

MATEMATİK KONULARI

Editör: Prof.Dr. Fatma LORCU

yaz
yayınları

Matematik Konuları

Editör

Prof. Dr. Fatma LORCU

yaz
yayınları

2025

Matematik Konuları

Editör: Prof. Dr. Fatma LORCU

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-5547-62-0

Mart 2025 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

info@yazyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

On Jacobsthal Tessarine Matrix Components	1
<i>Faik BABADAĞ</i>	
Tensor Product Surfaces and Tessarine Number	13
<i>Faik BABADAĞ</i>	
Demans Grubu Hastalıklar ve Tedavi Süreçlerinde Matematiksel İşlevlerin Önemi.....	25
<i>Hüseyin BAHADIR</i>	
Günlük Sosyal Medya Kullanımının Matematiksel Modellemesi ve Harmonik Fonksiyonlarla Analizi.....	54
<i>Bahriye KARACA, Necdet UÇAN</i>	
Schwarz Lemma Üzerine.....	68
<i>Nuray EROĞLU</i>	
On the Numerical Radius of Hardy-Type Operators	75
<i>Zameddin I. ISMAILOV, Pembe IPEK AL</i>	
Some Categorical Constructions on the Generalized Crossed Modules	87
<i>Hatice GÜLSÜN AKAY</i>	
Sağkalım Analizi Yöntemleri ve Perakende Sektörü Verileri Üzerine Bir Uygulama	101
<i>Tuğba DEMİRCİOĞLU, Müjgan TEZ</i>	

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

ON JACOBSTHAL TESSARINE MATRIX COMPONENTS

Faik BABADAĞ¹

1. INTRODUCTION

Complex numbers were discovered by the Italian mathematician G. Cardano while he tries to solve a simpler state of the cubic equation and using the notation $i = \sqrt{-1}$. The complex numbers as points with rectangular coordinates were represented by Euler. After that, Cockle proposed the tessarine numbers, an algebraic successor to complex numbers and quaternionic algebra, employing more modern notation. In the exponential series, he employed tessarine numbers to separate the hyperbolic sine and cosine series (Cockle, 1848, 1849).

A tessarine number is a hypercomplex number of the form

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3$$

where $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2$ and γ_3 are real numbers and i_1, i_2 and i_3 are the imaginary units which satisfy the following rules:

$$i_1^2 = -i_2^2 = i_3^2 = -1 ; i_1 i_2 = i_2 i_1 = i_3. \quad (1)$$

The addition and multiplication of tessarine numbers

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3$$

and

¹ Department of Mathematics, Kırıkkale University, kırıkale, 71450, Turkey.
faik.babadag@kku.edu.tr ORCID: 0000-0001-9098-838X.

$$\delta = \delta_0 + \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3$$

are defined, respectively, as:

$$\begin{aligned} \gamma + \delta &= (\gamma_0 + \delta_0) + (\gamma_1 + \delta_1) i_1 + (\gamma_2 + \delta_2) i_2 \\ &\quad + (\gamma_3 + \delta_3) i_3 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \gamma \delta &= \gamma_0 \delta_0 - \gamma_1 \delta_1 + \gamma_2 \delta_2 - \gamma_3 \delta_3 \\ &\quad + (\gamma_0 \delta_1 + \gamma_1 \delta_0 - \gamma_2 \delta_3 - \gamma_3 \delta_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (\gamma_0 \delta_2 + \gamma_2 \delta_0 - \gamma_3 \delta_1 - \gamma_1 \delta_3) i_2 \\ &\quad + (\gamma_0 \delta_3 + \gamma_3 \delta_0 + \gamma_1 \delta_2 + \gamma_2 \delta_1) i_3. \end{aligned}$$

It is easy to see that the multiplication of tessarine numbers is commutative (Babadağ, 2017, Babadağ et al., 2021).

The conjugates of γ are introduced as follows:

$$\gamma^{i_1} = \gamma_0 - \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3$$

$$\gamma^{i_2} = \gamma_0 + \gamma_1 i_1 - \gamma_2 i_2 - \gamma_3 i_3, \quad (2)$$

$$\gamma^{i_3} = \gamma_0 - \gamma_1 i_1 - \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3.$$

In the literature, sequences of integers have an important place. The most famous of these sequences have been demonstrated (Cerin, 2007, Horadam 1988,1996, 1997, Koshy, 2001, Uslu et al., 2013, Koken, 2008). in several areas of mathematics. These

sequences often arise naturally in mathematical investigations and have been extensively studied due to their rich properties and profound connections to different areas of mathematics.

The Jacobsthal numbers are the numbers of the following integer sequence:

0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, ...

The sequence of Jacobsthal numbers, which is denoted by J_n is defined as the linear recurrence relation

$$J_{n+2} = J_{n+1} + 2J_n : J_0 = 0, J_1 = 1.$$

The integer sequence of Jacobsthal -Lucas numbers denoted by j_n is given by

2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, ...

with the same recurrence relation

$$j_{n+2} = j_{n+1} + 2j_n : j_0 = 2 \text{ and } j_1 = 1.$$

The Binet's forms of these numbers are given as:

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \text{ and } j_n = 2^n + (-1)^n. \quad (3)$$

The following identities are hold for Jacobsthal numbers and Jacobsthal-Lucas numbers

$$J_{n+r} - J_{n-r} = \frac{1}{3} (2^{n-r} (2^{2r} - 1)), \quad (4)$$

$$j_{n+1} - 2j_n = 3(-1)^{n+1}. \quad (5)$$

The n^{th} -power of the $\mathcal{F}$ -matrix and $\mathcal{F}'$ -matrix (Honsberger, 1985).

are

$$\mathcal{F}_n = \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad \mathcal{F}'_n = \begin{bmatrix} j_{n+1} & 2j_n \\ j_n & 2j_{n-1} \end{bmatrix} \quad (6)$$

Where

$$\mathcal{F}^{n+1}\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{2n+1} = \mathcal{F}_{n+1}\mathcal{F}_n = \mathcal{F}_{2n+1} \quad (7)$$

where $\det(\mathcal{F}^n) = (-1)^n(-2)^n$.

In this paper, we define the Jacobsthal tessarine matrix and the Jacobsthal-Lucas tessarine matrix by combining Jacobsthal numbers, Jacobsthal-Lucas numbers and tessarines. We present a matrix representation using some properties of these numbers.

A Jacobsthal tessarine numbers and Jacobsthal-Lucas tessarine numbers, respectively, are defined

$$\mathcal{J}t_n = J_n + J_{n+1} i_1 + J_{n+2} i_2 + J_{n+3} i_3$$

and

$$jt_n = j_n + j_{n+1} i_1 + j_{n+2} i_2 + j_{n+3} i_3,$$

where J_n and j_n are the n^{th} Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. If we start from $n = 0$, the Jacobsthal tessarine number and Jacobsthal-Lucas tessarine number can be written, respectively, as;

$$\mathcal{J}t_0 = 1i_1 + 1i_2 + 3i_3; \mathcal{J}t_1 = 1 + 1i_1 + 3i_2 + 5i_3$$

and

$$jt_0 = 2 + 1i_1 + 5i_2 + 7i_3; jt_1 = 1 + 5i_1 + 7i_2 + 17i_3.$$

2. JACOBSTHAL TESSARINE MATRIX AND JACOBSTHAL -LUCAS TESSARINE MATRIX

Tessarine matrix of the form

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} i_1 + \mathcal{F}_{n+2} i_2 + \mathcal{F}_{n+3} i_3 \quad (8)$$

is called the n^{th} Jacobsthal tessarine matrix and

$$\mathcal{T}'_n = \mathcal{F}'_n + \mathcal{F}'_{n+1} i_1 + \mathcal{F}'_{n+2} i_2 + \mathcal{F}'_{n+3} i_3 \quad (9)$$

is called the n^{th} Jacobsthal-Lucas tessarine matrix, where i_1 , i_2 and i_3 are arbitrary units which satisfy the relations

$$i_1^2 = i_2^2 = +1, i_3^2 = +1.$$

Starting from $n = 1$, the Jacobsthal tessarine matrix can be written as;

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1 &= \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 i_1 + \mathcal{F}_3 i_2 + \mathcal{F}_4 i_3 \\ &= \begin{bmatrix} J_2 & 2J_1 \\ J_1 & 2J_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_3 & 2J_2 \\ J_2 & 2J_1 \end{bmatrix} i_1 + \begin{bmatrix} J_4 & 2J_3 \\ J_3 & 2J_2 \end{bmatrix} i_2 + \begin{bmatrix} J_5 & 2J_4 \\ J_4 & 2J_3 \end{bmatrix} i_3 \\ &= \begin{bmatrix} 1 + 3i_1 + 5i_2 + 11i_3 & 2 + 2i_1 + 6i_2 + 10i_3 \\ 1 + 1i_1 + 3i_2 + 5i_3 & 2i_1 + 2i_2 + 6i_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J\mathcal{T}_2 & 2J\mathcal{T}_1 \\ J\mathcal{T}_1 & 2J\mathcal{T}_0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

where $J\mathcal{T}_0$,

$J\mathcal{T}_1$ and $J\mathcal{T}_2$ are the Jacobsthal tessarine numbers.

3. SOME IDENTITIES ON JACOBSTHAL TESSARINE MATRIX

Identity 3.1. For non-negative integers n

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1}i_1 - \mathcal{T}_{n+2}i_2 + \mathcal{T}_{n+3}i_3 \\ = 75 \left(\mathcal{F}_{n-1} + 2(-1)^n \mathcal{F}'_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right). \end{aligned}$$

Proof. By using (8), we get

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n - \mathcal{T}_{n+1}i_1 - \mathcal{T}_{n+2}i_2 + \mathcal{T}_{n+3}i_3 \\ = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1}i_1 + \mathcal{F}_{n+2}i_2 + \\ \mathcal{F}_{n+3}i_3 \\ - (\mathcal{F}_{n+1} + \mathcal{F}_{n+2}i_1 + \mathcal{F}_{n+3}i_2 + \mathcal{F}_{n+4}i_3)i_1 \\ - (\mathcal{F}_{n+2} + \mathcal{F}_{n+3}i_1 + \mathcal{F}_{n+4}i_2 + \mathcal{F}_{n+5}i_3)i_2 \\ + (\mathcal{F}_{n+3} + \mathcal{F}_{n+4}i_1 + \mathcal{F}_{n+5}i_2 + \mathcal{F}_{n+6}i_3)i_3 \\ = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+2} - \mathcal{F}_{n+4} - \mathcal{F}_{n+6} \end{aligned}$$

If we use (6) and (7), then we can write as

$$\begin{aligned} &= \begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} J_{n+3} & 2J_{n+2} \\ J_{n+2} & 2J_{n+1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} J_{n+5} & 2J_{n+4} \\ J_{n+4} & 2J_{n+3} \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} J_{n+7} & 2J_{n+6} \\ J_{n+6} & 2J_{n+5} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} J_{n+1} + J_{n+3} - J_{n+5} - J_{n+7} & 2(J_n + J_{n+2} - J_{n+4} - J_{n+6}) \\ J_n + J_{n+2} - J_{n+4} - J_{n+6} & 2(J_{n-1} + J_{n+1} - J_{n+3} - J_{n+5}) \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

from (3), (4) and (5), we obtain

$$\begin{aligned} &= 25 \begin{bmatrix} 2^{n+1} & 2^{n+1} \\ 2^n & 2^n \end{bmatrix} \\ &= 25 \left(\begin{bmatrix} 3J_n & 3J_n \\ 3J_{n-1} & 3J_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_n & j_n \\ j_{n-1} & j_{n-1} \end{bmatrix} \right) \\ &= 25 \left(3 \begin{bmatrix} J_n & J_n + 2J_{n-1} - 2J_{n-1} \\ J_{n-1} & J_{n-1} + 2J_{n-2} - 2J_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_n & j_n \\ j_{n-1} & j_{n-1} \end{bmatrix} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 25 \left(3 \begin{bmatrix} J_n & 2J_{n-1} \\ J_{n-1} & 2J_{n-2} \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 0 & J_n - 2J_{n-1} \\ 0 & J_{n-1} - 2J_{n-2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} j_n & 2j_{n-1} \\ j_{n-1} & 2j_{n-2} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & j_n - 2j_{n-1} \\ 0 & j_{n-1} - 2j_{n-2} \end{bmatrix} \right) \\
 &= 25 \left(3\mathcal{F}_{n-1} + 3 \begin{bmatrix} 0 & J_n - 2J_{n-1} \\ 0 & J_{n-1} - 2J_{n-2} \end{bmatrix} + \mathcal{F}'_{n-1} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} 0 & j_n - 2j_{n-1} \\ 0 & j_{n-1} - 2j_{n-2} \end{bmatrix} \right) \\
 &= 75\mathcal{F}_{n-1} + 25\mathcal{F}'_{n-1} \left(3 \begin{bmatrix} 0 & -3(-1)^n \\ 0 & -3(-1)^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3(-1)^n \\ 0 & 3(-1)^{n-1} \end{bmatrix} \right) \\
 &= 75 \left(\mathcal{F}_{n-1} + 2(-1)^n \mathcal{F}'_{n-1} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Identity 3.2. For $n \geq 1$,

$$\mathcal{T}_n \mathcal{T}_n^{i_3} + \mathcal{T}_{n-1} \mathcal{T}_{n-1}^{i_3} = -93 \left(\mathcal{F}'_{2n-2} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right)$$

where $\mathcal{T}_n^{i_3}$ is the conjugation with respect to the imaginary unit i_3 .

