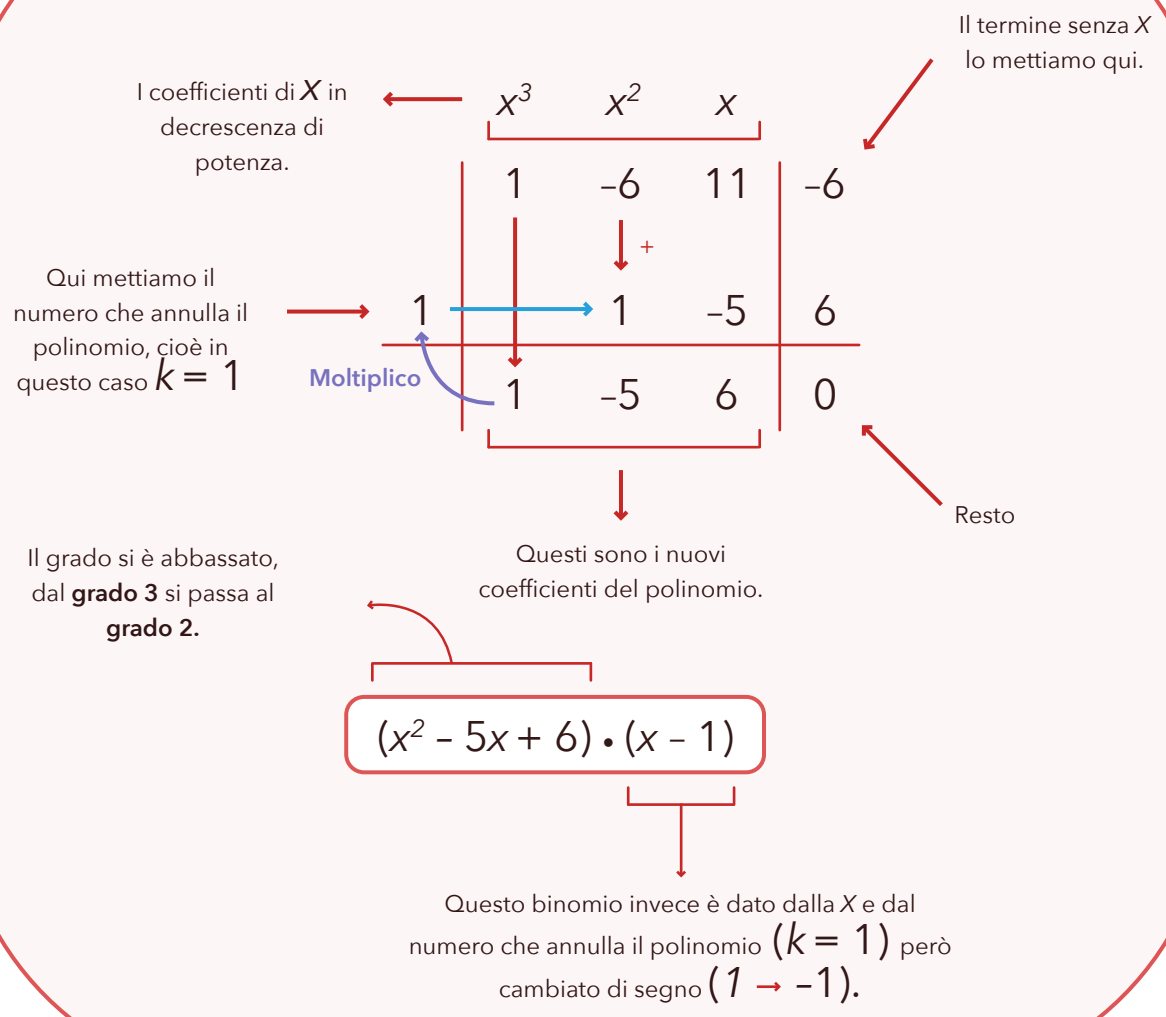
- $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 6 = 1 - 6 + 11 - 6 = 0$

1 annulla il polinomio, quindi chiamiamo la soluzione $k = 1$

Ricorda!

Ruffini è un metodo veloce per dividere $P(x)$ per $(x - k)$. Fai delle prove per trovare il numero k che annulla il polinomio.
Se il resto è 0, $(x - k)$ è un fattore!

2. Scriviamo i coefficienti del polinomio nella **gabbia di Ruffini**:



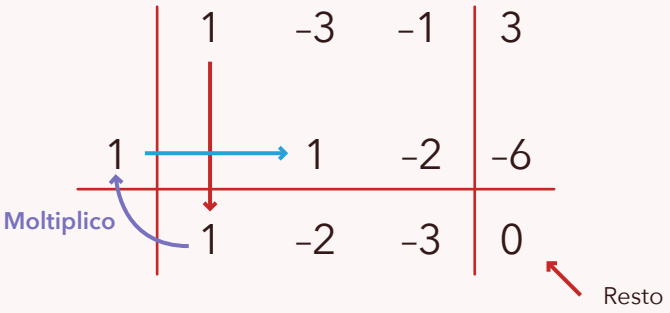
Come applicare Ruffini: passo dopo passo

1.	2.	3.	4.	5.
Trova un numero che annulla il polinomio, cioè k.	Scrivi i coefficienti di X in ordine decrescente di grado.	Porta giù il primo coefficiente, sotto la gabbia.	Moltiplica per il k e scrivi il risultato sotto al numero successivo. Somma i due numeri e scrivi il risultato sotto la gabbia.	Ripeti fino alla fine. L'ultimo numero a destra della gabbia è il resto.

Dimostrazione

Scomponiamo $P(x) = x^3 - 3x^2 - x + 3$

1. Proviamo con $k = 1$
2. Coefficienti: 1, –3, –1, 3
3. Schema di Ruffini



$(x - 1)$ è un fattore!

- Quoziente: $1, -2, -3 \longrightarrow Q(x) = x^2 - 2x - 3$

Quindi:

- $P(x) = (x - 1) \cdot (x^2 - 2x - 3)$

In sintesi

1. Se un polinomio non è riconducibile a prodotti notevoli, usiamo Ruffini per trovare **un fattore** (x – k).

2. Se il **resto è 0**, abbiamo trovato un fattore e il polinomio si semplifica.

3. Possiamo ripetere il procedimento sul quoziente, finché non otteniamo **fattori** di **primo** o **secondo grado**.

CAPITOLO 11

Le espressioni letterali: esempi



Non cambia nulla!
Le lettere si trattano come altre ***x***, anche il loro valore è da trovare: a seconda di esso l'espressione cambia radicalmente forma.

Ricorda!

Ricorda sempre l'ordine delle operazioni.

1. Parentesi tonde **( )**
2. Parentesi quadre **[]**
3. Moltiplicazioni e divisioni
4. Somme e sottrazioni

Esempio 1

$5m - 2 \cdot (m - 1)$

1. Moltiplico (**-2**) per ogni termine. → $5m - 2 \cdot (m - 1) = 5m - 2m + 2$
2. Raggruppo i termini simili. → $5m - 2m + 2 = (5m - 2m) + 2$
3. Eseguo i calcoli. → $3m + 2$

Esempio 2

$3 \cdot (x + 2) + 2x$

1. Moltiplico **3** per ogni termine. → $3 \cdot (x + 2) + 2x = 3x + 6 + 2x$
2. Raggruppo i termini simili. → $3x + 6 + 2x = (3x + 2x) + 6$
3. Eseguo i calcoli. → $5x + 6$

Esempio 3

$4a + 2 \cdot (a - 3)$

1. Moltiplico **2** per ogni termine.
2. Raggruppo i termini simili.
3. Eseguo i calcoli.

- $4a + 2 \cdot (a - 3) = 4a + 2a - 6$
- $4a + 2a - 6 = (4a + 2a) - 6$
- $6a - 6$

Esempio 4

$2 \cdot (3x - 1) - x$

Anche qui altra lettera.

1. Moltiplico **2** per ogni termine.
2. Raggruppo i termini simili.
3. Eseguo i calcoli.

- $2 \cdot (3x - 1) - x = 6x - 2 - x$
- $6x - 2 - x = (6x - x) - 2$
- $5x - 2$

Esempio 5

$(7b + 3a) \cdot (7b - 3a) + [-14b^2 + 17a^2 + 3a \cdot (-2a) - (7b \cdot 5b)]$

$49b^2 - 9a^2$ $\quad -6a^2$ $\quad 35b^2$

- $49b^2 - 9a^2 + [-14b^2 + 17a^2 - 6a^2 - 35b^2]$
- $49b^2 - 9a^2 + [-49b^2 + 11a^2]$
- $49b^2 - 9a^2 - 49b^2 + 11a^2$
- $0 + 2a^2 = 2a^2$

Ora risolvo la parentesi quadra e sommo i **monomi simili**.

