क्रमांक

8485

माध्यम

H

विषय कोड **4** पुस्तिका कोड **A**

2018 (II)
गणित विज्ञान
प्रश्न पत्र

समय : 3:00 घंटे

पूर्णांक : 200 अंक

अनुदेश

1. आपने हिन्दी को माध्यम चुना है । इस परीक्षा पुस्तिका में एक सौ बीस (20 भाग 'A' में, 40 भाग 'B', 60 भाग 'C' में) बहुल विकल्प प्रश्न (MCQ) दिए गए हैं । आपको भाग 'A' में से अधिकतम 15 और भाग 'B' में 25 प्रश्नों तथा भाग 'C' में से 20 प्रश्नों के उत्तर देने हैं । यदि निर्धारित से अधिक प्रश्नों के उत्तर दिए गए तब केवल पहले भाग 'A' से 15, भाग 'B' से 25 तथा भाग 'C' से 20 उत्तरों की जांच की जाएगी।
2. उत्तर पत्र अलग से दिया गया है । अपना रोल नम्बर और केन्द्र का नाम लिखने से पहले यह जांच लीजिए कि पुस्तिका में पृष्ठ पूरे और सही हैं तथा कहीं से कटे–फटे नहीं हैं । यदि ऐसा है तो आप इन्विजीलेटर से उसी कोड की पुस्तिका बदलने का निवेदन कर सकते हैं । इसी तरह से उत्तर पत्र को भी जांच लें । इस पुस्तिका में रफ काम करने के लिए अतिरिक्त पन्ने संलग्न हैं ।
3. उत्तर पत्रक के पृष्ठ 1 में दिए गए स्थान पर अपना रोल नम्बर, नाम तथा इस परीक्षा पुस्तिका का क्रमांक लिखिए, साथ ही अपना हस्ताक्षर भी अवश्य करें ।
4. आप अपनी ओ.एम.आर. उत्तर पत्रक में रोल नंबर, विषय कोड, पुस्तिका कोड और केन्द्र कोड से संबंधित समुचित वृतों को काले बॉल पेन से अवश्य काला करें। यह एक मात्र परीक्षार्थी की जिम्मेदारी है कि वह उत्तर पुस्तिका में दिए गए निर्देशों का पूरी सावधानी से पालन करें, ऐसा न करने पर कम्प्यूटर विवरणों का सही तरीके से अकूटित नहीं कर पाएगा, जिससे अंततः आपको हानि, जिससे आपकी उत्तर पुस्तिका की अस्वीकृति भी शामिल, हो सकती है ।
5. भाग 'A' में प्रत्येक प्रश्न 2 अंक, भाग 'B' में प्रत्येक प्रश्न के 3 अंक तथा भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न 4.75 अंक का है । प्रत्येक गलत उत्तर का ऋणात्मक मूल्यांकन भाग 'A' में @ 0.5 अंक तथा भाग 'B' में @ 0.75 अंक से किया जाएगा । भाग 'C' के उत्तरों के लिए ऋणात्मक मूल्यांकन नहीं है ।
6. भाग 'A' तथा भाग 'B' के प्रत्येक प्रश्न के नीचे चार विकल्प दिए गए हैं । इनमें से केवल एक विकल्प ही "सही" अथवा "सर्वोत्तम हल" है । आपको प्रत्येक प्रश्न का सही अथवा सर्वोत्तम हल ढूंढना है । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न का "एक" या एक से अधिक विकल्प सही हो सकते हैं । भाग 'C' में प्रत्येक प्रश्न के सभी विकल्पों का सही चयन करने पर ही क्रेडिट प्राप्त होगा ।
7. नकल करते हुए या अनुचित तरीकों का प्रयोग करते हुए पाए जाने वाले अभ्यार्थियों का इस और अन्य भावी परीक्षाओं के लिए अयोग्य ठहराया जा सकता है ।
8. अभ्यार्थी को उत्तर या रफ पन्नों के अतिरिक्त कहीं और कुछ भी नहीं लिखना चाहिए ।
9. कैलकुलेटर का उपयोग करने की अनुमति नहीं है ।
10. परीक्षा समाप्ति पर छिद्र बिन्दु चिन्हित स्थान से OMR उत्तर पत्रक को विभाजित करें। इन्विजीलेटर को मूल OMR उत्तर पत्रक सौंपने के पश्चात आप इसकी कॉर्बनलेस प्रतिलिपि ले जा सकते हैं।
11. हिन्दी माध्यम/संस्करण के प्रश्न में विसंगति होने/पाये जाने पर अंग्रेजी संस्करण प्रमाणिक होगा ।
12. केवल परीक्षा की पूरी अवधि तक बैठने वाले प्रत्याशी को ही परीक्षा पुस्तिका साथ ले जाने की अनुमति दी जाएगी ।

रोल नंबर : ....

नाम : ....

अभ्यर्थी द्वारा भरी गई जानकारी को मैं सत्यापित करता हूँ ।

....

इन्विजीलेटर के हस्ताक्षर

INSTRUCTIONS

1. This Test Booklet contains one hundred and twenty (20 Part 'A'+40 Part 'B' +60 Part 'C') Multiple Choice Questions (MCQs). You are required to answer a maximum of 15, 25 and 20 questions from part 'A' 'B' and 'C' respectively. If more than required number of questions are answered, only first 15, 25 and 20 questions in Parts 'A' 'B' and 'C' respectively, will be taken up for evaluation.
2. **OMR** answer sheet has been provided separately. Before you start filling up your particulars, please ensure that the booklet contains requisite number of pages and that these are not torn or mutilated. If it is so, you may request the Invigilator to change the booklet of the same code. Likewise, check the **OMR** answer sheet also. Sheets for rough work have been appended to the test booklet.
3. Write your Roll No., Name and Serial Number of this Test Booklet on the OMR Answer sheet in the space provided. Also put your signatures in the space earmarked.
4. **You must darken the appropriate circles with a black ball pen related to Roll Number, Subject Code, Booklet Code and Centre Code on the OMR answer sheet. It is the sole responsibility of the candidate to meticulously follow the instructions given on the OMR Answer Sheet, failing which, the computer shall not be able to decipher the correct details which may ultimately result in loss, including rejection of the OMR answer sheet.**
5. Each question in Part 'A' carries **2** marks, Part 'B' **3** marks and Part 'C' **4.75** marks respectively. There will be negative marking @ 0.5 marks in Part 'A' and @ 0.75 marks in Part 'B' for each wrong answer and no negative marking for Part 'C'.
6. Below each question in Part 'A' and 'B', four alternatives or responses are given. Only one of these alternatives is the "correct" option to the question. You have to find, for each question, the correct or the best answer. In Part 'C' each question may have '**ONE**' or '**MORE**' correct options. Credit in a question shall be given only on identification of '**ALL**' the correct options in Part '**C**'.
7. Candidates found copying or resorting to any unfair means are liable to be disqualified from this and future examinations.
8. Candidate should not write anything anywhere except on **OMR** answer sheet or sheets for rough work.
9. Use of calculator is not permitted.
10. **After the test is over, at the perforation point, tear the OMR answer sheet, hand over the original OMR answer sheet to the invigilator and retain the carbonless copy for your record.**
11. Candidates who sit for the entire duration of the exam will only be permitted to carry their Test booklet.

भाग/PART -A

1. एक खनिज में घनाकार और गोलाकार गुहिकायें हैं । घन की भुजा की लंबाई गोले के व्यास के बराबर है। यदि घनाकार गुहिका एक द्रव से आधी भरी हुई हैं और गोलाकार गुहिका तरल से पूरी भरी हुई है तो घनाकार और गोलाकार गुहिकाओं में द्रव के आयतन का लगभग अनुपात क्या है?

   1. 2:1 2. 1:1
   3. 1:2 4. 1:4

1. A mineral contains a cubic and a spherical cavity. The length of the side of the cube is the same as the diameter of the sphere. If the cubic cavity is half filled with a liquid and the spherical cavity is completely filled with liquid, what is the approximate ratio of the volume of liquid in the cubic cavity to that in the spherical cavity?

   1. 2:1 2. 1:1
   3. 1:2 4. 1:4

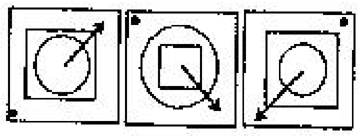
2. 6 अनभिनत सिक्कों में से 5 को स्वतंत्र रूप से उछाला जाता है और सभी में सिर ऊपर आता है। यदि 6^{th} सिक्का स्वतंत्र रूप से उछाला जाये तब सिर ऊपर मिलने की संभावना है

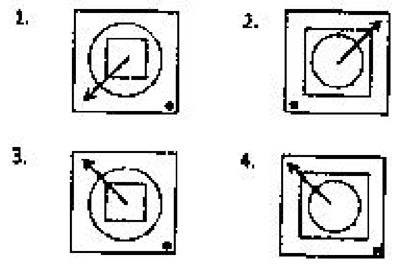
   1. 1 2. 0
   3. 1/2 4. 1/6

2. Out of 6 unbiased coins, 5 are tossed independently and they all result in heads. If the 6^{th} is now independently tossed, the probability of getting head is

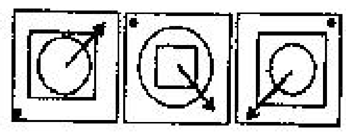
   1. 1 2. 0
   3. 1/2 4. 1/6

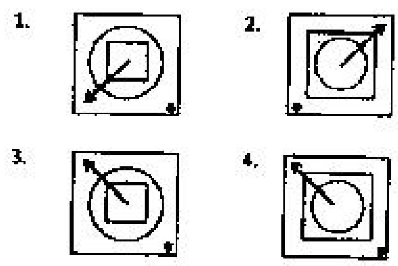
3. क्रम में अगला चित्र क्या हो सकता है?

 ?



3. What could the fourth figure in the sequence be?

 ?



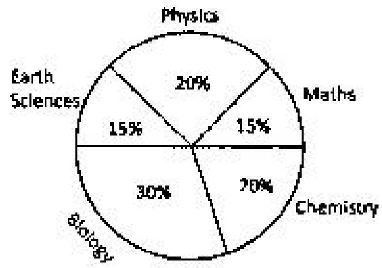
4. A, B और C की औसत आयु 30 है, तथा उनकी आयु क्रमश: पूर्णांक x, y एवं z है, $(x \le y \le z)$ । यदि B की आयु A की आयु से ठीक 5 अधिक है, तो z का न्यूनतम संभव मान क्या है?

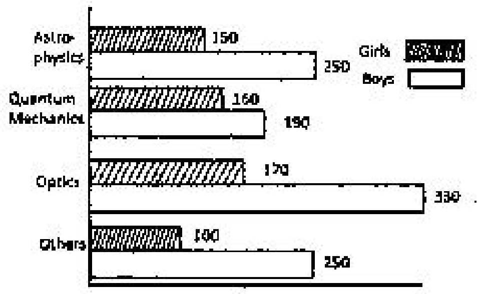
   1. 31 2. 33
   3. 35 4. 37

4. The average age of A, B and C, whose ages are integers x, y and z respectively $(x \le y \le z)$, is 30. If the age of B is exactly 5 more than that of A, what is the minimum possible value of z?

   1. 31 2. 33
   3. 35 4. 37

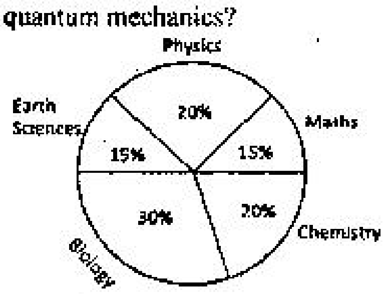
5. विश्वविद्यालय में विज्ञान के सभी विद्यार्थियों का प्रतिशत वितरण पाई-चित्र में दिया गया है। बार-चित्र में भौतिकी के विभिन्न उप-क्षेत्रों का वितरण दर्शाया गया है जहां एक विद्यार्थी केवल एक ही उप क्षेत्र ले सकता है। विज्ञान के कुल विद्यार्थियों में क्वांटम-यांत्रिकी पढ़ने वाली लड़कियों का प्रतिशत क्या है?

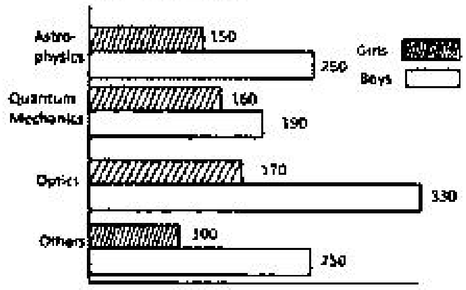




1. 10
2. 1
3. 0.2
4. 2

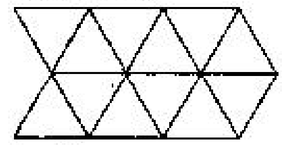
5. Percentage-wise distribution of all science students in a university is given in the pie-diagram. The bar chart shows the distribution of physics students in different sub-areas, where a student takes one and only one sub-area. What percentage of the total science students is girls studying quantum mechanics?





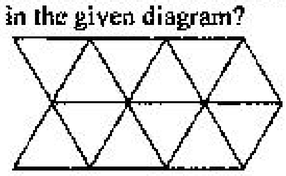
1. 10
2. 1
3. 0.2
4. 2

6. दिये हुए चित्र में समांतर चतुर्भुजों की कुल संख्या क्या है?



1. 27
2. 24
3. 22
4. 14

6. What is the total number of parallelograms in the given diagram?



1. 27
2. 24
3. 22
4. 14

7. तालिका में एक शहर के तीन खण्डों (A, B एवं C) के चुनाव परिणामों को दिया गया है। X, Y तथा Z द्वारा प्राप्त मतों का प्रतिशत भी दर्शाया गया है। कौन-सा दल चुनाव जीता?

खण्ड	कुल मतदाता	मतदान प्रतिशत	X	Y	Z
A	2,00,000	60	30	30	40
B	2,50,000	70	40	30	30
C	3,00,000	80	30	40	30

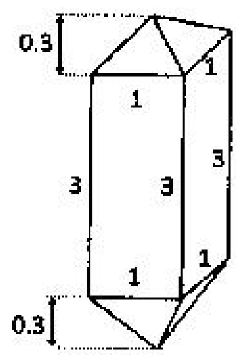
1. Y
2. X
3. Z
4. X एवं Y में बराबरी हुई

7. Election results of a city, which contains 3 segments (A, B and C) are given in the Table. Percentage votes obtained by parties X, Y and Z are also shown. Which party won the election?

Segment	Total Voters	% of voting	X	Y	Z
A	2,00,000	60	30	30	40
B	2,50,000	70	40	30	30
C	3,00,000	80	30	40	30

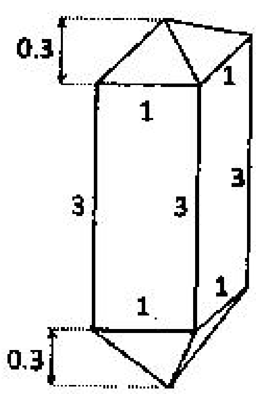
1. Y
2. X
3. Z
4. It was a tie between X and Y

8. एक जिरकॉन केलास (क्रिस्टल) की, जिसमें एक वर्गीय प्रिज्म एवं दो समरूपी वर्गीय पिरामिड हैं, की विमायें (cm में) दिखायी गयी हैं। इस केलास (क्रिस्टल) का आयतन (cm^3 में) क्या है?



1. 3.2 2. 3.6
3. 6.4 4. 7.2

8. The diagram shows the dimensions (in cm) of a zircon crystal having a square prism and two identical square pyramids. What is the volume of this crystal (in cm^3)?



1. 3.2 2. 3.6
3. 6.4 4. 7.2

9. एक बालक v गति से एक गेंद को उसकी तरफ V गति से आते हुये वाहन की तरफ फेंकता है। वाहन से टकराकर आने पर गेंद बालक को जिस गति से प्रहार करेगी, वह है

1. v 2. $v+V$
3. $v+2V$ 4. $v+4V$

9. A boy throws a ball with a speed v at a vehicle that is approaching him with a speed V. After bouncing from the vehicle, the ball hits the boy with a speed

1. v 2. $v+V$
3. $v+2V$ 4. $v+4V$

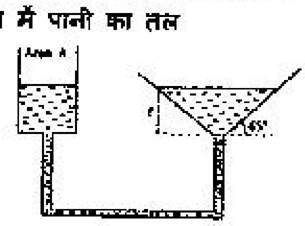
10. चार मित्र एक पीजा आपस में बांट रहे थे। उन्होंने निर्णय किया कि उम्र में सबसे बड़े मित्र को पीजा का एक अतिरिक्त टुकड़ा मिलेगा। बाहु, कट्टप्पा से दो महीने बड़ा है जो कि भल्ला से तीन महीने छोटा है। देवसेना, कट्टप्पा से एक महीने बड़ी है। पीजा का एक अधिक टुकड़ा किसको मिला?