Proof. Now we will prove the identity $\mathcal{T}_n \mathcal{T}_n^{i_3} + \mathcal{T}_{n-1} \mathcal{T}_{n-1}^{i_3}$. By using (1), (6), (7) and (8), we get

$$\begin{aligned}
 &= \mathcal{F}_{n-1}^2 + 2\mathcal{F}_n^2 - 2\mathcal{F}_{n+2}^2 - \mathcal{F}_{n+3}^2 \\
 &= \mathcal{F}_{2n-2} + 2\mathcal{F}_{2n} - 2\mathcal{F}_{2n+4} - \mathcal{F}_{2n+6} \\
 &= \begin{bmatrix} J_{2n-1} & 2J_{2n-2} \\ J_{2n-2} & 2J_{2n-3} \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} J_{2n+1} & 2J_{2n} \\ J_{2n} & 2J_{2n-1} \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} J_{2n+5} & 2J_{2n+4} \\ J_{2n+4} & 2J_{2n+3} \end{bmatrix} \\
 &\quad - \begin{bmatrix} J_{2n+7} & 2J_{2n+6} \\ J_{2n+6} & 2J_{2n+5} \end{bmatrix} \\
 &= \\
 &\begin{bmatrix} J_{2n-1} + 2J_{2n+1} - 2J_{2n+5} - J_{2n+7} & 2(J_{2n-2} + 2J_{2n} - 2J_{2n+4} - J_{2n+6}) \\ J_{2n-2} + 2J_{2n} - 2J_{2n+4} - J_{2n+6} & 2(J_{2n-3} + 2J_{2n-1} - 2J_{2n+3} - J_{2n+5}) \end{bmatrix} \\
 &\cdot \\
 &= -375 \begin{bmatrix} 2^{2n-1} & 2^{2n-1} \\ 2^{2n-2} & 2^{2n-2} \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= -375 \begin{bmatrix} j_{2n-1} - (-1)^{2n-1} & j_{2n-1} - (-1)^{2n-1} \\ j_{2n-2} - (-1)^{2n-2} & j_{2n-2} - (-1)^{2n-2} \end{bmatrix} \\
 &= -375 \begin{bmatrix} j_{2n-1} - (-1)^{2n-1} & j_{2n-1} + 2j_{2n-2} - 2j_{2n-2} - (-1)^{2n-1} \\ j_{2n-2} - (-1)^{2n-2} & j_{2n-2} + 2j_{2n-3} - 2j_{2n-3} - (-1)^{2n-2} \end{bmatrix} \\
 &= -375 \left(\begin{bmatrix} j_{2n-1} & 2j_{2n-2} \\ j_{2n-2} & 2j_{2n-3} \end{bmatrix} \right. \\
 &\quad \left. + \begin{bmatrix} -(-1)^{2n-1} & 3(-1)^{2n-1} - (-1)^{2n-1} \\ -(-1)^{2n-2} & 3(-1)^{2n-2} - (-1)^{2n-2} \end{bmatrix} \right) \\
 &= -375 \left(\mathcal{F}'_{2n-2} + \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \right).
 \end{aligned}$$

Identity 3.4. For $n \geq 0$, The n^{th} negatessarine Jacobsthal matrix $\mathcal{T}_{-n}$ is

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{T}_{-n} \\
 &= \left(\frac{\begin{bmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_n & J_{n+1} \end{bmatrix}}{2^n(-1)^n} \right) \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathcal{T}_1 & 2\mathcal{J}\mathcal{T}_1 \\ \mathcal{J}\mathcal{T}_0 & \mathcal{J}\mathcal{T}_1 - (1 + i_2 + 3i_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Proof. By using (6), (7) and (8), we obtain

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{-n} &= \mathcal{F}_{-n} + \mathcal{F}_{-n+1} i_1 + \mathcal{F}_{-n+2} i_2 + \mathcal{F}_{-n+3} i_3 \\
 \mathcal{T}_{-n} &= \mathcal{F}_{-n}(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 i_1 + \mathcal{F}_2 i_2 + \mathcal{F}_3 i_3) \\
 &= (\mathcal{F}_n)^{-1}(\mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 i_1 + \mathcal{F}_2 i_2 + \mathcal{F}_3 i_3) \\
 &= \left(\begin{bmatrix} J_{n+1} & 2J_n \\ J_n & 2J_{n-1} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 + i_1 + 2i_2 + 3i_3 & i_1 + i_2 + 2i_3 \\ i_1 + i_2 + 2i_3 & 1 + i_2 + i_3 \end{bmatrix} \\
 &= \left(\frac{\begin{bmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_n & J_{n+1} \end{bmatrix}}{|\mathcal{F}_n|} \right) \begin{bmatrix} \mathcal{J}\mathcal{T}_1 & 2\mathcal{J}\mathcal{T}_1 \\ \mathcal{J}\mathcal{T}_0 & \mathcal{J}\mathcal{T}_1 - (1 + i_2 + 3i_3) \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{\begin{bmatrix} 2J_{n-1} & -2J_n \\ -J_n & J_{n+1} \end{bmatrix}}{(-1)^n 2^n} \right) \begin{bmatrix} JtJt_1 & 2Jt_1 \\ Jt_0 & Jt_1 - (1 + i_2 + 3i_3) \end{bmatrix}$$

where Jt_1 and Jt_0 are Jacobsthal tessarine numbers.

4. SOME APPLICATIONS ON JACOBSTAL TESSARINE MATRIX

Let $\mathcal{T}_n$ be the n^{th} Jacobsthal tessarine matrix, for $n \geq 0$, these number is 2^{th} linear recurrence sequence. Then, we suppose the sets of $\mathbb{C}_2$ and $\mathbb{C}'_2$ are

$$\mathbb{C}_2 = \{ \mathcal{T}_n \mid \mathcal{T}_n = \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1} i_1 + \mathcal{F}_{n+2} i_2 + \mathcal{F}_{n+3} i_3, \\ \mathcal{F}_n \text{ is } n^{th} \mathcal{F}\text{-matrix} \},$$

and

$$\mathbb{C}'_2 = \{ \mathcal{T}_n \mid \mathcal{T}_n = \begin{bmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{bmatrix}; \alpha_n, \beta_n \in \mathbb{C} \}$$

Then there is an isomorphism between $\mathbb{C}_2$ and $\mathbb{C}'_2$, we can write

$$\mathcal{T}_n = (\mathcal{F}_n, \mathcal{F}_{n+1}, \mathcal{F}_{n+2}, \mathcal{F}_{n+3}) \rightarrow \mathcal{T}_n = \\ \begin{bmatrix} \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1}i_1 & \mathcal{F}_{n+2} + \mathcal{F}_{n+3}i_1 \\ \mathcal{F}_{n+2} + \mathcal{F}_{n+3}i_1 & \mathcal{F}_n + \mathcal{F}_{n+1}i_1 \end{bmatrix}.$$

Thus, we can write

$$\mathbb{C}'_2 = \{ \mathcal{T}_n \mid \mathcal{T}_n = \alpha_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta_n \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ ; \alpha_n, \beta_n \text{ is } n^{th} \text{ complex Jacobsthal matrix} \}$$

and

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{F}_n U_1 + \mathcal{F}_{n+1} U_2 + \mathcal{F}_{n+2} U_3 + \mathcal{F}_{n+3} U_4,$$

where

$$\mathcal{T}_n = \mathcal{F}_n \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \mathcal{F}_{n+1} \begin{bmatrix} i_1 & 0 \\ 0 & i_1 \end{bmatrix} + \mathcal{F}_{n+2} \begin{bmatrix} 0 & i_2 \\ i_2 & 0 \end{bmatrix} + \mathcal{F}_{n+3} \begin{bmatrix} 0 & i_3 \\ i_3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Since $\det \mathcal{T}_n \neq 0$, there is the inverse of matrix $\mathcal{T}_n$ and it is in $\mathbb{C}'_2$.

5. CONCLUSION

In the present study, we introduce Jacobsthal tessarine numbers, Jacobsthal-Lucas tessarine numbers and matrices. Then, we define some identities that hold an important place in the literature on these matrices.

REFERENCES

- Babadag F., Tessarines and Homothetic Exponential Motions In 4-Dimensional Euclidean Space, Beykent Üniversitesi Fen Ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 10(1), 1–13, (2017).
- Cerin Z., Formulae for sums of Jacobsthal Lucas numbers. Int. Math. Forum, 2, 1969–1984 (2007).
- Cockle J., On a new imaginary in algebra, Philosophical Magazine and Journal of Science, London-Dublin-Edinburgh, 3(34), 37-47, (1849).
- Cockle J., On certain functions resembling quaternions and on a new imaginary in algebra, Philosophical Magazine and Journal of Science, London-Dublin-Edinburgh, 3(33), 435-439, (1848).
- Honsberger R., The Matrix Q . Mathematical Gems III. Washington, DC: Math. Assoc. Amer., 8(4), 106-107 (1985).
- Horadam A.F. Jacobsthal representation numbers. Fibonacci Q., 37 (2), 141–144 (1996)
- Horadam A.F., Jacobsthal and Pell Curves. The Fibonacci Quarterly., 26(1), 79-83 (1988).
- Horadam, A.F., Jacobsthal representation polynomials. Fibonacci Q., 35 (2), 137–148 (1997).
- Koken F, Bozkurt D. On The Jacobsthal Numbers by Matrix Methods. Int. J. Contemp. Math. Sciences.3, 605-614 (2008).
- Koshy T., Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Wiley, New York, (2001).

- Price G.B., An Introduction to Multi-complex Spaces and Functions. Marcel Dekker Inc., New York; (1991).
- Uslu K., Uygun Ş., The (s, t) Jacobsthal and (s, t) Jacobsthal-Lucas matrix sequences. ARS Combinatoria 108, 13–22 (2013).

TENSOR PRODUCT SURFACES AND TESSARINE NUMBER

Faik BABADAĞ¹

1. INTRODUCTION

The Italian mathematician G. Cardano initiated the study of the complex numbers while he tries to solve a simpler state of the cubic equation and using the notation $i = \sqrt{-1}$. Then L. Euler represented the complex numbers as points with rectangular coordinates. After that, Cockle proposed the tessarine numbers, an algebraic successor to complex numbers and quaternionic algebra, employing more modern notation. In the exponential series, he employed tessarine numbers to separate the hyperbolic sine and cosine series (Cockle, 1848, 1849).

The study of tensor product immersions for two immersions of a given Riemannian manifold introduced by B.Y. Chen (Chen, 1990, 1993). Many authors studied the tensor product of two immersions, generally involving different manifolds, and demonstrated that under certain conditions, this construction results in an immersion of the product manifold (Brickell et al., 1970, Decruyenaere et al., 1993, Mihai et al., 1994, 1995, 1995).

In this paper, we obtain a new tensor product with the modifications rule given in [(Chen, 1990, 1993). To do this, we use the conjugations and product rules of tessarine numbers (1)

¹ Department of Mathematics, Kırıkkale University, kırıkale, 71450, Turkey.
faik.babadag@kku.edu.tr ORCID: 0000-0001-9098-838X.

and (2), then the tensor product surface is obtained as a subset of the hypersurface A according to the arbitrary unit i as following,

$$A = \{ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = 0; \varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_4 = 0 \}.$$

If $\varphi_1 = u_1(t)v_1(s)$, $\varphi_2 = u_1(t)v_2(s)$, $\varphi_3 = -u_2(t)v_2(s)$, $\varphi_4 = u_2(t)v_1(s)$, is selected on hypersurface A .

At the beginning, we recall notions of tessarie numbers and tensor product surfaces of two Euclidean planar curves.

Let us consider manifolds differentiable A and B , and $p : A \rightarrow E^m$ and

$r : B \rightarrow E^n$ immersions. Then tensor product map is given by

$$p \otimes r : A \times B \rightarrow E^{mn}.$$

A tessarine number is defined as the form of hypercomplex number,

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 i + \varphi_3 j + \varphi_4 ij$$

where $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ and φ_4 are real numbers and i, j and ij are the arbitrary units given by rules,

$$i^2 = -1, j^2 = +1, ij = ji$$

Let φ and φ' be tessarine numbers (Babadağ, 2017, Babadağ et al., 2021)., then their addition and multiplication are defined as

$$\begin{aligned} \varphi_1 + \varphi' &= (\varphi_1 + \varphi_2 i + \varphi_3 j + \varphi_4 ij) \\ &+ (\varphi'_1 + \varphi'_2 i + \varphi'_3 j + \varphi'_4 ij) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \varphi\varphi' &= (\varphi_1\varphi'_1 - \varphi_2\varphi'_2 + \varphi_3\varphi'_3 - \varphi_4\varphi'_4) \\ &+ (\varphi_1\varphi'_2 + \varphi_2\varphi'_1 + \varphi_3\varphi'_4 + \varphi_4\varphi'_3)i \\ &+ (\varphi_1\varphi'_3 + \varphi_3\varphi'_1 - \varphi_2\varphi'_4 - \varphi_4\varphi'_2)j \\ &+ (\varphi_1\varphi'_4 + \varphi_4\varphi'_1 + \varphi_2\varphi'_3 + \varphi_3\varphi'_2)ij. \end{aligned}$$

Conjugations of a tessarine number are as follows,

$$\begin{aligned}\varphi^i &= (\varphi_1 - \varphi_2 i) + j(\varphi_3 - \varphi_4 i), \\ \varphi^j &= (\varphi_1 + \varphi_2 i) - j(\varphi_3 + \varphi_4 i), \\ \varphi^{ij} &= (\varphi_1 - \varphi_2 i) - j(\varphi_3 - \varphi_4 i).\end{aligned}\tag{1}$$

and

$$\begin{aligned}\varphi\varphi^i &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2 + \varphi_4^2 + 2j(\varphi_1\varphi_3 + \varphi_2\varphi_4), \\ \varphi\varphi^j &= \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2 + \varphi_4^2 + 2j(\varphi_1\varphi_2 - \varphi_3\varphi_4), \\ \varphi\varphi^{ij} &= \varphi_1^2 + \varphi_2^2 - \varphi_3^2 - \varphi_4^2 + 2j(\varphi_1\varphi_4 - \varphi_2\varphi_3),\end{aligned}\tag{2}$$

2. TENSOR PRODUCT SURFACES WITH A EUCLIDEAN SPACE CURVE AND A EUCLIDEAN PLANE CURVE

Let us consider a Euclidean space curve and a Euclidean plane curve,

$u : R \rightarrow E^2$ and $v : R \rightarrow E^2$. We take $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ and $v(s) = (v_1(s), v_2(s))$. We define their tensor product as

$$w = u \otimes v : R^2 \rightarrow E^4.$$

$$\begin{aligned} w(t, s) & \\ &= (u_1(t)v_1(s), u_1(t)v_2(s), -u_2(t)v_2(s), u_2(t)v_1(s)). \end{aligned} \quad (3)$$

where the metric tensor is given by $w = d\varphi_1 + d\varphi_2 + d\varphi_3 + d\varphi_4$. By using (3), the canonical tangent vectors of $w(t, s)$ are easily calculated as follows:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = (u'_1(t)v_1(s), u'_1(t)v_2(s), -u'_2(t)v_2(s), u'_2(t)v_1(s)),$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = (u_1(t)v'_1(s), u_1(t)v'_2(s), -u_2(t)v'_2(s), u_2(t)v'_1(s)),$$

where u' and v' are the derivaties, respectively, (Decruyenaere et al.,1993) and orthonormal basis of the tangent space on $Im u \otimes v$ is defined as

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1}{\|g_{11}\|} \frac{\partial w}{\partial t}, e_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g_{11}(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)|}} \left(g_{11} \frac{\partial w}{\partial s} - g_{12} \frac{\partial w}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

By using the conjugation and product rules of tessarines according to the arbitrary unit i , a surface A on the Euclidean space E^4 is minimal if its mean curvature vector field H vanishes identically. A basis $\{n_1, n_2\}$ of the normal space of $w(t, s)$ can be computed as follows: we define the following maps:

$$j_1 : E^2 \rightarrow E^2: j_1(u_1(t), u_2(t)) = (-u_2(t), u_1(t))$$

and

$$j_2 : E^2 \rightarrow E^2: j_2(v_1(t), v_2(t)) = (-v_2(t), v_1(t))$$

where $g_1(u, j_1(u)) = g_2(v, j_2(v)) = 0$ for $u, v \in E^2$. Then a basis $\{n_1, n_2\}$ of the normal space by using the method in (3) is spanned by

$$n_1(t, s) = (-u_2(t)v_2(s), u_2(t)v_1(s), u_1(t)v_1(s), u_1(t)v_2(s)),$$

and

$$n_2(t, s) = (-u'_2(t)v'_2(s), u'_2(t)v'_1(s), u'_1(t)v'_1(s), u'_1(t)v'_2(s)).$$

A surface $w(t, s)$ is minimal if and only if

$$\begin{aligned} < g_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2g_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s} + g_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, n_i > = 0, i \\ &= 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (4)$$

If necessary calculations are made from (4), we obtain

$$\begin{aligned} < \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, n_1 > &= u''_1 u_2 v_1 v_2 - u''_1 u_2 v_1 v_2 + u_1 u''_1 v_1 v_2 \\ &\quad - u_1 u''_2 v_1 v_2 = 0, \\ < \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, n_1 > &= u_1 u_2 v''_1 v_2 - u_1 u_2 v_1 v''_2 + u_1 u_2 v_1 v''_2 \\ &\quad - u_1 u_2 v_2 v''_1 = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} < g_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s}, n_1 > &= g_1(u, u') g_2(v, v') (u'_1 u_2 \\ &\quad - u'_2 u_1) (v_1 v'_2 - v'_1 v_2). \end{aligned}$$

Theorem 2.1. A minimal surface in E^4 is the tensor product immersion $u \otimes v$ of a Euclidean space curve and a Euclidean plane curve if and only if:

- i. Either u or v passes through the origin a straight line.
- ii. The origin is the center of either a circle u or a hyperbola v with the same parameter.

