

Dirac Gösterimi ve Kuantum Bilgisayarlara Giriş

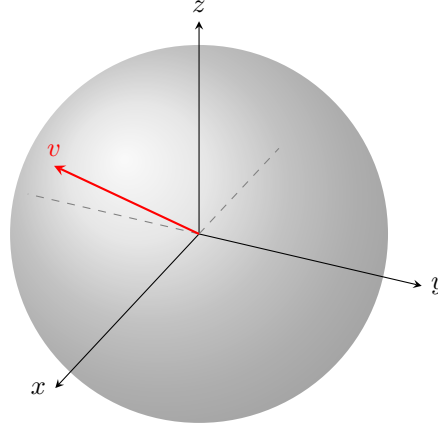
RC Quantum Computing Club

Batu Yalcin

Ekim 2023

1 Giriş

Şu ana kadar hep reel sayılar üzerinde tanımlanan vektörlerle çalıştık. Örneğin $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ vektörlerinin girdileri hep reel sayılardı. Kuantum dünyamızda durum böyle olmayabiliyor. $\begin{pmatrix} 1+i \\ 1-i \end{pmatrix}$ gayet de geçerli bir vektör olabiliyor¹. Bu notu paylaştıktan sonra sizi biraz atom altı parçacıkların dünyasına çekmek istiyorum. Atom altı parçacıkların dönü (spin) adlı bir özelliği bulunur. Bu özelliği şimdilik parçacığın dönme yönü olarak düşünebiliriz, adeta parçacığa atanan bir yön. Örneğin 3 boyutlu uzayda herhangi bir vektör bu parçacığın dönme yönü olabilir (Örn: aşağıdaki çizimde v vektörü)



Yalnız bu gösterimdeki sıkıntı dönüyü tanımlarken kullanılan şu sözde görülebilir:

¹Unutmayın ki kompleks sayıları bileşenlerine ayırırsak bu vektörü $\begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}$ olarak da gösterebiliriz.

*Dönüyü anlamak istiyorsanız bir küre düşünün ve bu küre bir yönde dönsün.
Sadece, ne bu şey bir küre ne de dönüyor.*

Yine de, fiziksel gerçekliklere girmezsek, bu gösterim bize yeterli olacaktır. Dönüş vektörünün büyüklüğünün $|v|$ sabit kalacağını varsayarsak, herhangi bir dönüyü göstermek için $\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ vektörü ile $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$ koşulu (bu noktadan sonra birim küreler ile uğraşacağız) yeterli olacaktır. O zaman bu noktada şu soruları sormamız gerekir: Bu koşulu bilgisayar dünyasına nasıl uyarlayacağız? Klasik bilgisayarlarda 1 ve 0'larla uğraşırken şimdi 3 boyuta geçmek zor olabilir. Bir şekilde ikiliği korumak mümkün olabilir mi? Örneğin 2 boyutlu bir vektör kullanılabilir mi? Bu sorunun cevabı $SU(2)$ 'dan $SO(3)$ 'ye dönüşümde yatar. Teknik terimlerden uzaklaşırsak, 3 boyutlu reel uzaydan 2 boyutlu kompleks vektörlere geçiş demektir bu.

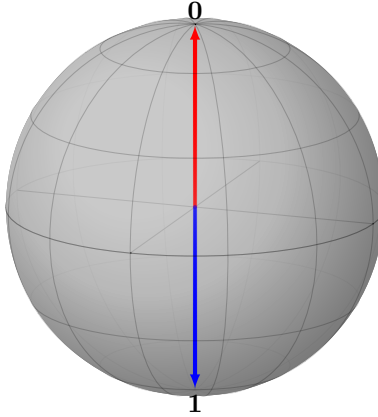
2 3 Boyuttan 2 Boyuta Yolculuk

Bu konunun aslının çok teknik olduğuna dair sizi uyarmam gerek. O yüzden elden geldiğince az teknik anlatacağım. Ama bu da belli yerlerde söyleyeceğim şeyler konusunda bana sadece güvenmeniz gerektiği anlamına geliyor. Başlayalım:

İlk 1 ve 0'ı tanımlayalım.

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Bu size gayet mantıklı gelecektir. Mantıklı gelmeyebilecek şey ise bu iki vektörün bir kürenin iki kutbu olarak gösterilebileceğidir.



Merak etmeyin, buna daha sonra geleceğiz. Şimdi küredeki herhangi bir vektörü nasıl gösterebileceğimizi düşünelim. Küredeki vektörlerin 3 boyutlu tarifinde 3 bağımsız değişkenimiz, v_1, v_2, v_3 , ve bir koşulumuz, $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$, var.