1. बाहु 2. देवसेना
3. भल्ला 4. कट्टप्पा

10. Four friends were sharing a pizza. They decided that the oldest friend will get an extra piece of pizza. Bahu is two months older than Kattappa, who in turn is three months younger than Bhalla. Devsena is one month older than Kattappa. Who should get the extra piece of pizza?

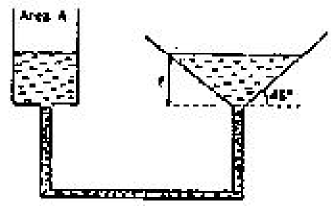
1. Bahu 2. Devsena
3. Bhalla 4. Kattappa

11. अनुप्रस्थ काट A के बेलनाकार पात्र से एक कीप को जोड़कर आपस में जुड़े पात्रों के तंत्र को दर्शाया गया है। चित्रानुसार, बेलन में इस तरह जल डाला जाता है कि कीप में l ऊँचाई तक जल भर जाता है। यदि बेलनाकार पात्र में जल को नीचे x दूरी ($x \ll l$) तक दबाया जाता है। तब कीप में पानी का तल



1. बिलकुल नहीं बदलता है
2. $\frac{Ax}{\pi l^2}$ से ऊपर उठता है
3. $\frac{\pi l^2}{Ax}$ से ऊपर उठता है
4. $\frac{A^2x}{\pi^2 l^4}$ से ऊपर उठता है

11. A funnel is connected to a cylindrical vessel of cross sectional area A as shown, to make an interconnected system of vessels. Water is poured in the cylinder such that the height of water in the funnel is l as shown. If the level of water in the cylindrical vessel is pushed down by a distance $x \ll l$, the level of water in the funnel:



1. remains unchanged
2. rises by $\frac{Ax}{\pi l^2}$
3. rises by $\frac{\pi l^2}{Ax}$
4. rises by $\frac{A^2 x}{\pi^2 l^4}$

12. सात छात्रों के अंक (30 अंक में से) एक परीक्षा में 4, 15, 6, 7, 5, a तथा b हैं। यहां पर a (>0) 4 का गुणज है, तथा b एक अभाज्य अंक है। इस समूह में अंकों की रेंज (Range) (अधिकतम अंक - न्यूनतम अंक) में सर्वाधिक संभव अंक क्या है?

1. 25 2. 26
3. 27 4. 29

12. Marks (out of 30) of seven students in an examination are 4, 15, 6, 7, 5, a and b, where a (>0) is a multiple of 4 and b is a prime. What is the maximum possible value of the range of marks (i.e. maximum mark – minimum mark)?

1. 25 2. 26
3. 27 4. 29

13. दो व्यक्ति A और B एक बिन्दु से विपरीत दिशाओं में चलना प्रारंभ करते हैं। A की गति B से दुगनी है। B की गति 1 km/h है। यदि 2 km चलने के पश्चात् A वापस मुड़कर B की तरफ चलना प्रारंभ करता है, तो A प्रारंभिक बिन्दु से कितनी दूरी पर B से आगे निकलता है?

1. 2 km 2. 4 km
3. 6 km 4. 8 km

13. Two persons A and B start walking in opposite directions from a point. A travels twice as fast as B. The speed at which B travels is 1 km/h. If A travels 2 km and turns back and starts walking towards B, at what distance from the starting point will A cross B?

1. 2 km 2. 4 km
3. 6 km 4. 8 km

14. एक व्यक्ति कार से चारबाग से आलमबाग तक 60 km/h की औसत गति से चलना चाहता है। चारबाग से आलमबाग की दूरी 2 km है। अत्यधिक भीड़ की वजह से वह पहले एक किलोमीटर में केवल 30 km/h की औसत गति से चल सका। बची हुई यात्रा में वह किस गति से चले कि 60 km/h की औसत गति के लक्ष्य को पा सके?

1. लक्ष्य को प्राप्त नहीं कर सकता
2. 60 km/h
3. 90 km/h
4. 120 km/h

14. A person wanted to travel from Charbag to Alambag with an average speed of 60 km/h by car. The distance between Charbag and Alambag is 2 km. Due to heavy traffic, he could travel at 30 km/h for the first kilometre of his journey. What should his speed be for the remaining journey to achieve his average speed target of 60 km/h?

1. Cannot achieve his target with any finite speed.
2. 60 km/h
3. 90 km/h
4. 120 km/h

15. एक स्थान पर वर्ष 2003 से 2005 की 3 वर्ष की अवधि के लिए औसत वर्षा 65 cm थी। वर्ष 2002 से 2004 के तीन वर्षों में औसत वर्षा 63 cm थी। वर्ष 2005 की वास्तविक वर्षा 60 cm थी। वर्ष 2002 में कितनी वर्षा हुई?

1. 55 cm 2. 60 cm
3. 54 cm 4. 53 cm

15. The average rainfall over a given place during the three-year period of 2003-2005 was 65 cm. During the three-year period 2002-2004 the average rainfall was 63 cm. The actual rainfall during 2005 was 60 cm. What was the rainfall in 2002?

1. 55 cm 2. 60 cm
3. 54 cm 4. 53 cm

16. लगातार चार दिनों में चार विमान चालकों में से प्रत्येक ने अलग-अलग दिन विमान उड़ाया। श्री A को कार्य सूची के अनुसार सोमवार को विमान उड़ाना था परंतु श्री A ने सुश्री B के साथ अदला-बदली कर ली जबकि सुश्री B को मूलत: बुधवार को विमान उड़ाना था। सुश्री C ने श्री D से अदला-बदली कर ली जिन्हें मूलत: गुरुवार को विमान उड़ाना था। पूर्णतया अदला-बदली करने के पश्चात् मंगलवार को किसने कार्य किया?

1. श्री A 2. श्री D
3. सुश्री B 4. सुश्री C

16. In a four consecutive day schedule, four pilots flew flights each on a different day. Mr. A was scheduled to work on Monday, but he traded with Ms. B who was originally scheduled to work on Wednesday. Ms. C traded with Mr. D, who was originally scheduled to work on Thursday. After all the switching was done, who worked on Tuesday?

1. Mr. A 2. Mr. D
3. Ms. B 4. Ms. C

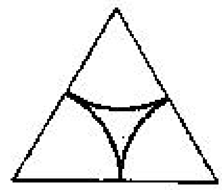
17. छ: ग्राम (6 ग्राम) कार्बन 40 ग्राम ऑक्सीजन के वायुमंडल में पूर्णत: जलाया गया। कितने प्रतिशत ऑक्सीजन शेष रही?

1. 80 2. 60
3. 40 4. 20

17. After 6 g of carbon is completely burnt in an atmosphere of 40 g of oxygen, the percentage oxygen left is:

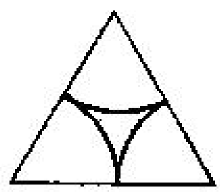
1. 80 2. 60
3. 40 4. 20

18. किसी समबाहु त्रिभुज में वृत्त के तीन सम रूपीय भागों से बनने वाले क्षेत्र को छोड़कर शेष को छायांकित कर चित्र में दर्शाया गया है। छायांकित भाग समबाहु त्रिभुज के कुल क्षेत्रफल का कितना अंश है?



1. $1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 2. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
3. $1-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 4. $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

18. What fraction of the equilateral triangle shown below with three identical sectors of a circle is shaded?



1. $1-\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ 2. $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$
3. $1-\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$ 4. $1-\frac{\sqrt{3}\pi}{2}$

19. खीरा, टमाटर, प्याज, चुकन्दर तथा गाजर से अलग-अलग प्रकार के कितने सलाद बनाये जा सकते हैं?

1. 16 2. 28
3. 31 4. 32

19. How many different salads can be made from cucumber, tomatoes, onions, beetroot and carrots?

1. 16 2. 28
3. 31 4. 32

20. एक इत्र की बोतल खोलने पर 10 मी. की दूरी पर खड़े व्यक्ति को 10 सेकैन्ड बाद खुशबू आती है। 20 मीटर की दूरी पर खड़े व्यक्ति को लगभग कितने समय बाद खुशबू पंहुचेगी?

1. 20s	2. 40s
3. 14s	4. 80s

20. A bottle of perfume is opened and a person at a distance of 10 m gets the smell after 10 seconds. The time taken for a person 20 m away to get the smell is about

1. 20s	2. 40s
3. 14s	4. 80s

भाग/PART - B

Unit-1

21. निम्नानुसार परिभाषित प्रतिचित्र $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ के लिए
(i) $f(0) = 0$
(ii) $f(r) = \frac{p}{10^q}$, जहां $r = \frac{p}{q}$ जबकि $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ एवं gcd $(p, q) = 1$.
तब प्रतिचित्र f है
1. one-to-one तथा onto
2. one-to-one नहीं, परंतु onto
3. onto परंतु one-to-one नहीं
4. न तो one-to-one, न onto

21. Consider the map $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ defined by
(i) $f(0) = 0$
(ii) $f(r) = \frac{p}{10^q}$ where $r = \frac{p}{q}$ with $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ and gcd $(p, q) = 1$.
Then the map f is
1. one-to-one and onto
2. not one-to-one, but onto
3. onto but not one-to-one
4. neither one-to-one nor onto

22. यदि x वास्तविक संख्या हो जबकि $|x| < 1$, तो निम्न में से कौन सा गलत है?
1. यदि $x \in \mathbb{Q}$, तब $\sum_{m \geq 0} x^m \in \mathbb{Q}$
2. यदि $\sum_{m \geq 0} x^m \in \mathbb{Q}$ तब $x \in \mathbb{Q}$
3. यदि $x \notin \mathbb{Q}$ तब $\sum_{m \geq 0} m x^{m-1} \notin \mathbb{Q}$
4. $\sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m}$ $\mathbb{R}$ में अभिसारी है

22. Let x be a real number such that $|x| < 1$. Which of the following is FALSE?
1. If $x \in \mathbb{Q}$, then $\sum_{m \geq 0} x^m \in \mathbb{Q}$
2. If $\sum_{m \geq 0} x^m \in \mathbb{Q}$ then $x \in \mathbb{Q}$
3. If $x \notin \mathbb{Q}$ then $\sum_{m \geq 0} m x^{m-1} \notin \mathbb{Q}$
4. $\sum_{m \geq 1} \frac{x^m}{m}$ converges in $\mathbb{R}$

23. $\{x_n\}$ एक वास्तविक संख्याओं का अनुक्रम है। हर $\varepsilon > 0$ के लिए ऐसा n_0 है, जो इस बंधन को संतुष्ट करता है
$|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_0$.
तो अनुक्रम $\{x_n\}$ है
1. परिबद्ध परंतु आवश्यक नहीं कि कॉशी हो
2. कॉशी हो परंतु आवश्यक नहीं कि परिबद्ध हो
3. अभिसारी
4. आवश्यक नहीं कि परिबद्ध हो

23. Suppose that $\{x_n\}$ is a sequence of real numbers satisfying the following. For every $\varepsilon > 0$, there exists n_0 such that $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon \ \forall\ n \geq n_0$.
The sequence $\{x_n\}$ is
1. bounded but not necessarily Cauchy
2. Cauchy but not necessarily bounded
3. convergent
4. not necessarily bounded

24.
$$A(n) = \int_n^{n+1} \frac{1}{x^3} dx \text{ जबकि } n \geq 1.$$
$c \in \mathbb{R}$ के लिए मान लें कि
$\lim_{n \to \infty} n^c A(n) = L$, तो
1. $L = 0$ यदि $c > 3$
2. $L = 1$ यदि $c = 3$
3. $L = 2$ यदि $c = 3$
4. $L = \infty$ यदि $0 < c < 3$

24. Let $A(n) = \int_{n}^{n+1} \frac{1}{x^3}\,dx$ for $n \geq 1$.
For $c \in \mathbb{R}$ let $\lim_{n\to\infty} n^c A(n) = L$. Then
1. $L = 0$ if $c > 3$
2. $L = 1$ if $c = 3$
3. $L = 2$ if $c = 3$
4. $L = \infty$ if $0 < c < 3$

25. निम्न समुच्चय पर फलन $\tan x$ लें
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2},$ किसी भी $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ के लिए $\}$.
S में इसका एक नियत बिंदु होगा यदि $\exists\, x \in S$ ऐसे हो कि $\tan x = x$ हो। तब
1. एक अद्‌वितीय नियत बिंदु है
2. कोई नियत बिंदु नहीं हो सकता
3. अनंतः बहुत नियत बिंदु हैं
4. एक से अधिक लेकिन परिमित स्थिर बिंदु है

25. Consider the function $\tan x$ on the set
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0,\ x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$ for any $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.
We say that it has a fixed point in S if $\exists\, x \in S$ such that $\tan x = x$. Then
1. there is a unique fixed point.
2. there is no fixed point.
3. there are infinitely many fixed points.
4. there are more than one but finitely many fixed points.

26. यदि $x > 0$ के लिए $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ तो f निम्नानुसार एकसमानतः संतत है
1. $(0, \infty)$ पर
2. $[r, \infty)$ पर, सब $r > 0$ के लिए
3. $(0, r]$ पर, सब $r > 0$ के लिए
4. केवल $[a, b]$ अंतराल के लिए जहाँ $0 < a < b < \infty$ हो

26. Define $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ for $x > 0$. Then f is uniformly continuous
1. on $(0, \infty)$
2. on $[r, \infty)$ for any $r > 0$
3. on $(0, r]$ for any $r > 0$
4. only on intervals of the form $[a, b]$ for $0 < a < b < \infty$

27. $\mathbb{R}^3$ की निम्नलिखित दो उपसमष्टियाँ W_1 तथा W_2 को इस प्रकार अभिव्यक्त किया जाता है
$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ तथा
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.
यदि W को $\mathbb{R}^3$ की इस तरह उपसमष्टि मानें कि
(i) $W \cap W_2 =$ विस्तृति $\{(0,1,1)\}$
(ii) आंतर गुणफल $\mathbb{R}^3$ के सापेक्ष $W \cap W_1$ तथा $W \cap W_2$ एक दूसरे के लंबकोणीय हों तो
1. $W =$ विस्तृति $\{(0,1,-1), (0,1,1)\}$
2. $W =$ विस्तृति $\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$
3. $W =$ विस्तृति $\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$
4. $W =$ विस्तृति $\{(1,0,-1), (1,0,1)\}$

27. Consider the subspaces W_1 and W_2 of $\mathbb{R}^3$ given by
$W_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$
and
$W_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$.
If W is a subspace of $\mathbb{R}^3$ such that
(i) $W \cap W_2 = \text{span}\{(0,1,1)\}$
(ii) $W \cap W_1$ is orthogonal to $W \cap W_2$ with respect to the usual inner product of $\mathbb{R}^3$,
then
1. $W = \text{span}\{(0,1,-1), (0,1,1)\}$
2. $W = \text{span}\{(1,0,-1), (0,1,-1)\}$
3. $W = \text{span}\{(1,0,-1), (0,1,1)\}$
4. $W = \text{span}\{(1,0,-1), (1,0,1)\}$

28. $C = \left[\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}\right]$ को $\mathbb{R}^2$ का आधार मानें तथा $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ को $T\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x+y\\x-2y\end{pmatrix}$ से परिभाषित करें। यदि C आधार के सापेक्ष T आव्यूह को $T[C]$ से दिखाएं तो निम्न में से कौन सा वक्तव्य सत्य है?
1. $T[C] = \begin{bmatrix}-3 & -2\\3 & 1\end{bmatrix}$
2. $T[C] = \begin{bmatrix}3 & -2\\-3 & 1\end{bmatrix}$
3. $T[C] = \begin{bmatrix}-3 & -1\\3 & 2\end{bmatrix}$
4. $T[C] = \begin{bmatrix}3 & -1\\-3 & 2\end{bmatrix}$

28. Let $C = \left[\binom{1}{2}, \binom{2}{1}\right]$ be a basis of $\mathbb{R}^2$ and $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be defined by $T\binom{x}{y} = \binom{x+y}{x-2y}$. If $T[C]$ represents the matrix of T with respect to the basis C then which among the following is true?
1. $T[C] = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$
2. $T[C] = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$
3. $T[C] = \begin{bmatrix} -3 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$
4. $T[C] = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

29. यदि $W_1 = \{(u,v,w,x) \in \mathbb{R}^4 \mid u+v+w=0, 2v+x=0, 2u+2w-x=0\}$ तथा $W_2 = \{(u,v,w,x) \in \mathbb{R}^4 \mid u+w+x=0, u+w-2x=0, v-x=0\}$, तो निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?
1. $\dim(W_1) = 1$
2. $\dim(W_2) = 2$
3. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
4. $\dim(W_1 + W_2) = 3$