Attenzione!

Si possono sommare solo i **termini simili** (stessa parte letterale)

PARTE TERZA

LE EQUAZIONI

CAPITOLO 12

Le equazioni lineari

Di cosa si tratta?

Un'equazione lineare è un'equazione in cui **l'incognita** compare solo alla prima potenza.

Definizione

Un'equazione lineare è detta anche di primo grado e può essere scritta anche nella forma:

$$ax + b = 0$$

dove ***a*** e ***b*** sono numeri e $a \neq 0$

Esempi

- $2x + 3 = 7$
- $5x - 1 = 0$
- $-3x + 4 = 10$



Attenzione!

- $x^2 + 1 = 0 \longrightarrow$ **NON È DI PRIMO GRADO!**

perché la ***x*** compare alla seconda!

UN'IDEA FONDAMENTALE

Risolvere un'equazione significa trovare il valore dell'incognita che rende vera l'uguaglianza.

Esempio

- $x + 3 = 7$



Soluzione

la soluzione si trova logicamente:

$$x = 4$$

infatti:

- $4 + 3 = 7$



Ricorda!

Isoliamo l'incognita per scoprire il suo valore.



L'idea della bilancia

L'equazione è come una bilancia:
i due membri devono restare **uguali**.
Se fai una cosa da una parte, devi farla anche dall'altra.



Fermati e verifica!

Risolvi mentalmente le seguenti equazioni:

1. $x + 4 = 9$ = [ ]
2. $3x = 12$ = [ ]

PRINCIPI DI EQUIVALENZA

Per risolvere le equazioni possiamo usare due regole fondamentali.

Primo principio

1. Possiamo **aggiungere** o **togliere** lo stesso numero a entrambi i membri dell'equazione.

ESEMPIO:

- $x + 5 = 8 \longrightarrow x + 5 - 5 = 8 - 5 \longrightarrow x = 3$



Ricorda!

Le regole valgono **sempre**, purché si facciano le stesse operazioni su entrambi i membri!

Secondo principio

2. Possiamo **moltiplicare** o **dividere** entrambi i membri dell'equazione per lo stesso numero diverso da zero.

ESEMPIO:

- $2x = 6 \longrightarrow \frac{2x}{2} = \frac{6}{2} \longrightarrow x = 3$



Attenzione!

Nel secondo principio non possiamo dividere **per zero!**



Osserva!

I due principi sono utili per isolare la ***x*** e trovare il suo valore!

Un'idea fondamentale

L'equazione non cambia, cambia solo la sua forma.
I due membri restano **sempre uguali**!

Fermati e verifica!

Risolvi mentalmente le seguenti equazioni:

1. $x - 6 = 2$ = [ ]
2. $5x = -15$ = [ ]
3. $-3x = 9$ = [ ]

Scorciatoia

Una volta capiti i principi di equivalenza possiamo però usare una scorciatoia per risolvere le equazioni, vediamolo con un esempio:

$$3x + 5 = 25 - x$$

1. Devo portare tutte le x a sinistra e tutti i numeri a destra.
Attenzione! Quando sposto devo cambiare di segno, quindi:

- $3x + x = 25 - 5 \longrightarrow 4x = 20$

2. Dobbiamo dividere per tutto ciò che sta vicino alla ***x***:

- $\frac{4x}{4} = \frac{20}{4} \longrightarrow x = 5$

Però devo farlo anche **a destra** (per il 2° Principio)

Fermati e verifica!

Risolvi le seguenti equazioni:

1. $2x - 6 = x + 11$ = [ ]
2. $4x - 3 = 2x + 9$ = [ ]
3. $5x + 4 = 2x - 5$ = [ ]

Errori comuni

Fai attenzione a questi errori molto frequenti!

✗		✓
• $2x + 3 = 7 \longrightarrow 2x = 7 + 3$	Hai dimenticato di cambiare il segno al **3** dopo che l'hai spostato.	$2x + 3 = 7$ ↓ $2x = 7 - 3 = 4$
✗		✓
• $2x = 4 \longrightarrow x = 4 - 2$	Hai sottratto invece di dividere! Ricorda di usare il **2° Principio** alla fine.	$\frac{2x}{2} = \frac{4}{2}$ ↓ $x = 2$

Consiglio

Vai sempre con calma e scrivi ogni passaggio.
Un metodo ordinato ti evita errori!

VERIFICA DELLA SOLUZIONE

Una volta trovata la soluzione, è sempre bene verificarla.

Esempio

Consideriamo l'equazione:

$2x + 3 = 7$ Abbiamo trovato $\longrightarrow x = 2$

Verifichiamo!

1. Sostituiamo ***x*** con **2** nell'equazione:

• $2 \cdot 2 + 3 = 7 \longrightarrow 4 + 3 = 7$

2. Calcoliamo entrambi i membri:

• $7 = 7$

La soluzione è **corretta**! ✓

Consiglio

Una soluzione è corretta solo se, sostituita nell'equazione originale, **rende uguali** i due membri.

Fermati e verifica!

Risolvi le equazioni e verifica la soluzione:

1. $3x - 1 = 8$ = [ ]
2. $4x + 5 = 17$ = [ ]
3. $-2x + 7 = 1$ = [ ]

Le varie soluzioni

1. SOLUZIONE DETERMINATA: 1 SOLUZIONE

- Esempio: $x = 5$ ⟶ Quindi la ***x*** ha un valore preciso.

2. SOLUZIONE INDETERMINATA: INFINITE SOLUZIONI

- Esempio: $0 = 0$ ⟶ Questo caso si verifica se sia le ***x*** che i numeri si annullano durante i calcoli:

↓

$$5x - 5x = 3 - 3$$
$$0 = 0$$

3. SOLUZIONE IMPOSSIBILE: 0 SOLUZIONI

- Esempio: $0 = 3$ ⟶ Questo caso si verifica quando le ***x*** si annullano ma i numeri no:

↓

$$5x - 5x = 3$$
$$0 = 3$$



Ricorda!

Tutto quello che abbiamo visto nella parte seconda e quindi nelle espressioni vale anche per le equazioni, di fatto le equazioni sono delle espressioni però con un'uguaglianza.

Fermati e verifica!

Risolvi le seguenti equazioni:

1. $4x + x - 6 = 19$ = [ ]
2. $7x - 5 = 2x + 10$ = [ ]
3. $\frac{2x}{3} - \frac{3}{2} = 1$ = [ ]
4. $3(x - 2) = 2x + 5$ = [ ]
5. $2(x - 1) = x + 3$ = [ ]
6. $3(2 + x) - 2(3 - x) = 15$ = [ ]
7. $\frac{4x - 3}{7} - \frac{x + 1}{4} = \frac{2x + 3}{14}$ = [ ]
8. $2 - 5x + 3(x - 1) = 7 - 2(x + 4)$ = [ ]
9. $4 + 5(2x - 5) - x = 5 + 9(x - 1)$ = [ ]

LE FORMULE INVERSE

Le formule inverse ci permettono di ricavare facilmente la grandezza che ci manca, partendo dalla formula che già conosciamo.



La regola è semplice

- $a \cdot b = c$
- $a = \frac{c}{b}$ $(b \neq 0)$

Quello che sta sopra **MOLTIPLICATO** ↓ va **SOTTO** dall'altro membro

- $\frac{a}{b} = c$
- $a = b \cdot c$

Quello che sta sotto **DIVISO** ↓ va **SOPRA** dall'altro membro

Esempi

1. FORMULA DI PARTENZA

$$A = b \cdot h$$

Voglio trovare ***h***

- $A = b \cdot h$
- $\frac{A}{b} = h$

Il ***b*** sta moltiplicando ***h***, quindi lo faccio passare sotto dividendo.

2. FORMULA DI PARTENZA

$$v = \frac{s}{t}$$

Voglio trovare ***s***

- $v = \frac{s}{t}$
- $v \cdot t = s$

Il ***t*** sta dividendo ***s***, quindi lo faccio passare sopra moltiplicando.

CAPITOLO 13

Esercizi svolti

Andiamo ora a svolgere delle equazioni insieme per vedere le varie difficoltà che si possono incontrare e come risolverle.