Proof. i. Let $u(t) = (u_1(t), u_2(t))$ be a Euclidean space curve and $v(s) = (v_1(s), v_2(s))$ be a Euclidean plane curve. Then their tensor product $w = u \otimes v$ is given by (3) and because of the minimality conditions in (4), $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0$. Thus, $w(t, s)$ is not a regular surface. This is a contradiction. The proof is completed.

ii. Let the curve u be a circle centered at the origin. In this case, let's write the curve u as follows.

$$\begin{aligned}
 u(t) &= \lambda(\cos t, \sin t), \\
 u'(t) &= \lambda(-\sin t, \cos t), \\
 u''(t) &= \lambda(-\cos t, -\sin t).
 \end{aligned} \tag{6}$$

If $i = 2$ is selected in (5), we will have

$$\left\langle g_{12} \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial s}, n_2 \right\rangle = \left\langle g_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, n_2 \right\rangle = 0,$$

and from (6), since the curve u is a circle centered on the origin, we can rewrite.

$$\begin{aligned}
 \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, n_2 \right\rangle &= (u_1''u_2' - u_2''u_1')(v_2'v_1 - v_2v_1') \\
 &= (u^2)(v_2'v_1 - v_2v_1'), \\
 \left\langle \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, n_2 \right\rangle &= (u_1u_2' - u_1'u_2)(v_2''v_1' - v_2'v_1'') \\
 &= (u^2)(v_2''v_1' - v_2'v_1'').
 \end{aligned}$$

From the above equations, we deduce

$$< g_{22} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + g_{11} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}, n_2 \geq 0$$

$$(v_1'^2 + v_2'^2)(v_2'v_1 - v_2v_1') + (v_1'^2 + v_2'^2)(v_2''v_1' - v_2'v_1'') = 0$$

$$\|v'\|^2 (v_2'v_1 - v_2v_1') + \|v\|^2 (v_2''v_1' - v_2'v_1'') = 0.$$

If the curve v is parameterized to be $\|v'\|^2 = \|v\|^2$, we obtain

$$v_1'(v_2 - v_2'') + v_2'(v_1'' - v_1) = 0. \quad (7)$$

Also, if derivatives of both sides of $g(v', v') = g(v, v)$ are taken, we have

$$v_1'(v_1'' - v_1) + v_2'(v_2'' - v_2) = 0.$$

From equations (6) and (7), we obtain

$$v_1'' = v_1, v_2'' = v_2$$

$$v(s) = v''(s) = (\cosh s, \sinh s).$$

This means that the curve v is a hyperbola centered on the origin which completes the proof.

Let us consider the pseudo-Hermitian structure j , a new tensor product with the modifications rule, as following

$$j(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4) = (-\varphi_3, \varphi_4, -\varphi_1, \varphi_2), \varphi_{1-4} \in R. \quad (8)$$

Definition 2.2. The logarithmic spiral curve is known as a spiral whose polar equation is given by $r = \lambda_1 e^{\lambda_1 \phi}$, where r is the distance from the origin, ϕ is the angle from the x -axis, and λ_1 and λ_2 are arbitrary constants, (figure 1).

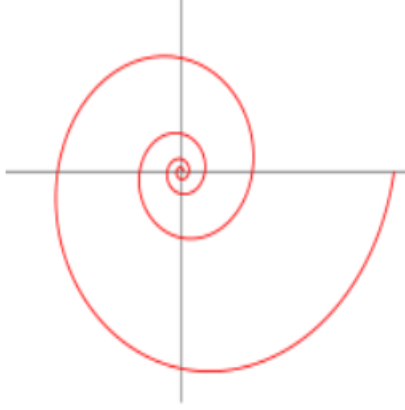


Figure 1. Logaritmik spiral

Theorem 2.3. $w = u \otimes v$ is a proper slant surface with respect to the pseudo-Hermitian structure j on R^4 if and only if a curve u is a logarithmic spiral curve v is a circle centered on the origin or a spiral curve.

Proof. Let $u : R \rightarrow R^2$ and $v : R \rightarrow R^2$ be two Euclidean plane curves, we consider polar coordinates on u and v . Then,

$$u(t) = a(t)(\cos t, \sin t),$$

$$v(s) = b(s)(\cos s, \sin s).$$

From (8), we can write

$$j(e_1) = \frac{1}{g_{11}} (-u'_1 v_2, u'_1 v_1, -u'_2 v_1, -u'_2 v_2)$$

$$e_2 = \frac{1}{\sqrt{|g_{11}(g_{11}g_{22}-g_{12}^2)|}} \left\{ \begin{array}{l} g_{11}(u_1(t)v'_1(s), u_1(t)v'_2(s), -u_2(t)v'_2(s), u_2(t)v'_1(s)) \\ -g_{12}(u'_1(t)v_1(s), u'_1(t)v_2(s), -u'_2(t)v_2(s), u'_2(t)v_1(s)). \end{array} \right\}$$

from the above equations, with a straightforward computation, we obtain

$$g(j(e_1), e_2) = \frac{u'v}{\sqrt{(u'^2+u^2)(v'^2+v^2)-u'^2v'^2}}$$

In (8), we will have the following cases,

i. If u is constant, since $g(j(e_1), e_2) = 0$, the surface $w(t, s)$ is a improper slant surface.

ii. If v is constant, then $g(j(e_1), e_2) = \frac{u'}{\sqrt{u'^2+u^2}}$.

If we take $g(j(e_1), e_2) = \lambda = \frac{u'}{\sqrt{u'^2+u^2}} = \text{constant}$, then $\frac{u'}{u^2} = \frac{\lambda^2}{\lambda}$. If the differential of (8) is solved, we get $u = \lambda_1 e^{\lambda_2 t}$; $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

In this case the curve v is a circle centered on the origin as

$$v(s) = r_1(\cos s, \sin s),$$

and the curve u is a logarithmic spiral curve as following

$$w(t) = \lambda_1 e^{\lambda_2 t}(\cos t, \sin t).$$

iii. If $u \neq \text{constant}$ and $v \neq \text{constant}$, then let us take $\frac{u}{u'} = \delta_1$ and

$$\frac{v}{v'} = \delta_2.$$

$$\begin{aligned} g(j(e_1), e_2) &= \frac{uv'}{\sqrt{(u'^2+u^2)(v'^2+v^2)-u'^2v'^2}} \\ &= \frac{\frac{u}{u'}}{\sqrt{(\frac{u}{u'})^2+1)(\frac{v}{v'})^2+1}-1} \\ &= \frac{\delta_1}{\sqrt{(\delta_1)^2+1)(\delta_2)^2+1}-1}. \end{aligned}$$

As a result, Imw is a proper slant surface if and only if

$$\frac{\delta_1}{\sqrt{(\delta_1)^2+1)(\delta_2)^2+1}-1} = \lambda^2.$$

if we take $\delta_1 = \text{constant}$, $\delta_2 = \text{constant}$ and $\frac{1}{v_1} = \delta_1$, $\frac{1}{v_2} = \delta_2$, we have

$u(t) = u_1 e^{v_1 t}$, $v(s) = u_2 e^{v_2 s}$ from Definition (2.2) the curve u is a logarithmic spiral curve as

$u(t) = u_1 e^{v_1 t} (\cos t, \sin t)$ and the curve v is a spiral curve as

$$v(s) = v(s)(\cos s, \sin s).$$

REFERENCES

- Babadag F., Tessarines and Homothetic Exponential Motions In 4-Dimensional Euclidean Space, Beykent Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi, 10(1), 1–13, (2017).
- Babadag F., Uslu M., A New Approach to Fibonacci Tessarines with Fibonacci and Lucas Number, ADYU J SCI, 11(2), 263–275, (2021).
- Brickell F., Clark R. S., Differentiable manifolds, London: Van Nostrand Reinhold Company, (1970).
- Chen B. Y., Differential geometry of semiring of immersions, I: general theory, Bulletin of the Ins Math Acad, 21, 1–34 (1993).
- Chen B. Y., Geometry of slant submanifolds, Katholieke Univ. Leuven, (1990).
- Cockle J., On a new imaginary in algebra, Philosophical Magazine and Journal of Science, London-Dublin-Edinburgh, 3(34), 37–47, (1849).
- Cockle J., On certain functions resembling quaternions and on a new imaginary in algebra, Philosophical Magazine and Journal of Science, London-Dublin-Edinburgh, 3(33), 435–439, (1848).
- Decruyenaere F., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L., The semiring of immersions of manifolds, Beitrage Algebra Geom 34, 209–215, (1993).
- Mihai I, Rosca R, Verstraelen L, Vrancken L, Tensor product surfaces of Euclidean planar curves, Rend Sem Mat Messina 3, 173–184, (1995).

Mihai I. , Verstraelen L., Walrave J., Tensor product surfaces of a Lorentzian planar curves, Bull Inst Math Acad Sinica 23, 357–363, (1995).

Mihai I., Verstraelen L., Introduction to tensor products of submanifolds, Geometry and Topology of Submanifolds VI, World Scientific, 141–151, (1994).

DEMANS GRUBU HASTALIKLAR VE TEDAVİ SÜREÇLERİNDE MATEMATİKSEL İŞLEVLERİN ÖNEMİ

Hüseyin BAHADIR¹

1. GİRİŞ

Demans, hafıza, düşünme ve bilişsel becerilerde ilerleyici bir bozulmaya yol açan bir hastalıktır. Matematik becerileri, problem çözme, mantık yürütme ve hafıza gibi bilişsel işlevlerle doğrudan bağlantılıdır. Bu nedenle demans hastalarında matematiksel yeteneklerin kaybı sık görülen bir durumdur. Demans ilerledikçe, sayılarla ilgili beceriler ve aritmetik işlemleri gerçekleştirme yeteneği giderek azalır. Hastalığın evresine göre bu kayıp şu şekilde gözlemlenir:

Erken Evre Demans: Basit hesaplamalarda hata yapma, para üstünü yanlış hesaplama, faturaları yönetmede güçlük

Orta Evre Demans: Daha karmaşık matematiksel işlemleri yapamama, sayıların anlamını unutma, saat okumakta zorlanma

İleri Evre Demans: En basit aritmetik işlemleri bile gerçekleştirememe, rakamları tanıyamama

Bilimsel çalışmalar, matematik yeteneğindeki kaybın demansın erken bir belirtisi olabileceğini göstermektedir. Özellikle Hafif Bilişsel Bozukluk (HBB) yaşayan bireylerde, karmaşık matematik işlemlerinin erken dönemlerde bozulmaya başladığı ve zamanla daha da kötüleştiği gözlemlenmiştir. Örneğin, "Hafif ve Orta Şiddette Alzheimer Hastalığı Olan

¹ Öğr.Gör., Kırşehir Ahi Evran Üniversitesi Sağlık Hizmetleri Meslek Yüksekokulu, huseyin.bahadir@ahievran.edu.tr, ORCID: 0000-0002-5699-1937.

Hastalarda Hesaplama Yeteneklerinin Kaybı" adlı çalışmada, Alzheimer hastalarının basit yazılı hesaplamaları nispeten koruyabildiği ancak karmaşık işlemlerde belirgin bozulmalar yaşadığı tespit edilmiştir.

Matematik becerilerini korumak ve demansın ilerlemesini yavaşlatmak için önerilen yöntemler:

- Düzenli olarak zihinsel egzersiz yapmak (sudoku, bulmaca çözmek)
- Hafıza ve mantık oyunları oynamak
- Matematikle ilgili günlük aktiviteleri sürdürmek (alışveriş hesaplamaları yapmak, saatleri takip etmek)
- Bilişsel rehabilitasyon programlarına katılmak

Matematik, bilişsel işlevleri destekleyen önemli bir beceridir ve demans hastalarında erken dönemde bozulabilir. Ancak düzenli zihinsel egzersizler ve uygun bilişsel aktivitelerle, bu yetilerin korunması ve hastalığın ilerlemesinin yavaşlatılması mümkündür.

2. DEMANS HASTALIĞI VE MATEMATİK İLİŞKİSİ

2.1. Demans Hastalığı

Demans hafızayı, düşünmeyi ve günlük aktiviteleri gerçekleştirme yeteneğini etkileyen çeşitli hastalıklar için kullanılan bir terimdir.

Hastalık zamanla kötüleşir. Esas olarak yaşlı insanları etkiler, ancak yaşlandıkça herkes bu hastalığa yakalanmaz.

- Şu anda dünya çapında 55 milyondan fazla insan demans hastasıdır ve bunların %60'ından fazlası düşük ve orta gelirli ülkelerde yaşamaktadır. Her yıl yaklaşık 10 milyon yeni vaka görülmektedir.

- Demans, beyni etkileyen çeşitli hastalık ve yaralanmalardan kaynaklanır. Alzheimer hastalığı demansın en yaygın şeklidir ve vakaların %60-70'ine katkıda bulunabilir (WHO, 2023).
- Demans şu anda yedinci önde gelen ölüm nedenidir ve dünya genelinde yaşlı insanlar arasında engellilik ve bağımlılığın başlıca nedenlerinden biridir.

Demans, zamanla sinir hücrelerini yok eden ve beyne zarar veren, genellikle biyolojik yaşlanmanın olağan sonuçlarından beklenebilecek olanın ötesinde bilişsel işlevlerde (yani düşünceyi işleme yeteneğinde) bozulmaya yol açan bir dizi hastalığın neden olabileceği bir sendromdur. Biliş etkilenmemekle birlikte, bilişsel işlevlerdeki bozulmaya genellikle ruh hali, duygusal kontrol, davranış veya motivasyondaki değişiklikler eşlik eder ve bazen de bunlardan önce gelir.

Demansın yalnızca demansla yaşayan insanlar için değil, aynı zamanda onların bakıcıları, aileleri ve genel olarak toplum için de fiziksel, psikolojik, sosyal ve ekonomik etkileri vardır. Genellikle demans konusunda farkındalık ve anlayış eksikliği vardır, bu da damgalanmaya ve teşhis ve bakımın önünde engellere neden olur (WHO, 2023).