29. Let $W_1 = \{(u,v,w,x) \in \mathbb{R}^4 \mid u+v+w=0, 2v+x=0, 2u+2w-x=0\}$ and $W_2 = \{(u,v,w,x) \in \mathbb{R}^4 \mid u+w+x=0, u+w-2x=0, v-x=0\}$. Then which among the following is true?
1. $\dim(W_1) = 1$
2. $\dim(W_2) = 2$
3. $\dim(W_1 \cap W_2) = 1$
4. $\dim(W_1 + W_2) = 3$

30. मानिए कि A एक $n \times n$ सम्मिश्र आव्यूह है। A को स्वसंलग्न और B को $A + iI_n$ का प्रतिलोम माने तो $(A - iI_n)B$ के सभी अभिलक्षणिक मान हैं
1. पूर्णतः अधिकल्पित
2. मापांक एक के
3. वास्तविक
4. एक से कम मापांक के

30. Let A be an $n \times n$ complex matrix. Assume that A is self-adjoint and let B denote the inverse of $A + iI_n$. Then all eigenvalues of $(A - iI_n)B$ are
1. purely imaginary
2. of modulus one
3. real
4. of modulus less than one

31. स्तंभ सदिश $\mathbb{C}^n$ के लिए $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ प्रसामान्य लांबिक आधार मान लें। $M = (u_1, \ldots, u_k)$, $N = (u_{k+1}, \ldots, u_n)$ तथा P एक विकर्ण $k \times k$ आव्यूह हो जिसमें $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ विकर्णी प्रविष्टियां हो तो निम्न में से कौन-सा कथन सही है?
1. रैंक $(MPM^*) = k$ जब भी $\alpha_i \neq \alpha_j$ $1 \leq i,j \leq k$.
2. ट्रेस $(MPM^*) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$
3. रैंक $(M^*N) = \min(k, n-k)$
4. रैंक $(MM^* + NN^*) < n$

31. Let $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ be an orthonormal basis of $\mathbb{C}^n$ as column vectors. Let $M = (u_1, \ldots, u_k)$, $N = (u_{k+1}, \ldots, u_n)$ and P be the diagonal $k \times k$ matrix with diagonal entries $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{R}$. Then which of the following is true?
1. Rank $(MPM^*) = k$ whenever $\alpha_i \neq \alpha_j$ $1 \leq i,j \leq k$.
2. Trace $(MPM^*) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$
3. Rank $(M^*N) = \min(k, n-k)$
4. Rank $(MM^* + NN^*) < n$

32. यदि $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ को फलन $B(a,b) = ab$ मान लें तो निम्न में से कौन-सा कथन सही है?
1. B रैखिक रूपांतरण है
2. B धनात्मक निश्चित द्विरैखिक रूप है
3. B सममित है परंतु धनात्मक निश्चित नहीं है
4. B न तो रैखिक है न द्विरैखिक

32. Let $B : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be the function $B(a,b) = ab$.
Which of the following is true?
1. B is a linear transformation
2. B is a positive definite bilinear form
3. B is symmetric but not positive definite
4. B is neither linear nor bilinear

Unit-2

33. यदि मान लें कि R घात श्रेणी

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k$$

के अभिसरण की त्रिज्या दिखाता है, तो

1. $R > 0$ तथा श्रेणी $[-R, R]$ पर अभिसरित है
2. $R > 0$ तथा श्रेणी $x = -R$ पर अभिसरित है, परंतु $x = R$ पर अभिसरित नहीं है
3. $R > 0$ तथा श्रेणी $(-R, R)$ के बाहर अभिसरित नहीं होती
4. $R = 0$.

33. Let R denote the radius of convergence of the power series

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k.$$

Then

1. $R > 0$ and the series is convergent on $[-R, R]$.
2. $R > 0$ and the series converges at $x = -R$ but does not converge at $x = R$.
3. $R > 0$ and the series does not converge outside $(-R, R)$.
4. $R = 0$.

34. $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ एक अचरेतर सर्वत्र वैश्लेषिक फलन तथा
$\text{Image}(f) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in \mathbb{C}$ ऐसा कि $f(z) = w\}$, तब

1. Image (f) का अंत: रिक्त है।
2. Image (f) मूल बिंदु से जाने वाली हर रेखा को काटता है।
3. सम्मिश्र समतल में ऐसी चक्रिका है जो Image (f) से असंयुक्त है।
4. Image (f) में इसके सब सीमा बिंदु सन्निहित हैं।

34. Let $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a non-constant entire function and let
$\text{Image}(f) = \{w \in \mathbb{C} : \exists z \in \mathbb{C} \text{ such that } f(z) = w\}$.
Then

1. The interior of Image(f) is empty.
2. Image (f) intersects every line passing through the origin.
3. There exists a disc in the complex plane, which is disjoint from Image (f)
4. Image(f) contains all its limit points.

35. सम्मिश्र चर z वाले बहुपद $p(z)$ तथा $q(z)$ हैं। मानें कि $I_{p,q} = \oint_\gamma p(z)\overline{q(z)}\,dz$ जहां γ बंद कंटूर $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ है। तब

1. $I_{z^m,z^n} = 0$ सभी धनात्मक पूर्णांकों m, n के लिए जहां $m \neq n$
2. $I_{z^n,z^n} = 2\pi i$ सभी धनात्मक पूर्णांकों n के लिए
3. $I_{p,1} = 0$; सभी बहुपदों p के लिए
4. $I_{p,q} = p(0)\,\overline{q(0)}$ सभी बहुपदों p, q के लिए

35. Consider the polynomials $p(z), q(z)$ in the complex variable z and let
$I_{p,q} = \oint_\gamma p(z)\overline{q(z)}\,dz$
where γ denotes the closed contour $\gamma(t) = e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$. Then

1. $I_{z^m,z^n} = 0$ for all positive integers m, n with $m \neq n$
2. $I_{z^n,z^n} = 2\pi i$ for all positive integers n
3. $I_{p,1} = 0$ for all polynomials p
4. $I_{p,q} = p(0)\,\overline{q(0)}$ for all polynomials p, q

36. मूल बिंदु को केंद्र मान कर त्रिज्या 3 का धनात्मक अभिविन्यस्त वृत्त $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ है। λ के जिस मान के लिए समीकरण $\oint_\gamma \frac{\lambda}{z-2}dz = \oint_\gamma \frac{1}{z^2-5z+4}dz$ संतुष्ट होता है, वह है

1. $\lambda = -1/3$
2. $\lambda = 0$
3. $\lambda = 1/3$
4. $\lambda = 1$

36. Let $\gamma(t) = 3e^{it}, 0 \le t \le 2\pi$ be the positively oriented circle of radius 3 centred at the origin. The value of λ for which

$$\oint_\gamma \frac{\lambda}{z-2}dz = \oint_\gamma \frac{1}{z^2-5z+4}dz$$

is

1. $\lambda = -1/3$
2. $\lambda = 0$
3. $\lambda = 1/3$
4. $\lambda = 1$

37. एकांतर समूह A_5 एवं सममित समूह S_4 के मध्य समूह समरूपताओं की संख्या है:

1. 1
2. 12
3. 20
4. 6

37. The number of group homomorphisms from the alternating group A_5 to the symmetric group S_4 is:

1. 1
2. 12
3. 20
4. 6

38. यदि $p \geq 23$ अभाज्य संख्या हो जहां $\frac{1}{p}$ का दशमिक विस्तार (आधार 10) आवर्तकाल $p-1$ के साथ आवर्ती हो (अर्थात् $\frac{1}{p} = 0 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$) जहां सभी i के लिए $a_i \in \{0,1,\dots,9\}$ तथा किसी भी m के लिए $m, 1 \leq m < p-1, \frac{1}{p} \neq 0 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$). $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ पूर्णांक मॉड्यूलो p का गुणात्मक समूह हो तो निम्न में से क्या सही है?

1. $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ की कोटि (order) $(p-1)$ का उचित भाजक है।
2. $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ की कोटि (order) $\frac{(p-1)}{2}$ है।
3. अवयव $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ समूह $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ का जनक है।
4. समूह $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ चक्रीय है लेकिन अवयव 10 इसका जनक नहीं है।

38. Let $p \geq 23$ be a prime number such that the decimal expansion (base 10) of $\frac{1}{p}$ is periodic with period $p-1$ (that is, $\frac{1}{p} = 0 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_{p-1}}$) with $a_i \in \{0,1,\dots,9\}$ for all i and for any $m, 1 \leq m < p-1, \frac{1}{p} \neq 0 \cdot \overline{a_1 a_2 \dots a_m}$). Let $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ denote the multiplicative group of integers modulo p. Then which of the following is correct?

1. The order of $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is a proper divisor of $(p-1)$.
2. The order of $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is $\frac{(p-1)}{2}$.
3. The element $10 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is a generator of the group$(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$.
4. The group $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*$ is cyclic but not generated by the element 10.

39. पूर्णांकों a तथा b के लिए $N_{a,b}$ धनात्मक पूर्णांकों $k < 100$ की संख्या इस तरह दिखाता है कि $k \equiv a \pmod 9$ तथा $k \equiv b \pmod{11}$. निम्न में से कौन-सा कथन सही है?

1. $N_{a,b} = 1$ सभी पूर्णांकों a तथा b के लिए
2. पूर्णांक a तथा b हैं जो शर्त $N_{a,b} > 1$ को संतुष्ट करते हैं।
3. पूर्णांक a तथा b हैं जो शर्त $N_{a,b} = 0$ को संतुष्ट करते हैं।
4. पूर्णांक a तथा b हैं जो शर्त $N_{a,b} = 0$ को, तथा पूर्णांक c तथा d हैं, जो शर्त $N_{c,d} > 1$ को संतुष्ट करते हैं।

39. Given integers a and b, let $N_{a,b}$ denote the number of positive integers $k < 100$ such that $k \equiv a \pmod 9$ and $k \equiv b \pmod{11}$. Then which of the following statements is correct?

1. $N_{a,b} = 1$ for all integers a and b.
2. There exist integers a and b satisfying $N_{a,b} > 1$.
3. There exist integers a and b satisfying $N_{a,b} = 0$.
4. There exist integers a and b satisfying $N_{a,b} = 0$ and there exist integers c and d satisfying $N_{c,d} > 1$.

40. X को सांस्थितिक समष्टि मानें तथा U को X का उचित सघन विवृत उपसमुच्चय मानें तो निम्न में से सही कथन को पहचानें:

1. यदि X संबद्ध है, तो U भी संबद्ध है।
2. यदि X संहत है, तो U भी संहत है।
3. यदि $X \setminus U$ संहत है, तो X संहत है।
4. यदि X संहत है, तो $X \setminus U$ संहत है।

40. Let X be a topological space and U be a proper dense open subset of X. Pick the correct statement from the following:

1. If X is connected then U is connected.
2. If X is compact then U is compact.
3. If $X \setminus U$ is compact then X is compact.
4. If X is compact, then $X \setminus U$ is compact.

Unit-3

41. यदि अवकल समीकरण
$(\cos x)\,y'' + (\sin x)y' - (1 + e^{-x^2})y = 0 \;\; \forall x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
के दो हल $y_1(x)$ तथा $y_2(x)$ हैं, जिसमें
$y_1(0) = \sqrt{2}, y_1'(0) = 1, y_2(0) = -\sqrt{2},\; y_2'(0) = 2.$
तो $x = \frac{\pi}{4}$ पर $y_1(x)$ तथा $y_2(z)$ का रान्स्कियन है

1. $3\sqrt{2}$
2. 6
3. 3
4. $-3\sqrt{2}$

41. If $y_1(x)$ and $y_2(x)$ are two solutions of the differential equation
$(\cos x)\,y'' + (\sin x)y' - (1 + e^{-x^2})y = 0 \;\; \forall x \in \left(\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$
with $y_1(0) = \sqrt{2}, y_1'(0) = 1, y_2(0) = -\sqrt{2},\; y_2'(0) = 2.$
then the Wronskian of $y_1(x)$ and $y_2(x)$ at $x = \frac{\pi}{4}$ is

1. $3\sqrt{2}$
2. 6
3. 3
4. $-3\sqrt{2}$

42. दिये गये तंत्र
$x'(t) = x - 2y + y^2 \sin(x)$
$y'(t) = 2x - 2y - 3y\cos(y^2)$
का क्रांतिक बिंदु (0,0) है,

1. स्थिर सर्पिल बिंदु
2. अस्थिर सर्पिल बिंदु
3. पल्याण बिंदु
4. स्थिर आसंधि

42. The critical point (0,0) for the system
$x'(t) = x - 2y + y^2 \sin(x)$
$y'(t) = 2x - 2y - 3y\cos(y^2)$
is a

1. stable spiral point
2. unstable spiral point
3. saddle point
4. stable node

43. माना कि $u(x,t)$ एक फलन है जो कि PDE
$u_{xx} - u_{tt} = e^x + 6t,\; x\in\mathbb{R}, t > 0$ तथा
प्रारंभिक परिस्थितियाँ $u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = 0$ प्रत्येक $x \in \mathbb{R}$ के लिए, को संतुष्ट करता है, जहां कि पादाक्षर दर्शाये चरों के संगत आंशिक अवकलज इंगित करते हैं। तब $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ का मान है

1. $e^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) + \left(\frac{\pi^3+4}{8}\right)$
2. $e^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) + \left(\frac{\pi^3-4}{8}\right)$
3. $e^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) - \left(\frac{\pi^3+4}{8}\right)$
4. $e^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) - \left(\frac{\pi^3-4}{8}\right)$

43. Let $u(x,t)$ be a function that satisfies the PDE
$u_{xx} - u_{tt} = e^x + 6t,\; x\in\mathbb{R}, t > 0$ and the initial conditions
$u(x,0) = \sin(x), u_t(x,0) = 0$
for every $x \in \mathbb{R}$
Here subscripts denote partial derivatives corresponding to the variables indicated.
Then the value of $u\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ is

1. $e^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) + \left(\frac{\pi^3+4}{8}\right)$
2. $e^{\pi/2}\left(1 + \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) + \left(\frac{\pi^3-4}{8}\right)$
3. $e^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) - \left(\frac{\pi^3+4}{8}\right)$
4. $e^{\pi/2}\left(1 - \frac{1}{2}e^{\pi/2}\right) - \left(\frac{\pi^3-4}{8}\right)$

44. माना कि $u(x,t)$ निम्न IVP को संतुष्ट करता है:
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\; x\in\mathbb{R}, t > 0$
$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{अन्यत्र} \end{cases}$
तब $\lim_{t\to 0+} u(1,t)$ का मान है

1. e
2. π
3. $1/2$
4. 1

44. Let $u(x,t)$ satisfy the IVP:
$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\; x\in\mathbb{R}, t > 0$
$u(x,0) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1 \\ 0, & \text{elsewhere.} \end{cases}$
Then the value of $\lim_{t\to 0+} u(1,t)$ equals

1. e
2. π
3. $1/2$
4. 1

45. माना कि $f(x)$ एक अज्ञात घात (डिग्री) का बहुपद है जिसका मान दी गई सारिणी के अनुसार है

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	7	13	16

इसके तमाम चौथे विभाजित अंतरों का मान $-1/6$ है। तब x^3 का गुणांक है

1. $1/3$
2. $-2/3$
3. 16
4. -1

45. Let $f(x)$ be a polynomial of unknown degree taking the values

x	0	1	2	3
$f(x)$	2	7	13	16

All the fourth divided differences are $-1/6$. Then the coefficient of x^3 is

1. $1/3$
2. $-2/3$
3. 16
4. -1

46. विचार कीजिए फलनक

$$J[y] = \int_0^2 (1 - y'^2)^2 dx$$

जो $\{y \epsilon C[0,2]: y$ टुकड़ेवार C^1 तथा $y(0) = y(2) = 0\}$ पर परिभाषित है। मान लीजिये कि y_e उपर्युक्त फलनक का न्यूनतमकर्ता है तो y_e के पास है

1. एक अनन्य कोना बिंदु (corner point)
2. दो कोना बिंदु (corner point)
3. दो से अधिक कोना बिंदु (corner point)
4. कोई भी कोना बिंदु (corner point) नहीं

46. Consider the functional

$$J[y] = \int_0^2 (1 - y'^2)^2 dx$$

defined on $\{y \epsilon C[0,2]: y$ is piecewise C^1 and $y(0) = y(2) = 0\}$. Let y_e be a minimizer of the above functional. Then y_e has

1. a unique corner point
2. two corner points
3. more than two corner points
4. no corner points

47. यदि

$\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^2}{2}$, का हल φ है तो, $\varphi(\sqrt{2})$ का मान है

1. $\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$
2. $\sqrt{2}e^2$
3. $\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}}$
4. $2e^4$

47. If φ is the solution of

$$\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^2}{2},$$

then $\varphi(\sqrt{2})$ is equal to

1. $\sqrt{2}e^{\sqrt{2}}$
2. $\sqrt{2}e^2$
3. $\sqrt{2}e^{2\sqrt{2}}$
4. $2e^4$

48. एक स्प्रिंग के किनारे से जुड़े द्रव्यमान m की द्विआयामी गति पर विचार करें, जिसका दूसरा सिरा स्थिर है। मान लीजिए कि स्प्रिंग स्थिरांक का मान k है। इस तंत्र की गतिक ऊर्जा T व स्थितिज ऊर्जा V निम्न समीकरणों से दी गई हैं

$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$ तथा $V = \frac{1}{2}kr^2$, जहां पर $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ तथा $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ तथा t समय दर्शाता है। तब निम्नलिखित में कौन-सा कथन सही है?