Esercizi

1. $2(x-2) = x + 5$

- $2(x-2) = x + 5$
  $2x - 4 = x + 5$
  $2x - x = 4 + 5$
  $\downarrow$
  $x = 9$ ✓

Sposta le ***x*** a sinistra e i numeri a destra ricordando di cambiare i segni.

2. $3x - 8(1 + x) = 4(2 + x) + 5(1 - 2x)$

- $3x - 8(1 + x) = 4(2 + x) + 5(1 - 2x)$
  $3x - 8 - 8x = 8 + 4x + 5 - 10x$
  $3x - 8x - 4x + 10x = 8 + 5 + 8$
  $\downarrow$
  $x = 21$ ✓

Ricorda il segno **MENO**

Sposta le ***x*** a sinistra e i numeri a destra ricordando di cambiare i segni.

3. $2(x + 1)(x - 1) - 3(x - 1) = 2(x + 2)^2 - 4x$

Svolgi prima il prodotto notevole somma per differenza

Svolgi prima il prodotto notevole quadrato di binomio e lo lasci tra parentesi

$2(x^2 - 1) - 3x + 3 = 2(x^2 + 4 + 4x) - 4x$
$2x^2 - 2 - 3x + 3 = 2x^2 + 8 + 8x - 4x$
$2x^2 - 3x - 2x^2 - 8x + 4x = 8 - 3 + 2$

Li semplifico perché uguali e opposti

Sposta le ***x*** a sinistra e i numeri a destra ricordando di cambiare i segni.

$\frac{-7x}{-7} = \frac{7}{-7}$ ← E dividi per lo stesso numero qui

Dividi sempre per tutto ciò che sta vicino alla ***x***

$\downarrow$
$x = -1$ ✓

Esercizi

Vediamo ora un'equazione il cui risultato è: **INDETERMINATO.**

4. $2 - 5x + 3(x - 1) = 7 - 2(x + 4)$

- $2 - 5x + 3(x - 1) = 7 - 2(x + 4)$
  $2 - 5x + 3x - 3 = 7 - 2x - 8$
  $-5x + 3x + 2x = 7 - 8 - 2 + 3$

Il conteggio delle ***x*** fa 0

Anche il conteggio dei numeri fa 0

$0 = 0$ ✓

SOLUZIONE: INDETERMINATA
ovvero **infinite soluzioni**

Questo perché la soluzione non dipende più dalle ***x*** (dato che si sono azzerate), quindi qualsiasi valore metti al posto della ***x*** ti verrà sempre **0 = 0**

Vediamo ora un'equazione il cui risultato è: **IMPOSSIBILE.**

5. $4 + 5(2x - 5) - x = 5 + 9(x - 1)$

- $4 + 5(2x - 5) - x = 5 + 9(x - 1)$
  $4 + 10x - 25 - x = 5 + 9x - 9$
  $10x - x - 9x = 5 - 9 - 4 + 25$

$0 = 17$ ✓

SOLUZIONE: IMPOSSIBILE
ovvero **non ci sono soluzioni**

Questo perché alla fine dell'equazione otteniamo una cosa falsa, ovvero **0 = 17**, ma questo sappiamo essere non vero, quindi non ci sono soluzioni.

Esercizi

6. $5x(x-3)-4(3x-5)-6x^2=-(x+2)(x-2)-3(x+5)(-2)$

- $5x(x-3)-4(3x-5)-6x^2=-(x+2)(x-2)-3(x+5)(-2)$

$5x^2-15x-12x+20-6x^2=-(x^2-4)-(3x+15)(-2)$

$5x^2-15x-12x+20-6x^2=-x^2+4-(-6x-30)$

Lascio la parentesi perché il **MENO** cambierà i segni.

$5x^2-15x-12x+20-6x^2=-x^2+4+6x+30$

$5x^2-15x-12x-6x^2+x^2-6x=4+30-20$

Il conteggio delle x^2 fa 0, quindi le elimino:
(5 – 6 + 1 = 0)

$-15x-12x-6x=4+30-20$

$$\frac{-33x}{-33}=\frac{14}{-33}$$

$$x=-\frac{14}{33}$$ ✓

Esercizi

7. $\dfrac{5(x-2)}{4} + \dfrac{1}{8} - 2 + \dfrac{(x-1)^2}{2} = \dfrac{2(x+2)(x-2)}{4} - 1$

QUADRATO DI BINOMIO

DIFFERENZA DI QUADRATI

$$\frac{5(x-2)}{4} + \frac{1}{8} - 2 + \frac{(x-1)^2}{2} = \frac{2(x+2)(x-2)}{4} - 1$$

$$\frac{5x-10}{4} + \frac{1}{8} - 2 + \frac{x^2+1-2x}{2} = \frac{2(x^2-4)}{4} - 1$$

$$\frac{5x-10}{4} + \frac{1}{8} - \frac{2}{1} + \frac{x^2+1-2x}{2} = \frac{2x^2-8}{4} - \frac{1}{1}$$

Sottinteso **1**

Sottinteso **1**

Una volta risolti i calcoli ai numeratori posso fare l'**mcm** e scrivere tutte le frazioni con un solo denominatore:

mcm (4,8,2) = 8

$$\frac{10x-20}{8} + \frac{1}{8} - \frac{16}{8} + \frac{4x^2+4-8x}{8} = \frac{4x^2-16}{8} - \frac{8}{8}$$

$$10x - 20 + 1 - 16 + 4x^2 + 4 - 8x = 4x^2 - 16 - 8$$

$$10x + 4x^2 - 8x - 4x^2 = -16 - 8 + 20 - 1 + 16 - 4$$

Una volta che tutti hanno lo stesso denominatore posso semplificarlo e toglierlo.

$$\frac{2x}{2} = \frac{7}{2}$$

$$x = \frac{7}{2}$$ ✓



PARTE QUARTA

LA GEOMETRIA: MISURARE IL MONDO

CAPITOLO 14

Punto, linea, piano: l'alfabeto della geometria



Quando guardi una casa, una strada, una finestra o anche lo schermo del tuo telefono, stai osservando forme geometriche.

La geometria serve a comprendere e descrivere queste forme, per costruire, progettare e risolvere problemi della vita reale.

DA DOVE NASCE TUTTO?

Immagina di appoggiare la punta della matita sul foglio.

1. Hai creato **UN PUNTO**. Il punto indica semplicemente una posizione. Non ha larghezza e non ha spessore. È solo un luogo.	PUNTO **A**
2. Ora trascina la matita senza staccarla dal foglio. Hai ottenuto...**UNA LINEA**. La linea è formata da infiniti punti.	**LINEA**

Ricorda!

- **PUNTO** → Indica una posizione.
- **LINEA** → Insieme infinito di punti.

SEGMENTI, SEMIRETTE E RETTE

Una linea può essere "infinita" o può avere un inizio e una fine.
Vediamo le tre possibilità:

1. IL SENTIERO Parte da un **Punto A** e finisce in un **Punto B**. Ha un inizio e una fine.		Questo è il **SEGMENTO.** **AB**
2. NUMERI NATURALI Parte da un **Punto A** e continua all'infinito in una sola direzione. Ha un inizio ma non ha una fine.		Questa è la **SEMIRETTA.** **AB**
3. NUMERI INTERI Non ha un inizio e nemmeno una fine, è infinita da entrambi i lati.		Questa è la **RETTA.** **r**



Ricorda!

- **SEGMENTO**: ha due estremi.
- **SEMIRETTA**: ha un estremo e si estende all'infinito in una direzione.
- **RETTA**: non ha estremi e si estende all'infinito in entrambe le direzioni.

CAPITOLO 15

Angoli, parallelismo e perpendicolarità

L'angolo **convesso** misura più di 0° (ma meno di 180°) e non contiene i prolungamenti dei suoi lati.

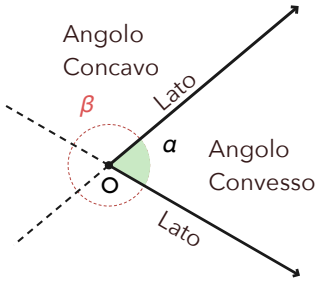
L'angolo **concavo** misura più di 180° (ma meno di 360°) e contiene i prolungamenti dei suoi lati.



GLI ANGOLI

Che cos'è un angolo?

Un angolo è ciascuna delle due parti di piano delimitate da due semirette aventi la stessa origine.
Il punto comune è il vertice e le due semirette sono i lati dell'angolo.



