

İlk Hafta: Lineer Cebir

RC Kuantum Bilgisayar Kulübü

Batu Yalçın

Eylül 2023

1 Giriş

Lineer Cebir, kuantum bilgisayarları anlamak için en önemli araçlardan biridir. Bu sebepten kuantum bilgisayarlarla uğraşabilmek için lineer cebirin temelini öğrenmek gerekir. Bu dokümanda, lineer cebirin temellerini işliyoruz. Ancak öncelikle, temelleri tekrar gözden geçirelim:

1.1 Karmaşık (Kompleks) Sayılar

Lineer cebirden önce karmaşık sayılardan bahsetmek gerekir. Öncelikle bir soruyla başlayalım:

$$x^2 = 1 \quad (1)$$

denkleminin reel sayılar üzerinden çözümü nedir?

Çözüm. İki tarafın da kökünü alırsak $x = \sqrt{1} = 1$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri ise $x = -1, 1$ 'dir. ■

Bu denklemi çözmek çok zor olmasa gerek. Peki, bu denklemi biraz değiştirelim:

$$x^2 = -1 \quad (2)$$

Bu denklemi aynı şekilde çözmeye çalıştığımızda $\sqrt{-1}$ 'in değerine ihtiyacımız olduğunu buluruz. Ancak bildiğimiz üzere, hiçbir reel sayının karesi negatif olamaz. Tam bu noktada, yeni bir sayı türü icat etme gereğini duyarız: Hayali Sayılar. $\sqrt{-1}$ 'e bir sembol atarız, bu sembol i 'dir. i , reel bir sayı değildir, bunu unutmayın. i 'ye hayali birim denir. Reel ve hayali sayıları bir araya getirdiğimizde ise **karmaşık sayıları** elde ederiz. Şimdi bu yeni araç ile sorumuzu çözmeye çalışalım.

Çözüm. İki tarafın da kökünü alırsak $x = \sqrt{-1} = i$ denklemini elde ederiz. Bu denklemin çözümleri ise $x = i, -i$ 'dir. ■

Evet, bu denklemi çözmemizde karmaşık sayıların çok yardımı dokundu, ancak bu denkleme niye ihtiyacımız olsun? Bunu açıklamadan önce size bir denklem göstermek istiyoruz. Bu denklemi tanıyor musunuz?

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi = \hat{H} \Psi \quad (3)$$

Bu denklem, ünlü Schrödinger denklemi. Mikro boyutlarda parçacıkların nasıl hareket ettiğini gösteren en temel denklem. Newton'un ikinci denklemi olan $F = ma$ 'nın kuantum versiyonu olduğunu söyleyebiliriz. Evrenin işleyişinin temelinde karmaşık sayıların bulunması yeterli bir sebep olsa gerek.

1.1.1 Karmaşık Sayılar'ın Gösterimi

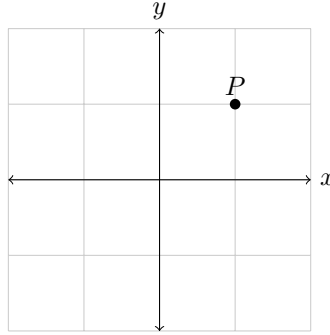
Karmaşık sayılar, reel ve hayali kısımlardan oluşur. İkinci dereceden bir denklemin çözümünü düşünelim:

$$x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (4)$$

Bu durumda $b^2 - 4ac < 0$ olduğu bir durumda $\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ hayali bir sayı iken $\frac{b}{2a}$ reeldir. x ise bu iki sayının toplamından oluşan karmaşık bir sayıdır.