1. r एक निरसनीय निर्देशांक है
2. θ एक निरसनीय निर्देशांक नहीं है
3. संपूर्ण गति के दौरान $r^2\dot{\theta}$ का मान नियत रहता है
4. संपूर्ण गति के दौरान $r\dot{\theta}$ का मान नियत रहता है

48. Consider the two dimensional motion of a mass m attached to one end of a spring whose other end is fixed. Let k be the spring constant. The kinetic energy T and the potential energy V of the system are given by

$T = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right)$ and $V = \frac{1}{2}kr^2$,

where $\dot{r} = \frac{dr}{dt}$ and $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$ with t as time. Then which of the following statements is correct?

1. r is an ignorable coordinate
2. θ is not an ignorable coordinate

3. $r^2\dot{\theta}$ remains constant throughout the motion
4. $r\dot{\theta}$ remains constant throughout the motion

Unit-4

49. माना कि $X \geq 0$ $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ पर एक यादृच्छिक चर है जिसके लिए $\mathbb{E}(X) = 1$ है। माना कि $A \in \mathcal{F}$ एक घटना है जिसके लिए $0 < P(A) < 1$. ऐसे में $(\Omega, \mathcal{F})$ के लिए निम्न में से कौन सा एक अन्य प्रायिकता माप को परिभाषित करता है?
   1. $Q(B) = P(A \cap B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   2. $Q(B) = P(A \cup B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   3. $Q(B) = \mathbb{E}(XI_B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   4. $Q(B) = \begin{cases} P(A|B) & if\ P(B) > 0 \\ 0 & if\ P(B) = 0 \end{cases}$

49. Let $X \geq 0$ be a random variable on $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ with $\mathbb{E}(X) = 1$. Let $A \in \mathcal{F}$ be an event with $0 < P(A) < 1$. Which of the following defines another probability measure on $(\Omega, \mathcal{F})$?
   1. $Q(B) = P(A \cap B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   2. $Q(B) = P(A \cup B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   3. $Q(B) = \mathbb{E}(XI_B) \quad \forall B \in \mathcal{F}$
   4. $Q(B) = \begin{cases} P(A|B) & if\ P(B) > 0 \\ 0 & if\ P(B) = 0 \end{cases}$

50. माना कि X तथा Y $i.i.d$ यादृच्छिक चर हैं जो कि $(0,4)$ पर समान रूप से बंटित है। तब $P(X > Y | X < 2Y)$ है

   1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{6}$
   3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{2}{3}$

50. Let X and Y be $i.i.d$ random variables uniformly distributed on $(0,4)$. Then $P(X > Y | X < 2Y)$ is

   1. $\frac{1}{3}$ 2. $\frac{5}{6}$
   3. $\frac{1}{4}$ 4. $\frac{2}{3}$

51. माना कि $\{X_n\}$ एक मार्कोव चेन है जिसकी 3 अवस्थायें हैं तथा जिसका संक्रमण प्रायिकता आव्यूह (मैट्रिक्स)

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

है। तब निम्न में से कौन सा कथन सत्य है?
   1. $\{X_n\}$ अखंडनीय है।
   2. $\{X_n\}$ पुनरावर्ती है।
   3. $\{X_n\}$ एक स्थिर प्रायिकता बंटन की अनुमति नहीं देता है।
   4. $\{X_n\}$ की एक अवशोषीय अवस्था है।

51. Suppose $\{X_n\}$ is a Markov Chain with 3 states and transition probability matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Then which of the following statements is true?
   1. $\{X_n\}$ is irreducible
   2. $\{X_n\}$ is recurrent
   3. $\{X_n\}$ does not admit a stationary probability distribution
   4. $\{X_n\}$ has an absorbing state

52. माना कि $X \sim$ Cauchy$(0,1)$. तब $\frac{1-X}{1+X}$ का बंटन है
   1. Uniform $(0,1)$
   2. Normal $(0,1)$
   3. द्विचरघातांकी $(0,1)$
   4. Cauchy $(0,1)$

52. Suppose $X \sim$ Cauchy$(0,1)$. Then the distribution of $\frac{1-X}{1+X}$ is
   1. Uniform $(0,1)$
   2. Normal $(0,1)$
   3. Double exponential $(0,1)$
   4. Cauchy $(0,1)$

53. प्रेक्षण 0.8, 0.71, 0.9, 1.2, 1.68, 1.4, 0.88, 1.62 दिए गए हैं जो कि समान बंटन $(\theta - 0.2, \theta + 0.8)$ तथा $-\infty < \theta < \infty$ पर प्राप्त की गई हैं। θ के लिए निम्न में से कौन सा सर्वाधिक संभावित आकलन है?
   1. 0.7 2. 0.9
   3. 1.1 4. 1.3

53. Given the observations 0.8, 0.71, 0.9, 1.2, 1.68, 1.4, 0.88, 1.62 from the uniform distribution on $(\theta - 0.2, \theta + 0.8)$ with $-\infty < \theta < \infty$, which of the following is a maximum likelihood estimate for θ?

1. 0.7
2. 0.9
3. 1.1
4. 1.3

54. परीक्षण प्रतिदर्शज T का उपयोग करके परिकल्पनाओं H_0 का H_1 के विरुद्ध परीक्षण करने में प्रस्तावित परीक्षण पद्धति H_0 का समर्थन नहीं करती है यदि T का मान अधिक है। दिए गए प्रतिदर्श (sample) के आधार पर परीक्षण प्रतिदर्शज का p-मान 0.05 प्राप्त होता है यदि यह माना जाये कि T का H_0 के अधीन बंटन N(0, 1) है। H_0 के अधीन T का बंटन यदि 10 स्वातंत्र्य कोटि के साथ t-बंटन हो तो, p-मान होगा

1. 0.05
2. $< 0.05 - \frac{1}{100}$
3. $0.05 - \frac{1}{100}$
4. > 0.05

54. To test the hypotheses H_0 against H_1 using the test statistic T, the proposed test procedure is not to support H_0 if T is large. Based on a given sample, the p-value of the test statistic is computed to be 0.05 assuming that the distribution of T is N(0, 1) under H_0. If the distribution of T under H_0 is the t-distribution with 10 degrees of freedom instead, the p-value will be

1. 0.05
2. $< 0.05 - \frac{1}{100}$
3. $0.05 - \frac{1}{100}$
4. > 0.05

55. माना कि $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ किसी द्विचर संतत बंटन के n स्वतंत्र प्रेक्षण है। इन n प्रेक्षण के आधार पर मानें कि r_p गुणनफल आघूर्ण सहसंबंध गुणांक तथा r_s रैंक सहसंबंध गुणांक है। निम्न में से कौन सा कथन सही है?

1. $r_p \geq 0$ का तात्पर्य है $r_s \geq 0$
2. $r_s \geq 0$ का तात्पर्य है $r_p \geq 0$
3. $r_p = 1$ का तात्पर्य है $r_s = 1$
4. $r_s = 1$ का तात्पर्य है $r_p = 1$

55. Let $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$ be n independent observations from a bivariate continuous distribution. Let r_p be the product moment correlation coefficient and r_s be the rank correlation coefficient computed based on these n observations. Which of the following statements is correct?

1. $r_p \geq 0$ implies $r_s \geq 0$
2. $r_s \geq 0$ implies $r_p \geq 0$
3. $r_p = 1$ implies $r_s = 1$
4. $r_s = 1$ implies $r_p = 1$

56. किसी रेखीय मॉडल $Y_i = \theta_1 + \theta_2 + \varepsilon_i$ (जबकि $i = 1, 2$) तथा $Y_i = \theta_1 - \theta_3 + \varepsilon_i$ (जबकि $i = 3, 4$) पर विचार कीजिये जहां कि तमाम ε_i's स्वतंत्र हैं तथा $i = 1, \ldots, 4$ के लिए $E(\varepsilon_i) = 0, Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0$ तथा $\theta_1, \ldots \theta_3 \in \mathbb{R}$. निम्न में से कौन सा प्राचलीय फलन आकलनीय है?

1. $\theta_1 + \theta_3$
2. $\theta_2 - \theta_3$
3. $\theta_2 + \theta_3$
4. $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

56. Consider a linear model

$Y_i = \theta_1 + \theta_2 + \varepsilon_i$ for $i = 1, 2$ and

$Y_i = \theta_1 - \theta_3 + \varepsilon_i$ for $i = 3, 4$, where

ε_i's are independent with $E(\varepsilon_i) = 0$, $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2 > 0$ for $i = 1, \ldots, 4$, and $\theta_1, \ldots \theta_3 \in \mathbb{R}$. Which of the following parametric functions is estimable?

1. $\theta_1 + \theta_3$
2. $\theta_2 - \theta_3$
3. $\theta_2 + \theta_3$
4. $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

57. यदि $X \sim N_p(0, I)$ तथा $A_{p\times p}$ एक वर्गसम आव्यूह है जिसकी रैंक $(A) = k < p$ है, तो निम्नलिखित में से कौन सा कथन सही है?

1. $\frac{X'AX}{X'X} \sim \frac{k}{p} F_{k,p}$
2. $\frac{X'AX}{X'X} \sim \frac{k}{p-k} F_{k,p-k}$
3. $\frac{X'AX}{X'X} \sim Beta\left(\frac{k}{2}, \frac{p}{2}\right)$
4. $\frac{X'AX}{X'X} \sim Beta\left(\frac{k}{2}, \frac{p-k}{2}\right)$

57. If $X \sim N_p(0, I)$ and $A_{p\times p}$ is an idempotent matrix with rank $(A) = k < p$, then which of the following statements is correct?

1. $\frac{X'AX}{X'X} \sim \frac{k}{p} F_{k,p}$
2. $\frac{X'AX}{X'X} \sim \frac{k}{p-k} F_{k,p-k}$
3. $\frac{X'AX}{X'X} \sim Beta\left(\frac{k}{2}, \frac{p}{2}\right)$
4. $\frac{X'AX}{X'X} \sim Beta\left(\frac{k}{2}, \frac{p-k}{2}\right)$

58. $PPSWR$ प्रतिदर्श स्कीम का उपयोग करके $N(\geq 3)$ की समष्टि में से एक $n\ (\geq 2)$ आकार का एक प्रतिदर्श (नमूना) लिया जाता है, जहां कि i^{th} इकाई को एक ड्रॉ में चयन करने की प्रायिकता p_i है, $0 < p_i < 1\ \forall i = 1, \ldots, N$, तथा $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.
तब समावेशन प्रायिकता π_{ij} है

1. $1 - p_i^n - p_j^n + (p_i + p_j)^n$
2. $1 - (p_i + p_j - p_i p_j)^n$
3. $1 - (1 - p_i)^n - (1 - p_j)^n - (p_i + p_j)^n$
4. $1 - (1 - p_i)^n - (1 - p_j)^n + (1 - p_i - p_j)^n$

58. A sample of size $n\ (\geq 2)$ is drawn from a population of $N(\geq 3)$ units using $PPSWR$ sampling scheme, where p_i is the probability of selecting i^{th} unit in a draw, $0 < p_i < 1\ \forall i = 1, \ldots, N$, and $\sum_{i=1}^{N} p_i = 1$.
Then the inclusion probability π_{ij} is

1. $1 - p_i^n - p_j^n + (p_i + p_j)^n$
2. $1 - (p_i + p_j - p_i p_j)^n$
3. $1 - (1 - p_i)^n - (1 - p_j)^n - (p_i + p_j)^n$
4. $1 - (1 - p_i)^n - (1 - p_j)^n + (1 - p_i - p_j)^n$

59. किसी 2^4 प्रयोग में दो ब्लॉक व फैक्टर A, B, C तथा D हैं, किसी एक ब्लॉक में निम्नलिखित उपचार युग्म हैं
$a, b, c, ad, bd, cd, abc, abcd$.
निम्नलिखित में से कौन सा प्रभाव संकरित है?

1. ABC
2. ABD
3. BCD
4. $ABCD$

59. In a 2^4 experiment with two blocks and factors A, B, C and D, one block contains the following treatment combinations $a, b, c, ad, bd, cd, abc, abcd$. Which of the following effects is confounded?

1. ABC
2. ABD
3. BCD
4. $ABCD$

60. किसी हवाई अड्डे पर देशी और अन्तर-राष्ट्रीय यात्री प्वासों प्रक्रमानुसार क्रमश: 100 तथा 70 प्रति घंटे की दर से स्वतंत्र रूप से आते हैं। यदि किसी दिन सुबह के 9:00 से सुबह 11:00 बजे के बीच उस हवाई अड्डे पर आने वाले यात्रियों (देशी और विदेशी) की कुल संख्या 520 है, तो इस अवधि में आने वाले देशी यात्रियों की संख्या का सप्रतिबंध बंटन (conditional distribution) क्या है?

1. Poisson (200)
2. Poisson (100)
3. Binomial $\left(520, \frac{10}{17}\right)$
4. Binomial $\left(520, \frac{7}{17}\right)$

60. In an airport, domestic passengers and international passengers arrive independently according to Poisson processes with rates 100 and 70 per hour, respectively. If it is given that the total number of passengers (domestic and international) arriving in that airport between 9:00 AM and 11:00 AM on a particular day was 520, then what is the conditional distribution of the number of domestic passengers arriving in this period?

1. Poisson (200)
2. Poisson (100)
3. Binomial $\left(520, \frac{10}{17}\right)$
4. Binomial $\left(520, \frac{7}{17}\right)$

भाग/PART - C

Unit-1

61. मानें कि $\{u_n\}_{n\ge1}$ वास्तविक संख्याओं का ऐसा अनुक्रम है जो निम्न शर्तों को संतुष्ट करता है:

(1) $(-1)^n u_n \ge 0$, सभी $n \ge 1$ के लिए

(2) $|u_{n+1}| < \frac{|u_n|}{2}$, सभी $n \ge 13$ के लिए

निम्न में से कौन सा कथन आवश्यकत: सही है?

1. $\sum_{n\ge1} u_n$ $\mathbb{R}$ में अभिसरित नहीं होता
2. $\sum_{n\ge13} u_n$ शून्य में अभिसरित है
3. $\sum_{n\ge13} u_n$ एक शून्येतर वास्तविक संख्या में अभिसरित है
4. यदि $|u_{n-1}| < \frac{|u_n|}{2}$, सभी $2 \le n \le 13$ के लिए तब $\sum_{n\ge1} u_n$ एक ऋणात्मक वास्तविक संख्या है

61. Let $\{u_n\}_{n\ge1}$ be a sequence of real numbers satisfying the following conditions:

(1) $(-1)^n u_n \ge 0$, for all $n \ge 1$

(2) $|u_{n+1}| < \frac{|u_n|}{2}$, for all $n \ge 13$

Which of the following statements are necessarily true?

1. $\sum_{n\ge1} u_n$ does not converge in $\mathbb{R}$.
2. $\sum_{n\ge13} u_n$ converges to zero.
3. $\sum_{n\ge13} u_n$ converges to a non-zero real number.
4. If $|u_{n-1}| < \frac{|u_n|}{2}$, for all $2 \le n \le 13$, then $\sum_{n\ge1} u_n$ is a negative real number.

62. मानें कि S एक अनंत आव्यूह है। निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

1. यदि S से $\mathbb{N}$ में इंजेक्शन हो तो S गणनीय है
2. यदि S से $\mathbb{N}$ में आच्छादन (सर्जेक्शन) हो तो S गणनीय है
3. यदि $\mathbb{N}$ से S में इंजेक्शन हो तो S गणनीय है
4. यदि $\mathbb{N}$ से S में आच्छादन (सर्जेक्शन) हो तो, S गणनीय है

62. Let S be an infinite set. Which of the following statements are true?

1. If there is an injection from S to $\mathbb{N}$, then S is countable
2. If there is a surjection from S to $\mathbb{N}$, then S is countable
3. If there is an injection from $\mathbb{N}$ to S, then S is countable
4. If there is a surjection from $\mathbb{N}$ to S, then S is countable

63. माना हम अभाज्य संख्याओं को वर्धमान क्रम में लिखते हैं और n-th अभाज्य संख्या को p_n से दिखाते हैं, जैसे $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, तथा मानें कि यदि

$S = \{s_n = p_{n+1} - p_n | n \in \mathbb{N}, n \ge 1\}$, तब निम्न में कौन-सा कथन सत्य है?