Definizione

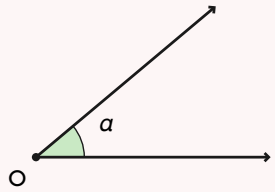
Un angolo si indica con una lettera greca (α, β, γ…) oppure con 3 lettere maiuscole, ponendo il vertice al centro: **AÔB**.

Come si misura

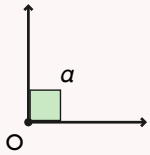
Gli angoli si misurano in gradi (°) e lo strumento è il **goniometro**.

Esempi di angoli

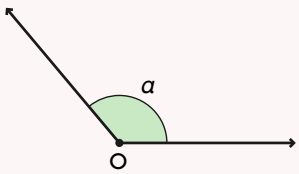
- **ANGOLO ACUTO**
  $0° < \alpha < 90°$



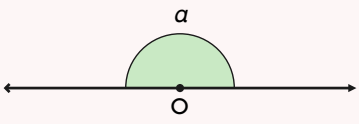
- **ANGOLO RETTO**
  $\alpha = 90°$



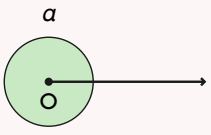
- **ANGOLO OTTUSO**
  $90° < \alpha < 180°$



- **ANGOLO PIATTO**
  $\alpha = 180°$



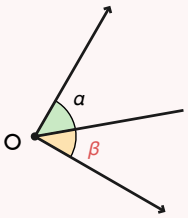
- **ANGOLO GIRO**
  $\alpha = 360°$



TIPI PARTICOLARI DI ANGOLI

ANGOLI CONSECUTIVI

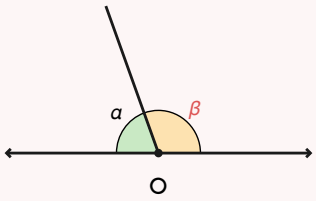
Hanno in comune il vertice e un lato.



Nell'esempio sono consecutivi α e β.

ANGOLI ADIACENTI

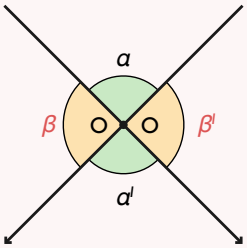
Sono consecutivi e i loro lati non comuni sono opposti.
La loro somma è 180°.



$\alpha + \beta = 180°$

ANGOLI OPPOSTI AL VERTICE

Sono formati da due rette che si intersecano.
Sono sempre uguali.

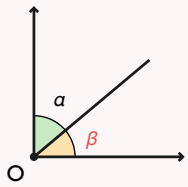


$\alpha = \alpha'$
$\beta = \beta'$

ANGOLI COMPLEMENTARI E SUPPLEMENTARI

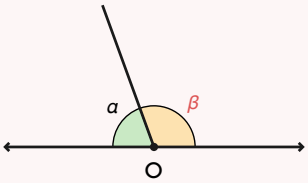
Due angoli sono **complementari** se la loro somma è 90°.

Due angoli sono **supplementari** se la loro somma è 180°.



Complementare

$\alpha + \beta = 90°$



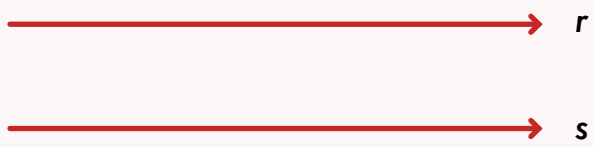
Supplementare

$\alpha + \beta = 180°$

PARALLELISMO

Due rette si dicono **parallele** se stanno sempre alla stessa distanza e non si incontrano mai, neanche se le prolunghiamo all'infinito.

Esempio



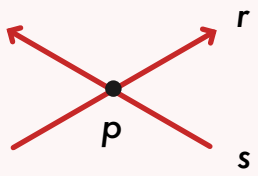
- **SEGNI E SIMBOLI**

$r \parallel s$ ⟶ *si legge:* ***r*** *è parallela a* ***s***

RETTE INCIDENTI

Due rette si dicono **incidenti** se si incontrano in un punto.

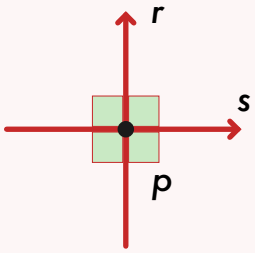
Esempio



PERPENDICOLARITÀ

Due rette si dicono **perpendicolari** se si incontrano in un solo punto formando 4 angoli retti (di 90°). Si tratta di un caso particolare di rette incidenti.

Esempio



- **SEGNI E SIMBOLI**

$r \perp s$ ⟶ *si legge:* ***r*** *è perpendicolare a* ***s***

CAPITOLO 16

I poligoni: le figure fondamentali

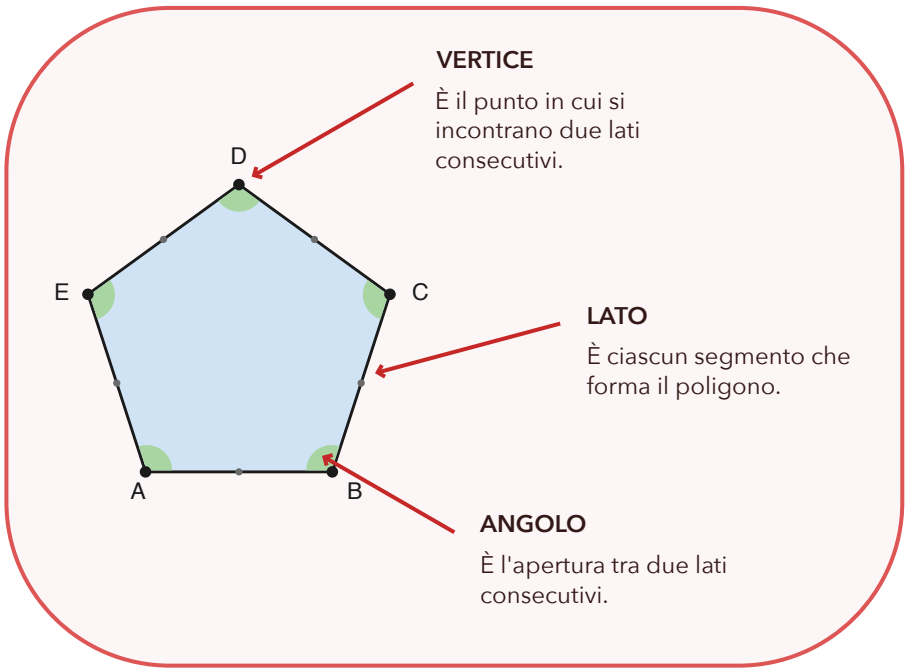


CHE COSA È UN POLIGONO?

Un poligono è una figura piana chiusa delimitata da una spezzata semplice, ovvero una linea che non s'interseca su se stessa.
È composta da:

- lati (segmenti)
- vertici (punti)
- angoli (ciascuno formato da due lati consecutivi)

GLI ELEMENTI DI UN POLIGONO



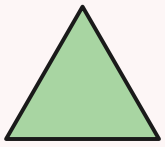
Ricorda!

- Il numero minimo di lati è 3 (il poligono più piccolo è il triangolo).
- La somma degli angoli interni di un poligono di n lati è:

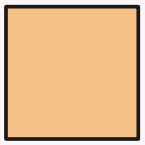
  $(n - 2) \cdot 180°$
  n = **LATI**

CLASSIFICAZIONE DEI POLIGONI

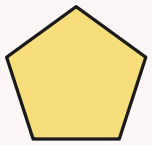
In base al numero di lati



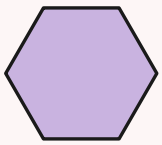
TRIANGOLO
3 Lati



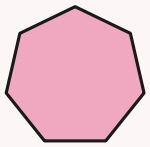
QUADRILATERO
4 Lati



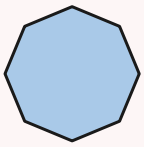
PENTAGONO
5 Lati



ESAGONO
6 lati

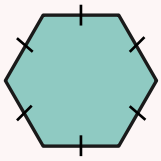


ETTAGONO
7 lati



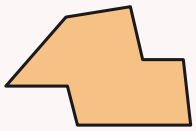
OTTAGONO
8 lati

In base alla regolarità



POLIGONO REGOLARE

Tutti i lati e tutti gli angoli sono congruenti.