Bizim istediğimiz şey ise iki boyutlu bir vektörle bunu tanımlamak. İlk akla gelebilecek şey iki boyutlu vektörlerden birinin girdisini kompleks yapıp diğerini reel bırakmak ve yine bir koşul eklemek:

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 1$$

Bu ilk bakışta güzel gelse de vektörün bir girdisini diğer girdisinden üstün tutmuş olduğumuzu görebiliriz. Bu da matrislerle işlem yaparken girdiler birbirleriyle etkileşime gireceğinden bize sorunlar çıkarabilir. Bu noktada doğal cevap, "O zaman ikisini de karmaşık yapalım!" cevabıdır. Bu noktada çözülmesi gereken tek bir şey kalır: 4 bilinmeyen ve bir koşulumuz var; bu, 3 boyutlu tariften bir fazla bağımsızlık derecesine, bilinmeyene, sahip bir durumla karşı karşıya bırakıyor bizi. Bunun çözümüne dair içgüdüsel bir anlayış kazanmak için biraz bu tarifi inceleyelim. Yalnız burada, karmaşık sayıların polar biçimlerini kullanmamız gerek. Polar biçim, karmaşık sayıları büyüklük ve açı ile tanımlamak ile eşdeğerdir. İfadesi ise şöyledir:

$$z = ae^{i\phi} = a\cos(\phi) + ias\sin(\phi)$$

İncelemeye artık başlayabiliriz.

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 + iv_2 \\ v_3 + iv_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae^{i\psi} \\ be^{i\phi} \end{pmatrix} = e^{i\psi} \begin{pmatrix} a \\ be^{i(\phi-\psi)} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Buradan her kompleks girdili iki boyutlu vektörü büyüklüğü 1 olan ($|e^{i\psi}|^2 = e^{i\psi}e^{-i\psi} = e^0 = 1$) bir çarpan ile 3 bilinmeyenli ($\varphi = \phi - \psi$ olarak tanımlayalım: a, b, φ) bir vektör ile ifade edilebilir. O zaman bu vektörleri küreye yerleştirirken şöyle bir prensip alabiliriz:

$$\mathbf{v}_0 = e^{i\phi}\mathbf{u}, \mathbf{v}_1 = e^{i\psi}\mathbf{u}$$

şeklinde iki vektör, aynı yöne doğrultacak şekilde yerleştirilir. Özetle, vektörlerin başındaki kompleks çarpanları yok sayabiliriz. Bu prensip sayesinde hem 3 bilinmeyen ve bir koşula ulaştık (a, b, φ ; $a^2 + b^2 = 1$) hem de vektörün bir girdisini öbürüne üstün tutmadık.

Şimdi, bu vektörlerin nereye yerleştirilebileceğine bir bakalım. Öncelikle (1) numaralı denklemdeki vektörü ele alıp baştaki çarpanı yok sayarsak $\mathbf{v}$ vektörünün şu şekilde yazılabileceğini görürüz:

$$\mathbf{v} = a\mathbf{0} + be^{i\varphi}\mathbf{1} \quad (2)$$

$a^2 + b^2 = 1$ koşulundan ise $a = \cos(\alpha), b = \sin(\alpha)$ olarak gösterilebileceğini görürüz. O zaman

$$\mathbf{v} = \cos(\alpha)\mathbf{0} + e^{i\varphi}\sin(\alpha)\mathbf{1} \quad (3)$$

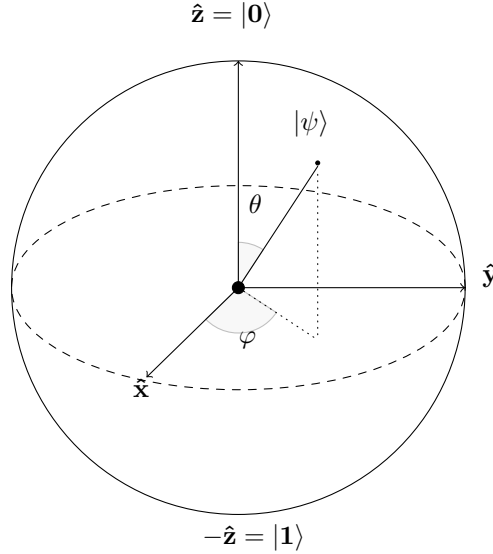
şeklinde yazılabilir. Bu noktada şu soruyu sormak doğaldır: α ve φ açılarını küredeki açılarla nasıl ilişkilendirebiliriz? Bunun için $\mathbf{1}$ vektörünün tanımına bakalım:

$$\mathbf{1} = \cos(\alpha)\mathbf{0} + e^{i\varphi}\sin(\alpha)\mathbf{1} \quad (4)$$