1. $\sup S = \infty$
2. $\limsup_{n\to\infty} s_n = \infty$
3. $\inf S < \infty$ and $\inf S = 1$
4. $\liminf_{n\to\infty} s_n \ge 2$

63. Let p_n denote the n-th prime number, when we enumerate the prime numbers in the increasing order. For example, $p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5$, and so on. Let $S = \{s_n = p_{n+1} - p_n | n \in \mathbb{N}, n \ge 1\}$. Then which of the following are correct?

1. $\sup S = \infty$
2. $\limsup_{n\to\infty} s_n = \infty$
3. $\inf S < \infty$ and $\inf S = 1$
4. $\liminf_{n\to\infty} s_n \ge 2$

64. विवृत अंतराल $(0, 1)$ पर $n \ge 1$ के लिए निम्न फलनों के अनुक्रम पर विचार करें।

$f_n(x) = \frac{1}{2nx+1}, g_n(x) = \frac{x}{2nx+1}$. इन कथनों पर विचार करें।

(I) अनुक्रम $\{f_n\}$ एकसमानत: $(0, 1)$ पर अभिसरित होती है।

(II) अनुक्रम $\{g_n\}$ एकसमानत: $(0, 1)$ पर अभिसरित होती है।

तब,

1. (I) सत्य है
2. (I) असत्य है
3. (I) असत्य है और (II) सत्य है
4. (I) तथा (II) दोनों सत्य हैं

64. For $n \geq 1$, consider the sequence of functions
$f_n(x) = \frac{1}{2nx+1}, g_n(x) = \frac{x}{2nx+1}$ on the open interval $(0, 1)$. Consider the statements:
(I) The sequence $\{f_n\}$ converges uniformly on $(0, 1)$
(II)The sequence $\{g_n\}$ converges uniformly on $(0, 1)$
Then,
1. (I) is true
2. (I) is false
3. (I) is false and (II) is true
4. Both (I) and (II) are true

65. मानें कि $[0,1]$ पर $\{f_n\}$ संतत वास्तविक मान फलन का निम्न को संतुष्ट कर रहा अनुक्रम है:
(A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ एक ह्रासमान अनुक्रम है
(B) अनुक्रम $\{f_n\}$ 0 में एकसमान अभिसरित होता है
यदि $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
तब
1. sup norm के संबंध में $\{g_n\}$ कौशी है
2. $\{g_n\}$ एक-समान अभिसारी है
3. $\{g_n\}$ बिंदुशः अभिसरण करे, यह आवश्यक नहीं है
4. $\exists M > 0$ इस प्रकार कि
$|g_n(x)| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

65. Suppose that $\{f_n\}$ is a sequence of continuous real valued functions on [0,1] satisfying the following:
(A) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\{f_n(x)\}$ is a decreasing sequence.
(B) the sequence $\{f_n\}$ converges uniformly to 0.
Let $g_n(x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^k f_k(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$.
Then
1. $\{g_n\}$ is Cauchy with respect to the sup norm.
2. $\{g_n\}$ is uniformly convergent
3. $\{g_n\}$ need not converge pointwise
4. $\exists M > 0$ such that
$|g_n(x)| \leq M, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

66. यदि $f: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$ एक निरंतर वर्धमान फलन हो तो, हम निर्धारित करते है
$g(x) = f(x) + f(1/x), x \in [1, 2]$.
$[1, 2]$ के एक विभाजन P पर विचार करें। g के उपरि-रीमानयोग तथा अधो-रीमान योग को $U(P, g)$ तथा $L(P, g)$ से क्रमशः दिखाएं, तो
1. किसी उपयुक्त f के लिए हमें $U(P, g) = L(P, g)$ मिल सकता है
2. किसी उपयुक्त f के लिए हमें $U(P, g) \neq L(P, g)$ मिल सकता है
3. $U(P, g) \geq L(P, g)$ होगा f कुछ भी चुनें
4. $U(P, g) < L(P, g)$ होगा f कुछ भी चुनें

66. Given $f: \left[\frac{1}{2}, 2\right] \to \mathbb{R}$, a strictly increasing function, we put $g(x) = f(x) + f(1/x), x \in [1, 2]$. Consider a partition P of $[1, 2]$ and let $U(P, g)$ and $L(P, g)$ denote the upper Riemann sum and lower Riemann sum of g. Then
1. for a suitable f we can have $U(P, g) = L(P, g)$
2. for a suitable f we can have $U(P, g) \neq L(P, g)$
3. $U(P, g) \geq L(P, g)$ for all choices of f
4. $U(P, g) < L(P, g)$ for all choices of f

67. f को $(0, 1)$ का वास्तविक मान संतत अवकलनीय फलन मानें और $g = f' + if$, जहां $i^2 = -1$ है तथा f का प्रथम अवकलज f' है। $a, b \in (0, 1)$ को f के 2 उत्तरोत्तर शून्य हों तो निम्न में से कौन से वक्तव्य आवश्यकतः सत्य होंगे?
1. यदि $g(a) > 0$, तो g वास्तविक रेखा को उपरि अर्द्धतल से निम्न अर्द्धतल a पर पार करता है।
2. यदि $g(a) > 0$, तो g वास्तविक रेखा को निम्न अर्द्धतल से उपरि अर्द्धतल जाने में a पर पार करता है।
3. यदि $g(a)g(b) \neq 0$, तब $g(a), g(b)$ का चिन्ह एक ही है।
4. यदि $g(a)g(b) \neq 0$, तब $g(a), g(b)$ के चिन्ह विपरीत हैं।

67. Let f be a real valued continuously differentiable function of $(0,1)$. Set $g = f' + if$, where $i^2 = -1$ and f' is the derivative of f. Let $a, b \in (0,1)$ be two consecutive zeros of f. Which of the following statements are necessarily true?
1. If $g(a) > 0$, then g crosses the real line from upper half plane to lower half plane at a
2. If $g(a) > 0$, then g crosses the real line from lower half plane to upper half plane at a
3. If $g(a)g(b) \neq 0$, then $g(a), g(b)$ have the same sign
4. If $g(a)g(b) \neq 0$, then $g(a), g(b)$ have opposite signs

68. A को व्युत्क्रमणीय वास्तविक $n \times n$ आव्यूह मानें। एक फलन $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ को $F(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ से परिभाषित करें जहां $\langle x,y\rangle$ x तथा y का आंतर गुणन है। यदि $DF(x,y)$ को (x,y) पर F का अवकलज मान लें जो $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ का रैखिक रूपांतरण है, तब
1. यदि $x \neq 0$, तब $DF(x,0) \neq 0$
2. यदि $y \neq 0$, तब $DF(0,y) \neq 0$
3. यदि $(x,y) \neq (0,0)$ तब $DF(x,y) \neq 0$
4. यदि $x = 0$ या $y = 0$, तब $DF(x,y) = 0$

68. Let A be an invertible real $n \times n$ matrix. Define a function $F: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ by $F(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ where $\langle x,y\rangle$ denotes the inner product of x and y. Let $DF(x,y)$ denote the derivative of F at (x,y) which is a linear transformation from $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Then
1. If $x \neq 0$, then $DF(x,0) \neq 0$
2. If $y \neq 0$, then $DF(0,y) \neq 0$
3. If $(x,y) \neq (0,0)$ then $DF(x,y) \neq 0$
4. If $x = 0$ or $y = 0$, then $DF(x,y) = 0$

69. मानें कि $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ एक फलन है जो $f(x,y) = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, x + y)$ की तरह लिखा जाता है। यदि $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f$ स्थानतः व्युत्क्रमणीय हो (x,y) पर$\}$, तो
1. $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. S, $\mathbb{R}^2$ में विवृत है
3. S, $\mathbb{R}^2$ में सघन है
4. $\mathbb{R}^2 \setminus S$ गणनीय है

69. Let $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ be a function given by $f(x,y) = (x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y, x + y)$. Let $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : f$ is locally invertible at $(x,y)\}$. Then
1. $S = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
2. S is open in $\mathbb{R}^2$
3. S is dense in $\mathbb{R}^2$
4. $\mathbb{R}^2 \setminus S$ is countable

70. $X = \mathbb{N}$, धनात्मक पूर्णांकों का समुच्चय मानें। X पर metrics d_1, d_2 पर विचार करें, जहां
$d_1(m,n) = |m - n|, m, n \in X$
$d_2(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, m, n \in X$
यदि X_1, X_2 क्रमशः दूरीक समष्टि $(X, d_1), (X, d_2)$ के प्रतीक हों, तो
1. X_1 पूर्ण है
2. X_2 पूर्ण है
3. X_1 संपूर्णतया परिबद्ध है
4. X_2 संपूर्णतया परिबद्ध है

70. Let $X = \mathbb{N}$, the set of positive integers. Consider the metrics d_1, d_2 on X given by
$d_1(m,n) = |m - n|, m, n \in X$
$d_2(m,n) = \left|\frac{1}{m} - \frac{1}{n}\right|, m, n \in X$
Let X_1, X_2 denote the metric spaces $(X, d_1), (X, d_2)$ respectively. Then
1. X_1 is complete
2. X_2 is complete
3. X_1 is totally bounded
4. X_2 is totally bounded

71. $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ को ऐसा रैखिक प्रतिचित्र मानें जो $T^2 = T - I_n$ को संतुष्ट करें। तब निम्न में से कौन से कथन सत्य है?
1. T व्युत्क्रमणीय है
2. $T - I_n$ व्युत्क्रमणीय नहीं है
3. T का वास्तविक अभिलक्षणिक मान है
4. $T^3 = -I_n$

71. Let $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be a linear map that satisfies $T^2 = T - I_n$. Then which of the following are true?
1. T is invertible
2. $T - I_n$ is not invertible
3. T has a real eigen value
4. $T^3 = -I_n$

72. $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ तथा $b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$ मानें।

तब निम्न में से कौन से कथन सत्य है?
1. दोनों तंत्र $MX = b_1$ तथा $MX = b_2$ असंगत हैं
2. दोनों तंत्र $MX = b_1$ and $MX = b_2$ संगत है
3. तंत्र $MX = b_1 - b_2$ संगत है
4. तंत्र $MX = b_1 - b_2$ असंगत है

72. Let $M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$b_1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ and $b_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}$. Then which of the following are true?

1. both systems $MX = b_1$ and $MX = b_2$ are inconsistent
2. both systems $MX = b_1$ and $MX = b_2$ are consistent
3. the system $MX = b_1 - b_2$ is consistent
4. the systems $MX = b_1 - b_2$ is inconsistent

73. $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$ मानें। यदि दिया है कि M का एक अभिलक्षणिक मान 1 है तो निम्न में से कौन से कथन सत्य है?
1. M का अल्पिष्ठ बहुपद $(X-1)(X+4)$ है
2. M का अल्पिष्ठ बहुपद $(X-1)^2(X+4)$ है
3. M विकर्णनीय (diagonalizable) नहीं है
4. $M^{-1} = \frac{1}{4}(M + 3I)$

73. Let $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$. Given that 1 is an eigenvalue of M, then which among the following are correct?
1. The minimal polynomial of M is $(X-1)(X+4)$
2. The minimal polynomial of M is $(X-1)^2(X+4)$
3. M is not diagonalizable
4. $M^{-1} = \frac{1}{4}(M + 3I)$

74. यदि A वास्तविक आव्यूह हो जिसका अभिलक्षणिक बहुपद $(X-1)^3$ हो तो निम्न में से सत्य कथन छांटिए
1. A आवश्यकत: विकर्णनीय है
2. यदि A का अल्पिष्ठ बहुपद $(X-1)^3$ हो तो A विकर्णनीय है
3. A^2 का अभिलक्षणिक बहुपद $(X-1)^3$ है
4. यदि A के केवल दो जॉर्डन ब्लाक हों तो $(A-1)^2$ विकर्णनीय है

74. Let A be a real matrix with characteristic polynomial $(X-1)^3$. Pick the correct statements from below:
1. A is necessarily diagonalizable
2. If the minimal polynomial of A is $(X-1)^3$, then A is diagonalizable
3. Characteristic polynomial of A^2 is $(X-1)^3$
4. If A has exactly two Jordan blocks, then $(A-1)^2$ is diagonalizable

75. मानें कि P_3 अधिकतम 3 घातांक तथा वास्तविक गुणांकों वाले बहुपदों की सदिश समष्टि है। $T(p(x)) = p(x+1) + p(x-1))$ से परिभाषित रैखिक प्रतिचित्र $T: P_3 \to P_3$ पर विचार करें। P_3 के मानक आधार $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ के संबंध में आव्यूह T निम्न में किन गुणों को संतुष्ट करती है?

1. $\det T = 0$
2. $(T-2I)^4 = 0$ लेकिन $(T-2I)^3 \neq 0$
3. $(T-2I)^3 = 0$ लेकिन $(T-2I)^2 \neq 0$
4. 2 बहुकता 4 का अभिलक्षणिक मान है

75. Let P_3 be the vector space of polynomials with real coefficients and of degree at most 3. Consider the linear map $T: P_3 \to P_3$ defined by $T(p(x)) = p(x+1) + p(x-1)$). Which of the following properties does the matrix of T (with respect to the standard basis $B = \{1, x, x^2, x^3\}$ of P_3) satisfy?

1. $\det T = 0$
2. $(T-2I)^4 = 0$ but $(T-2I)^3 \neq 0$
3. $(T-2I)^3 = 0$ but $(T-2I)^2 \neq 0$
4. 2 is an eigenvalue with multiplicity 4

76. मानें कि M एक $n \times n$ हर्मिटी आव्यूह है जिसकी कोटि (rank) $k, k \neq n$ है। यदि $\lambda \neq 0$ M का एक अभिलक्षणिक मान हो, एकक स्तंभ सदिश u के संगत $Mu = \lambda u$ हो, तो निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?

1. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k-1$
2. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k$
3. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k+1$
4. $(M - \lambda uu^*)^n = M^n - \lambda^n uu^*$

76. Let M be an $n \times n$ Hermitian matrix of rank $k, k \neq n$. If $\lambda \neq 0$ is an eigenvalue of M with corresponding unit column vector u, with $Mu = \lambda u$, then which of the following are true?

1. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k-1$
2. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k$
3. rank $(M\text{-} \lambda uu^*) = k+1$
4. $(M - \lambda uu^*)^n = M^n - \lambda^n uu^*$

77. $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ पर वास्तविक मान फलन B को निम्न प्रकार परिभाषित करें:
यदि $v = (x_1, x_2), w = (y_1, y_2)$ का संबंध $\mathbb{R}^2$ से हो, $B(u, w) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$ हो, और मानें कि $v_0 = (1, 0)$ तथा $W = \{v \in \mathbb{R}^2 : B(v_0, v) = 0\}$, तब W

1. $\mathbb{R}^2$ का उपसमष्टि नहीं है
2. $\{(0,0)\}$ के बराबर है
3. y-अक्ष है
4. (0.0) तथा (1, 1) से होकर जाने वाली रेखा है

77. Define a real valued function B on $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ as follows. If $v = (x_1, x_2), w = (y_1, y_2)$ belong to $\mathbb{R}^2$ define $B(u, w) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 4x_2y_2$. Let $v_0 = (1, 0)$ and let $W = \{v \in \mathbb{R}^2 : B(v_0, v) = 0\}$. Then W

1. is not a subspace of $\mathbb{R}^2$
2. equals $\{(0,0)\}$
3. is the y axis
4. is the line passing through (0,0) and (1, 1)

78. $\mathbb{R}^2$ पर इन द्विघाती रूपों

$Q_1(x, y) = xy$

$Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

$Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$

पर विचारें। निम्न में से सही कथनों को छांटें:

1. Q_1 तथा Q_2 तुल्य हैं
2. Q_1 तथा Q_3 तुल्य हैं
3. Q_2 तथा Q_3 तुल्य हैं
4. सभी तुल्य हैं

78. Consider the Quadratic forms

$Q_1(x, y) = xy$

$Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$

$Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + 2y^2$

on $\mathbb{R}^2$. Choose the correct statements from below:

1. Q_1 and Q_2 are equivalent
2. Q_1 and Q_3 are equivalent
3. Q_2 and Q_3 are equivalent
4. all are equivalent

Unit-2

79. H को उपरि अर्द्ध तल मानें अर्थात्

$H = \{z = x + iy : y > 0\}$

$z \in H$ के लिए, निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $\frac{1}{z} \in H$
2. $\frac{1}{z^2} \in H$
3. $\frac{-z}{z+1} \in H$
4. $\frac{z}{2z+1} \in H$

79. Let H denote the upper half plane, that is,
$H = \{z = x + iy : y > 0\}$
For $z \in H$, which of the following are true?
1. $\frac{1}{z} \in H$
2. $\frac{1}{z^2} \in H$
3. $\frac{-z}{z+1} \in H$
4. $\frac{z}{2z+1} \in H$