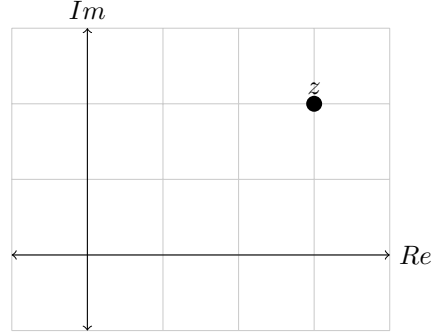
Bir örnek verelim. 4 , reel bir sayıdır. $5i$ ise hayali bir sayıdır. $z = 4 + 5i$ ise karmaşık bir sayıdır (karmaşık sayılar genelde z ile gösterilir). Genel bir karmaşık sayı $z = a + bi$ ile gösterilir. $a = \text{Re}(z)$, z 'nin reel kısmıdır ve $b = \text{Im}(z)$, z 'nin hayali kısmıdır. O zaman, bir karmaşık sayıyı a ve b üzerinden tanımlamak mümkündür. Özellikle, bir (a, b) sıralı ikilisi $a + bi$ sayısını temsil etmek için yeterlidir.

(a, b) şeklinde bir sıralı ikili size bir şey anımsattı mı?

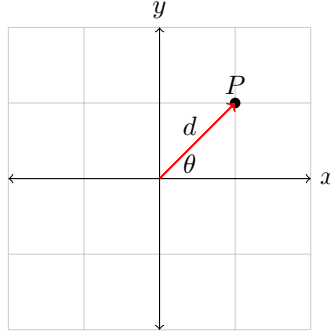


P noktasını nasıl tanımlarız? En doğal şekilde, x ve y koordinatı ile tanımlarız. Bunu ise (x, y) sıralı ikilisiyle gösterebiliriz. Bu, herhalde sizi karmaşık sayıları iki boyutlu düzlemde gösterebileceğimize ikna etmiştir.

O zaman bu gösterimi elde edebilmek için ilk adım, x ve y eksenlerini reel ve hayali kısımları gösterecek şekilde ayarlamaktır. Yani, $z = 3 + 2i$ sayısını $(3, 2)$ ile temsil edersek iki boyutlu düzlemde şu şekilde gösterebiliriz:



İki boyutlu düzlemde gösterilen bir noktayı tanımlamak için tek yolun bu olmadığı da hatırlamak gerekir. İlk örnekteki P noktasını tekrar ele alalım.



Fark ettiğiniz üzere aynı P noktasını o noktanın merkeze uzaklığı d ve x eksenine yaptığı açı olan θ üzerinden de tanımlayabiliriz. Burada $x = d \cos \theta$ ve $y = d \sin \theta$ dönüşümlerini görürüz. Karmaşık sayılarda d 'nin özel bir gösterimi vardır: $|z|$. θ ise $\arg(\theta)$ olarak gösterilir, ancak buna henüz girmeyeceğiz.

1.2 Karmaşık Sayılar ile İşlemler ve Özellikleri

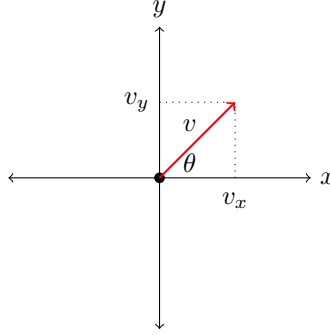
Tahmin edebileceğiniz üzere karmaşık sayılarda toplama şu şekildedir:

$$a + bi + c + di = (a + b) + (c + d)i \quad (5)$$

Çarpma ise;

$$(a + bi) \cdot (c + di) = ac + adi + bci + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i \quad (6)$$

şeklinde yapılır. Önceki bölümde bahsettiğimiz $|z|$, z 'nin modülüsüdür. Bu sayı, z 'nin orijinden uzaklığını gösterir. Pisagor Teoremi'nden çıkarabileceğiniz üzere $z = a + bi$ için $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$ 'dir. Biraz düşünelim, $a^2 + b^2$ sayısını z 'yi hangi karmaşık sayıyla çarparak elde edebiliriz? Bu sorunun cevabı, $u = a - bi$ 'dir. Kare farkından görebileceğiniz üzere $z \cdot u = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$ 'dir. Bir $z = a + bi$ karmaşık sayısı için $a - bi$ sayısı $\bar{z}$ ile gösterilir. Bu, z sayısının eşleniğidir (conjugate).