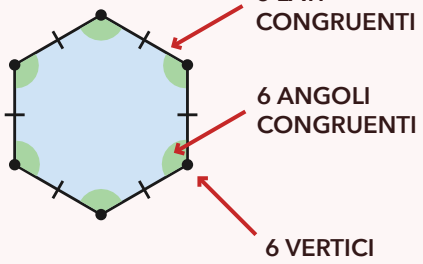


POLIGONO IRREGOLARE

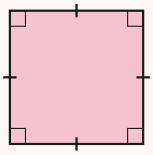
I lati e gli angoli non sono tutti congruenti.

Esempio

Questo è un esagono regolare.

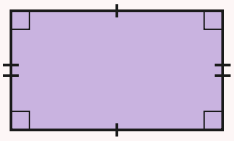


QUADRILATERI IMPORTANTI



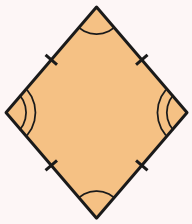
QUADRATO

4 lati uguali.
4 angoli retti.



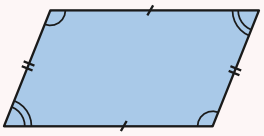
RETTANGOLO

Lati opposti uguali.
4 angoli retti.



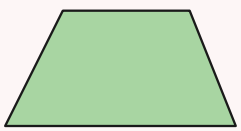
ROMBO

4 lati uguali.
Angoli opposti uguali.



PARALLELOGRAMMA

Lati opposti uguali e paralleli.
Angoli opposti uguali.

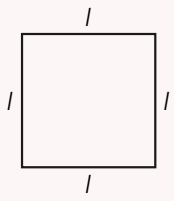


TRAPEZIO

Ha solo due lati paralleli.

FORMULE DI PERIMETRI E AREE

QUADRATO



PERIMETRO

$P = 4l$

AREA

$A = l^2$

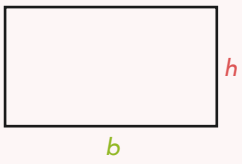
ESEMPIO

Se $l = 5$ cm:

$P = 4 \cdot 5 = 20$ cm

$A = 5^2 = 25$ cm^2

RETTANGOLO



PERIMETRO

$P = 2(b + h)$

AREA

$A = b \cdot h$

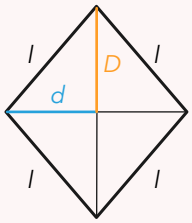
ESEMPIO

Se $b = 8$ cm;
Se $h = 5$ cm:

$P = 2(8 + 5) = 26$ cm

$A = 8 \cdot 5 = 40$ cm^2

ROMBO



PERIMETRO

$P = 4l$

AREA

$A = \frac{D \cdot d}{2}$

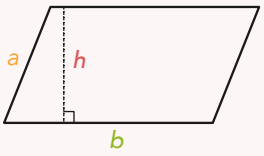
ESEMPIO

Se $l = 6$ cm;
Se $D = 10$ cm;
Se $d = 8$ cm:

$P = 4 \cdot 6 = 24$ cm

$A = \frac{10 \cdot 8}{2} = 40$ cm^2

PARALLELOGRAMMA



PERIMETRO

$P = 2(a + b)$

AREA

$A = b \cdot h$

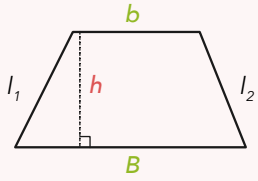
ESEMPIO

Se $a = 5$ cm;
se $b = 8$ cm;
se $h = 4$ cm:

$P = 2(5 + 8) = 26$ cm

$A = 8 \cdot 4 = 32$ cm^2

TRAPEZIO



PERIMETRO

$P = B + b + l_1 + l_2$

AREA

$A = \frac{(B + b) \cdot h}{2}$

ESEMPIO

Se $B = 12$ cm;
se $b = 6$ cm;
se $l1 = 5$ cm;
se $l2 = 7$ cm;
se $h = 4$ cm:

$P = 12 + 6 + 5 + 7 = 30$ cm

$A = \frac{(12 + 6) \cdot 4}{2} = 36$ cm^2

Ricorda!

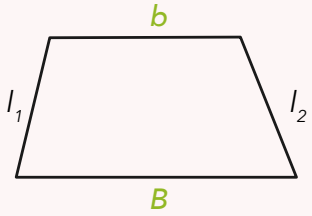
- Il perimetro è la lunghezza del contorno della figura.
- L'area misura la superficie occupata dalla figura.

I TIPI DI TRAPEZI

Il trapezio è un quadrilatero che ha una e una sola coppia di lati paralleli detti **basi**.

1. TRAPEZIO SCALENO

- Ha solo una coppia di lati paralleli (basi).
- I lati obliqui sono diversi tra loro.
- Nessun angolo ha misure particolari.

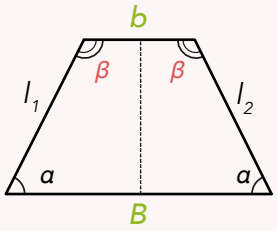


CARATTERISTICHE

- $b \parallel B$
- $l_1 \neq l_2$
- *Nessun angolo uguale*

2. TRAPEZIO ISOSCELE

- Ha le basi parallele.
- I lati obliqui sono uguali: $l_1 = l_2$
- Gli angoli alla stessa base sono uguali.
- Ha un asse di simmetria perpendicolare alle basi.

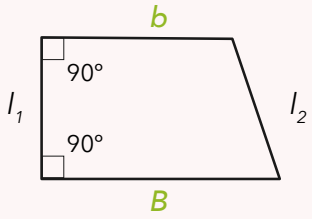


CARATTERISTICHE

- $b \parallel B$
- $l_1 = l_2$
- α (alla stessa base) uguali
- β (alla stessa base) uguali

3. TRAPEZIO RETTANGOLO

- Ha le basi parallele.
- Ha due angoli retti (90°).
- Un lato obliquo e uno perpendicolare alle basi.



CARATTERISTICHE

- $b \parallel B$
- *Due angoli retti*
- *Un lato perpendicolare alle basi*

CAPITOLO 17

I triangoli: teoremi e criteri

Per i triangoli dedichiamo un capitolo a parte rispetto agli altri poligoni, questo perché è importante classificarne le diverse tipologie ed elencare i vari teoremi e criteri.

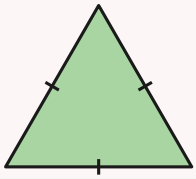
I TRIANGOLI: CLASSIFICAZIONE COMPLETA

I triangoli si possono classificare in due modi: in base ai lati e in base agli angoli.

In base ai lati

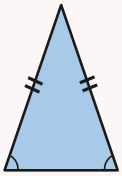
EQUILATERO

Ha tutti e tre i lati congruenti.



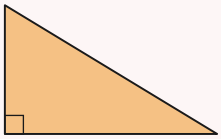
ISOSCELE

Ha due lati obliqui congruenti, ed anche gli angoli alla base.



SCALENO

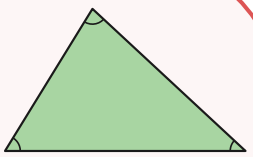
Ha tutti e tre i lati diversi.



In base agli angoli

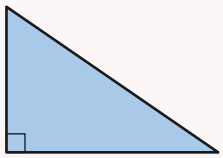
ACUTANGOLO

Ha tutti e tre gli angoli acuti (minori di 90°)



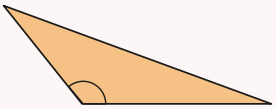
RETTANGOLO

Ha un angolo retto (uguale a 90°)



OTTUSANGOLO

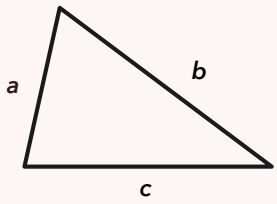
Ha un angolo ottuso (maggiore di 90° e minore di 180°)



FORMULE DI PERIMETRI E AREE - TRIANGOLI

Indichiamo con ***a***, ***b***, ***c*** i lati del triangolo e con ***h*** l'altezza relativa alla base.

PERIMETRO DEL TRIANGOLO



PERIMETRO

$$P = a + b + c$$

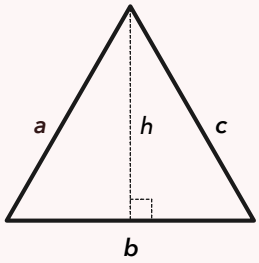
- Somma dei 3 lati.