80. मानें कि $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ विश्लेषिक फलन है। तब निम्न में से कौन से कथन सही हैं?
1. यदि सभी $z \in \mathbb{C}$ के लिए $|f(z)| \leq 1$, f' के $\mathbb{C}$ में अनंतः बहुत शून्य हैं
2. यदि f onto हो, तो फलन $f(\cos z)$ onto है
3. यदि f onto हो, तो फलन $f(e^z)$ onto है
4. यदि f is one-one है, तो फलन $f(z^4 + z + 2)$ one-one है

80. Let $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be an analytic function. Then which of the following statements are true?
1. If $|f(z)| \leq 1$ for all $z \in \mathbb{C}$, then f' has infinitely many zeros in $\mathbb{C}$
2. If f is onto, then the function $f(\cos z)$ is onto
3. If f is onto, then the function $f(e^z)$ is onto
4. If f is one-one, then the function $f(z^4 + z + 2)$ is one-one

81. सर्वत्र वैश्लेषिक फलन $f(z) = 1 + z + z^{20}$ तथा $g(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$ पर विचार करें। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?
1. $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$
2. $\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = \infty$
3. $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\})$ हर $R > 0$ के लिए परिबद्ध है
4. $g^{-1}(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\})$ हर $R > 0$ के लिए परिबद्ध है

81. Consider the entire functions $f(z) = 1 + z + z^{20}$ and $g(z) = e^z, z \in \mathbb{C}$. Which of the following statements are true?
1. $\lim_{|z| \to \infty} |f(z)| = \infty$
2. $\lim_{|z| \to \infty} |g(z)| = \infty$
3. $f^{-1}(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\})$ is bounded for every $R > 0$
4. $g^{-1}(\{z \in \mathbb{C}: |z| \leq R\})$ is bounded for every $R > 0$

82. निम्न से कौन सा कथन सही है?
1. $\tan z$ एक सर्वत्रवैश्लेषिक फलन है
2. $\tan z$ $\mathbb{C}$ पर अनंतकी फलन है
3. ∞ पर $\tan z$ में विलग विचित्रता है
4. ∞ पर $\tan z$ में अवियुक्त विचित्रता है

82. Which of the following statements are true?
1. $\tan z$ is an entire function
2. $\tan z$ is a meromorphic function on $\mathbb{C}$
3. $\tan z$ has an isolated singularity at ∞
4. $\tan z$ has a non-isolated singularity at ∞

83. यदि $a_1 < a_2 < \cdots < a_{51}$ दिए गए ऐसे भिन्न-भिन्न धन पूर्णांक हों कि $1 \leq a_i \leq 100$ सभी $i = 1,2,\ldots,51$ के लिए। तब निम्न में से कौन से कथन सही हैं?
1. ऐसे i तथा j है जिनके लिए $1 \leq i < j \leq 51$ तथा a_j को a_i से विभाजित कर सकने की शर्त पूरी होती है।
2. ऐसा i है कि $1 \leq i \leq 51$ जहां a_i विषम पूर्णांक है
3. ऐसा j है कि $1 \leq j \leq 51$ जहां a_j सम पूर्णांक है
4. ऐसा $i < j$ है कि $|a_i - a_j| > 51$

83. Let $a_1 < a_2 < \cdots < a_{51}$ be given distinct natural numbers such that $1 \leq a_i \leq 100$ for all $i = 1,2,\ldots,51$. Then which of the following are correct?
1. There exist i and j with $1 \leq i < j \leq 51$ satisfying a_i divides a_j.
2. There exists i with $1 \leq i \leq 51$ such that a_i is an odd integer.
3. There exists j with $1 \leq j \leq 51$ such that a_j is an even integer.
4. There exist $i < j$ such that $|a_i - a_j| > 51$.

84. किसी भी समूह G के लिए, Aut(G) को G की स्वाकारिकताओं का समूह मान लें। निम्न में से कौन से सही हैं?
1. यदि G परिसीमित है, तब Aut(G) परिसीमित है
2. यदि G चक्रिक है, तब Aut(G) चक्रिक है

3. यदि G अनंत है, तब Aut(G) अनंत है
4. यदि Aut(G) को Aut(H) का समरूपी मानें जहाँ G तथा H दो समूह हों, तो G भी H का समरूपी है

84. For any group G, let Aut(G) denote the group of automorphisms of G. Which of the following are true?
1. If G is finite, then Aut(G) is finite.
2. If G is cyclic, then Aut(G) is cyclic
3. If G is infinite, then Aut(G) is infinite
4. If Aut(G) is isomorphic to Aut(H), where G and H are two groups, then G is isomorphic to H

85. G को निम्न गुण वाला समूह मानें : कोई भी धन पूर्णांकों m, n तथा r के लिए G में ऐसे अवयव g तथा h हैं, कि $\text{order}(g) = m$, $\text{order}(h) = n$ तथा $\text{order}(gh) = r$. तब निम्न में से कौन से कथन आवश्यकत: सत्य हैं?
1. G अनंत समूह ही होगा
2. G चक्रिक समूह नहीं हो सकता
3. G में अनंत बहु (infinitely many) चक्रिक उपसमूह हैं
4. G अन्-आबेली समूह ही होगा

85. Let G be a group with the following property: Given any positive integers m, n and r there exist elements g and h in G such that $\text{order}(g) = m$, $\text{order}(h) = n$ and $\text{order}(gh) = r$. Then which of the following are necessarily true?
1. G has to be an infinite group
2. G cannot be a cyclic group
3. G has infinitely many cyclic subgroups
4. G has to be a non-abelian group

86. मानें कि R एक वलय $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)$ है। निम्न में सही कथन छाँटिए:
1. $\dim_{\mathbb{C}} R = 3$
2. R की ठीक-ठीक दो अभाज्य गुणजावली हैं
3. R एक अद्वितीय गुणनखंडन प्रांत (UFD) है
4. (x) R की उच्चिष्ठ गुणजावली है

86. Let R be the ring $\mathbb{C}[x]/(x^2+1)$. Pick the correct statements from below:
1. $\dim_{\mathbb{C}} R = 3$
2. R has exactly two prime ideals
3. R is a UFD
4. (x) is a maximal ideal of R

87. $f(x) = x^7 - 105x + 12$ मानें तो निम्न में से कौन से कथन सही हैं?
1. $\mathbb{Q}$ पर $f(x)$ लघुकरणीय है
2. ऐसा पूर्णांक m है जिसके लिए $f(m) = 105$
3. ऐसा पूर्णांक m है जिसके लिए $f(m) = 2$
4. $f(m)$ किसी भी पूर्णांक m के लिए अभाज्य संख्या नहीं है

87. Let $f(x) = x^7 - 105x + 12$. Then which of the following are correct?
1. $f(x)$ is reducible over $\mathbb{Q}$
2. There exists an integer m such that $f(m) = 105$
3. There exists an integer m such that $f(m) = 2$
4. $f(m)$ is not a prime number for any integer m

88. मानें कि $\alpha = \sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$ तथा $\xi = exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$. मानें कि $K = \mathbb{Q}(\alpha\xi)$. निम्न में से सही कथनों को चुनें:
1. $\mathbb{C}$ की क्षेत्र समाकारिता σ है, ऐसे कि $\sigma(K) = K$ तथा $\sigma \neq id$
2. $\mathbb{C}$ की क्षेत्र समाकारिता σ है, ऐसे कि $\sigma(K) \neq K$
3. $\mathbb{Q}$ का परिमित विस्तार E इस तरह से है कि $K \subseteq E$ तथा E की हर क्षेत्र समाकारिता σ के लिए $\sigma(K) \subseteq E$
4. K की सब क्षेत्र समाकारिताओं σ के लिए, $\sigma(\alpha\xi) = \alpha\xi$

88. Let $\alpha = \sqrt[5]{2} \in \mathbb{R}$ and $\xi = exp\left(\frac{2\pi i}{5}\right)$. Let $K = \mathbb{Q}(\alpha\xi)$. Pick the correct statements from below:
1. There exists a field automorphism σ of $\mathbb{C}$ such that $\sigma(K) = K$ and $\sigma \neq id$
2. There exists a field automorphism σ of $\mathbb{C}$ such that $\sigma(K) \neq K$

3. There exists a finite extension E of $\mathbb{Q}$ such that $K \subseteq E$ and $\sigma(K) \subseteq E$ for every field automorphism σ of E
4. For all field automorphisms σ of K, $\sigma(\alpha\xi) = \alpha\xi$

89. मानें कि $X = \{(x_i)_{i\geq 1}: x_i \in \{0,1\}$ सभी $i \geq 1$ के लिए$\}$ जबकि मीट्रिक $d((x_i),(y_i)) = \sum_{i\geq 1}|x_i - y_i|2^{-i}$. यदि $f: X \to [0,1]$ वह फलन हो जिसे $f(x_i)_{i\geq 1} = \sum_{i\geq 1} x_i 2^{-i}$ परिभाषित करता है तो निम्न में से सही कथन चुनें:
1. f संतत है
2. f onto है
3. f one-to-one है
4. f विवृत है

89. Let $X = \{(x_i)_{i\geq 1}: x_i \in \{0,1\}$ for all $i \geq 1\}$ with the metric $d((x_i),(y_i)) = \sum_{i\geq 1}|x_i - y_i|2^{-i}$. Let $f: X \to [0,1]$ be the function defined by $f(x_i)_{i\geq 1} = \sum_{i\geq 1} x_i 2^{-i}$. Choose the correct statements from below:
1. f is continuous
2. f is onto
3. f is one-to-one
4. f is open

90. मानें कि $\mathbb{R}$ का एक उपसमुच्चय A है जो $A = \bigcap_{n\geq 1} V_n$ को संतुष्ट करता है, जहां हर $n \geq 1$ के लिए, V_n, $\mathbb{R}$ का एक विवृत सघन उपसमुच्चय है। निम्न में से कौन सा सही है?
1. A एक अरिक्त समुच्चय है
2. A गणनीय है
3. A अगणनीय है
4. A, $\mathbb{R}$ में सघन है

90. Let A be a subset of $\mathbb{R}$ satisfying $A = \bigcap_{n\geq 1} V_n$, where for each $n \geq 1$, V_n is an open dense subset of $\mathbb{R}$. Which of the following are correct?
1. A is a non-empty set
2. A is countable
3. A is uncountable
4. A is dense in $\mathbb{R}$

Unit-3

91. किसी द्वितीय कोटि असमघाती रैखिक अवकलन समीकरण के तीन हल हैं $y_1(x) = 1 + xe^{x^2}, y_2(x) = (1+x)e^{x^2} - 1, y_3(x) = 1 + e^{x^2}$.
निम्न में से कौन/ कौन-कौन से अवकलन समीकरण व्यापक हल है/हैं?
1. $(C_1+1)y_1 + (C_2 - C_1)y_2 - C_2 y_3$, जहां C_1 तथा C_2 स्वेच्छ स्थिरांक हैं
2. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$, जहां C_1 तथा C_2 स्वेच्छ स्थिरांक हैं
3. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + C_3(y_3 - y_1)$, जहां C_1, C_2 तथा C_3 स्वेच्छ स्थिरांक हैं
4. $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_3 - y_2) + y_1$, जहां C_1 तथा C_2 स्वेच्छ स्थिरांक हैं

91. Three solutions of a certain second order non-homogeneous linear differential equation are
$y_1(x) = 1 + xe^{x^2}, y_2(x) = (1+x)e^{x^2} - 1, y_3(x) = 1 + e^{x^2}$.
Which of the following is (are) general solution(s) of the differential equation?
1. $(C_1+1)y_1 + (C_2 - C_1)y_2 - C_2 y_3$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants
2. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3)$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants
3. $C_1(y_1 - y_2) + C_2(y_2 - y_3) + C_3(y_3 - y_1)$, where C_1, C_2 and C_3 are arbitrary constants
4. $C_1(y_1 - y_3) + C_2(y_3 - y_2) + y_1$, where C_1 and C_2 are arbitrary constants

92. यदि $x \in I$ तथा $p(x), q(x), r(x)$ अंतराल I में शून्येतर संतत फलन हों तो अवकलन समीकरण $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ को प्राचल विचरण विधि से हल करने में एक विशिष्ट रूप के हल $y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$ ढूंढा जाता है जहां y_1 तथा y_2 होंगे $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ के रैखिक स्वतंत्र हल तथा $v_1(x)$ एवं $v_2(x)$ फलन जिनका पता लगाना है। निम्न में से कौन से कथन आवश्यकत: सही हैं?

1. y_1 तथा y_2 का रांस्कियन I में कभी शून्य नहीं है
2. v_1, v_2 तथा $v_1y_1 + v_2y_2$ दो बार अवकलनीय हैं
3. v_1 तथा v_2 दो बार अवकलनीय न हों परंतु $v_1y_1 + v_2y_2$ दो बार अवकलनीय हैं
4. $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ के हलों के समुच्चय में $ay_1 + by_2 + y_p$ के रूप के फलन हैं, जहां $a, b \in \mathbb{R}$ स्वेच्छ गुणांक हैं

92. The method of variation of parameters to solve the differential equation $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$, where $x \in I$ and $p(x), q(x), r(x)$ are non-zero continuous functions on an interval I, seeks a particular solution of the form $y_p(x) = v_1(x)y_1(x) + v_2(x)y_2(x)$, where y_1 and y_2 are linearly independent solutions of $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, and $v_1(x)$ and $v_2(x)$ are functions to be determined. Which of the following statements are necessarily true?
    1. The Wronskian of y_1 and y_2 is never zero in I
    2. v_1, v_2 and $v_1y_1 + v_2y_2$ are twice differentiable
    3. v_1 and v_2 may not be twice differentiable, but $v_1y_1 + v_2y_2$ is twice differentiable
    4. The solution set of $y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x)$ consists of functions of the form $ay_1 + by_2 + y_p$ where $a, b \in \mathbb{R}$ are arbitrary constants

93. अभिलक्षणिक मान समस्या पर विचारें:
$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{for} \quad x \in (-1,1)$$
$$y(-1) = y(1)$$
$$y'(-1) = y'(1).$$
निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?
    1. सब अभिलक्षणिक मान दृढ़त: धनात्मक हैं
    2. सब अभिलक्षणिक मान ऋणेतर हैं
    3. भिन्न अभिलक्षणिक मान $L^2[-1,1]$ में लांबिक हैं।
    4. अभिलक्षणिक मानों के अनुक्रम ऊपर परिबद्ध हैं।

93. Consider the eigenvalue problem
$$y'' + \lambda y = 0 \quad \text{for} \quad x \in (-1,1)$$
$$y(-1) = y(1)$$
$$y'(-1) = y'(1).$$
Which of the following statements are true?
    1. All eigenvalues are strictly positive
    2. All eigenvalues are non-negative
    3. Distinct eigenfunctions are orthogonal in $L^2[-1,1]$
    4. The sequence of eigenvalues is bounded above

94. प्रारंभिक मान समस्या (IVP):
$$xu_x + tu_t = u + 1, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$u(x,t) = x^2,\ t = x^2$ पर विचार करें।
    1. (0,0) पर हल विचित्र है
    2. दिया आकाश वक्र $(x,t,u) = (\xi, \xi^2, \xi^2)$ (0,0) पर अभिलक्षणिक वक्र नहीं है
    3. (x,t) तल में कोई आधार-अभिलक्षणिक वक्र (0,0) से नहीं गुजर रहा है
    4. प्रारंभिक मान समस्या (IVP) का (0,0) पर अद्वितीय C^1 हल हो, इसके लिए आवश्यक शर्त नहीं मिलती

94. Consider the IVP:
$$xu_x + tu_t = u + 1, x \in \mathbb{R}, t \geq 0$$
$$u(x,t) = x^2,\ t = x^2.$$
Then
    1. the solution is singular at (0,0)
    2. the given space curve $(x,t,u) = (\xi, \xi^2, \xi^2)$ is not a characteristic curve at (0,0)
    3. there is no base-characteristic curve in the (x,t) plane passing through (0,0)
    4. a necessary condition for the IVP to have a unique C^1 solution at (0,0) does not hold

95. मानें कि फलन $u(x,t)$ आंशिक अवकलन समीकरण (PDE): $u_t + uu_x = 1, x \in \mathbb{R}, t > 0$, तथा प्रारंभिक अवस्था $u\left(\frac{t^2}{4}, t\right) = \frac{t}{2}$ को संतुष्ट करता है, तब प्रारंभिक मान समस्या (IVP) का/के
    1. केवल एक हल है
    2. दो हल हैं

3. संख्या में अनंत हल हैं
4. ऐसे हल हैं जिनमें से कोई भी अभिलक्षणिक आधार वक्र पर अवकलनीय नहीं है