Figür 1: v büyüklüğünde, θ açısında bir vektörün gösterimi

Giriş bu kadardı, artık lineer cebir öğrenmek için gerekli her şeyi biliyorsunuz.

2 Vektörler

Yerde yuvarlanan bir top düşünün. Bu topun hareketini nasıl tarif edebiliriz? Öncelikle, ne kadar hızlı hareket ettiği çok önemlidir. Ancak bu bilgi, yeterli değildir? Aynı hızda bu top sağa da sola da yukarıya da aşağıya da hareket ediyor olabilir. Bu sebepten hıza bir de yön vermemiz gerekir.

Gördüğünüz üzere topu koordinat sisteminin merkezinde alırsak bu harekete dair 4 bilginiz oluyor v, θ, v_x, v_y . Hızın gösterimi ile P noktasının gösterimi arasındaki benzerliği fark ettiniz mi? Bu benzerlikten dolayı gösterimlerinin de benzer olacağı tahmin edilebilir. Bu hareket, resimdeki 4'lüden herhangi ikisiyle tanımlanabilir, ancak biz v_x ve v_y üzerinden gideceğiz. Öncelikle v ve θ 'yı v_x ve v_y cinsinden yazabiliyor muyuz bakalım. Basit trigonometri ile

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2},$$

$$\theta = \arctan v_y/v_x$$

olduğunu görebiliriz. Eğer hareketi (v_x, v_y) sıralı ikilisi ile gösterebileceğimize ikna olduysanız, vektörlere geçebiliriz.

2.1 Vektör Nedir?

Vektör, fizik derslerinde yönü ve büyüklüğü olan matematiksel bir nesne olarak öğretilir. Kısım, bu yanlış değildir. Bu tanıma benzer bir şekilde vektörleri sıralı 2'li, 3'lü, ..., n 'lileri göstermenin bir yolu olarak düşünebiliriz (1 sayıya ise skaler denir. Örneğin 5, bir skalerdir). Yukarıdaki örnekteki (v_x, v_y) ikilisini ele alalım. Bu ikiliyi vektör olarak şu şekilde gösteririz:

$$(v_x, v_y) \rightarrow \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix} \quad (7)$$

Bu gösterimin yararları ileride belli olacak. Vektör ve büyüklük tanımı üzerinden gidersek v , bu vektörün büyüklüğü iken θ yönünü temsil eder. Vektörler genellikle kalın yazıyla gösterilir, örneğin $\mathbf{v}$. Burada $\mathbf{v}$ vektörünün büyüklüğü $|\mathbf{v}|$ veya $\|\mathbf{v}\|$ olarak gösterilir.

n boyutlu genel bir vektörün gösterimi ise şu şekildedir:

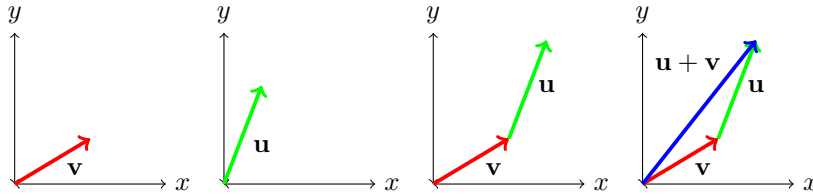
$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (8)$$

2.2 Vektörlerle İşlemler

Vektör toplaması cebirsel olarak tahmin edebileceğiniz gibidir. x yönünde 4, y yönünde 3 m/s hızla giden bir topun hızını x yönünde 3, y yönünde 5 m/s artırırsak x yönünde 7, y yönünde 8 m/s hızla giden bir top elde ederiz:

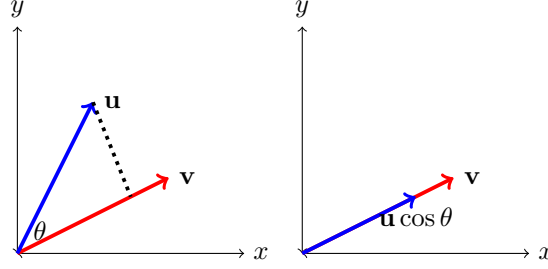
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix} \quad (9)$$