ESEMPIO

Se ***a*** = 4 cm;
se ***b*** = 5 cm;
se ***c*** = 7 cm:

$$P = 4 + 5 + 7 = 16 \text{ cm}$$

AREA DEL TRIANGOLO



AREA

$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

- Base • altezza diviso 2.

ESEMPIO

Se ***b*** = 5 cm;
se ***h*** = 4 cm:

$$A = \frac{5 \cdot 4}{2} = 10 \text{ cm}^2$$

CRITERI DI CONGRUENZA DEI TRIANGOLI

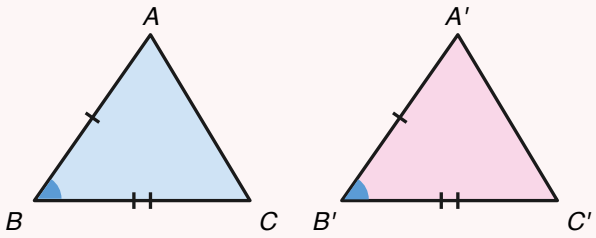
Quando due triangoli sono "gemelli"?

Due triangoli sono **congruenti** quando hanno la stessa forma e le stesse dimensioni.
Anche se li giri, li capovolgi o li sposti, se restano perfettamente sovrapponibili, allora sono congruenti?



1°CRITERIO: LAL

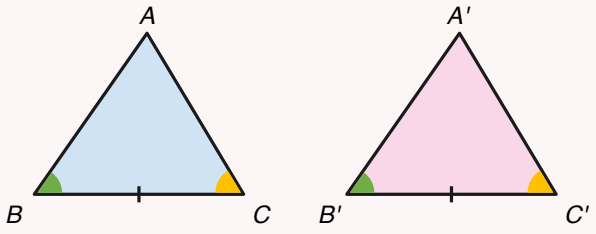
Se due triangoli hanno congruenti due lati e l'angolo compreso tra essi, allora sono congruenti.



- $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
- $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
- $A\hat{B}C \cong A'\hat{B}'C'$

2°CRITERIO: ALA

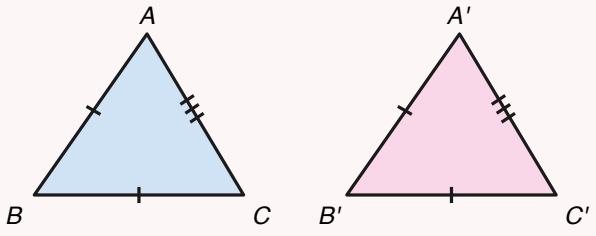
Se due triangoli hanno congruenti un lato e i due angoli ad esso adiacenti, allora sono congruenti.



- $A\hat{B}C \cong \hat{A'}B'C$
- $A\hat{C}B \cong A'\hat{C'}B$
- $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$

3°CRITERIO: LLL

Se due triangoli hanno congruenti i tre lati, allora sono congruenti.



- $\overline{AB} \cong \overline{A'B'}$
- $\overline{BC} \cong \overline{B'C'}$
- $\overline{AC} \cong \overline{A'C'}$

Perché funzionano?

Questi tre criteri garantiscono che i triangoli abbiano la stessa forma e le stesse misure.
Quindi, se per due triangoli vale uno dei tre criteri allora i triangoli sono congruenti.

Ricorda!

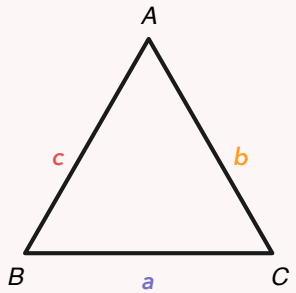
Impara a riconoscere bene i lati e gli angoli: è la chiave per risolvere tanti problemi di geometria!

CRITERIO DI DISUGUAGLIANZA DEI TRIANGOLI

I criteri di disuguaglianza della somma e della differenza ci aiutano a capire se possiamo costruire un triangolo dati i 3 lati.

CRITERIO DELLA SOMMA

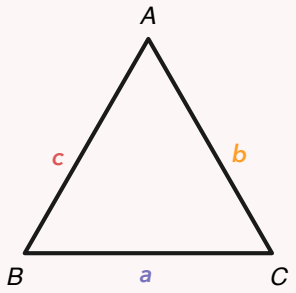
Ogni lato deve essere minore della somma degli altri due lati.



- $a < b + c$
- $b < a + c$
- $c < a + b$

CRITERIO DELLA DIFFERENZA

Ogni lato deve essere maggiore della differenza degli altri due lati.



- $a > |b - c|$
- $b > |a - c|$
- $c > |a - b|$

Il simbolo $|\ldots|$ indica il valore assoluto, ovvero ci preoccupiamo solo quanto distano i due lati in grandezza.

Una scorciatoia

In generale esiste una scorciatoia:

- Il **lato più grande** di un triangolo deve essere sempre **minore** della somma degli altri due.
- Il **lato più piccolo** di un triangolo deve essere sempre **maggiore** della differenza degli altri due.

Esempi

✓

FORMA UN TRIANGOLO

Se $a = 3$;
se $b = 4$;
se $c = 6$:

SOMMA

- $3 + 4 > 6$ ✓
- $3 + 6 > 4$ ✓
- $4 + 6 > 3$ ✓

DIFFERENZA

- $|3 - 4| < 6$ ✓
- $|3 - 6| < 4$ ✓
- $|4 - 6| < 3$ ✓

Le condizioni sono rispettate.
Il triangolo esiste!

X

NON FORMA UN TRIANGOLO

Se $a = 2$;
se $b = 3$;
se $c = 6$:

SOMMA

- $2 + 3 > 6$ X (falsa)
- $2 + 6 > 3$ ✓
- $3 + 6 > 2$ ✓

DIFFERENZA

- $|2 - 3| < 6$ ✓
- $|2 - 6| < 3$ X (falsa)
- $|3 - 6| < 2$ X (falsa)

Le condizioni non sono rispettate.
Il triangolo non esiste!

X

NON FORMA UN TRIANGOLO

Se $a = 5$;
se $b = 7$;
se $c = 12$:

SOMMA

- $5 + 7 > 12$ X (falsa)
- $5 + 12 > 7$ ✓
- $7 + 12 > 5$ ✓

DIFFERENZA

- $|5 - 7| < 6$ ✓
- $|5 - 12| < 7$ X (falsa)
- $|7 - 12| < 5$ X (falsa)

Le condizioni non sono rispettate.
Il triangolo non esiste!

CAPITOLO 18

Il teorema di Pitagora

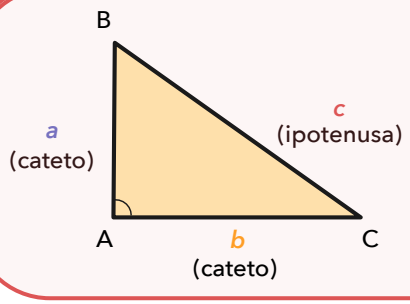
Il triangolo rettangolo nasconde una relazione speciale!

In ogni triangolo rettangolo, la somma delle aree dei quadrati costruiti sui cateti è uguale all'area del quadrato costruito sull'ipotenusa.

Scopriamo perché è così importante!



Teorema di Pitagora



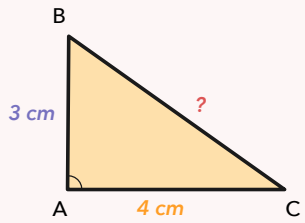
- In ogni triangolo rettangolo vale che:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

dove a e b sono i cateti e c è l'ipotenusa.

Esempio 1

In un triangolo rettangolo i **cateti** misurano 3 cm e 4 cm. Quanto misura l'**ipotenusa**?



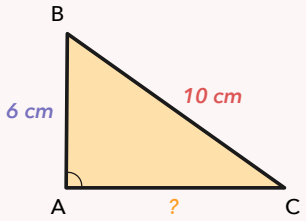
- **CALCOLI**

$a^2 + b^2 = c^2$
↓
$3^2 + 4^2 = c^2$
↓
$9 + 16 = c^2$
↓
$25 = c^2$
↓
$c = \sqrt{25} = \mathbf{5}$

L'ipotenusa misura 5 cm.

Esempio 2

Un cateto misura 6 cm e l'ipotenusa 10 cm. Quanto misura l'altro **cateto**?