95. Let $u(x,t)$ be a function that satisfies the PDE : $u_t + uu_x = 1, x \in \mathbb{R}, t > 0,$ and the initial condition $u\left(\frac{t^2}{4}, t\right) = \frac{t}{2}$. Then the IVP has
1. only one solution
2. two solutions
3. an infinite number of solutions
4. solutions none of which is differentiable on the characteristic base curve

96. $f:[0,1] \to [0,1]$ को अद्‌वितीय नियत बिंदु $f(x_*) = x_*$ के साथ दो बार संतत अवकलनीय फलन मानें। दिए गए $x_0 \in (0,1)$ के लिए पुनरावृत्ति $x_{n+1} = f(x_n)$ पर विचार करें जहां $n \geq 0$ हो।
यदि $L = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, तो निम्न में से कौन से सही हैं?
1. यदि $L < 1$, तो x_n, x_* पर अभिसरित होगा
2. x_n अभिसरित होता है x_* पर, यदि $L \geq 1$
3. त्रुटि $e_n = x_n - x_*$ शर्त $|e_{n+1}| < L|e_n|$ को संतुष्ट करता है
4. यदि $f'(x_*) = 0$, तो कुछ $C > 0$ के लिए $|e_{n+1}| < C|e_n|^2$

96. Let $f:[0,1] \to [0,1]$ be twice continuously differentiable function with a unique fixed point $f(x_*) = x_*$. For a given $x_0 \in (0,1)$ consider the iteration $x_{n+1} = f(x_n)$ for $n \geq 0$.
If $L = \max_{x\in[0,1]} |f'(x)|$, then which of the following are true?
1. If $L < 1$, then x_n converges to x_*
2. x_n converges to x_* provided $L \geq 1$
3. The error $e_n = x_n - x_*$ satisfies $|e_{n+1}| < L|e_n|$
4. If $f'(x_*) = 0$, then $|e_{n+1}| < C|e_n|^2$ for some $C > 0$

97. मानें कि $u(x)$ परिसीमा मान समस्या

$$(BVP) \quad \begin{cases} u'' + u' = 0, & x\epsilon(0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

को संतुष्ट करता है। (BVP) की परिमित अंतर सन्निकटन पर विचार करें

$$(BVP)_h \begin{cases} \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} = 0, j = 1, \ldots, N-1 \\ U_0 = 0 \\ U_N = 1 \end{cases}$$

U_j यहां पर $u(x_j)$ का सन्निकटन हैं, जहां $x_j = jh; j = 0, \ldots, N$, $[0,1]$ का विभाजन है जबकि $h = 1/N$ एवं N एक धनात्मक पूर्णांक है। तब निम्न में से कौन से कथन सत्य हैं?
1. $(BVP)_h$ का कुछ $a, b \in \mathbb{R}$ के लिए $U_j = ar^j + b$ के रूप का हल है, जहां $a, b \in \mathbb{R}, r \neq 1$ और जहाँ, r इसे संतुष्ट करता है: $(2+h)r^2 - 4r + (2-h) = 0$
2. $U_j = (r^j - 1)/(r^N - 1)$ जहां r इसे संतुष्ट करता है: $(2+h)r^2 - 4r + (2-h) = 0$ तथा $r \neq 1$
3. x में एकदिष्ट है u
4. j में एकदिष्ट है U_j

97. Let $u(x)$ satisfy the boundary value problem

$$(BVP) \quad \begin{cases} u'' + u' = 0, & x\epsilon(0,1) \\ u(0) = 0 \\ u(1) = 1. \end{cases}$$

Consider the finite difference approximation to (BVP)

$$(BVP)_h \begin{cases} \frac{U_{j+1} - 2U_j + U_{j-1}}{h^2} + \frac{U_{j+1} - U_{j-1}}{2h} = 0, j = 1, \ldots, N-1 \\ U_0 = 0 \\ U_N = 1 \end{cases}$$

Here U_j is an approximation to $u(x_j)$ where $x_j = jh, j = 0, \ldots, N$ is a partition of $[0,1]$ with $h = 1/N$ for some positive integer N. Then which of the following are true?

1. There exists a solution to $(BVP)_h$ of the form $U_j = ar^j + b$ for some $a, b \in \mathbb{R}$ with $r \neq 1$ and r satisfying $(2+h)r^2 - 4r + (2-h) = 0$
2. $U_j = (r^j - 1)/(r^N - 1)$ where r satisfies $(2+h)r^2 - 4r + (2-h) = 0$ and $r \neq 1$
3. u is monotonic in x
4. U_j is monotonic in j

98. $y(0) = 0, y(1) = 0$ का पालन करते हुए फलनक $J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - (y')^4]\,dx$ पर विचार करें। खंडित चरम एक संतत चरम है जिसके अवकलज में परिसीमित संख्या में बिंदुओं पर प्लुति असांतत्य है। तब निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. कोई खंडित चरम नहीं हैं तथा $y = 0$ एक चरम है
2. एक कोई अद्वितीय खंडित चरम होगा
3. एकाधिक तथा परिसीमितः बहु खंडित चरम हैं
4. अनंत बहु खंडित चरम हैं

98. Consider the functional $J[y] = \int_0^1 [(y')^2 - (y')^4]\,dx$ subject to $y(0) = 0, y(1) = 0$. A broken extremal is a continuous extremal whose derivative has jump discontinuities at a finite number of points. Then which of the following statements are true?

1. There are no broken extremals and $y = 0$ is an extremal
2. There is a unique broken extremal
3. There exist more than one and finitely many broken extremals
4. There exist infinitely many broken extremals

99. $y(x) = y'(0) = y(1) = 0, y'(1) = 6$, का पालन करते हुए फलनक $J[y] = \int_0^1 [720x^2y - (y'')^2]\,dx$ के चरम हैं:

1. $x^6 + 2x^3 - 3x^2$
2. $x^5 + 4x^4 - 5x^3$
3. $x^5 + x^4 - 2x^3$
4. $x^6 + 4x^3 - 6x^2$

99. The extremals of the functional $J[y] = \int_0^1 [720x^2y - (y'')^2]\,dx$, subject to $y(x) = y'(0) = y(1) = 0, y'(1) = 6$, are

1. $x^6 + 2x^3 - 3x^2$
2. $x^5 + 4x^4 - 5x^3$
3. $x^5 + x^4 - 2x^3$
4. $x^6 + 4x^3 - 6x^2$

100. यदि $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\,\varphi(t)dt$, का हल φ है, तो $\varphi(\log 2)$ का मान है

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8

100. If φ is the solution of $\varphi(x) = 1 - 2x - 4x^2 + \int_0^x [3 + 6(x-t) - 4(x-t)^2]\,\varphi(t)dt$, then $\varphi(\log 2)$ is equal to

1. 2
2. 4
3. 6
4. 8

101. $K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \le x \le t \\ t(x-1), & t \le x \le 1 \end{cases}$ अष्ठि वाले समघाती फ्रेडहोल्म समाकल समीकरण की अभिलक्षणिक संख्या तथा उसके संगत अभिलक्षणिक मान हैं

1. $\lambda = -\pi^2, \varphi(x) = \sin\pi x$
2. $\lambda = -2\pi^2, \varphi(x) = \sin 2\pi x$
3. $\lambda = -3\pi^2, \varphi(x) = \sin 3\pi x$
4. $\lambda = -4\pi^2, \varphi(x) = \sin 2\pi x$

101. A characteristic number and the corresponding eigenfunction of the homogeneous Fredholm integral equation with kernel

$$K(x,t) = \begin{cases} x(t-1), & 0 \le x \le t \\ t(x-1), & t \le x \le 1 \end{cases}$$

are

1. $\lambda = -\pi^2, \varphi(x) = \sin\pi x$
2. $\lambda = -2\pi^2, \varphi(x) = \sin 2\pi x$
3. $\lambda = -3\pi^2, \varphi(x) = \sin 3\pi x$
4. $\lambda = -4\pi^2, \varphi(x) = \sin 2\pi x$

102. द्रव्यमान m के बिंदु द्रव्यमान पर विचार करें जो लंबाई a की द्रव्यमान विहीन दृढ़ छड़ी से जुड़ा है। छड़ी का दूसरा सिरा ऊर्ध्व दिशा में इस तरह से चलाया जाता है कि समय t पर मूल बिंदु से इसके अधोमुखी विस्थापन तथा इसके स्थिति सदिश को निम्न से दर्शाया जा सकता है $z(t) = z_0 \cos(\omega t)$. बिंदु द्रव्यमान एक निश्चित तल में गति कर रहा है तब निश्चित समय t पर इसका स्थिति सदिश निम्न से दिया जाता है:

$\vec{r}(t) = (a \sin\theta(t), z(t) + a\cos\theta(t))$. तब बिंदु द्रव्यमान का गति-समीकरण है

1. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g + z_0\omega^2\cos(\omega t))\sin\theta = 0$
2. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g - z_0\omega\cos(\omega t))\sin\theta = 0$
3. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g + z_0^2\omega^2\cos(\omega t))\cos\theta = 0$
4. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g - z_0\omega^2\cos(\omega t))\cos\theta = 0$

102. Consider a point mass of mass m which is attached to a mass-less rigid rod of length a. The other end of the rod is made to move vertically such that its downward displacement from the origin at time t is given by $z(t) = z_0\cos(\omega t)$. The mass is moving in a fixed plane and its position vector at time t is given by

$\vec{r}(t) = (a\sin\theta(t), z(t) + a\cos\theta(t))$.

Then the equation of motion of the point mass is

1. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g + z_0\omega^2\cos(\omega t))\sin\theta = 0$
2. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g - z_0\omega\cos(\omega t))\sin\theta = 0$
3. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g + z_0^2\omega^2\cos(\omega t))\cos\theta = 0$
4. $a\frac{d^2\theta}{dt^2} + (g - z_0\,\omega^2\cos(\omega t))\cos\theta = 0$

Unit-4

103. माने कि $X_1, X_2, \cdots, X_n$ एक यादृच्छिक नमूना है जो $(0,2)$ पर एक समान बंटन से लिया गया है। तथा हर धन पूर्णांक n के लिए $M_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$। तब निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $M_n \to 2$ निश्चित प्रायः रूप से
2. $M_n \to 2$ प्रसंभाव्य रूप से
3. $M_n \to 2$ बंटन से
4. $\frac{M_n - 2}{\sqrt{n}}$ प्रसामान्य बंटन में अभिसरित हो जाता है।

103. Suppose $X_1, X_2, \cdots, X_n$ is a random sample from the uniform distribution on $(0,2)$ and $M_n = \max\{X_1, X_2, \cdots, X_n\}$ for every positive integer n. Then which of the following statements are true?

1. $M_n \to 2$ almost surely
2. $M_n \to 2$ in probability
3. $M_n \to 2$ in distribution
4. $\frac{M_n - 2}{\sqrt{n}}$ converges in distribution to normal distribution

104. माने कि $X_1, X_2, \cdots$ i.i.d. $N(0,1)$ यादृच्छिक चर हैं। माने कि $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, $\forall n \geq 1$. निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $\frac{S_n - n}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ सभी $n \geq 1$ के लिए
2. सब $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \varepsilon\right) \to 0$, $n \to \infty$ के लिए
3. $\frac{S_n}{n} \to 1$ प्रायिकता 1 के साथ
4. $P(S_n \leq n + \sqrt{n}x) \to P(Y \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, जहां $Y \sim N(0,2)$.

104. Let $X_1, X_2, \cdots$ be i.i.d. $N(0,1)$ random variables. Let $S_n = X_1^2 + X_2^2 + \cdots + X_n^2$, $\forall n \geq 1$. Which of the following statements are correct?

1. $\frac{S_n - n}{\sqrt{2}} \sim N(0,1)$ for all $n \geq 1$.
2. For all $\varepsilon > 0$, $P\left(\left|\frac{S_n}{n} - 2\right| > \varepsilon\right) \to 0$ as $n \to \infty$.
3. $\frac{S_n}{n} \to 1$ with probability 1.
4. $P(S_n \leq n + \sqrt{n}x) \to P(Y \leq x)\ \forall x \in \mathbb{R}$, where $Y \sim N(0,2)$.

105. अवस्था समष्टि S के लिए मार्कोव शृंखला $\{X_n\}$ मानें। किसी $i, j \in S$ के लिए, $p_{ij}^{(n)}$ को i से j जाने के लिए n-चरणीय संक्रमण प्रायिकता मानें। अवस्था काल $i\,(i \in S)$ यदि $d(i)$ मानें तो निम्न में से कौन से कथन सही है?

1. यदि $d(i) = d(j)$ तब $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$
2. यदि $d(i) = d(j)$ तब $p_{ij}^{(n)} > 0$ तथा $p_{ji}^{(m)} > 0$ कुछ $n, m \geq 1$ के लिए
3. यदि $p_{ij}^{(n)} > 0$ तथा $p_{ji}^{(m)} > 0$ कुछ $n, m \geq 1$ के लिए, तब $d(i) = d(j)$
4. $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ का परिणामी है $d(i) = d(j)$

105. Let $\{X_n\}$ be a Markov chain with state space S. For any $i, j \in S$, let $p_{ij}^{(n)}$ denote the n-step transition probability of going from i to j. Let $d(i)$ denote the period of state $i\ (i \in S)$. Which of the following statements are correct?

1. If $d(i) = d(j)$ then $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$
2. If $d(i) = d(j)$ then $p_{ij}^{(n)} > 0$ and $p_{ji}^{(m)} > 0$ for some $n, m \geq 1$
3. If $p_{ij}^{(n)} > 0$ and $p_{ji}^{(m)} > 0$ for some $n, m \geq 1$, then $d(i) = d(j)$
4. $\lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)} > 0$ implies $d(i) = d(j)$

106. संक्रमण प्रायिकता आव्यूह P वाली मार्कोव शृंखला पर विचार करें

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

किन्हीं भी दो अवस्थाओं i तथा j के लिए, $p_{ij}^{(n)}$ i से j जाने की n-चरणीय संक्रमण प्रायिकता इंगित करता है। सही कथनों को पहचानिए

1. $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 2/9$.
2. $\lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} p_{32}^{(n)} = 1/3$.
4. $\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = 1/3$.

106. Consider a Markov chain with transition probability matrix P given by

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

For any two states i and j, let $p_{ij}^{(n)}$ denote the n-step transition probability of going from i to j. Identify correct statements.

1. $\lim_{n\to\infty} p_{11}^{(n)} = 2/9$.
2. $\lim_{n\to\infty} p_{21}^{(n)} = 0$.
3. $\lim_{n\to\infty} p_{32}^{(n)} = 1/3$.
4. $\lim_{n\to\infty} p_{13}^{(n)} = 1/3$.

107. मानें कि (X_1, X_2) के लिए सार्व उपांत बंटन (common marginal distribution) F एवं $Corr(X_1, X_2) = 0$ द्विचर बंटनका अनुसरण करता है। तब निम्न में से कौन से कथन सही है?

1. $F =$ यूनिफॉर्म $(0, 1) \Rightarrow X_1$ तथा X_2 स्वतंत्र है
2. $F =$ बर्नूली $(\theta) \Rightarrow X_1$ तथा X_2 स्वतंत्र है
3. $F =$ डिस्क्रीट यूनिफॉर्म $\{-1, 0, 1\} \Rightarrow X_1$ तथा X_2 स्वतंत्र है
4. $F = N(0, 1) \Rightarrow X_1$ तथा X_2 स्वतंत्र है

107. Suppose that (X_1, X_2) follows a bivariate distribution with common marginal distribution F and $Corr(X_1, X_2) = 0$. Then which of the following statements are correct?

1. $F = \text{Uniform}(0, 1) \Rightarrow X_1$ and X_2 are independent.
2. $F = \text{Bernoulli}(\theta) \Rightarrow X_1$ and X_2 are independent.
3. $F =$ Discrete uniform $\{-1, 0, 1\} \Rightarrow X_1$ and X_2 are independent.
4. $F = N(0, 1) \Rightarrow X_1$ and X_2 are independent.

108. $X_1, X_2, \cdots, X_n$ को ऐसे यादृच्छिक नमूने की तरह मानें जिसके लिए p.d.f. निम्नवत है

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{अन्यथा}, \end{cases}$$

जहां $\theta > 0$. तब निम्न में से कौन से कथन सही है?

1. $\prod_{i=1}^{n} X_i$, θ के लिए पर्याप्त है
2. $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i$, θ के लिए पर्याप्त है
3. $\prod_{i=1}^{n} X_i$, θ के लिए अधिकतम संभाविता-आकलन है
4. $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i$, θ के लिए अधिकतम संभाविता-आकलन है

108. Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ be a random sample from the distribution with p.d.f.

$$f_\theta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} \cdot x^{\frac{1-\theta}{\theta}}, & 0 < x < 1, \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where $\theta > 0$. Then which of the following are true?