Bunun görsel olarak gösterimi ise biraz daha ilginçtir. İki vektörü toplamak için birinin kuyruğu öbürünün ucuna konulur:



Benzer şekilde bir vektörün bir skaler ile çarpılması ise boyutunun o skaler oranında artması anlamına gelir. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ise $a\mathbf{v} = \begin{pmatrix} ax \\ ay \end{pmatrix}$ olur.

Şimdi ilginç kısma geleceğiz. İki vektörü birbiriyle çarpamayız. En azından daha önceden alışkın olduğumuz şekilde. Bunun sebebini anlamak için büyüklüğü



Figür 2: $\mathbf{u}$ ve $\mathbf{v}$ 'nin iç çarpımının gösterimi

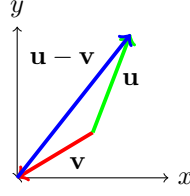
ve yönü olan iki nesneyi çarpmanın ne demek olduğunu düşünmeniz yetecektir. Buna bulunabilecek bir anlam, "bir vektörün diğerini kendi yönüne doğru çekmesi ve sonuç büyüklüğü kendi büyüklüğüyle çarpması" olarak ifade edilebilir. Fark ettiyseniz bu ifade hiç matematiksel bir ifade değildir. Ancak görsel olarak incelersek matematiksel bir anlama yönelebiliriz: Büyüklüklerin çarpımı ise $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ olur. Bu çarpıma iç çarpım (dot product) denir ve $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ile gösterilir. Özetle bir vektörün diğerinin üzerine izdüşümünün büyüklüklerinin çarpımıdır. İzdüşüm, yönleri eşitlemek için alınır. İç çarpımın sonucu bir vektör değil, skalerdir. Figür 2'den görülebileceği üzere, çarpılan iki büyüklük $|\mathbf{u}| \cos \theta$ ve $|\mathbf{v}|$ 'dir. Bu durumda, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$ olur.

İç çarpımın güzel bir özelliği ise vektörün elemanlarının çarpımlarının toplamına eşit olmasıdır. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ ise $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = v_x u_x + v_y u_y$ şeklinde bulunabilir. Size bu konuda "bana güvenin" şeklinde bir açıklamanın yeterli olmayacağını bildiğimden bunun kanıtını yapacağım.

Teorem 2.1 (İç Çarpım) $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}$ iki vektör ise iç çarpımları $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta = v_x u_x + v_y u_y$

İspat. İspat, kosinüs teoreminden çıkar. Kosinüs teoremi kenarları a ve b uzunluğunda olan ve aralarında θ açısı olan bir üçgen için üçüncü kenarın uzunluğunun $\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$ olduğunu söyler. $\mathbf{a}$ ve $\mathbf{b}$ iki vektör ise farklarının üçüncü bir kenar oluşturacağını görebiliriz. (Fark alırken iki vektörün kuyruğunu birleştiriyoruz.)

Bu durumda kosinüs teoremine göre $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - 2|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta$. $|\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos \theta = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$ olduğunu hatırlar ve cebirsel değişiklikler yaparsak $2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{u}|^2 + |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2$ eşitliğini elde ederiz. $|\mathbf{u} - \mathbf{v}|^2 = (u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 = u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - 2u_1 v_1 - 2u_2 v_2$ olduğunu hatırlarsak $2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 2u_1 v_1 + 2u_2 v_2 \Rightarrow \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = u_1 v_1 + u_2 v_2$ elde ederiz.



■

Bireysel olarak vektörlerin özelliklerini gördüğümüze göre vektör uzaylarından bahsedebiliriz.