- **CALCOLI**

$a^2 + b^2 = c^2$
↓
$6^2 + b^2 = 10^2$
↓
$36 + b^2 = 100$
↓
$b^2 = 100 - 36$
↓
$b^2 = 64$
↓
$b = \sqrt{64} = 8$

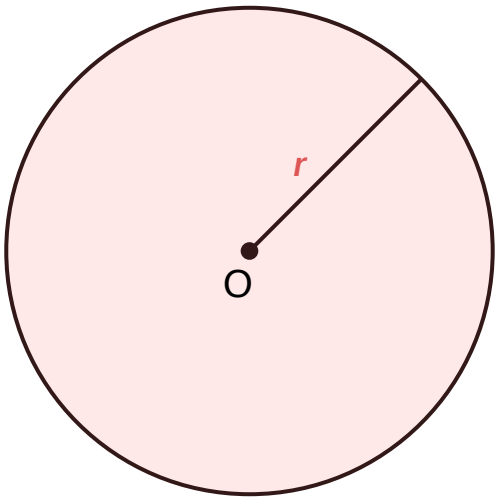
L'altro cateto misura 8 cm.

Errore comune

Molti studenti scambiano l'ipotenusa con uno dei cateti nella formula.
Ricorda: **l'ipotenusa** è sempre il lato opposto all'angolo retto!

Ricorda!

- Solo nei triangoli rettangoli si usa il teorema di Pitagora.
- L'ipotenusa è SEMPRE il lato più lungo.
- Può essere usato per trovare un lato mancante.
- È utile in tantissime situazioni reali!



CAPITOLO 19

Il cerchio

La figura più armoniosa

Tra tutte le figure piane, il cerchio è quella con più simmetrie e proprietà affascinanti.
È alla base di tantissimi fenomeni naturali e di molte applicazioni nella scienza e nella tecnologia.

Definizioni

CIRCONFERENZA



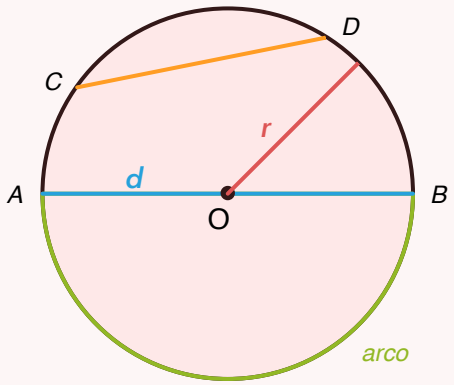
La circonferenza è l'insieme di tutti i punti del piano che hanno la stessa distanza *r* (raggio) da un punto fisso O (centro).

CERCHIO



Il cerchio è la parte di piano delimitata dalla circonferenza, cioè l'insieme della circonferenza e di tutti i suoi punti interni.

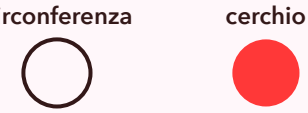
Elementi principali



- **CENTRO (O):** Il punto fisso equidistante da tutti i punti della circonferenza.
- **RAGGIO (*r*):** Il segmento che unisce il centro con un punto qualunque della circonferenza.
- **DIAMETRO (*d*):** La corda che passa per il centro. È il doppio del raggio: $d = 2r$
- **CORDA:** Il segmento che unisce due punti qualsiasi della circonferenza.
- **ARCO:** Parte di circonferenza compresa tra due punti.

Attenzione!

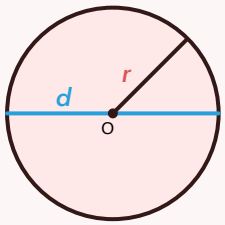
Non confondere il cerchio con la circonferenza: la circonferenza è solo il contorno, il cerchio include anche la parte interna!



FORMULE FONDAMENTALI

LUNGHEZZA DELLA CIRCONFERENZA (PERIMETRO)

La lunghezza della circonferenza corrsiponde al perimetro del cerchio.



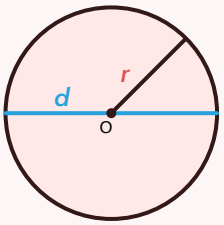
$$C = 2\pi r = \pi d$$

Dove:

- r è il raggio
- d è il diametro ($d = 2r$)
- $\pi \approx 3{,}1415$

AREA DEL CERCHIO

L'area del cerchio è la misura della superficie interna alla circonferenza.



$$A = \pi r^2$$

Dove:

- r è il raggio
- $\pi \approx 3{,}1415$

Formule inverse

RAGGIO

$$r = \frac{C}{2\pi}$$

DIAMETRO

$$d = 2r = \frac{C}{\pi} = 2\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$



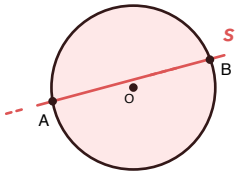
Posizione di retta e circonferenza

Consideriamo una retta s e una circonferenza di centro O e raggio r.

Dove con $d(O,s)$ si intende la distanza tra il centro della circonferenza e la retta.

RETTA SECANTE

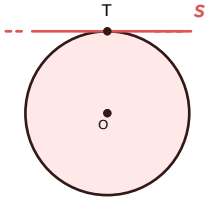
La retta interseca la circonferenza in due punti.



$d(O,s) < r$

RETTA TANGENTE

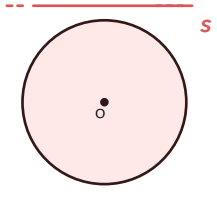
La retta tocca la circonferenza in un solo punto.



$d(O,s) = r$

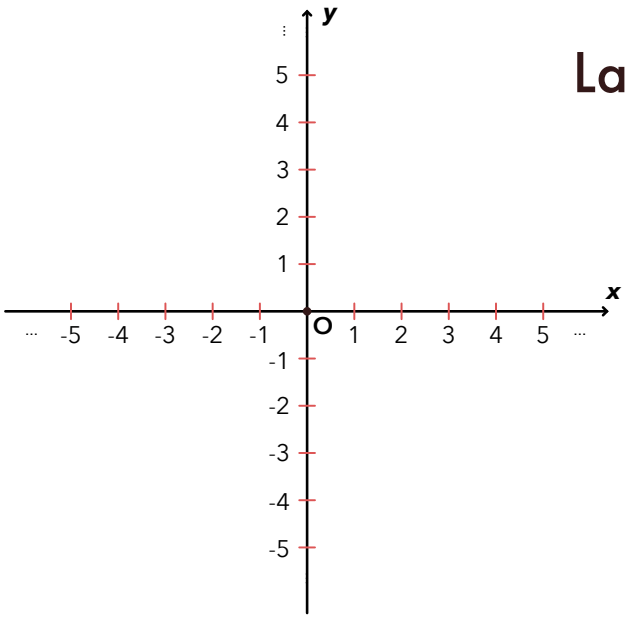
RETTA ESTERNA

La retta non ha punti in comune con la circonferenza.



$d(O,s) > r$

CAPITOLO 20



La geometria nel piano cartesiano

Quando la geometria incontra i numeri

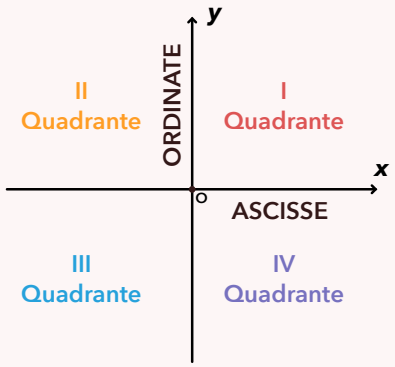
Il piano cartesiano ci permette di descrivere punti, figure e rette usando le coordinate e le equazioni.
In questo modo la geometria diventa un linguaggio preciso e potente!

IL PIANO CARTESIANO

Definizioni

Il piano cartesiano è formato da due rette perpendicolari tra loro che si incontrano nell'origine **O**, dividendo il piano in quattro parti chiamate quadranti.

- **ASSE *x*** (delle ascisse)
- **ASSE *y*** (delle ordinate)
- **ORIGINE** (0,0)
- Un punto ***P*** del piano è individuato da una coppia di numeri (***x,y***), dove ***x*** è l'ascissa e ***y*** è l'ordinata.



Ricorda!

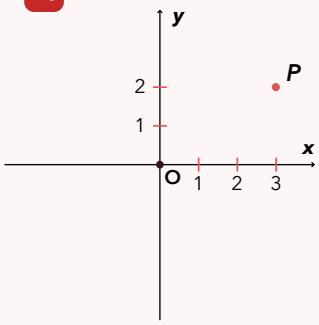
Per scrivere le coordinate di un punto:

- mi sposto sull'asse x (destra o sinistra);
- poi mi sposto in alto (y positivo) o in basso (y negativo).