1. $\prod_{i=1}^{n} X_i$ is sufficient for θ.
2. $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i$ is sufficient for θ.
3. $\prod_{i=1}^{n} X_i$ is a maximum likelihood estimate for θ.
4. $-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} lnX_i$ is a maximum likelihood estimate for θ.

109. $\{-2, -1, 1, 2\}$ पर X एक विविक्त यादृच्छिक चर है जिसके प्रायिकता द्रव्यमान फलन $P_\theta[X = x]$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ निम्नवत हैं

X	-2	-1	1	2
$\theta = \theta_0$	0.05	0.6	0.3	0.05
$\theta = \theta_1$	0.2	0.4	0.2	0.2

उद्देश्य $H_0: \theta = \theta_0$ बनाम $H_1: \theta = \theta_1$ का परीक्षण करना है। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. क्रांतिक क्षेत्र $\{x = 2\}$ वाली परीक्षण पद्धति 0.05 आकार का एक सबसे शक्तिशाली परीक्षण है
2. क्रांतिक क्षेत्र $\{x = -2\}$ वाली परीक्षण पद्धति 0.05 आकार का एक सबसे शक्तिशाली परीक्षण है
3. क्रांतिक क्षेत्र $\{x = -1\}$ वाली परीक्षण पद्धति अपने आकार का एक सबसे शक्तिशाली परीक्षण नहीं है
4. क्रांतिक क्षेत्र $\{x = 1\}$ वाली परीक्षण पद्धति अपने आकार की एक सबसे शक्तिशाली परीक्षण नहीं है

109. X is a discrete random variable on $\{-2, -1, 1, 2\}$ with probability mass functions $P_\theta[X = x]$, $\theta \in \{\theta_0, \theta_1\}$ given below

X	-2	-1	1	2
$\theta = \theta_0$	0.05	0.6	0.3	0.05
$\theta = \theta_1$	0.2	0.4	0.2	0.2

The aim is to test $H_0: \theta = \theta_0$ against $H_1: \theta = \theta_1$. Which of the following statements are correct?

1. The test procedure with critical region $\{x = 2\}$ is a most powerful test of size 0.05
2. The test procedure with critical region $\{x = -2\}$ is a most powerful test of size 0.05
3. The test procedure with critical region $\{x = -1\}$ is not a most powerful test of its size
4. The test procedure with critical region $\{x = 1\}$ is not a most powerful test of its size

110. मानें कि $(\theta, \theta + 1)$ पर $X_1, X_2, \cdots, X_n$ एक समान बंटन में से लिया यादृच्छिक नमूना है, जहां $\theta \in \mathbb{R}$ एक अज्ञात प्राचल है। मानें कि $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ संगत क्रम प्रतिदर्श हो। निम्न में से कौन से अंतराल θ के लिए $100(1 - \alpha)\%$ विश्वास्यता अंतराल हैं?

1. $(-\infty, X_{(n)} - \alpha^{1/n})$
2. $(X_{(1)} + \alpha^{1/n} - 1, \infty)$
3. $\left(X_n + \frac{\alpha}{2} - 1,\ X_n - \frac{\alpha}{2}\right)$
4. $(-\infty, X_1 - \alpha)$

110. Suppose $X_1, X_2, \cdots, X_n$ is a random sample from uniform distribution on $(\theta, \theta + 1)$, where $\theta \in \mathbb{R}$ is an unknown parameter. Let $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ be the corresponding order-statistics. Which of the following are $100(1 - \alpha)\%$ confidence intervals for θ?

1. $(-\infty, X_{(n)} - \alpha^{1/n})$
2. $(X_{(1)} + \alpha^{1/n} - 1, \infty)$
3. $\left(X_n + \frac{\alpha}{2} - 1,\ X_n - \frac{\alpha}{2}\right)$
4. $(-\infty, X_1 - \alpha)$

111. मानें कि 0 के सापेक्ष सममित, सार्व संतत बंटन F का अनुसरण कर रहे स्वतंत्र यादृच्छिक चर $X_1, X_2, \cdots, X_n$ है। तब $i = 1, 2, \cdots, n$, के लिए

$$S_i = \begin{cases} 1 & if\ X_i > 0 \\ -1 & if\ X_i < 0 \text{ तथा} \\ 0 & if\ X_i = 0 \end{cases}$$

R_i = समुच्चय $\{|X_1|, \cdots |X_n|\}$ में $|X_i|$ की कोटि है। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $S_1, S_2, \cdots, S_n$ स्वतंत्र तथा सर्वसमतः बंटित हैं
2. $R_1, R_2, \cdots, R_n$ स्वतंत्र तथा सर्वसमतः बंटित हैं
3. $S = (S_1, \cdots, S_n)$ तथा $R = (R_1, \cdots, R_n)$ स्वतंत्र हैं।
4. $T = \sum_{i=1}^{n} S_i R_i$ का वितरण F के फलन रूप पर निर्भर नहीं करेगा

111. Let $X_1, X_2, \cdots, X_n$ be independent random variables following a common continuous distribution F, which is symmetric about 0. For $i = 1, 2, \cdots, n$, define

$$S_i = \begin{cases} 1 & if\ X_i > 0 \\ -1 & if\ X_i < 0 \text{ and} \\ 0 & if\ X_i = 0 \end{cases}$$

R_i = rank of $|X_i|$ in the set $\{|X_1|, \cdots |X_n|\}$. Which of the following statements are correct?

1. $S_1, S_2, \cdots, S_n$ are independent and identically distributed
2. $R_1, R_2, \cdots, R_n$ are independent and identically distributed
3. $S = (S_1, \cdots, S_n)$ and $R = (R_1, \cdots, R_n)$ are independent
4. The distribution of $T = \sum_{i=1}^{n} S_i R_i$ does not depend on the functional form of F

112. मानें कि $Y|\theta$ ~ प्वासों $(\theta), \theta > 0$ तथा θ का पूर्व घनत्व τ इस प्रकार दिया जाता है: $\tau(\theta) \propto e^{-\alpha\theta}\theta^{\beta-1}$, जहां $\alpha > 0$ तथा $\beta > 0$ हाइपर प्राचल हैं। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. Y का उपांत बंटन हाइपर ज्यामेट्रिक है
2. θ के उत्तर बंटन $Y = y$ को Gamma से दिखाते हैं
3. τ एक संयुग्मी पूर्व(प्रायर) है।
4. वर्गित त्रुटि हानि फलन के लिए बेज़ द्वारा θ का आकलन $\frac{\beta+y}{\alpha+1}$ है।

112. Suppose $Y|\theta$ ~ Poisson $(\theta), \theta > 0$ and prior density τ of θ is given by $\tau(\theta) \propto e^{-\alpha\theta}\theta^{\beta-1}$, where $\alpha > 0$ and $\beta > 0$ are hyper-parameters. Which of the following are true?

1. Marginal distribution of Y is hypergeometric
2. Posterior distribution of θ given $Y = y$ is Gamma
3. τ is a conjugate prior
4. Bayes' estimate of θ for squared error loss function is $\frac{\beta+y}{\alpha+1}$

113. एक रैखिक मॉडल $Y_{4\times1} = X_{4\times4}\beta_{4\times1} + \varepsilon_{4\times1}$ पर विचार करें, जहां $Disp(\varepsilon) = \sigma^2 I_4$ कुछ $\sigma^2 > 0$ के लिए । डिजाईन आव्यूह X इस तरह से छांटी जानी है कि इसके तत्व समुच्चय $\{-1, 0, 1\}$ में से हों। अब X के लिए 3 संभव पंसदों पर विचार करें

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ तथा}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. X की तीनों पसंदों के लिए $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$ आकलनीय हैं
2. X की तीनों पसंदों के लिए β_i तथा β_j के न्यूनतम वर्गित आकलन $\hat{\beta}_i$ तथा $\hat{\beta}_j$, सब $i \neq j$ के लिए असहसंबद्ध हैं।
3. X_1 की तुलना में X_2 एक बेहतर पसंद है।
4. X_3 की तुलना में X_2 एक बेहतर पसंद है।

113. Consider a linear model $Y_{4\times1} = X_{4\times4}\boldsymbol{\beta}_{4\times1} + \varepsilon_{4\times1}$, where $\mathrm{Disp}(\varepsilon) = \sigma^2 I_4$ for some $\sigma^2 > 0$. One needs to choose the design matrix X such that its elements take values in the set $\{-1, 0, 1\}$. Now, consider the following three choices of X

$$X_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ and}$$

$$X_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Which of the following statements are true?

1. For all three choices of X, $\boldsymbol{\beta}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4)'$ is estimable
2. For all three choices of X, $\hat{\beta}_i$ and $\hat{\beta}_j$, the least squared estimates of β_i and β_j, are uncorrelated for all $i \neq j$
3. X_2 is a better choice than X_1
4. X_2 is a better choice than X_3

114. $X_1, X_2, \cdots X_{10}$ को $i.i.d.\ N(0,1)$ मानें। निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. $P\{X_1 > X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}\} = \frac{1}{2}$
2. $P\{X_1 > X_2 X_3 \cdots X_{10}\} = \frac{1}{2}$
3. $P\{\sin(X_1) > \sin(X_2) + \sin(X_3) + \cdots + \sin(X_{10})\} = \frac{1}{2}$
4. $P\{\sin(X_1) > \sin(X_2 + X_3 + \cdots + X_{10})\} = \frac{1}{2}$

114. Suppose that $X_1, X_2, \cdots X_{10}$ are $i.i.d.\ N(0,1)$. Which of the following statements are correct?

1. $P\{X_1 > X_2 + X_3 + \cdots + X_{10}\} = \frac{1}{2}$
2. $P\{X_1 > X_2 X_3 \cdots X_{10}\} = \frac{1}{2}$
3. $P\{\sin(X_1) > \sin(X_2) + \sin(X_3) + \cdots + \sin(X_{10})\} = \frac{1}{2}$
4. $P\{\sin(X_1) > \sin(X_2 + X_3 + \cdots + X_{10})\} = \frac{1}{2}$

115. दो एक समान बंटनों $U(0,2)$ तथा $U(1,5)$ की वर्गीकरण समस्या पर विचार कीजिए। मानें कि π $(0 < \pi < 1)$ उस वर्ग की पूर्व प्रायिकता है जिसका $U(0,2)$ बंटन है। यदि $0-1$ हानि फलन पर विचार करें तो निम्न में से कौन सा कथन सही है?

1. $\pi < 1/3$ के लिए,बेज़ जोखिम (अर्थात् बेज़क्लासीफ़ायर की औसत मिसक्लासीफिकेशन प्रायिकता) 1/6 से कम है।
2. $\pi > 1/3$ के लिए, बेज़ ज़ोखिम 1/6 से कम है।
3. $\pi = 1/3$ बेज़ ज़ोखिम 1/6 है।
4. π, कुछ भी छांटे, बेज क्लासीफ़ायर अद्‌वितीय है

115. Consider a classification problem between two uniform distributions $U(0,2)$ and $U(1,5)$. Let π $(0 < \pi < 1)$ be the prior probability of the class having $U(0,2)$ distribution. If we consider the $0-1$ loss function, which of the following statements are correct?

1. For $\pi < 1/3$, the Bayes' risk (i.e., the average misclassification probability of the Bayes classifier) is smaller than 1/6
2. For $\pi > 1/3$, the Bayes' risk is smaller than 1/6
3. For $\pi = 1/3$, the Bayes' risk is 1/6
4. For all choices of π, the Bayes' classifier is unique

116. मानें कि $N(> n)$ इकाइयों की समष्टि में से निम्नवत् अनुक्रमतः $n(\geq 2)$ इकाइयां निकाली जाती हैं। $U(0,1)$ में से N आकार का यादृच्छिक नमूना $U_1, U_2, \cdots, U_N$ निकाला जाता है। k-th समष्टि इकाई छंटती है यदि $U_k < \frac{n-n_k}{N-k+1}$, $k =$

$1, 2, \cdots, N$ जहां $n_1 = 0$ तथा n_k = हर $k = 2, 3, \cdots, N$ के लिए पहली $(k-1)$ इकाइयों में से छांटी गई इकाईयों की संख्या, तब

1. दूसरी इकाई के नमूने में सम्मिलित होने की प्रायिकता $\frac{n}{N}$ है।
2. पहली तथा दूसरी इकाई के नमूने में सम्मिलित होने की प्रायिकता $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ है।
3. पहली इकाई के सम्मिलित न होने और दूसरी के नमूने में होने की प्रायिकता $\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$ है।
4. पहली इकाई के सम्मिलित होने और दूसरी के न होने की प्रायिकता $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$ है।

116. Suppose $n(\geq 2)$ units are drawn from a population of $N(> n)$ units sequentially as follows. A random sample $U_1, U_2, \cdots, U_N$ of size N is drawn from $U(0, 1)$. The k-th population unit is selected if $U_k < \frac{n-n_k}{N-k+1}, k = 1, 2, \cdots, N$, where $n_1 = 0$ and n_k =number of units selected out of first $k-1$ units for each $k = 2, 3, \cdots, N$. Then
    1. The probability of inclusion of the 2nd unit in the sample is $\frac{n}{N}$
    2. The probability of inclusion of the 1st and 2nd unit in the sample is $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$
    3. The probability of not including the 1st unit and including the 2nd unit in the sample is $\frac{n(N-n)}{N(N-1)}$
    4. The probability of including the 1st unit but not including the 2nd unit in the sample is $\frac{n(n-1)}{N(N-1)}$

117. तीन 'ब्लॉक' तथा चार 'ट्रीटमेंट' A, B, C तथा D वाले एक ब्लॉक डिज़ाईन पर विचार कीजिए जहां केवल A तथा B को 'ब्लॉक'-1 के लिए, केवल A, B तथा D को 'ब्लॉक'-2 के लिए, केवल C को 'ब्लॉक'-3 के लिए रखा गया है। तब परिणामी ब्लॉक डिज़ाइन
    1. अपूर्ण है तथा संबद्ध नहीं है
    2. अपूर्ण तथा असंतुलित है
    3. संतुलित तथा संबद्ध है
    4. न संतुलित है, न संबद्ध है

117. Consider a block design with three blocks and four treatments A, B, C and D where only A and B are allotted to block-1, only A, B and D are allotted to block-2 and only C is allotted to block-3. Then the resulting block design is
    1. incomplete and not connected
    2. incomplete and not balanced
    3. balanced and connected
    4. neither balanced nor connected

118. मानें कि X एक धनात्मक यादृच्छिकचर है, जिसका प्रायिकता घनत्व फलन $f(x) = (\alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\beta-1})e^{-x^\alpha - x^\beta}; x > 0$ है जहां $\alpha > 0$ तथा $\beta > 0$. तब α तथा β के कुछ मानों के लिए X का जोखिम फलन हो सकता है
    1. एक वर्द्धमान फलन
    2. एक ह्रासमान फलन
    3. एक अचर फलन
    4. एक अन्-एकदिष्ट फलन

118. Suppose X is a positive random variable with the following probability density function $f(x) = (\alpha x^{\alpha-1} + \beta x^{\beta-1})e^{-x^\alpha - x^\beta}; x > 0$, for $\alpha > 0$ and $\beta > 0$. Then the hazard function of X for some choices of α and β can be
    1. an increasing function
    2. a decreasing function
    3. a constant function
    4. a non-monotonic function

119. एक समांतर तंत्र में $n(\geq 1)$ सर्वसम अवयव हैं। n अवयवों के जीवन काल स्वतंत्र रूप से, सर्वथासमत: बंटित चर घातांकी यादृच्छिक चर हैं जिनका माध्य 1 है। यदि तंत्र का जीवनकाल X हो तो निम्न में से कौन से कथन सही हैं?

1. कुछ n के लिए X का बहुलक 0 है
2. सभी n के लिए X का बहुलक n से कम या n के बराबर है
3. सभी n के लिए X का माध्य 1 है या 1 से बड़ा है
4. कुछ n के लिए X का माध्यिका 100 से अधिक है

119. A parallel system has $n(\geq 1)$ identical components. The lifetimes of the n components are independent identically distributed exponential random variables with mean 1. If the lifetime of the system is denoted by X, then which of the following statements are true?
1. The mode of X is 0 for some n.
2. The mode of X is less than or equal to n for all n.
3. The mean of X is greater than equal to 1 for all n.
4. The median of X is greater than 100 for some n.

120. मानें कि ABC xy-तल में एक त्रिभुज है जिसका केंद्रक D है। निम्न में से कौन सा बिंदु कभी फलन $7x - 10y + 1$ का 'मिनिमाईज़र' नहीं हो सकता जब कि (x, y) त्रिभुज ABC के ऊपर पड़ जाता है?

1. A
2. B
3. C
4. D

120. Suppose ABC is a triangle on the xy-plane with centroid D. Which of the following points can NEVER be a minimizer of the function $7x - 10y + 1$ as (x, y) runs over the triangle ABC?

1. A
2. B
3. C
4. D

FOR ROUGH WORK