2.2. Belirtiler ve Semptomlar

Ruh hali ve davranışlardaki değişiklikler bazen hafıza sorunları ortaya çıkmadan önce bile meydana gelebilir. Belirtiler zamanla kötüleşir. Sonunda demans hastalarının çoğu, günlük aktivitelerde başkalarının yardımına ihtiyaç duyacaktır.

Erken belirtiler ve semptomlar şunlardır:

- Bir şeyleri veya son olayları unutmak
- Eşyaları kaybetmek veya yanlış yere koymak
- Yürürken veya araba kullanırken kaybolmak

- Tanıdık yerlerde bile kafa karışıklığı
- Zamanın nasıl geçtiğini anlamamak
- Sorunları çözmede veya karar vermede zorluklar
- Konuşmaları takip etmede sorunlar veya kelimeleri bulmada zorluk
- Tanıdık görevleri yerine getirmede zorluklar

Ruh hali ve davranıştaki yaygın değişiklikler şunları içerir:

- Hafıza kaybı konusunda endişeli, üzgün veya kızgın hissetmek
- Kişilik değişiklikleri
- Uygunsuz davranış
- İşten veya sosyal faaliyetlerden çekilme
- Diğer insanların duygularıyla daha az ilgilenmek.

Demans, altta yatan nedenlere, diğer sağlık koşullarına ve kişinin hastalanmadan önceki bilişsel işleyişine bağlı olarak her kişiyi farklı şekilde etkiler.

Semptomların çoğu zamanla kötüleşir, bazıları ise kaybolabilir veya yalnızca demansın sonraki aşamalarında ortaya çıkabilir. Hastalık ilerledikçe kişisel bakım konusunda yardıma duyulan ihtiyaç artar. Demanslı kişiler aile üyelerini veya arkadaşlarını tanıyamayabilir, hareket etmede zorluk yaşayabilir, mesane üzerinde kontrolü kaybedebilir, yeme ve içmede zorluk yaşayabilir ve demanslı kişi etrafındakileri rahatsız eden saldırganlık gibi davranış değişiklikleri yaşayabilir (WHO, 2023).

2.3. Yaygın Demans Türleri

Demans, beyne doğrudan veya dolaylı olarak zarar veren birçok farklı hastalık veya yaralanmanın sonucu olarak ortaya çıkar. Alzheimer hastalığı en yaygın formdur ve vakaların %60-70'ine katkıda bulunabilir. Diğer formlar arasında vasküler demans, Lewy cisimcikli demans (sinir hücreleri içinde anormal

protein birikintileri) ve frontotemporal demansa (beynin frontal lobunun dejenerasyonu) katkıda bulunan bir grup hastalık yer alır. Demans, felçten sonra veya HIV gibi bazı enfeksiyonlar bağlamında, alkolün zararlı kullanımı, beyne tekrarlayan fiziksel hasarlar (kronik travmatik ensefalopati olarak bilinir) veya beslenme eksiklikleri sonucunda da gelişebilir. Demansın farklı formları arasındaki sınırlar belirsizdir ve karma formlar sıklıkla bir arada bulunur (Şekil 1) (WHO, 2023).



Şekil 1. Demansın çeşitleri ve deliryumun nedenleri

2.4. Tedavi ve Bakım

Demansın tedavisi yoktur ancak hem hastalıkla yaşayan insanları hem de onlara bakanları desteklemek için pek çok şey yapılabilir.

Demanslı kişiler yaşam kalitelerini korumak ve refahlarını artırmak için aşağıdaki adımları atabilirler:

- Fiziksel olarak aktif olmak

- Beyni uyaran ve günlük işlevleri sürdüren faaliyetlere ve sosyal etkileşimlere katılmak.

Demansla yaşayan bir kişiye bakım ve destek sağlamanın, bakıcının kendi sağlığını ve refahını etkileyebilecek kadar zorlu olabileceğinin kabul edilmesi önemlidir. Demansla yaşayan bir kişiyi destekleyen biri olarak, yardım için aile üyelerine, arkadaşlara ve profesyonellere ulaşılmalı. Düzenli molalar verilmeli ve bakım veren kendine iyi bakmalı. Farkındalık temelli egzersizler gibi stres yönetimi teknikleri denenmeli ve gerekirse profesyonel yardım ve rehberlik istenmeli (WHO, 2023).

2.5. Demans ve Bilişsel İşlevler

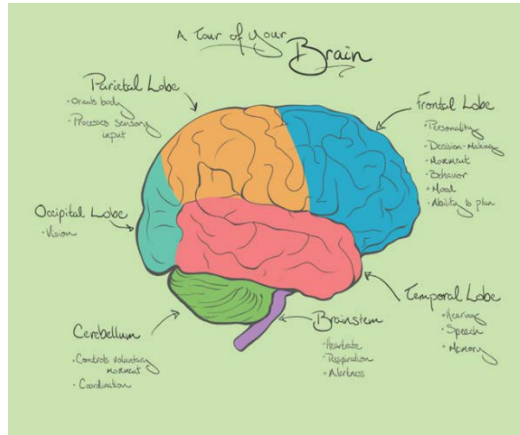
Alzheimer hastalığı, bilinçdışının anıları ve fikirleri geri getirme kapasitesindeki azalmayla bağlantılıdır. Bu zihinsel bozuklukla hastanın bilişsel kapasiteleri zamanla kötüleşir (Maniglio vd., 2014). Hafıza kaybı demansın en belirgin semptomudur (Brewer vd., 2016). Çoğu durumda hafıza kaybı yavaş yavaş gerçekleşir ve zamanla kötüleşir. İlk başta hafıza kaybından yalnızca güncel deneyimler ve dersler etkilenir, ancak zamanla uzun süreli anılar bile etkilenir (Keltner vd., 2019). Hasta bilgiyi akılda tutamaz ve az önce sorulan soruyu tekrarlar. Hasta kişisel eşyalarını bulamaz ve nereye koyduğunu bilemez. Parasal işlemleri yapmakta zorlanır ve mali varlıklarını takip edemez. Tanıdık yüzleri tanımlanması ve adlandırılması daha zor hale gelir (Corneanu vd.,2016; Sundararajan vd., 2017; Kimari, 2020; Naser vd., 2018). Navigasyon özelliği yavaş yavaş ortaya çıkar ve dikkat edilmezse unutulabilir. Kendi evindeki mutfak, banyo ve tuvalet artık ona tanıdık gelmeyebilir (Graham vd., 2016; Khan., 2019; Abiyoke & Sahayem, 2019; Priya vd., 2019) Hastanın düşünme ve hatırlama yeteneğinin bozulması nedeniyle hasta üzüntü, öfke ve şiddet duyguları yaşayabilir. Halüsinasyonlar ve sanrılar demansın yaygın bir belirtisidir. Hasta, örneğin karısının yanlış kişi olduğuna inanabilir. Karısının

ve kocasının ona ihanet ettiğini veya komşularının ve hemşiresinin ona karşı komplo kurduğunu düşünebilir. Bazen hasta, ölen ebeveynleri veya orada olmayan akrabaları gibi kişileri görür (Ilyas vd., 2019; Bendjillali vd., 2019; Santaso vd., 2017). Bu ciddi hastalık bazen hastaya en temel günlük aktivitelerde bile yardım edilmesini gerektirir. Demanslı hasta iletişim kurmada ve doğru kelimeleri bulmada zorluk yaşayabilir, bu da donukluk ve izolasyonla sonuçlanabilir. Bu durumda hasta hastalığının farkındalığını kaybeder ve sınırlarının farkında olmadığı için pervasızca hareket edebilir. Hastanın hareketliliği zamanla bozulabilir ve zayıf denge nedeniyle sık sık düşmeler yaşayabilir (Davodabadi vd., 2023).

Sayı teorisi insan zihninin karmaşık bir başarısıdır. Küçük miktarları anlamak ve büyük miktarları hesaplamak gibi temel sayısal beceriler muhtemelen çocuklukta (Butterworth, 1999; Dehaene, 1997; Spelke & Dehaene, 1999) kazanılmış olsa da, karmaşık hesaplamalar ve sayısal kodlar arasında kod dönüştürme gibi ileri sayısal işlemlerin edinilmesi, yıllar süren çalışma ve resmi eğitimle mümkündür. Sayısal işlemler kültürümüzün bir parçasıdır ve sayısal becerilere sahip olmayan insanlar da günlük hayatta okuma yazma bilmeyenler kadar zorluk çekerler (Delazer vd., 2003).

Aritmetik, çok bileşenli bir yeteneği temsil eden ve dil, görsel-uzaysal, hafıza ve motor sistemlerle birlikte gösterilen karmaşık bir bilişsel yetenektir. Sayısal problemleri çözmek dilsel, mekansal ve anlama becerilerini gerektirir. Merkezi sinir sistemi öncelikle sayıları tanımaktan, aralarındaki farkı bilmekten, ne için kullanıldığını anlamaktan ve aritmetik işlemleri yapmaktan sorumludur. Sözcüksel ve sözdizimsel ilişkilerin anlaşılması, matematiksel semboller arasında ilişkilerin kurulması ve aritmetik prensip bilgilerinin uygun şekilde kullanılmasıyla sağlanır (Karaman, 2012). Fokal beyin lezyonlarında ve global beyin hastalıklarında hesaplama süreçleri

bozulur (Celone vd., 2006). Beyinde aritmetik fonksiyonların lokalizasyonu aritmetik işlemlerde hem sağ hem de sol beyin rol oynar. Beynin baskın sol yarım küresindeki dil ile ilgili alanlar anlama, sayı üretme ve anlamlı aritmetik işlemler yapmada rol oynar. Sağ yarım kürenin benzer ve zıt bölgeleri soyut düşünme, nicelikleri anlama ve mekanı organize etme yeteneğiyle ilişkilendirilir. Görsel aritmetik bilgilerini tanımamıza yardımcı olur (Andres, 2011; Cohen vd., 2000). Parietal korteks sayı temsili ve işlenmesinde merkezi bir rol oynar. Baskın yarımküre, intraparietal sulkusu çevreleyen matematiksel işlemlerle ilişkili alandır. Fonksiyonel görüntüleme çalışmaları, her aritmetik işlem sırasında uyarılan anatomik konumları daha doğru bir şekilde temsil edebilir. Fonksiyonel nörogörüntüleme çalışmaları, iki taraflı intraparietal sulkus (IPS) içindeki ve çevresindeki alanların aritmetik işlemlerden sorumlu olduğunu ve zihinsel aritmetik işlemler sırasında aktive edildiğini göstermiştir (Chochon vd., 1999; Pinel vd., 2001; Ansari & Dhital, 2006; Castelli vd., 2006; Burbaud vd., 1999; Dehaene vd., 1999; Delazer vd., 2003; Ashkenazi vd., 2008; Lee vd., 2011; Park vd., 2013). Nöropsikolojik çalışmalardan elde edilen lezyonlar aritmetikte sol parietal bölgenin önemine işaret etmektedir (Cipolotti vd., 1991; Delazer & Benke, 1997; Dehaene & Cohen, 1997).



Şekil 2. Beynin bölümleri ve işlevleri

Görsel-uzaysal işlemlerde, özellikle Arapça ile ilgili matematiksel işlemlerde, her iki taraftaki alt parietal alanlar, özellikle sağ yarıkürenin parietal korteksi, frontal korteks, sağ fusiform girus, dikkatin devamlılığını sağlayan subkortikal alanlar ve singulat girus söz konusudur. Alfabetik ve matematiksel harfler ve semboller için iki taraflı ekstrasatriat sol merkezi girus etkinleştirilir (Andres, 2011; Dehaene, 2009; Kaufmann vd., 2008; Piazza vd., 2007; Venkatraman, 2005; Shuman ve Kanwisher, 2004). Geç başlangıçlı Alzheimer hastalığı özellikle frontotemporal ve parietal loblarda serebral korteksin kademeli atrofisi ve lateral ve üçüncü ventriküllerin genişlemesiyle karakterizedir. Bunu göz önünde bulundurduğumuzda aritmetik işlemlerin performansı için önemli olan birçok bağlantıdan hangisinin kaybolduğunu veya koptuğunu belirlemek gerekir. Hastalar daha fazla, daha az kavramını kaybetmiş olabilir, grupları sıralama yeteneğini kaybetmiş olabilir, 1'den 10'a kadar olan yüzleri bir sütuna yerleştiremeyebilir, tek bir yüz yerleştirilemeyebilir. Bir dizi sayıyı başka bir sayı dizisiyle eşleştiremeyebilir.

Alzheimer hastalığı ve hafif bilişsel bozukluk (AH-MCI)'da aritmetik yetenek ve nörogörüntüleme, demansın erken evrelerinde bozulan bilişsel işlevlerden biridir. Hafif ve orta şiddette Alzheimer hastalarında temel sayısal beceriler (sayıları okuma, sayıları anlama, sayma, tekrarlama, basit işlemler vb.) sağlamdır ancak parasal hesaplamalar, günlük yaşamdaki finansal beceriler ve çeşitli zihinsel aritmetik işlemler aynı yaştaki sağlıklı insanlarla karşılaştırıldığında azalır.

Alzheimer hastalığının erken evrelerinde karmaşık aritmetik işlemler bozulur ve Alzheimer hastalığının derecesine bağlı olarak hesaplama yeteneği giderek azalır (Girelli & Delazer, 2001, Martini vd., 2003; Delazer vd., 2006; Zamarian vd., 2007). Hafıza zayıfladığında, kısa süreli hafıza kaybı meydana gelir ve bu da depolanan hafızadan bilgiyi geri çağırma ve zihinsel ve

yazılı aritmetik yapma yeteneğini azaltır. Bazı araştırmacılara göre Alzheimer hastalığında işlem performansındaki düşüşler diğer bellek yöntemlerine göre daha erken ve daha şiddetli etkilenebilmektedir (Zamarian vd., 2007). Matematik yeteneğindeki azalmanın demansın, özellikle de Alzheimer hastalığının erken bir belirtisi olduğu söylenir ancak bu, Mini Mental Durum Değerlendirme (MMDD) puanına bağlıdır (Martin vd., 2003). Diskalkuli, anlama, dikkat, planlama ve hafızadaki artan bozulmalarla doğrudan ilişkilidir. Öğrenme, kısa süreli hafızanın azalması ve yürütücü işlev ile dayanıklılık üzerindeki etkilerin matematik üzerinde doğrudan etkisi vardır. Hafızanın yanı sıra öğrenme veya anlama sorunları da konsantrasyonu ve dikkati etkileyebilir ve bu tür diskalkuli genellikle Alzheimer hastalığında ortaya çıkar (Rosca, 2007; Cohen & Dehaene, 2000). Aritmetik beceri kaybının öncelikle yürütücü işlev ve dikkatteki eksikliklerle ilişkili olduğu bulunmuştur (Martini vd., 2003; Zamarian vd., 2007; Arnaud vd., 2008). Hafif bilişsel bozukluğu (HBB) olan kişilerde demans gelişme riski, aynı yaştaki sağlıklı kişilere göre daha yüksektir (Petersen vd., 1999). HBB hastaları genellikle hafıza kaybından şikayetçidir ve nöropsikolojik testlerde kötü performans göstermektedir (Petersen vd., 1999; Petersen, 2004). HBB'li hastalarda epizodik hafıza bozukluğu ve dikkat ve yürütücü işlevlerde hafif bozulmalar rapor edilmiştir (Davie vd., 2004; Ready vd., 2003). Genellikle rutin muayenelerde test edilen günlük yaşam aktivitelerinin korunduğuna inanılmaktadır. Basit aritmetik işlemler MCI'dan etkilenmez. Karmaşık aritmetik işlemler erken dönemlerde herhangi bir düşüş göstermez ancak daha sonraki dönemlerde etkilenir. Günlük yaşamdaki finansal beceriler (fatura ödeme, banka hesaplarını yönetme) de hafif bilişsel bozukluğu olan kişilerde daha fazla zarar görebilir (Griffith vd., 2003; Zamarian vd., 2007). Alzheimer hastalığında kortekste erken dönemde etkilenen ana alanlar alt temporal korteks ve İnferior parietal bölgedir. Özellikle intraparietal bölge,

hesaplama fonksiyonlarında rol oynar (Break vd., 1999; Break & Break, 1991). Bu nedenle AH'nin erken dönemlerinde hesaplamalar etkilenir (Girelli ve Delazer, 2001). Bazı araştırmacılar diskalkulinin yürütücü işlevlerdeki, özellikle de hafıza ve dikkat gibi becerilerdeki düşüşlerle eş zamanlı olarak ortaya çıkabileceğini bulmuşlardır (Zamarian vd., 2007). Ancak hesaplama fonksiyonu detaylı olarak incelendiğinde erken dönemlerde bu fonksiyonun azaldığı görülmektedir (Kayalı, 2014).