2.3 Vektör Uzayları

Vektör uzaylarının teknik ve genel tanımından uzak durarak yüzeysel bir tanım vereceğim. Uyarıyorum, bu eksik bir tanımdır ancak kullanımımız için yeterli olacaktır. Bir vektör uzayı, bir vektör koleksiyonu (kümesi) üzerinden tanımlanır. Bu vektörlere uzayın tabanı/bazı (basis) denir. Bazın ise uzayı kapsadığı (span) söylenir. Bir örnek göstereyim:

$$\hat{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \hat{y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ olmak üzere } S = \{\hat{x}, \hat{y}\} \text{ vektör kümesini alalım. } 2$$

boyutlu uzayda herhangi bir vektör $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}$ olsun. S kümesindeki vektörlerin kapsamında (span'inde) $\mathbf{v}$ 'nin bulunması şu anlama gelir: $\mathbf{v} = a\hat{x} + b\hat{y}$ şeklinde yazılabilir. Gerçekten de $a = v_x$ ve $b = v_y$ olacak şekilde seçilirse $\mathbf{v}$ elde edilebilir. Demek ki S kümesi 2 boyutlu vektör uzayını kapsar. Taban ve kapsamlarda çokça teknik detay konuşulabilir ancak burada biz onlara girmeyeceğiz. Yalnız, bu noktada size şu soruyu sormak isterim: $\hat{x}$ ve $\hat{y}$ vektörleri arasındaki ilişki nedir? İlk göreceğimiz şey belki de $\hat{x} = a\hat{y}$ biçiminde yazılamayacağıdır. Önceki bölümü benimsemiş olanlar ise $\hat{x} \cdot \hat{y} = 0$ olacağını görür.

Bu iki koşul birbirine denk değildir ancak ikinci koşul birinciye gerektirir. Bu koşulların denk olmadıklarını şu şekilde görebiliriz: $\mathbf{v} \cdot \hat{y} = v_y \neq 0$ 'dır ancak $\mathbf{v} = a\hat{y}$ biçiminde yazılamaz. $\mathbf{v} = v_x\hat{x} + v_y\hat{y}$ şeklinde yazılabileceğinden $\mathbf{v}$, S kümesindeki vektörlerin bir **lineer kombinasyonu** olarak adlandırılır. Bunun aksine $\mathbf{v}$, $\hat{y}$ vektörünün lineer kombinasyonu olarak yazılamaz. Bir kümedeki vektörlerden biri diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabiliyorsa bu vektörler **lineer bağımlı** (linearly dependent) ve yazılamıyorsa bu vektörler **lineer bağımsız** (linearly independent) olarak adlandırılır.

Bu tanımları öğrendiğimize göre önceki bir yanlışımızı düzeltelim. Bir vektör uzayını kapsayan her vektör kümesine o uzayın tabanı denmez. Ayrıca, bu kümedeki vektörlerin lineer bağımsız olması gerekir. Örneğin $S = \{\hat{x}, \hat{y}\}$ 2 boyutlu uzayın bir tabanı iken $S' = \{\hat{x}, \hat{y}, \hat{x} + \hat{y}\}$ bu uzayı kapsasa bile taban olarak nitelendirilmez. Genel bir kural olarak şunu da verelim: n boyutlu bir

uzayın tabanı n vektör içerir.

İki vektörün iç çarpımının 0 olması ise bu iki vektörün birbirine **dik** (orthogonal) olduğunu gösterir. Bunu şu şekilde görebiliriz: $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = |\mathbf{v}||\mathbf{u}| \cos \theta$ ve $|\mathbf{v}|, |\mathbf{u}| > 0$ olduğundan $\cos \theta = 0$ 'dır. O zaman $\theta = \pi/2 = \deg 90$ ve $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ vektörüne diktir.