Bu durumda, $\cos(\alpha) = 0$ ve $\sin(\alpha) = 1$ sonucuna varırız. O zaman $\alpha = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ olduğunu anlarız. $\mathbf{0}$ vektörü için bu açının $\alpha = 0$ olduğunu göstermeyi size bırakıyorum. Ancak şunu da biliyoruz ki küremizde $\mathbf{0}$ ve $\mathbf{1}$ vektörlerinin arasındaki açı $\theta = 180^\circ = \pi$ değerindedir. Bu durumda, θ $\mathbf{v}$ vektörü ile z eksenindeki açı olmak üzere $\alpha = \frac{\theta}{2}$ olacak şekilde tanımlayabiliriz. Son olarak φ açısını ise vektörün xy düzlemine olan izdüşümünün x eksenine yaptığı açı olarak alabiliriz. Bu durumda gösterim için gereken her tanım tamamlanmış olur. Kalan son şey, size bunun literatürdeki gösterimini tanıtmam olur:

$$\mathbf{0} \equiv |0\rangle, \mathbf{1} \equiv |1\rangle, \mathbf{v} \equiv |\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle \quad (5)$$

Burada $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ koşulları bulunur. Bu kare toplamı koşuluna **normalizasyon şartı** denir. Bu gösterime **Dirac gösterimi**, spesifik olarak $|\rangle$ işaretine **ket** ve küreye ise **Bloch Küresi** denir. Bloch küresi biraz karışık olabilir, bu yüzden genel gösterimini aşağıya çiziyorum:



$|\psi\rangle$ vektörüne bundan sonra **kuantum durumlar** olarak hitap edeceğiz.

3 Kuantum Durumlar

En başta kuantum bilgisayarların önemli özelliklerinden birinin süperpozisyon olduğunu söylemiştik. Bu, bir kuantum bitin, kübit (qubit), 0 ve 1 durumlarının arasında, bir nevi aynı anda hem 0 hem 1 olabilecek bir durumda olması şeklinde düşünülebilir. Ölçüldüğünde ise bu kübit belli olasılıklarda ya 0 ya 1 olarak karşımıza çıkacaktır. Bu size bir şeyi anımsattı mı? $|\psi\rangle = \alpha|0\rangle + \beta|1\rangle$ durumu 0 ve 1 durumlarını belirli ağırlıklarla içerir. Ayrıca $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ koşulu ise bize olasılıkların toplamının 1 olduğu gerçeğini hatırlatır. Buradan şuna varabiliriz

ki $|\psi\rangle$ durumundaki bir kubitin ölçüldüğünde $|0\rangle$ durumunu verme olasılığı $|\alpha|^2$, $|1\rangle$ durumunu verme olasılığı ise $|\beta|^2$ olacaktır.

3.1 Dirac Gösteriminde İççarpım

Kompleks vektörlere geçtiğimize göre iççarpım tanımını bir daha gözden geçirmekte yarar vardır. Sırasıyla $|\psi\rangle$ ve $|\phi\rangle$ olmak üzere iki durumun iç çarpımını $\langle\psi|\phi\rangle$ olarak göstereceğiz (sıra önemlidir). İççarpımın iki vektörün birbiriyle yaptıkları açı ve büyüklükleriyle ilgili olduğunu hatırlayalım. Kuantum durumlarda vektörlerin büyüklüklerinin 1'e eşit olduğunu da hesaba katarsak, kuantum durumlarda iççarpımın yalnız vektörlerin arasındaki açılar hakkında değerli bilgi vereceğini çıkarabiliriz. Bu bilgiyi ise iki vektörün birbirine ne kadar yakın, benzer olduğu bilgisi olarak yorumlayabiliriz. Ne de olsa, bu açı 0'a eşit ise iki vektör birbirine denktir.

