

Kuantum Hesaplama ve Bilgisayarlar İçin Matematik

Batu Yalçın

1 Ana Maddeler

Kuantum hesaplama konusunda çalışmak birçok farklı matematik alanında bilgi gerektirir. Ancak, geri kalan her şeyi öğrenebilmek için gereken temel bir dokümanda özetlenebilir. Bu bilgi, kuantum hesaplama için lineer cebre ve kalkülüse girmeden önce herkesin sahip olmasının çok yararlı olacağı bilgidir. Bu dokümanda bu matematiğe gireceğiz. Her bölümde konu başlığı, alt konular, her konu için kaynaklar ve ölçme problemleri olacak.

Öğrenilecek ana maddeler şu şekildedir:

- İkilik Sayı Sistemi ve Klasik Hesaplama
- Logaritma ve Üstel Sayılar
- Diziler ve Seriler
- Trigonometri ve Radyanlar
- Karmaşık Sayılar

Kaynaklar, hepsini okumanız için verilmemiştir. Yalnızca, öğrenmek istediğiniz ve eksik kalan kısımları hangi kaynakları sevdiyseniz o kaynaklardan öğrenmeniz için bir çeşitlilik sağlanmaya çalışılmıştır.

İyi eğlenceler!

2 İkilik Sayı Sistemi ve Klasik Hesaplama

İkilik sayı sistemi klasik bilgisayarların temelinde yatar; klasik hesaplama dili ikilik sistemdedir, 1 ve 0'lardan oluşur.

Bu bölümdeki alt başlıklar şu şekildedir:

- Sayı sistemleri: 10'luk, 2'lik ve n 'lik sayı sistemlerinin genel mantığını; bit dizilerini anlar.
- Klasik Mantık Kapıları: NOT, AND, OR, XOR, NAND kapılarını anlar.

Kaynakları aşağıda bulabilirsiniz:

- İkilik, onluk, on altılık, vb. sistemler (Medium)
- İkilik sayı sistemi (Byjus)
- İkilik Sayı Sistemi 2 (Brilliant)
- Mantık Kapıları (Byjus)

Değerlendirme soruları:

- 2 bitten oluşan iki sayıyı toplayacak devreyi çiziniz.
- NAND kapısı diğer tüm kapıları oluşturmak için kullanılabilir. NAND kapısından AND, OR, XOR kapılarını oluşturunuz. Cevap: NAND kapısının evrenselliği (Universality) (All About Circuits)

3 Logaritma ve Üstel Sayılar

Logaritma ve üstel fonksiyonlar ileri matematiğin temelinde yatar. Bu bölümde alt başlıklar şu şekildedir:

- Üstel Sayılar: a^x ifadesinin ne demek olduğunu anlar. x sonsuza giderken (çok büyükken) ifadenin alacağı değerleri a 'ya göre değerlendirebilir. Üstel fonksiyonları çarpmayı, bölmeyi, toplamayı, çıkarmayı bilir. e sayısını anlar.
- Logaritma: $\log_a(x)$ ifadesinin ne demek olduğunu anlar. Logaritma fonksiyonunun tanımlı olduğu aralığı bilir. Logaritma fonksiyonunun üstel fonksiyonun tersi olduğunu anlar. Logaritmada toplama, çıkarma yapar, taban değişimlerini anlar. $\ln x$ ifadesini anlar.

Kaynakları aşağıda bulabilirsiniz:

- Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar 1 (MIT)
- Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar 2 (MathCentre)
- Üstel ve Logaritmik Fonksiyonların Özellikleri
- Üstel ve Logaritmik Fonksiyonlar 3 (U of Sydney)

Değerlendirme soruları:

- $e^{\log_{10} a / \log_{10} e}$ ifadesinin değerini bulunuz.
- $f(x) = e^{ax}$, $g(x) = \ln(x)$ olsun. $f(x)$ ve $g(x)$ hangi x değerleri için tanımlıdır? x , bu aralıkların uç noktalarına yakınsarken $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının davranışı nasıldır? (aldığı değer/yakınsadığı değer vb.) $a = 1$ için $f(x), g(x)$ grafiklerini çizin. Bir bağlantı var mı, varsa nedir?

4 Sonlu ve Sonsuz Diziler ve Seriler

Sonlu ve sonsuz diziler ileri matematikte her zaman karşımıza çıkarlar. Özellikle bir matrisin üstel fonksiyonunu almak gibi görünüşte anlamsız işlemleri tanımlamamıza yararlar. Bu bölümde alt başlıklar şu şekildedir.

- Sonlu ve sonsuz diziler: Sonsuz ve sonlu dizilerin farkını bilir. Aritmetik ve geometrik dizi tanımını anlar.
- Sonlu ve sonsuz seriler: Serilerin dizilerden farkını ve dizilerle bağlantısını bilir. Sonsuz ve sonlu serilerin farkını bilir. Sigma gösterimini anlar. Aritmetik ve geometrik serilerin değerlerini bulabilir.
- (Opsiyonel, Kalkülüs Gerektirebilir) e^x , $\sin x$, $\cos x$ için Taylor/MacLaurin seri açılımlarını bilir.