2.6. Demansın Önlenmesi

Demans özellikle yaşlılarda yaygın tıbbi bir hastalık olduğundan korunma ve tedavi ile ilgili çalışmalarla demans tedavisinin yapılması önemlidir. Şu anda iyileşmeye yönelik etkili bir tedavi mevcut değildir. Ancak demansın asemptomatik gizli döneminin uzun süredir devam ettiği tespit edilmiştir (Sperling vd., 2011) ve önleme bu hastalığa en uygun çözümdür. Önceki çalışmalara dayanarak, bilişsel aktivitelere katılımın artmasının bilişsel gerilemeyi yavaşlatabileceği ve hafif bilişsel bozulma riskini azaltabileceği bulunmuştur. Bu riski azaltan, basit matematik problemlerini çözmek gibi, gerçekleştirilmesi kolay birçok bilişsel aktivite vardır (Ivan vd., 2019).

Demansın önlenmesinin egzersiz, fiziksel aktivite ve zihinsel uyarımı içeren bütünsel bir yaklaşım gerektirdiği bildirilmiştir. Uzmanlar arasındaki genel görüş, yaşam boyunca aktif kalmanın ve beyin sağlığını destekleyen aktivitelerde bulunmanın demans riskini önemli ölçüde azaltabileceği yönündedir. Bu alandaki araştırmalar, sağlıklı bir yaşam tarzının uzun vadeli beyin sağlığını etkilediğini açıkça göstermektedir. Nörolog Dr. Ayşe Karaman, zihinsel egzersizlerin bilişsel işlevleri güçlendirdiğini ve demans riskini azalttığını belirtmiştir. Bulmaca çözmek, satranç oynamak ve yeni bir dil öğrenmek gibi aktiviteler, beyin hücreleri arasındaki bağlantıları güçlendirir.

Prof. Dr. Murat Emre de, düzenli zihinsel aktivitelerin beyin sağlığını korumada önemli olduğunu ifade etmiştir (Özen, 2024).

Nöroloji uzmanı Prof. Dr. Dilek Necioğlu Örken, demans hastalığının tedavisinde yaşam şeklinin önemli olduğunu vurgulayıp bilişsel aktivitelerle hastalığın yenilebileceğini belirtmiştir. Kitap okumak satranç gibi zihni çalıştıran bilişsel aktivitelerin demans tedavisinde olumlu etkisi olduğunu söylemektedir (Örken Necioğlu, 2020).

Bilişsel işlev, yaşlı yetişkinlerde (65 yaş ve üstü) bağımsız olarak yemek yeme, kişisel hijyene dikkat etme becerileri de dahil olmak üzere yaşam doyumunu ve günlük yaşam aktivitelerini ifade eder (Tuncay ve Fertelli, 2018) veya kullandığı ilaçların takibini yapabilmek ve parayla uğraşmak daha karmaşık davranışlarla ilişkilidir (Bell-McGinty vd., 2002; Cahn-Weiner vd., 2002). Bu ilişki dikkate alındığında, bilişsel süreçleri iyileştirmenin ve bu iyileşmeyi sağlamanın yollarını araştırmak giderek önem kazanmaktadır (Seçer, 2021).

Dikkat (konu üzerinde yoğunlaşma yeteneği), hafıza (bilgiyi tutma, sürdürme, hatırlama), algılama ve yürütme işlevi (çıkarım, karar verme, problem çözme, stratejiler, ilgisiz olanı ayırma, zihinsel esneklik, yaratıcılık ve davranışı organize etme) insan beyninde meydana gelen bilişsel bir aktivite olarak değerlendirilir. Beynimizin problem çözme ve zorluklarla başa çıkma becerilerinin zenginliği, bilişsel gerileme ve demans riskini azaltmada koruyucu faktör olarak rol alır. Bilişsel aktivitelerle artan bilişsel beceri kapasitesiyle birlikte bilişsel bozukluğun yavaşladığı çalışmalarda bildirilmiştir (WHO, 2019; Lillo-Crespo, 2019; Stern ve Munn, 2010). Alanyazında bilişsel aktiviteyi artırmaya yönelik farmakolojik olmayan yöntemler, bilişsel uyarım, bilişsel egzersiz, bilişsel rehabilitasyon gibi başlıklar kullanılarak anlatılmaktadır. Bu zihinsel odaklı tedavi, bilişsel süreçleri iyileştirmek veya sürdürmek ve/veya bilişsel

bozukluğun günlük işlevsellik üzerindeki etkisini ele almak için tasarlanmıştır. Bu tedavilerin yaşlı yetişkinlerde yararlı olabileceğine dair artan bir farkındalık vardır. Çünkü zihni uyaran aktiviteler yapmak büyük ihtimalle ileriki yaşam için bilişsel kapasiteyi ve sağlamlığı artırıp demanstan koruyabilir (Simon vd., 2020). Bilişsel uyarılma, belirsiz bir şekilde bilişsel ya da sosyal işlevselliği destekleyen çeşitli etkinlikleri içerirken, bilişsel eğitim daha belirgin bir odaklanma sergiler. Bilişsel eğitim, bilişsel süreçleri geliştirmeye yönelik teorik temellere dayanan teknikleri uygulama veya öğretme amacı taşır. Bilişsel rehabilitasyon, kişisel hedeflere yönelik özel olarak tasarlanmış programları kapsar ve günlük hayatta karşılaşılan belirli etkinliklerin yerine getirilmesine odaklanır. Alanyazında, görsel (yap-boz, resim ve kâğıt-kalem aktiviteleri gibi), işitsel (müzik ve dans gibi) ve çok sayıda duyuyu hedef alan (Montessori, hortikültürel terapi gibi) bilişsel aktivitelerin faydalı olabileceğini gösteren çalışmalar bulunmaktadır. Bu araştırmalar, görme, dokunma ve koklama gibi duylara yönelik uygulamaların önemini vurgulamaktadır (Simon vd., 2020; Mandini vd., 2016). Üç yıl süren bir çalışmada, yaşlı bireylerin karmaşık zihinsel etkinliklere katılımının artmasıyla hipokampus hacminin azalmasının yavaşladığı gözlemlenmiştir (Valenzuela & Sachdev, 2006).

Her yaş için en yaygın boş zaman aktivitelerinden biri bulmaca çözmektir. Bulmaca çözenin de uzun zamandır beyni sağlıklı tuttuğu düşünülmüş (Ferreira vd., 2015) ve demansın başlangıcını geciktirdiği gösterilmiştir (Pillai vd., 2011). Bu bulmacalar arasında popüler olan Sudoku, satırlardan (n 2), sütunlardan (n 2) ve alt ızgaralardan ($n \times n$) oluşan bir matristen oluşan mantık tabanlı bir kombinatoryal sayı yerleştirme problemidir (Bargagliotti, 2006). Problem, sayıların alt ızgarada, satırda veya sütunda tekrarlanmaması gereken üç basit kurala dayanmaktadır. Sudoku bilişsel açıdan iyi bir boş zaman

aktivitesidir (Ferreira vd., 2015). Sudoku, tabloları analiz etmek ve sayıları doldurmak için konunun dikkatini gerektirir; temelde matematik gerektirmez ancak mantığa dayanır (Bargagliotti, 2006).

Bilişsel eksiklikler, depresyon, bipolar hastalık, şizofreni, Parkinson ve Alzheimer hastalığı gibi çalışma belleği, dikkat, muhakeme, karar verme ve problem çözme işlev bozuklukları gibi birçok nöropsikiyatrik bozukluk arasında önemli belirtilerdir. (Bowie & Harvey, 2006; Sanches vd., 2015; Christensen vd., 1997; Glizer & Mc Donald, 2016). Sudoku çözmek yürütücü bilişsel işlevleri, en önemlisi problem çözme ve karar vermeyi içerdiğinden, nöropsikiyatrik bozukluklarda nörorehabilitasyon ve bilişsel iyileştirme terapisi için umut verici bir araç olabilir. Sonuç olarak, Sudoku görevi sırasında Prefrontal korteksin (PFC) önemli bir katılımı gözlemlenmiştir. Sudoku çözülürken PFC'nin hem orta hem de yan bölgeleri etkinleştirilir. Bu nedenle Sudoku, PFC'yi içeren nöropsikiyatrik bozukluklarda bilişsel iyileştirme eğitimi için kullanılabileceği belirtilmiştir (Ashlesh vd., 2020).

Bunların yanı sıra matematikte işlemlerle ilgili soru çözmenin de hafızaya olumlu katkısı olduğunu düşündürecek örnekler mevcuttur. Kayseri'de kızıyla yaşayan emekli matematik öğretmeni Hakkı Sümengen (82), ilerleyen yaşlarda ortaya çıkan Alzheimer hastalığına yakalanmamak için haftanın 4 günü, kütüphaneye giderek yaklaşık 2 saat matematik sorusu çözmektedir. Yaşlılara tavsiyelerde bulunan Sümengen, "Matematiğe karşı bir isteğim var. Problemleri çözdükçe zevk alıyorum. Alzheimer hastalığına yakalanmamak için beynimi çalıştırıyorum. Spor ve matematik sorularını çözüyorum." ifadelerini kullanmıştır. Alzheimer hastalığından korunmak için zihinsel aktiviteye verdiği önemin, yaşlanma sürecinde beyin sağlığını koruma açısından ne kadar önemli olduğunu vurgulamaktadır. Matematik, beyin için mükemmel bir egzersiz

olabilir çünkü analitik düşünmeyi, problem çözmeyi ve hafızayı geliştirmektedir (Cumhuriyet Gazetesi, 2025).

Aktif olmak ve rutin oluşturmak, demans ya da Alzheimer gibi hastalıklarla yaşayan bireyler için gerçekten çok önemlidir. Zihinsel ve fiziksel sağlığı desteklemek, hastalığın ilerlemesini yavaşlatmaya yardımcı olabilir. Düzenli aktiviteler, beyin sağlığını korurken aynı zamanda duygusal dengeyi de destekler. Özellikle oyunlar ve zihinsel egzersizler gibi aktiviteler, beyin üzerinde olumlu etkiler yaparak bilişsel fonksiyonları güçlendirebilir (Şekil 1).



Şekil 3. Demans hastası için etkinlikler

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Demans, hafızayı, bilişsel işlevleri ve günlük yaşam becerilerini etkileyen ilerleyici bir hastalık sendromudur. Matematik becerileri ise hafıza, dikkat, mantık yürütme ve problem çözme gibi bilişsel süreçlerle doğrudan bağlantılıdır. Bu nedenle, demans hastalarında matematiksel yeteneklerin kaybı, hastalığın erken belirtilerinden biri olabilir ve zamanla daha belirgin hale gelir. Araştırmalar, hafif bilişsel bozukluk (HBB) ve

Alzheimer hastalığı gibi durumlarda, özellikle karmaşık matematik işlemlerinin erken dönemde bozulduğunu göstermektedir. Hastalık ilerledikçe, sayıları tanıma, basit aritmetik işlemleri yapma, saat okuma ve para yönetimi gibi temel beceriler bile kaybedilebilir. Bilişsel gerilemeyi yavaşlatmak için matematiksel aktiviteler içeren bilişsel egzersizler büyük önem taşır. Sudoku, bulmaca, zihinsel hesaplamalar ve günlük matematiksel işlemlerle uğraşmak, beyindeki sinir bağlantılarını güçlendirerek bilişsel fonksiyonları destekleyebilir. Düzenli zihinsel uyarım, demansın ilerleyişini yavaşlatmaya yardımcı olabilir.

Sonuç olarak, matematik becerilerinin kaybı, demansın önemli bir göstergesi olabilir ve erken teşhis için dikkate alınmalıdır. Günlük yaşamda matematikle ilgili faaliyetlerin sürdürülmesi, hastaların bağımsızlıklarını daha uzun süre korumasına yardımcı olabilir. Aynı zamanda, matematik temelli zihinsel egzersizlerin düzenli olarak yapılması, beyin sağlığını koruyarak demansın ilerlemesini geciktirebilir. Bu nedenle, bilişsel sağlığı desteklemek için zihinsel aktivitelerin günlük rutinelere entegre edilmesi büyük önem taşımaktadır.

Demans hastalarında matematik becerileri, hastalığın ilerleyişine bağlı olarak zayıflayabilir. Ancak, uygun stratejilerle bu yeteneklerin korunması ve geliştirilmesi mümkündür. Aşağıdaki öneriler, demansın etkilerini hafifletmeye ve bilişsel işlevleri desteklemeye yardımcı olabilir:

1. Günlük Hayatta Matematik Kullanımı Teşvik Edilmeli

Hastanın alışveriş sırasında hesap yapması sağlanmalı. Örneğin, para üstü hesaplamalarına yardımcı olmasına fırsat verilmeli.

Saat ve takvim kullanımı teşvik edilerek zaman algısının korunmasına destek olunmalı.

Yemek tarifleri uygulayarak ölçüleri hesaplaması sağlanmalı.

2. Zihinsel Egzersizler ile Beyin Aktif Tutulmalı

Sudoku, sayı bulmacaları, matematik tabanlı hafıza oyunları oynayarak beyin aktif tutulmalı.

Basit matematik işlemlerini içeren günlük egzersizler yaptırılmalı (örneğin, $5+3$ gibi basit toplama ve çıkarma işlemleri).

Kendi yaşına ve beceri seviyesine uygun zeka oyunları seçerek eğlenceli bir şekilde zihinsel uyarım sağlanmalı.

3. Teknolojik Desteklerden Yararlanılmalı

Demansa özel geliştirilmiş mobil uygulamalar ve dijital oyunlar kullanarak bireyin bilişsel işlevleri desteklenmeli.

Sesli asistanlar ve akıllı cihazlar ile saat, tarih ve randevular hakkında hatırlatmalar yaparak zaman algısı güçlendirilmeli.