Bu durumda iççarpımımızın en temel özelliği bir durumun kendisiyle iççarpımının 1 olması olacaktır. Bu koşulu inceleyelim. Bu inceleme sırasında genel bir durum $|\psi\rangle$ 'in vektörünü nasıl bir vektörle çarparsak 1 elde ederiz sorusunun cevabı olan vektörü $|\psi\rangle$ cinsinden ifade edeceğiz. Bu sayede:

$$1 = \langle\psi|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha_1\alpha + \beta_1\beta \quad (6)$$

eşitliğini görürüz. Buradan $\alpha_1 = \alpha^*$ ve $\beta_1 = \beta^*$ değerlerinin eşitliği herhangi α ve β için sağladığını görürüz. Ayrıca $|z^*|^2 = |z|^2$ olduğundan $\begin{pmatrix} \alpha^* \\ \beta^* \end{pmatrix}$ vektörünün de normalizasyon şartını sağladığını görürüz. Bu durumda $\langle\psi| = (\alpha^* \ \beta^*)$ sonucuna varırız. Buradaki $\langle|$ işaretine ise **bra** denir. Buradan görebileceğimiz ilginç ve yararlı özellikler şunlardır:

$$\langle 1|0\rangle = \langle 0|1\rangle = 0 \quad (7)$$

$$\begin{aligned} |\varphi\rangle &= \varphi_0 |0\rangle + \varphi_1 |1\rangle, |\psi\rangle = \psi_0 |0\rangle + \psi_1 |1\rangle; \\ \langle\varphi|\psi\rangle &= \varphi_0^*\psi_0 + \varphi_1^*\psi_1 = (\varphi_0\psi_0^* + \varphi_1\psi_1^*)^* = (\langle\psi|\varphi\rangle)^* \end{aligned} \quad (8)$$

$$\langle\psi|0\rangle = \alpha \implies |\langle\psi|0\rangle|^2 = |\alpha|^2 \quad (9)$$

$$\langle\psi|1\rangle = \beta \implies |\langle\psi|1\rangle|^2 = |\beta|^2 \quad (10)$$

Bu bölümü bitirmeden önce bir örneğe bakalım. Diyelim ki bir kuantum bilgisayarda 0 veya 1 durumunu bulmamızın eşit olasılıklı olduğu bir durum elde etmek istiyoruz. Bir durumu bulma olasılığını önceden $|\psi\rangle$ durumundaki katsayılar cinsinden tanımlamıştık ama yukarıda gördüğümüz özelliklerden 0'ı bulma olasılığını (kalan durumlar benzer şekilde tanımlanır) $|\langle\psi|0\rangle|^2$ olarak tanımlayabiliriz. O zaman:

$$|\langle\psi|0\rangle|^2 = |\langle\psi|1\rangle|^2 \implies |\alpha|^2 = |\beta|^2 \quad (11)$$

$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \implies 2|\alpha|^2 = 1 \implies |\alpha| = |\beta| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

O zaman bu şartı sağlayan genel bir durum:

$$|=\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi} |1\rangle \quad (12)$$

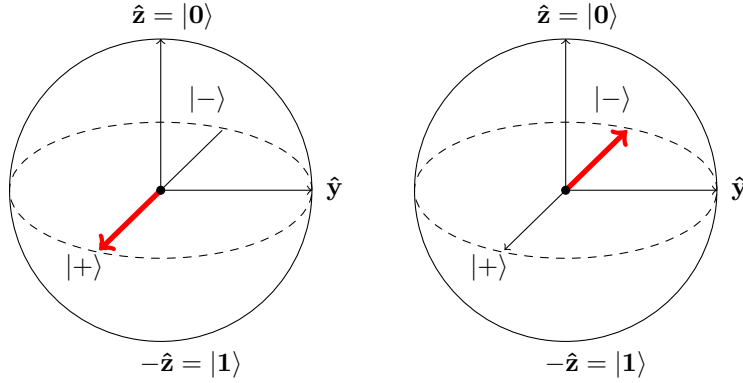
olarak gösterilebilir. Burada $\varphi = 2\pi$ iken durum

$$|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad (13)$$

$\varphi = \pi$ iken durum

$$|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |0\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}} |1\rangle \quad (14)$$

ile gösterilir². $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ durumlarına Bloch küresi üzerinde bakarsak şunu görürüz:



Bunun doğruluğunu kendiniz kontrol ediniz, ancak ipucu olarak $\sin(\pi/2) = 1$, $\cos(\pi/2) = 0$, $e^{i\pi/2} = -1$ eşitliklerini verebilirim.

Artık kuantum durumlar üzerinde operasyonlara geçebiliriz.