Bunu görsel olarak da düşünebiliriz. İç çarpımı geometrik olarak açıklamak için kullandığımız Figür 1'e yeniden bakalım ve bu sefer theta açısının 90 derece olduğunu düşünelim. Hatırlarsanız tanımı itibariyle iç çarpım, hangisinin hangisi üzerine olduğu fark etmeyecektir zira sonuç bir skalerdir, iki vektörden birinin diğerinin üzerine izdüşümü ile, u'nun v komponenti de denilebilir, o vektörün çarpımıdır. Böyle düşünüldüğünde theta açısının 90 derece olması, aynı x ve y axisleri gibi, iki vektörün birbiri üzerine izdüşmediğini gösterir. Bu özellik aslında iç çarpımın değil, iç çarpımı içerisinde barındıran Öklid uzayımızın özelliğidir. İleride de göreceğiz ki Kuantum evrende (Bloch sphere gösteriminde) diklik ya da ortogonalite 180 dereceye tekabül eder.

Dik vektörlerden oluşan bir tabana dik taban denir. Örneğin $S = \{\hat{x}, \hat{y}\}$ dik bir tabanken $S = \{\hat{x}, \hat{x} + \hat{y}\}$ dik olmayan bir tabandır.

2.4 Alıştırmalar

Alıştırma 1. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ve $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ olmak üzere $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ 'yi bulunuz.

Alıştırma 2. Üç boyutlu kartezyen uzay için bir dik, bir de dik olmayan taban bulunuz.

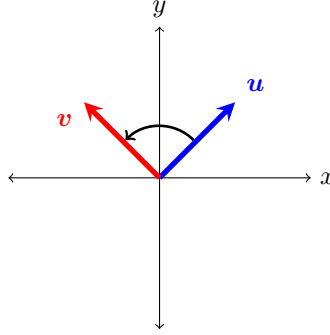
Alıştırma 3. $v = a\hat{x} + b\hat{y}$ olarak tanımlanmış bir vektörde a ve b katsayılarını diklik tanımını kullanarak gösteriniz.

Alıştırma 4. $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ üç boyutlu uzaya bir taban oluşturur mu? Bu taban dik bir taban mıdır?

3 Matrisler

Vektörler arası işlem yapmayı öğrendikten sonra vektörlerle başka ne yapacağımızı sormak gerekir. Örneğin bir vektörü 90 derece döndürmek istiyorsam veya x eksenine göre yansıtmak istiyorsam ne yapmalıyım? Başka bir vektör ile toplayabilirim veya bir skaler ile çarpabilirim ancak bu sadece belli durumlarda geçerli olur. Genel bir kural bulabilir miyim? Cevap, matematiğin güzelliği sağ olsun, evettir.

90 derece döndürme örneğini inceleyelim. $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ olsun. Problemi görselleştirelim.



$\mathbf{u}$ vektörünün x eksenine yaptığı açı θ olsun. Ayrıca, bu vektörün x ve y bileşenlerinin pozitif olduklarını not alalım. Demek ki, saat yönünün tersine 90 derece döndürürsek y pozitif kalacak ancak x negatif olacaktır. $\tan 90 + \theta = -\tan \theta$ olduğunu da hatırlayalım (dik doğruların eğimlerinin çarpımı -1 'e eşittir). Bunların üzerine vektörün büyüklüğünün sabit kalacağını eklersek geriye tek bir aday kalır. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ Genel bir vektör için 90 derece döndürülmüş hâlinin formülünü bulduk. Peki bunu vektör üzerine nasıl bir işlemle elde edebiliriz? Vektörün x ve y bileşenlerini artık ayrı tutmamız mümkün değildir, nitekim yeni vektörün x bileşeni eski vektörün y , y bileşeni eski vektörün x bileşenine bağlıdır. Bu noktada ilginç bir bağlantı kurmak istiyorum.¹

Fark ettiyseniz, iki vektörün iç çarpımı o vektörlerin hem x hem y bileşenlerine dair bilgiler içeriyor. Örneğin $\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} = c_1 u_1 + c_2 u_2$. Eğer $\mathbf{c}$ vektörünü bir katsayı vektörü olarak düşünersek $\mathbf{u}$ vektörünün bileşenlerini karıştırmak için güzel bir yöntem elde ederiz.