4. Fiziksel Aktiviteyi Matematikle Birleştirilmeli

Adım sayma veya basit egzersiz tekrarları yaparak sayıları kullanma pratiği sağlanmalı.

Bahçede bitki sayma, taş toplama gibi etkinliklerle hafif fiziksel aktivite ve bilişsel uyarım birleştirilmeli.

5. Grup Aktiviteleri ile Sosyal Etkileşim Artırılmalı

Aile ve arkadaşlarla birlikte kart oyunları veya matematik tabanlı hafıza oyunları oynayarak sosyal bağları güçlendirilmeli.

Bilişsel eğitim programlarına veya atölyelere katılım sağlayarak öğrenme süreci devam ettirilmeli.

6. Erken Teşhis ve Takip İçin Matematik Becerileri İzlenmeli

Eğer birey daha önce rahatlıkla yaptığı matematik işlemlerinde zorlanmaya başladıysa, bu bir erken demans belirtisi olabilir.

Düzenli bilişsel testler ve doktor kontrolleriyle ilerleme takip edilmeli ve gerekirse profesyonel destek alınmalı.

Sonuç

Demans hastalarında matematik becerileri zamanla kaybolursa da, düzenli zihinsel uyarım ve günlük pratiklerle bu süreci yavaşlatmak mümkündür. Günlük yaşam aktivitelerine matematiği entegre etmek, bireyin bağımsızlığını daha uzun süre korumasına yardımcı olabilir. Hafif ve eğlenceli matematik egzersizleri, beyin sağlığını destekleyen güçlü araçlardan biri olarak kullanılmalıdır.

KAYNAKLAR

- Andres, M., Pelgrims, B., Michaux, N., Olivier, E., & Pesenti, M. (2011). Role of distinct parietal areas in arithmetic: an fMRI-guided TMS study. *NeuroImage*, 54(4), 3048–3056. <https://doi.org/10.1016/j.neuroimage.2010.11.009>
- Ansari, D., & Dhital, B. (2006). Age-related changes in the activation of the intraparietal sulcus during nonsymbolic magnitude processing: an event-related functional magnetic resonance imaging study. *Journal of cognitive neuroscience*, 18(11), 1820–1828. <https://doi.org/10.1162/jocn.2006.18.11.1820>
- Arnaud, L., Lemaire, P., Allen, P., & Michel, B. F. (2008). Strategic aspects of young, healthy older adults', and Alzheimer patients' arithmetic performance. *Cortex; a journal devoted to the study of the nervous system and behavior*, 44(2), 119–130. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2006.03.001>
- Ashkenazi, S., Henik, A., Ifergane, G., & Shelef, I. (2008). Basic numerical processing in left intraparietal sulcus (IPS) acalculia. *Cortex; a journal devoted to the study of the nervous system and behavior*, 44(4), 439–448. <https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.008>
- Ashlesh, P., Deepak, K. K., & Preet, K. K. (2020). Role of prefrontal cortex during Sudoku task: fNIRS study. *Translational neuroscience*, 11(1), 419–427. <https://doi.org/10.1515/tnsci-2020-0147>
- Bargagliotti L. A. (2006). Resolving one problem in a 10-star Sudoku puzzle. *Nursing education perspectives*, 27(2), 62–109.
- Bell-McGinty, S., Podell, K., Franzen, M., Baird, A. D., & Williams, M. J. (2002). Standard measures of executive

function in predicting instrumental activities of daily living in older adults. *International journal of geriatric psychiatry*, 17(9), 828–834.
<https://doi.org/10.1002/gps.646>

- Bendjillali, R.I., Beladgham, M., Merit, K. (2019). Face recognition based on dwt feature for cnn. *In: Proceedings of the 9th International Conference on Information Systems and Technologies*, pp. 1–5
- Bowie, C. R., & Harvey, P. D. (2006). Cognitive deficits and functional outcome in schizophrenia. *Neuropsychiatric disease and treatment*, 2(4), 531–536.
<https://doi.org/10.2147/nedt.2006.2.4.531>
- Brewer, R., Biotti, F., Catmur, C., Press, C., Happé, F., Cook, R., & Bird, G. (2016). Can Neurotypical Individuals Read Autistic Facial Expressions? Atypical Production of Emotional Facial Expressions in Autism Spectrum Disorders. *Autism research : official journal of the International Society for Autism Research*, 9(2), 262–271.
<https://doi.org/10.1002/aur.1508>
- Burbaud, P., Camus, O., Guehl, D., Bioulac, B., Caillé, J. M., & Allard, M. (1999). A functional magnetic resonance imaging study of mental subtraction in human subjects. *Neuroscience letters*, 273(3), 195–199.
[https://doi.org/10.1016/s0304-3940\(99\)00641-2](https://doi.org/10.1016/s0304-3940(99)00641-2)
- Butterworth, B., (1999). *The Mathematical Brain*, Macmillan, London: Cambridge University Press.
- C.A. Corneanu, M.O.Simón, J.F.Cohn, S.E.Guerrero, Surveyonrgb, 3d, thermal, andmultimodal approaches forfacial expression recognition: history, trends, and affect-related applications. *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 38(8), 1548–1568 (2016)

- Cahn-Weiner, D. A., Boyle, P. A., & Malloy, P. F. (2002). Tests of executive function predict instrumental activities of daily living in community-dwelling older individuals. *Applied neuropsychology*, 9(3), 187–191. https://doi.org/10.1207/S15324826AN0903_8
- Castelli, F., Glaser, D. E., & Butterworth, B. (2006). Discrete and analogue quantity processing in the parietal lobe: a functional MRI study. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, 103(12), 4693–4698. <https://doi.org/10.1073/pnas.0600444103>
- Celone, K. A., Calhoun, V. D., Dickerson, B. C., Atri, A., Chua, E. F., Miller, S. L., DePeau, K., Rentz, D. M., Selkoe, D. J., Blacker, D., Albert, M. S., & Sperling, R. A. (2006). Alterations in memory networks in mild cognitive impairment and Alzheimer's disease: an independent component analysis. *The Journal of neuroscience : the official journal of the Society for Neuroscience*, 26(40), 10222–10231. <https://doi.org/10.1523/JNEUROSCI.2250-06.2006>
- Chochon, F., Cohen, L., van de Moortele, P. F., & Dehaene, S. (1999). Differential contributions of the left and right inferior parietal lobules to number processing. *Journal of cognitive neuroscience*, 11(6), 617–630. <https://doi.org/10.1162/089892999563689>
- Christensen, H., Griffiths, K., Mackinnon, A., & Jacomb, P. (1997). A quantitative review of cognitive deficits in depression and Alzheimer-type dementia. *Journal of the International Neuropsychological Society : JINS*, 3(6), 631–651.
- Cipolotti, L., Butterworth, B., & Denes, G. (1991). A specific deficit for numbers in a case of dense acalculia. *Brain : a*

- journal of neurology*, 114 (Pt 6), 2619–2637.
<https://doi.org/10.1093/brain/114.6.2619>
- Cohen, L., & Dehaene, S. (2000). Calculating without reading: unsuspected residual abilities in pure alexia. *Cognitive neuropsychology*, 17(6), 563–583.
<https://doi.org/10.1080/02643290050110656>
- Cohen, L., Dehaene, S., Chochon, F., Lehéricy, S., & Naccache, L. (2000). Language and calculation within the parietal lobe: a combined cognitive, anatomical and fMRI study. *Neuropsychologia*, 38(10), 1426–1440.
[https://doi.org/10.1016/s0028-3932\(00\)00038-5](https://doi.org/10.1016/s0028-3932(00)00038-5)
- Cumhuriyet Gazetesi. 2025. 15 Şubat 2025 tarihinde <https://www.cumhuriyet.com.tr/turkiye/82-yasindaki-ogretmen-matematik-sorusu-cozerek-alzheimeradi-reniyor-2199487> adresinden erişildi.
- Davie, J. E., Azuma, T., Goldinger, S. D., Connor, D. J., Sabbagh, M. N., & Silverberg, N. B. (2004). Sensitivity to expectancy violations in healthy aging and mild cognitive impairment. *Neuropsychology*, 18(2), 269–275.
<https://doi.org/10.1037/0894-4105.18.2.269>
- Davodabadi, A., Daneshian, B., Saati, S., & Razavyan, S. (2023). Mathematical model and artificial intelligence for diagnosis of Alzheimer's disease. *European physical journal plus*, 138(5), 474.
<https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-04128-5>
- Dehaene S. (2009). Origins of mathematical intuitions: the case of arithmetic. *Annals of the New York Academy of Sciences*, 1156, 232–259. <https://doi.org/10.1111/j.1749-6632.2009.04469.x>
- Dehaene, S., & Cohen, L. (1997). Cerebral pathways for calculation: double dissociation between rote verbal and

- quantitative knowledge of arithmetic. *Cortex; a journal devoted to the study of the nervous system and behavior*, 33(2), 219–250. [https://doi.org/10.1016/s0010-9452\(08\)70002-9](https://doi.org/10.1016/s0010-9452(08)70002-9)
- Dehaene, S., (1997). *The Number Sense*, New York: Oxford Univ. Press.
- Dehaene, S., Spelke, E., Pinel, P., Stanescu, R., & Tsivkin, S. (1999). Sources of mathematical thinking: behavioral and brain-imaging evidence. *Science (New York, N.Y.)*, 284(5416), 970–974. <https://doi.org/10.1126/science.284.5416.970>
- Delazer, M., & Benke, T. (1997). Arithmetic facts without meaning. *Cortex; a journal devoted to the study of the nervous system and behavior*, 33(4), 697–710. [https://doi.org/10.1016/s0010-9452\(08\)70727-5](https://doi.org/10.1016/s0010-9452(08)70727-5)
- Delazer, M., Domahs, F., Barthä, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., & Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic--an fMRI study. *Brain research. Cognitive brain research*, 18(1), 76–88. <https://doi.org/10.1016/j.cogbrainres.2003.09.005>
- Delazer, M., Domahs, F., Barthä, L., Brenneis, C., Lochy, A., Trieb, T., & Benke, T. (2003). Learning complex arithmetic--an fMRI study. *Brain research. Cognitive brain research*, 18(1), 76–88. <https://doi.org/10.1016/j.cogbrainres.2003.09.005>
- Delazer, M., Karner, E., Proell, S., & Benke, T. (2006). Counting complex dot patterns in Alzheimer's disease. *Journal of clinical and experimental neuropsychology*, 28(5), 721–731. <https://doi.org/10.1080/13803390591000819>
- Ferreira, N., Owen, A., Mohan, A., Corbett, A., & Ballard, C. (2015). Associations between cognitively stimulating

- leisure activities, cognitive function and age-related cognitive decline. *International journal of geriatric psychiatry*, 30(4), 422–430.
<https://doi.org/10.1002/gps.4155>
- Girelli, L., Delazer, M. (2001). Numerical abilities in dementia. *Aphasiology*, 15: 681–694
- Glizer, D., & MacDonald, P. A. (2016). Cognitive Training in Parkinson's Disease: A Review of Studies from 2000 to 2014. *Parkinson's disease*, 2016, 9291713.
<https://doi.org/10.1155/2016/9291713>
- Griffith, H. R., Belue, K., Sicola, A., Krzywanski, S., Zamrini, E., Harrell, L., & Marson, D. C. (2003). Impaired financial abilities in mild cognitive impairment: a direct assessment approach. *Neurology*, 60(3), 449–457.
<https://doi.org/10.1212/wnl.60.3.449>
- Ilyas, B.R., Mohammed, B., Khaled, M., Ahmed, A.T., Ihsen, A. (2019). Facial expression recognition based on dwt feature for deep cnn. In: *2019 6th International Conference on Control, Decision and Information Technologies (CoDIT)*, pp. 344–348. IEEE
- Ivan, J., Nurdiansyah, R., Parikesit, A.A. (2019). Mathematical problem solving: one way to prevent dementia. *Iran J Med Inform.* 8(1): e10.
- Karaman, Y. (2012). *Akalkuli. Kognitif Nöroloji ve Davranış Bozuklukları*. İstanbul: Yelken Basım Yayın
- Kaufmann, L., Vogel, S. E., Wood, G., Kremser, C., Schocke, M., Zimmerhackl, L. B., & Koten, J. W. (2008). A developmental fMRI study of nonsymbolic numerical and spatial processing. *Cortex; a journal devoted to the study of the nervous system and behavior*, 44(4), 376–385.
<https://doi.org/10.1016/j.cortex.2007.08.003>

- Kayalı, N. (2014). *Alzheimer tipi demans, hafif bilişsel bozukluk ve sağlıklı yaşlanmada aritmetik becerinin incelenmesi ve fonksiyonel manyetik rezonans görüntülemeye yansıyan özellikleri*. (Uzmanlık Tezi). YÖK Açıkbilim.
- Keltner, D., Sauter, D., Tracy, J., & Cowen, A. (2019). Emotional Expression: Advances in Basic Emotion Theory. *Journal of nonverbal behavior*, 43(2), 133–160. <https://doi.org/10.1007/s10919-019-00293-3>
- Khan, Y. D. (2019). An Improved Facial Recognition Technique Using Scale and Rotation Invariant Statistical Moments. <https://doi.org/10.1109/ELIT.2019.8892309>
- Maniglio, R., Gusciglio, F., Lofrese, V., Belvederi Murri, M., Tamburello, A., & Innamorati, M. (2014). Biased processing of neutral facial expressions is associated with depressive symptoms and suicide ideation in individuals at risk for major depression due to affective temperaments. *Comprehensive psychiatry*, 55(3), 518–525. <https://doi.org/10.1016/j.comppsy.2013.10.008>
- Martin, R. C., Annis, S. M., Darling, L. Z., Wadley, V., Harrell, L., & Marson, D. C. (2003). Loss of calculation abilities in patients with mild and moderate Alzheimer disease. *Archives of neurology*, 60(11), 1585–1589. <https://doi.org/10.1001/archneur.60.11.1585>
- Martini, L., Domahs, F., Benke, T., & Delazer, M. (2003). Everyday numerical abilities in Alzheimer's disease. *Journal of the International Neuropsychological Society* : *JINS*, 9(6), 871–878. <https://doi.org/10.1017/S1355617703960073>
- Naser, M., Schloss, R. S., Berjaud, P., & Boustany, N. N. (2018). Label-free dynamic segmentation and morphological analysis of subcellular optical scatterers. *Journal of*