3.2 Kuantum Durumlar Üzerinde Operasyonlara Giriş

Artık operasyonlar derken matrisleri kastettiğimi anlamışsınızdır. Öncelikle şunu belirtiyim, bir küre üzerinde olduğumuz için matrisleri her zaman döndürme operasyonu olarak göreceğiz. Her zaman yaptığımız gibi $|0\rangle$, $|1\rangle$ vektörleri arasında geçişi sağlayacak matrisi bulalım. Bu, bildiğimiz iki boyutlu uzaydaki $\hat{x}$, $\hat{y}$ vektörleri arasında geçiş matrisi olan $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisidir. Bu matrisi de bilgisayar biliminde 0'dan 1'e geçiş (ve tersi) operasyonu olan NOT operasyonundan esinlenerek X ile göstereceğiz. Görebileceğiniz üzere;

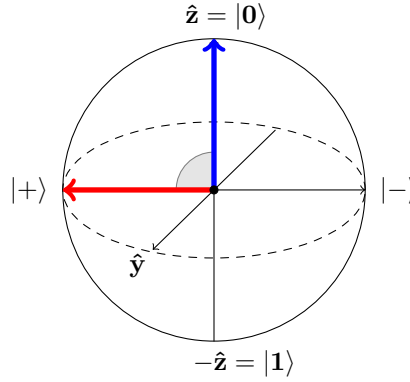
$$X |\psi\rangle = X \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = X(\alpha |0\rangle + \beta |1\rangle) = \alpha X |0\rangle + \beta X |1\rangle = \beta |0\rangle + \alpha |1\rangle = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (15)$$

² $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ gösterimleri literatürde vardır ve alanda önem taşırlar. $|=\rangle$ gösterimi benim uydurmamdır.

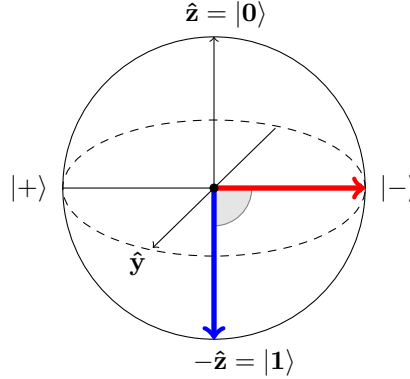
Bir de $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumlarından nasıl $|+\rangle$ ve $|-\rangle$ durumlarına geçilebileceğine bakalım. Bu soruyu cevaplayabilmek için problemi matris dilinde inceleyelim:

$$H|0\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = |+\rangle \quad (16)$$

Buradan $a = c = \frac{1}{\sqrt{2}}$ çıkar. b ve d 'ye dair bir fikir elde edebilmek için H matrisinin başka durumlar üzerindeki etkisine/eylemine (aslında, bir başka durum) ihtiyacımız var. Bunu döndürme fikriyle bulabiliriz. $|0\rangle$ 'ı $|+\rangle$ 'ya getiren operasyon vektörü y eksenini etrafında $\pi/2$ radyan dönüş yaptırmıştır (Gösterimde kolaylık için y ve x eksenlerinin yeri değişecek şekilde küreyi döndürmüş olacağız):



Buna uyumlu olacak şekilde H matrisi $|1\rangle$ durumunu da y eksenini etrafında $\pi/2$ radyan döndürerek $|-\rangle$ durumuna getirmelidir.



Bu durumda aşağıdaki eşitliğe ulaşırız:

$$H|1\rangle = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = |-\rangle \quad (17)$$

Buradan ise $b = -d = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ bulunur. O zaman $H = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ işimizi görecektir. İlgili bir okuyucu bu matrisin herhangi bir durumu y eksenini

etrafında döndürdüğünü kanıtlayabilir. Bu matrisin H ile gösterilmesinin sebebi ise Hadamard adlı matematikçiye atfedilmesidir, matris ise **Hadamard matrisi** ismini taşır. Bu yazıda y eksen etrafında 90 derece ve x eksen etrafında 180 derece döndüren matrisleri gördük (H, X). İleriki yazılarda daha genel operasyonlara artan derinlikle daleacağız.

3.3 Alıştırmalar

Alıştırma 1. $\hat{y}$ yönünde doğrulan vektör için α, β değerlerini bulunuz.

Alıştırma 2. $|+\rangle$ ile $|-\rangle$ durumlarının iççarpımını bulunuz.

Alıştırma 3. (Orta-Zor) $|+\rangle$ durumunu $|-\rangle$ durumuna götüren (ve tabi ki tersi) matrisini bulunuz. Bunun için bu matrisin hangi dönmeyi temsil ettiğini bulup bu dönmenin $|0\rangle$ ve $|1\rangle$ durumları üzerindeki etkisine bakabilirsiniz.

Alıştırma 4. (Zor) X matrisinin x eksen etrafında 180 derece döndürme operasyonu olduğunu gösteriniz.