Şimdi iki vektörün iç çarpımını başka nasıl şekillerde gösterebileceğimize bakalım. Bariz bir yol iki vektörü yan yana yazıp dikey olarak elementlerini tarayıp çarpmaktır. Ancak bir vektörü yatay şekilde yazarsak ilk vektörü yatay ikinci vektörü dikey tarayıp elemanları çarparak da buna ulaşabiliriz. Örneğin:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 = 7 \quad (10)$$

Şimdi bu gösterimle $\mathbf{u}$ vektörünün 90 derece döndürülmüş hâli olan $\mathbf{v}$ vektörünün bileşenlerini elde etmeye çalışalım

$$v_1 = -u_2 = 0 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (11)$$

$$v_2 = u_1 = 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad (12)$$

¹Matrisler ve satır vektörlerini nasıl bağlayacağımı bulamadım, umarım etkili olmuştur.

Şimdi geriye kalan tek şey $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ vektörünü elde edecek bir işlem tasarlamak. Gösterim olarak v_1 ve v_2 'yi alt alta koymak istiyorsak katsayı vektörleri $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 'nin yatay hallerini alt alta koymak mantıklı olabilir. Bu durumda $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nesnesini elde ederiz. Nesne diyorum çünkü bu matematiksel nesne şu anlık öğrendiğimiz vektörlere veya herhangi başka bir kavrama benzemiyor. Tek bildiğimiz şey bu nesneyle vektörümüz $\mathbf{u}$ 'yu satırları tarayarak çarpınca sonuçta bir vektör elde etmemiz mantık dahilinde:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot u_1 + (-1) \cdot u_2 \\ 1 \cdot u_1 + 0 \cdot u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (13)$$

Sonunda istediğimiz sonucu elde ettik. Peki bu gösterim de neyin nesi? Daha önemlisi, bu gösterimle neler yapabiliriz? Bu gösterime matris (matrix) denir. Beklentiniz ne kadar yüksek olursa olsun, matrisler sizin beklentinizi bir noktada aşacaktır: İster bu dokümanda, ister 10 yıl sonra.

3.1 Matrisler ile ve Üzerinde İşlemler

Matrisleri, her ne kadar bu tanımlama çok yüzeysel kalsa da, vektörlerin alt alta getirilerek bir araya getirilmesiyle tanımlanmış olduğumuzdan vektörlerin toplaması ve çarpması ile benzer özelliklere sahip olacağını görebiliriz. Bu sebepten bu konuda sadece genel bir örnek vereceğim:

$$\alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \beta b_{11} & \alpha a_{12} + \beta b_{12} \\ \alpha a_{21} + \beta b_{21} & \alpha a_{22} + \beta b_{22} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Yalnız matrislerde vektörlerde olmayan bir durumla karşılaşırız. Hatırlayın ki iki vektörü birbiriyle çarpıp bir vektör elde edemiyorduk. Ancak bir matris ile bir vektörü çarparak bir vektör elde edebiliyorduk. İki dikey vektörü yan yana koyarsak da bir matris elde edebileceğimizi görmek zor değildir. O zaman, bir matrisi başka bir matrisle çarpmayı ilk matrisi çarptığımız matrisin sütunlarını oluşturan vektörlerle çarpıp sonuç vektörlerini yan yana koymak olarak görebiliriz. Ama o zaman sonuç da bir matris olacaktır. Buradaki mesaj şu: Bir matris ile başka bir matrisi çarparak başka bir matris elde ederiz. Örneğin: $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 12 \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$ 'dir. O zaman:

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 & 3 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \quad (15)$$

Şimdi matrislerle temel işlemleri bitirdiğimize göre matrisler üzerinde ne işlemler yapabileceğimize bakalım. İlk, sorulabilecek en temel sorulardan birini soralım: bir matrisin yaptığı işlemi geri almak istiyorsam ne yapacağım? Bu çok geçerli ve önemli bir sorudur ve bazı durumlar hariç, bu sorunun cevabı başka bir matriste yatar.