- biomedical optics, 23(9), 1–11.
<https://doi.org/10.1117/1.JBO.23.9.096004>
- Örken Necioğlu D. (2020, Ekim 8) Alzheimer hastalığını önlemek için kanıta dayalı öneriler. 15 Şubat 2025 tarihinde
[https://www.dileknecioğluorken.com/tr/alzheimer-hastaligini-onlemek-icin-kanita-dayali-oneriler/](https://www.dileknecioглуorken.com/tr/alzheimer-hastaligini-onlemek-icin-kanita-dayali-oneriler/) adresinden erişildi.
- Özen H. (2024, Ağustos 12). Demansı engelleme egzersizleri ortaya çıktı. 15 Şubat 2025 tarihinde
<https://www.yenicaggazetesi.com.tr/demansi-engelleme-egzersizleri-ortaya-cikti-829632h.htm> adresinden erişildi.
- Park, J., Park, D. C., & Polk, T. A. (2013). Parietal functional connectivity in numerical cognition. *Cerebral cortex* (New York, N.Y. : 1991), 23(9), 2127–2135.
<https://doi.org/10.1093/cercor/bhs193>
- Petersen R. C. (2004). Mild cognitive impairment as a diagnostic entity. *Journal of internal medicine*, 256(3), 183–194.
<https://doi.org/10.1111/j.1365-2796.2004.01388.x>
- Petersen, R. C., Smith, G. E., Waring, S. C., Ivnik, R. J., Tangalos, E. G., & Kokmen, E. (1999). Mild cognitive impairment: clinical characterization and outcome. *Archives of neurology*, 56(3), 303–308.
<https://doi.org/10.1001/archneur.56.3.303>
- Piazza, M., Pinel, P., Le Bihan, D., & Dehaene, S. (2007). A magnitude code common to numerosities and number symbols in human intraparietal cortex. *Neuron*, 53(2), 293–305. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2006.11.022>
- Pillai, J. A., Hall, C. B., Dickson, D. W., Buschke, H., Lipton, R. B., & Verghese, J. (2011). Association of crossword puzzle participation with memory decline in persons who

- develop dementia. *Journal of the International Neuropsychological Society : JINS*, 17(6), 1006–1013. <https://doi.org/10.1017/S1355617711001111>
- Pinel, P., Dehaene, S., Rivière, D., & LeBihan, D. (2001). Modulation of parietal activation by semantic distance in a number comparison task. *NeuroImage*, 14(5), 1013–1026. <https://doi.org/10.1006/nimg.2001.0913>
- Psychenet. (2017, 10 Mart). Enformasyon materyali Demans. 15 Şubat 2025 tarihinde <https://www.psychenet.de/tr/ruhsal-saglik/bilgiler/demans.html> adresinden erişildi.
- Ready, R. E., Ott, B. R., Grace, J., & Cahn-Weiner, D. A. (2003). Apathy and executive dysfunction in mild cognitive impairment and Alzheimer disease. *The American journal of geriatric psychiatry : official journal of the American Association for Geriatric Psychiatry*, 11(2), 222–228.
- Rosca E. C. (2009). Arithmetic procedural knowledge: a cortico-subcortical circuit. *Brain research*, 1302, 148–156. <https://doi.org/10.1016/j.brainres.2009.09.033>
- Sanches, M., Bauer, I. E., Galvez, J. F., Zunta-Soares, G. B., & Soares, J. C. (2015). The management of cognitive impairment in bipolar disorder: current status and perspectives. *American journal of therapeutics*, 22(6), 477–486. <https://doi.org/10.1097/MJT.0000000000000120>
- Shuman, M., & Kanwisher, N. (2004). Numerical magnitude in the human parietal lobe; tests of representational generality and domain specificity. *Neuron*, 44(3), 557–569. <https://doi.org/10.1016/j.neuron.2004.10.008>
- Spelke, E., & Dehaene, S. (1999). Biological foundations of numerical thinkingResponse to T.J. Simon (1999). Trends

- in cognitive sciences, 3(10), 365–366.
[https://doi.org/10.1016/s1364-6613\(99\)01385-6](https://doi.org/10.1016/s1364-6613(99)01385-6)
- Sperling, R. A., Aisen, P. S., Beckett, L. A., Bennett, D. A., Craft, S., Fagan, A. M., Iwatsubo, T., Jack, C. R., Jr, Kaye, J., Montine, T. J., Park, D. C., Reiman, E. M., Rowe, C. C., Siemers, E., Stern, Y., Yaffe, K., Carrillo, M. C., Thies, B., Morrison-Bogorad, M., Wagster, M. V., ... Phelps, C. H. (2011). Toward defining the preclinical stages of Alzheimer's disease: recommendations from the National Institute on Aging-Alzheimer's Association workgroups on diagnostic guidelines for Alzheimer's disease. *Alzheimer's & dementia : the journal of the Alzheimer's Association*, 7(3), 280–292.
<https://doi.org/10.1016/j.jalz.2011.03.003>
- Stern, Y., Blumen, H. M., Rich, L. W., Richards, A., Herzberg, G., & Gopher, D. (2011). Space Fortress game training and executive control in older adults: a pilot intervention. *Neuropsychology, development, and cognition. Section B, Aging, neuropsychology and cognition*, 18(6), 653–677.
<https://doi.org/10.1080/13825585.2011.613450>
- Sundararajan, D. (2017). *Morphological image processing*. Berlin: Springer.
- T.V. Priya, T.V., Sanchez, G.V., Raajan, N., (2018). Facial recognition system using local binary patterns (lbp). *Int. J. Pure and Appl. Math.* 119(15), 1895–1899
- Tuncay, F. Ö. ve Fertelli, T. K. (2018). Yaşlılarda bilişsel işlevlerin günlük yaşam aktiviteleri ve yaşam doyumu ile ilişkisi. *Dokuz Eylül Üniversitesi Tıp Fakültesi Dergisi*, 32(3), 190-183. <https://doi.org/10.5505/deutfd.2018.82712>.

- Valenzuela, M. J., & Sachdev, P. (2006). Brain reserve and cognitive decline: a non-parametric systematic review. *Psychological medicine*, 36(8), 1065–1073. <https://doi.org/10.1017/S0033291706007744>
- Venkatraman, V., Ansari, D., & Chee, M. W. (2005). Neural correlates of symbolic and non-symbolic arithmetic. *Neuropsychologia*, 43(5), 744–753. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2004.08.005>
- WHO. (2023). Dementia. 1 Şubat 2025 tarihinde <https://www.who.int/news-room/fact-sheets/detail/dementia> adresinden erişildi.
- Zamarian, L., Semenza, C., Domahs, F., Benke, T., & Delazer, M. (2007). Alzheimer's disease and mild cognitive impairment: effects of shifting and interference in simple arithmetic. *Journal of the neurological sciences*, 263(1-2), 79–88. <https://doi.org/10.1016/j.jns.2007.06.005>
- Zamarian, L., Stadelmann, E., Nürk, H. C., Gamboz, N., Marksteiner, J., & Delazer, M. (2007). Effects of age and mild cognitive impairment on direct and indirect access to arithmetic knowledge. *Neuropsychologia*, 45(7), 1511–1521. <https://doi.org/10.1016/j.neuropsychologia.2006.11.012>

GÜNLÜK SOSYAL MEDYA KULLANIMININ MATEMATİKSEL MODELLEMESİ VE HARMONİK FONKSİYONLARLA ANALİZİ

Bahriye KARACA¹

Necdet UÇAN²

1. GİRİŞ

Günümüzde sosyal medya, bireylerin günlük yaşamlarının ayrılmaz bir parçası haline gelmiştir. Haberlerden eğlenceye, eğitimden sosyalleşmeye kadar pek çok alanda kullanılan sosyal medya platformları, bireylerin zamanlarının büyük bir bölümünü tüketmektedir. Statista'nın 2024 yılı verilerine göre, dünya genelinde bir bireyin günlük ortalama sosyal medya kullanım süresi yaklaşık 2 saat 27 dakika olarak hesaplanmıştır. Bu kullanım alışkanlıklarının bireylerin sosyal, psikolojik ve fiziksel durumları üzerindeki etkileri, özellikle son yıllarda akademik çalışmalarda yoğun bir şekilde araştırılmaktadır. Ancak, sosyal medya kullanım alışkanlıklarının döngüsel yapısı ve bu yapıların matematiksel olarak modellenmesi gibi konular literatürde yeterince incelenmemiştir.

Sosyal medya kullanım alışkanlıklarının zamanla nasıl değiştiğini anlamak, bu platformların bireyler ve toplum üzerindeki etkilerini daha iyi değerlendirmeyi mümkün kılabilir.

¹ Dr. Öğr. Üyesi, İzmir Bakırçay Üniversitesi Mühendislik ve Mimarlık Fakültesi Temel Bilimler Bölümü 35660 Menemen, İzmir, bahriye.karaca@bakircay.edu.tr, ORCID: 0000-0003-4463-8180.

² İzmir Bakırçay Üniversitesi Lisansüstü Eğitim Enstitüsü Akıllı Sistemler Mühendisliği Bölümü 35660 Menemen, İzmir, 6016069@bakircay.edu.tr, ORCID: 0009-0007-2960-7163.

Bu tür bir analizin, bireylerin sosyal medya platformlarında harcadıkları zamanın döngüsel doğasını inceleyen ve belirli zaman dilimlerindeki yoğunlaşmalarını ortaya koyan bir matematiksel yaklaşımla yapılması, alana yeni bir perspektif sunabilir.

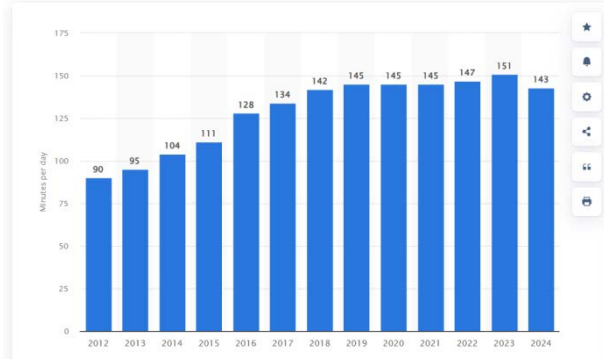
Bu bağlamda, harmonik fonksiyonlar, döngüsel veya periyodik olayları modellemek için etkili bir araç olarak öne çıkmaktadır. Güneşin doğuşu ve batışı, kalp atışları, mevsimsel değişiklikler gibi birçok periyodik olayda kullanılan bu yöntem, sosyal medya kullanım alışkanlıklarının günlük, haftalık veya aylık döngüsel özelliklerini anlamada da güçlü bir araç olabilir.

Bu çalışma, sosyal medya kullanım alışkanlıklarının harmonik fonksiyonlar kullanılarak analiz edilmesini amaçlamaktadır. Çalışmanın temel amacı, sosyal medya kullanım sürelerinin zamana bağlı olarak değişimini matematiksel bir modelle ifade etmek ve elde edilen model aracılığıyla kullanım alışkanlıklarının döngüsel yapısını ortaya koymaktır. Bu bağlamda, Fourier analizi gibi harmonik fonksiyonlarla ilişkili matematiksel araçlar kullanılarak sosyal medya kullanım alışkanlıkları görselleştirilmiş ve analiz edilmiştir.

Çalışmanın kapsamı, veri toplama, analiz ve modelleme olmak üzere üç ana aşamadan oluşmaktadır. İlk olarak, sosyal medya kullanımına ilişkin bir veri seti oluşturulmuş veya mevcut bir veri seti kullanılmıştır. İkinci aşamada, bu veri seti, harmonik analiz yöntemleri kullanılarak incelenmiş ve sosyal medya kullanımındaki periyodik eğilimler belirlenmiştir. Üçüncü aşamada ise, elde edilen sonuçlar görselleştirilmiş ve sosyal medya kullanım alışkanlıklarının bireylerin günlük yaşamları üzerindeki potansiyel etkileri tartışılmıştır.

Bu çalışmanın literatüre katkısı, sosyal medya kullanım alışkanlıklarının matematiksel modelleme aracılığıyla analiz edilebileceğini ve bu tür analizlerin, sosyal medya platformlarının

kullanıcı davranışlarını anlamada ve daha verimli stratejiler geliştirmede önemli bir araç olabileceğini göstermesidir.



Şekil 1. Dünya Çapındaki İnternet Kullanıcılarının Sosyal Ağlarda Harcadığı Günlük Süre

(<https://www.statista.com/statistics/433871/daily-social-media-usage-worldwide/>)

2. TEORİK ÇERÇEVE

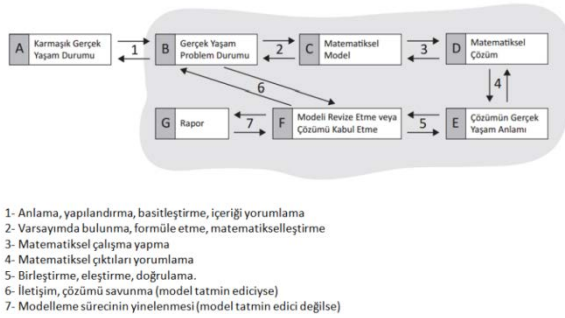
2.1. Matematiksel Modelleme Nedir?

Matematiksel modelleme, gerçek dünyadaki bir problemi, fenomeni veya süreci matematiksel ifadeler ve yapılar kullanarak temsil etme sürecidir. Bu, fiziksel, biyolojik, ekonomik veya sosyal sistemlerdeki karmaşık ilişkileri anlamaya ve çözmeye yardımcı olur. Matematiksel modeller, genellikle denklemler, fonksiyonlar, vektörler, matrisler ve diğer matematiksel yapılarla tanımlanır ve bu yapılar, gözlemler ve deneyler ile doğrulanabilir. Matematiksel modelleme, bir olgunun davranışını açıklamak, tahminlerde bulunmak veya belirli sonuçları optimize etmek için kullanılır. **Matematiksel modelleme süreci, genellikle aşağıdaki adımlardan oluşur:**

- ✓ **Problem Tanımlanması:** İlk olarak, modelleme yapılacak olgu veya sistem belirlenir. Gerçek dünyadaki

bu olgu, matematiksel olarak temsil edilmeye çalışılacaktır.

- ✓ **Varsayımlar ve Basitlemeler:** Gerçek dünyadaki karmaşık sistemlerin tamamını modellemek çoğu zaman mümkün veya pratik değildir. Bu nedenle, sistemin önemli ve etkili parametreleri seçilir ve diğerleri göz ardı edilir.
- ✓ **Matematiksel Temsil:** Seçilen değişkenler ve parametreler matematiksel terimlerle ifade edilir. Bu, denklem, fonksiyon, diferansiyel denklem veya istatistiksel modelleme olabilir.
- ✓ **Çözümleme ve Analiz:** Matematiksel model çözüme kavuşturulur ve elde edilen çözüm, gerçek dünya sistemine uygulanır. Çözüm, analitik veya sayısal yöntemlerle yapılabilir.
- ✓ **Sonuçların Yorumlanması ve Modelin İyileştirilmesi:** Model sonuçları gerçek verilerle karşılaştırılır ve gerekiyorsa modelde iyileştirmeler yapılır. Modelin doğruluğu, hata analizi veya optimizasyon teknikleri kullanılarak test edilebilir.



Şekil 2. Modelleme Süreci

(Stillman, Galbraith, Brown & Edward, 2007: 690)

2.2. Harmonik Fonksiyonlar

2.2.1. Harmonik Fonksiyonların Tanımı ve Özellikleri

Harmonik fonksiyonlar, periyodik (dönemsel) davranışları modellemek için kullanılan matematiksel fonksiyonlardır. Bu fonksiyonlar, belirli bir süre zarfında kendilerini tekrarlayan olayların analizinde oldukça yaygın olarak kullanılır. Özellikle dalga hareketlerini, titreşimleri ve periyodik olayları temsil etmek için idealdirler. Güneş ışığı, ses dalgaları, elektriksel sinyaller ve sosyal medya kullanımının döngüsel özellikleri gibi birçok doğal fenomeni açıklamak için harmonik fonksiyonlar kullanılabilir.