Kaynakları aşağıda bulabilirsiniz:

- Diziler ve Seriler (AMSI, Özellikle 21. sayfaya kadar (dahil))
- Diziler ve Seriler 2 (NCERT)
- Aritmetik ve Geometrik Seriler (Math Centre)
- Sıkça Kullanılan Taylor Serileri (USC)
- Taylor Serileri (MSU)

Unutmayın, Taylor serileri bu dokümandaki kalan konular kadar temel değildir, gerektiğinde geri dönmek üzere geçebilirsiniz.

Değerlendirme soruları:

- $\{0, 2, 4, 6, \dots\}$ serisi aritmetik birdizimidir, geometrik birdizimidir, yoksa ikisidedeğilmidir?
- $a \sum_{i=k}^n r^i$ 'nin değerini bulunuz. $n \rightarrow \infty$ iken bu toplamın değeri hangi şartlar altında sonludur? Bu şartlar altında bu değeri bulunuz.
- (Zor) Bu soru için trigonometri ve karmaşık sayıları bilmeniz gerekmektedir. Lütfen bu alanları öğrendikten sonra dönünüz. Soru: Euler Özdeşliğini ve bu sayede De Moivre teoremini kanıtlayınız.

5 Trigonometri ve Radyanlar

Trigonometri, kuantum hesaplamanın temelinde yatar. Kuantum bilgisayarların en temel objesi olan kubitleri bir küre üzerinde gösterdiğimizden trigonometriyi çok kullanacağız. Bu konunun alt başlıkları şu şekildedir:

- Radyanlar: Radyan biriminin derece ile ilişkisini bilir. Neden radyanı kullandığımıza dair bir içgüdüye sahiptir (Bunu ilk kendiniz cevaplamaya çalışın, sonra ise araştırın).

- Temel Trigonometrik Fonksiyonlar: $\sin$, $\cos$, $\tan$ ve ilgili fonksiyonları dik üçgende anlar, belirli değerlerde hesaplayabilir. Birbirleriyle temel ilişkilerini bilir.
- Birim Çemberde Trigonometri: Temel trigonometrik fonksiyonları birim çemberde anlar, herhangi bir açı için tanımlarına dair bir mantık kurar.
- Trigonometrik Özdeşlikler/Toplam Formülleri: Trigonometrik fonksiyonlara dair özdeşliklere hakimdir. $\sin(a + b)$ benzeri açı toplamı içeren trigonometrik ifadeleri toplanan açılarının trigonometrik fonksiyonları ile yazar. (Örn: $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$)

Kaynakları aşağıda bulabilirsiniz:

- Radyanlar (Maths Centre)
- Trigonometri (Math LibreTexts)
- Dik Üçgende Trigonometri (Alamo)
- Birim Çemberde Trigonometri (Alamo)
- Trigonometrik Özdeşlikler (U of Sydney)
- Trigonometrik Özdeşlikler Özet Kağıdı (MVCC)

Değerlendirme soruları:

- $\tan \pi/12$, $\sin \pi/12$, $\cos \pi/12$ değerlerini bulunuz.
- $\sin \theta$ pozitif, $\cos \theta$ negatif ise θ açısı için hem radyan hem derece cinsinden birer aralık bulunuz.
- $\sin 3x + y$ 'yi x ve y 'nin trigonometrik fonksiyonları cinsinden yazınız.

6 Karmaşık Sayılar

Karmaşık sayılar, kuantum mekaniğin en temel denklemi olan Schrödinger denkleminde bile karşımıza çıkar. Ayrıca trigonometri ile önemli bağlantıları vardır. Bu bölümde alt başlıklar şu şekildedir:

- Karmaşık Sayıların Biçimleri ve Özellikleri: Karmaşık sayıları $a + bi$ ve büyüklük-açı formunda (modulus-argument) yazar. Bir karmaşık sayının büyüklüğünü, eşleniğini (conjugate) hesaplar. Karmaşık sayıları karmaşık düzlemde gösterir.
- Karmaşık sayılarla işlemler: Karmaşık sayıları çarpabilir, bölebilir, toplayabilir ve çıkarabilir. Bir karmaşık sayının eşleniğiyle çarpımının anlamını anlar. Bir karmaşık sayının gerçek ve hayali kısımlarını o sayı ile cebirsel işlemler yaparak elde eder.

- Euler Özdeşliği/Formülü ve De Moivre Teoremi: Euler'in özdeşliğini/formülünü ve De Moivre teoremini bilir, kullanır. Karmaşık sayıların polar formunu bilir, polar form ile $a + bi$ formu arasında kolayca geçiş yapabilir. Polar formda eşlenik almayı ve çarpmayı bilir.

Kaynakları aşağıda bulabilirsiniz:

- Karmaşık Sayılar 1 (CMT UK)
- Karmaşık Sayılar 2 (Mathematics LibreTexts)
- Euler Özdeşliği ve Formülü (NCL)
- De Moivre Teoremi ders planı (PSU)

Değerlendirme Soruları:

- $z = 3 + 2i$ sayısı için $|z|$, $\bar{z}$ (z^* olarak da gösterilebilir) değerlerini bulunuz. z sayısını büyüklük-açı formunda gösteriniz.
- $e^{i\pi/3}, e^{i\pi/6}, e^{i9\pi/2}$ sayılarını $a + bi$ formunda yazınız.
- (Zor) $\sum_{k=0}^n \cos(k\theta) = \frac{\sin \theta/2 + \sin(n+1/2)\theta}{2 \sin \theta/2}$

Artık kuantum hesaplama öğrenmeye ve kuantum bilgisayarların ilgi çekici dünyasına girmeye hazırsınız!