Yeniden 90 derece döndürme örneğimize bakalım. $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} -u_2 \\ u_1 \end{pmatrix}$ vektörünü $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ vektörüne geri getirmemiz gerek. Bunun için 90 derece matrisini bulmak için uyguladığımız yöntemin bir benzerini uygularsak geri döndürme matrisini $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ olarak buluruz. Bu matris, 90 derece saat yönünün tersine döndürme matrisi olan $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi olarak adlandırılır ve $B = A^{-1}$ olarak gösterilir. Bir matrisin ne zaman tersinin alınabileceği veya nasıl alınabileceği konusuna çok girmeyeceğiz. Ancak, bir matrisin tersi yalnız kare matrislerde bulunabilir. Örneğin $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 7 & 5 \end{pmatrix}$ matrisinin tersi tanımsızdır. Ne de olsa bu matris, 3 boyutlu bir vektörü 2 boyutlu bir vektöre taşır.² Bu süreçte bilgi kaybı kaçınılmazdır ve tersine döndürülemez.

Şimdi ise pek doğal olmayan bir soruya geleceğiz. Bu sorunun arkasındaki motivasyonu anlamak için biraz daha lineer cebire dalmanız gerekecektir. Soru şudur: Bir A matrisi için öyle bir matris B bulalım ki $A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot B\mathbf{v}$ olsun. Dedğim gibi, bu sorunun ilgi çekici olduğunu şimdilik sadece kabul edin. Gelin bu denklemin iki tarafını açalım:

$$A\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \begin{pmatrix} a_{11}u_1 + a_{12}u_2 \\ a_{21}u_1 + a_{22}u_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = a_{11}u_1v_1 + a_{12}u_2v_1 + a_{21}u_1v_2 + a_{22}u_2v_2 \quad (16)$$

$$\mathbf{u} \cdot B\mathbf{v} = \begin{pmatrix} b_{11}v_1 + b_{12}v_2 \\ b_{21}v_1 + b_{22}v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = b_{11}v_1u_1 + b_{12}v_2u_1 + b_{21}v_1u_2 + b_{22}v_2u_2 \quad (17)$$

Bu eşitliğin genel iki vektör için tutması gerektiğinden u_1v_1 ve benzeri her terimin katsayısını eşitlememiz gerekir. Bu durumda $a_{11} = b_{11}, a_{12} = b_{21}, a_{21} = b_{12}, a_{22} = b_{22}$ bulunur. Buradan ise $B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ olur. Bu durumda B matrisine A matrisinin transpoz (transpose) denir ve $B = A^T$ olarak gösterilir.

Matrisler çok derin bir konudur. Bu sebepten ilerlemeden önce birkaç alıştırmayı yapmak gerekir.

Alıştırma 5. $\hat{x}$ vektörünü $\hat{y}$ ve $\hat{y}$ vektörünü $\hat{x}$ vektörüne götüren matrisi yazınız.

Alıştırma 6. $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ işlemini yapınız.

Alıştırma 7. Bir $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matrisinin sütun vektörleri $\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix}$ ve $\begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$ vektörleridir. Satır vektörleri de benzer şekilde tanımlanır. Bir matrisin kendi transpozuyla çarpımı AA^T matrisinin girdilerini A matrisinin sütun vektörlerinin

²Bir matris, satırda kaç girdisi varsa (3) o kadar boyutlu bir vektörü sütunda kaç girdisi varsa (2) o kadar boyutlu bir vektöre taşır. Bunu okuyucunun kontrol etmesi güzel olur.

iç çarpımı biçiminde yazınız. (Bu zor bir egzersizdir. Tavsiye olarak ilk çarpımı sembolik girdilerle gerçekleştirmeniz, sonra ise sütun vektörlerinin iç çarpımlarını bulmanızı öneririm. Bundan sonra aradaki benzerlikleri bulmak daha kolay olacaktır.

4 Teşekkür Bölümü

Aydın Barlas'a ve Asım Furkan İlhan'a bu yazı üzerindeki katkıları için teşekkür ederim.