Esempi

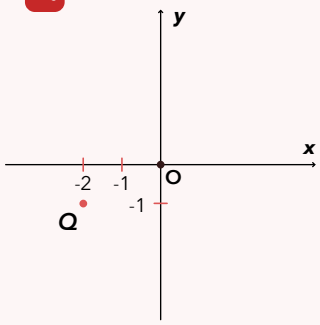
Scrivi le coordinate dei punti indicati:

1.



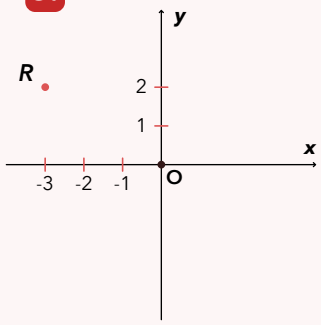
P (3,2)

2.



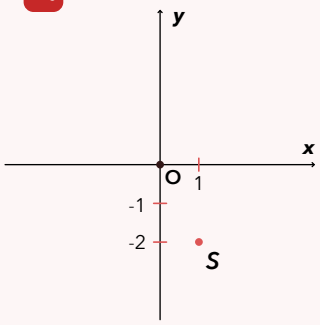
Q (-2,-1)

3.



R (-3,2)

4.



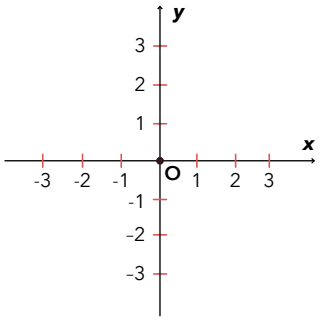
S (1,-2)

Fermati e verifica!

Disegna nel piano cartesiano i punti:

- ***A*** (-2,3)
- ***B*** (1,3)
- ***C*** (3,0)
- ***D*** (-2,0)

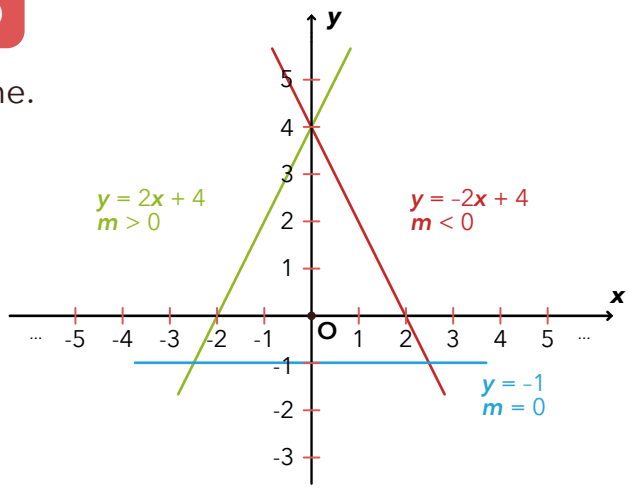
Uniscili nell'ordine e osserva la figura che ottieni!



LA RETTA NEL PIANO CARTESIANO

Una retta può essere descritta da un'equazione. La forma più usata è:

$$y = mx + q$$



Dove:

- ***m*** è il coefficiente angolare (pendenza).
- ***q*** rappresenta l'intersezione con l'asse ***y,*** cioè il punto in cui la retta incontra l'asse ***y*** , ovvero il punto(**0,*q***).

Coefficiente angolare

Data una retta passante per due punti, il coeff. angolare ***m*** si trova:

- $A(x_1, y_1)$
- $B(x_2, y_2)$

con $x_2 \neq x_1$

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$m > 0$

RETTA CRESCENTE

Muovendosi da sinistra a destra, ***y*** aumenta.

$m = 0$

RETTA ORIZZONTALE

Tutte le sue ordinate sono uguali a ***q***.

$m < 0$

RETTA DECRESCENTE

Muovendosi da sinistra a destra, ***y*** diminuisce.

Esempio

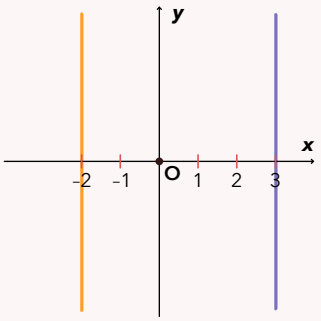
Data una retta passante per due punti:

- $A(1, 2)$
- $B(4, 6)$

$$m = \frac{6 - 2}{4 - 1} = \frac{4}{3}$$

Esempi

- $x = 3$
- $x = -2$



PARALLELE E PERPENDICOLARI

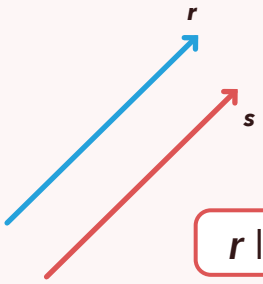
Parallele

RETTE PARALLELE

Due rette non verticali e distinte sono parallele se hanno lo stesso coefficiente angolare:

$$m_1 = m_2$$

(sono distinte o coincidenti)



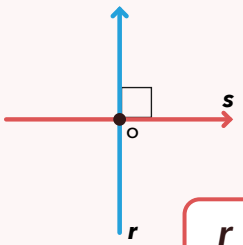
$r \parallel s$

Perpendicolari

RETTE PERPENDICOLARI

Due rette (non verticali) sono perpendicolari se il prodotto dei coefficienti angolari è –1:

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$



$r \perp s$

Esempi

1.

- $y = 3x + 5$
- $y = 3x - 3$

Queste 2 rette sono parallele perché hanno lo stesso **m** = 3, quindi hanno la stessa inclinazione.

2.

- $y = 4x - 2$
- $y = -\frac{1}{4}x + 1$

Queste 2 rette sono perpendicolari perché il prodotto dei coefficienti angolari è **–1**, infatti:

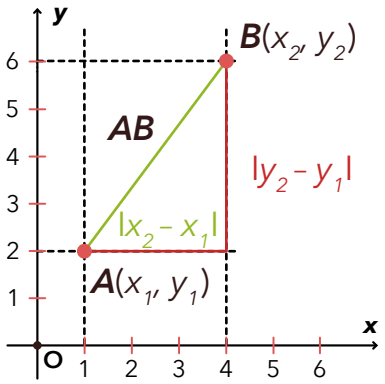
$$m_1 \cdot m_2 = 4 \cdot (-\frac{1}{4}) = -\frac{4}{4} = -1$$

DISTANZA TRA DUE PUNTI

Dati due punti $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$, la distanza tra A e B è:



Se ci pensi è un'applicazione del **teorema di Pitagora**, stai calcolando l'ipotenusa conoscendo i 2 cateti.



$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Esempio

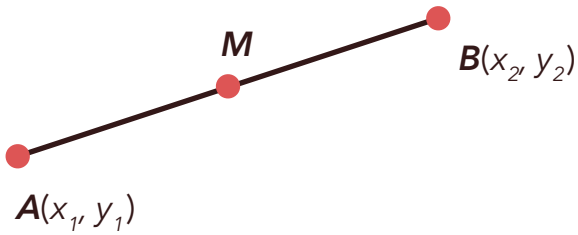
- $A(1, 2)$
- $B(4, 6)$

$$AB = \sqrt{(4-1)^2 + (6-2)^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

PUNTO MEDIO DI UN SEGMENTO

Il punto medio M del segmento che unisce $A(x_1, y_1)$ e $B(x_2, y_2)$ ha coordinate:

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} , \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$



Esempio

- $A(2, 1)$
- $B(6, 5)$

$$M = \left(\frac{2 + 6}{2} , \frac{1 + 5}{2} \right) = M(4,3)$$

Attenzione!

Il punto medio divide il segmento in due parti congruenti:

$$AM = MB$$

Fermati e verifica!

Trova il punto medio dei segmenti con estremi:

1. $A(-2, 3)$ e $B(4, -1)$ = [ ]
2. $A(1, -4)$ e $B(7, 2)$ = [ ]

LA VIA DELLA MATEMATICA CONTINUA!

Questo è solo l'inizio: ci saranno nuovi volumi e nuovi argomenti da scoprire insieme.

Hai domande, suggerimenti o vuoi condividere un feedback? Scrivimi a:

leonardo.cabitta@gmail.com

Ogni contributo è prezioso per far crescere e migliorare questo progetto.

Se vuoi sostenere *La via della matematica* e contribuire alla realizzazione dei prossimi volumi, puoi fare una donazione al sito:

laviadellamatematica.it