Harmonik fonksiyonlar genellikle sinüs ve kosinüs fonksiyonlarıyla ifade edilir. Bu fonksiyonlar, periyodik doğası nedeniyle belirli bir süre sonunda kendilerini tekrar ederler. **Matematiksel olarak bir harmonik fonksiyon şu şekilde tanımlanabilir:**

$$f(t) = A \cdot \sin(\omega t + \phi) \text{ veya } f(t) = A \cdot \cos(\omega t + \phi)$$

Burada:

- **A (amplitüd):** Fonksiyonun maksimum değerini belirtir. Bu, dalganın büyüklüğünü, yani dalga sıçramasını ifade eder.
- **ω (açısal frekans):** Dalgaların birim zamandaki dönme hızını belirler. Frekans, dalganın ne kadar hızlı tekrarladığını ifade eder ve genellikle saniyede bir (Hz) biriminde ölçülür.
- **T (zaman):** Fonksiyonun zamanla değişimini gösterir.
- **Φ (faz):** Fonksiyonun başlangıç noktasındaki yerini tanımlar. Faz kayması, fonksiyonun yatay ekseninde ne kadar kaymış olduğunu ifade eder.

Harmonik fonksiyonların temel özellikleri şunlardır:

- 1. Periyodiklik:** Harmonik fonksiyonlar belirli bir periyotta kendilerini tekrar ederler. Yani, bir dalga bir kez tamamlandığında, aynı değerleri alarak tekrar başlar.
- 2. Sürekli ve Düzgün:** Bu fonksiyonlar sürekli ve türevlenebilir olduklarından, zamanla değişimlerini analitik olarak incelemek mümkündür.
- 3. Dalgalar:** Sinüs ve kosinüs fonksiyonları, dalga hareketinin temel bileşenleridir. Bu dalgalar, genellikle taşıdıkları enerji veya bilgi ile birleştirilen sinyallerin temel yapı taşlarını oluştururlar.

2.2.2. Sinüs ve Kosinüs Fonksiyonlarının Periyodik Olaylarda Kullanımı

Sinüs ve kosinüs fonksiyonları, özellikle fiziksel olayların, mühendislik problemlerinin ve doğada gözlemlenen birçok periyodik olayın matematiksel modellerinde önemli bir yer tutar. Sosyal medya platformlarındaki kullanıcı etkileşimleri de genellikle periyodik bir davranış gösterir. Kullanıcıların platformlara girişleri, gönderi paylaşımları ve etkileşimler, sabah, öğle ve akşam saatlerine bağlı olarak değişebilir. Bu değişimler, sinüs ve kosinüs fonksiyonları kullanılarak modellenebilir.

Sinüs Fonksiyonu (sin): Sinüs fonksiyonu, genellikle $y=\sin(x)$ şeklinde ifade edilir ve sıfırdan başlayıp +1 ve -1 arasında dalgalanır. Sinüs fonksiyonu, periyodik bir dalga oluşturur ve her 2π birimlik zaman diliminde kendisini tekrar eder.

Kosinüs Fonksiyonu (cos): Kosinüs fonksiyonu, $y=\cos(x)$ şeklinde ifade edilir ve başlangıçta maksimum değere ulaşır. Diğer tüm özellikleri sinüs fonksiyonu ile benzerdir; fakat faz kayması nedeniyle sinüs fonksiyonuna göre bir kayma gösterir.

2.3. Sosyal Medya Kullanımının Matematiksel İncelenmesi

Bu bölümde sosyal medya kullanımının zaman içinde değişkenlik gösteren bir süreç olarak nasıl ele alınabileceği ve bu sürecin matematiksel olarak nasıl incelenebileceği anlatılmıştır.

Sosyal medya kullanımı, statik bir olgu değildir; aksine, zaman içinde sürekli değişen ve dinamik bir süreçtir. Bu değişkenlik, farklı zaman ölçeklerinde gözlemlenebilir:

Günlük Değişkenlik: Bireylerin sosyal medya kullanımı gün içinde farklılık gösterir. Örneğin, sabah işe giderken, öğle yemeği molasında veya akşam evde dinlenirken sosyal medyayı daha sık kullanabilirler. Bu durum, günlük yaşam rutinleri, iş saatleri, okul saatleri ve diğer aktivitelerle ilişkilidir.

Haftalık Değişkenlik: Hafta içi ve hafta sonu sosyal medya kullanımı arasında da farklar olabilir. Hafta sonları, bireylerin daha fazla boş zamanı olduğu için sosyal medyayı daha uzun süre kullanmaları beklenebilir.

- **Mevsimsel Değişkenlik:** Bazı araştırmalar, mevsimlere göre sosyal medya kullanımında değişiklikler olduğunu göstermektedir. Örneğin, tatil dönemlerinde veya özel günlerde (bayramlar, yılbaşı vb.) sosyal medya kullanımı artabilir.
- **Trendlere Bağlı Değişkenlik:** Sosyal medya platformları ve içerikleri sürekli değişmektedir. Yeni trendler, akımlar, meydan okumalar ve viral içerikler, kullanıcıların platformları kullanma şeklini ve sıklığını etkileyebilir.
- **Kullanıcı Davranışlarındaki Değişimler:** Bireylerin sosyal medya kullanım alışkanlıkları zamanla değişebilir. Örneğin, yeni bir platforma geçiş yapabilirler, ilgi alanları değişebilir veya sosyal medya kullanımına ayırdıkları zamanı azaltabilirler.

Bu değişkenlikleri matematiksel olarak modellemek için, zamanı bir değişken olarak ele almak ve sosyal medya kullanımını zamanın bir fonksiyonu olarak ifade etmek gereklidir.

Bu çalışmada, sosyal medya kullanımının incelenmesinde harmonik analiz yöntemine odaklanılmıştır. Harmonik analiz, bir sinyali (bu durumda, sosyal medya kullanım verilerini) farklı frekanslardaki sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının toplamı olarak ifade etmeyi sağlar. Bu sayede, kullanım verilerindeki periyodik bileşenler ve döngüler tespit edilebilir.

Örneğin, bir kullanıcının gün içindeki sosyal medya kullanım sıklığı, aşağıdaki gibi bir harmonik fonksiyon ile modellenebilir:

$$f(t) = A_0 + A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

Burada:

- **$f(t)$:** t zamanındaki kullanım sıklığı.
- **A_0 :** Ortalama kullanım sıklığı (DC bileşeni).
- **A_i :** i -inci frekanstaki sinüs/kosinüs fonksiyonunun genliği.
- **ω_i :** i -inci frekansın açısal hızı ($2\pi/T_i$, burada T_i i -inci periyottur).
- **φ_i :** i -inci frekansın faz kayması.

Bu model, farklı periyotlardaki döngüleri (örneğin, günlük, haftalık döngüler) temsil etmek için birden fazla sinüs/kosinüs terimi içerebilir. Fourier analizi, bu modeldeki A_i , ω_i ve φ_i parametrelerini tahmin etmek için kullanılmıştır.

3. METADOLOJİ

3.1. Veri Toplama

Bu çalışmada kullanılmak üzere Python programı ile 1000 gözlemlik sentetik veri seti oluşturulmuştur. Her gözlem, bir kullanıcının bir günde sosyal medya kullanımına dair bilgileri içermektedir. Oluşturduğumuz veri seti, sosyal medya kullanımını simüle eden sentetik bir veri setidir. Harmonik analiz için uygun hale getirmek amacıyla, veriye periyodik örüntüler (günlük ve haftalık döngüler) eklenmiştir.

Değişkenler:

- **Kullanıcı ID:** Her kullanıcı için benzersiz bir tanımlayıcı. Bu, farklı kullanıcıların verilerini ayırmamızı sağlar.
- **Tarih:** Verinin kaydedildiği tarihi gösterir. Bu, verinin zaman içindeki değişimini analiz etmek için gereklidir.
- **Haftanın Günü:** Verinin kaydedildiği günü gösterir (Pazartesi, Salı, ..., Pazar). Bu, haftanın farklı günlerinde kullanım alışkanlıklarında farklılıklar olup olmadığını analiz etmek için kullanılabilir.
- **Sabah, Öğle, Akşam:** Günün farklı zaman dilimlerinde sosyal medyada geçirilen süreleri dakika cinsinden gösterir. Bu, kullanımın gün içinde nasıl dağıldığını analiz etmek için kullanılır.
- **En Çok Kullanılan Platform:** İlgili tarihte en çok kullanılan sosyal medya platformunu gösterir (örneğin, Instagram, Twitter, TikTok, Facebook, YouTube). Bu, farklı platformların kullanım sıklığını ve kullanıcıların platform tercihlerini analiz etmek için kullanılabilir.
- **Kullanım:** İlgili tarihte sosyal medyada geçirilen toplam süreyi dakika cinsinden gösterir. Bu, harmonik analizde kullanılan ana değişkendir. Bu değişken, günlük ve

haftalık sinyallerin toplamına gürültü eklenerek oluşturulmuştur.

3.2. Harmonik Modelleme

Bu bölümde, sosyal medya kullanımının harmonik fonksiyonlar ile modellenmesi detaylandırılmıştır. Bu bağlamda, sosyal medya kullanım süresi gibi periyodik verilerin modellenmesi için aşağıdaki fonksiyon kullanılacaktır:

$$E(t)=A \cdot \sin^{[f_0]}(\omega t + \phi)$$

Burada:

- **E(t):** Zaman t anındaki sosyal medya kullanım süresi.
- **A:** Amplitüd, yani günlük maksimum kullanım süresi.
- **ω :** Frekans, sosyal medya kullanım döngüsünün sıklığı (ne kadar hızlı bir şekilde tekrarlanır).
- **ϕ :** Faz açısı, sosyal medya kullanımının başlangıç zamanını belirler.

Bu çalışmada bu modelin amacı, kullanıcıların sosyal medya kullanım sürelerinin zaman içindeki düzenli bir şekilde değiştiği varsayımıyla, bu değişimleri matematiksel bir modelle açıklamaktır.

3.3. Modelin Parametrelerinin Belirlenmesi

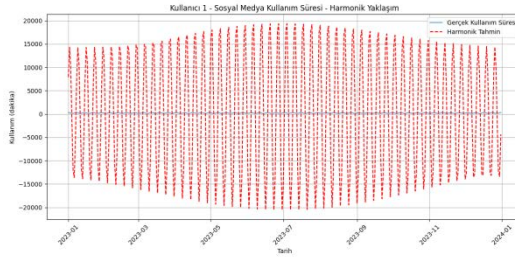
Harmonik modelin daha iyi çalışabilmesi için parametrelerin doğru bir şekilde belirlenmesi gereklidir. Modelde üç temel parametre vardır: Amplitüd (A), Frekans (ω), ve Faz açısı (ϕ).

- ✓ **Amplitüd (A):** Amplitüd, sinüs fonksiyonunun maksimum yüksekliğini belirler ve bu, sosyal medya kullanımının günlük maksimum süresini temsil eder. Yani, A, bir kullanıcının bir gün boyunca sosyal medya kullanım süresinin en yüksek değeridir.

- ✓ **Frekans (ω):** Frekans, sosyal medya kullanımının ne kadar sık tekrarlandığını belirtir. Yani, kullanım döngüsünün periyodunu kontrol eder. Frekans, genellikle ttt zaman birimi başına kaç kez kullanımın zirveye çıktığını ifade eder.
- ✓ **Faz Açısı (ϕ):** Faz açısı, sinüs fonksiyonunun başlangıç noktasını belirler. Bu parametre, kullanıcıların en yüksek kullanım zamanlarını ve kullanım zamanlarının ne zaman başlayacağını gösterir. Örneğin, bazı kullanıcılar sabah erken saatlerde, bazıları ise akşam geç saatlerde sosyal medya kullanımında zirveye ulaşabilir.

3.4. Modelin Uygulanması

Bu bölümde modelin uygulanabilmesi için sentetik veri seti üzerinde Python kodu ile çalışılmıştır. Fourier dönüşümü ile frekans bileşenlerine ayrılmasını sağlandı. Güç spektrumunu analiz ederek, en güçlü frekans bileşenlerini belirleriz ve bu bileşenlerden harmonik bir model kurulmuştur. Son olarak, bu model ile hem mevcut veriyi hem de gelecek tahminlerini görselleştirildi.



Şekil 5. Harmonik Analizi Sonuçlarının Görselleştirilmesi

4. SONUÇ

Bu çalışmada, sosyal medya kullanım verilerinin harmonik analizi (Fourier analizi) yöntemi incelenmiştir.

Özellikle, günlük ve haftalık periyodik örüntüler içeren sentetik sosyal medya kullanım verileri oluşturularak, harmonik analiz yönteminin bu örüntüleri ne kadar başarılı bir şekilde yakalayabildiği araştırılmıştır.

Elde edilen bulgular, harmonik analizin sentetik verideki periyodik sinyalleri yüksek doğrulukla tespit edebildiğini göstermiştir. Grafikler, harmonik tahminlerin gerçek veriye oldukça yakınsadığını görsel olarak doğrulamıştır. Bu durum, harmonik analizin sosyal medya kullanım verilerindeki tekrarlayan davranışları modellemek için etkili bir araç olduğunu ortaya koymaktadır.

Çalışmanın temel sonuçları şu şekilde özetlenebilir:

- Harmonik analiz, sosyal medya kullanım verilerindeki günlük ve haftalık döngüleri başarılı bir şekilde modelleyebilmektedir.
- Fourier dönüşümü, verideki baskın frekansları (periyotları) doğru bir şekilde tespit edebilmektedir.
- Sentetik veriler, harmonik analiz gibi yöntemlerin prensiplerini ve işleyişini göstermek için kullanışlı bir araçtır. Bu çalışma özelinde, sentetik verilerle elde edilen başarılı sonuçlar, yöntemin gerçek verilere uygulandığında da benzer sonuçlar verme potansiyeline işaret etmektedir.
- Her kullanıcı için ayrı ayrı yapılan analizler, kullanıcılar arasında periyodik kullanım örüntülerinde farklılıklar olabileceğini göstermektedir. Bu, kişiselleştirilmiş analizlerin ve modellemelerin önemini vurgulamaktadır.

Bu çalışma, harmonik analizin sosyal medya kullanım verilerinin analizinde önemli bir potansiyele sahip olduğunu göstermektedir. Bu yöntem, kullanıcı davranışlarını anlamak,

gelecekteki kullanım eğilimlerini tahmin etmek ve kişiselleştirilmiş öneri sistemleri geliştirmek için kullanılabilir.

KAYNAKÇA

- Bracewell, R. N. (2000). *The Fourier Transform and Its Applications* (3rd ed.). McGraw-Hill.
- Gayo-Avello, D., & Crespo, R. (2011). *Social Media Mining and Analysis*. Springer.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*. Princeton University Press.
- Hunter, J. D. (2007). Matplotlib: A 2D graphics environment. *Computing in Science & Engineering*, 9(3), 90-95.
- Hyndman, R. J., & Athanasopoulos, G. (2018). *Forecasting: principles and practice* (2nd ed.). OTexts. Retrieved from <https://otexts.com/fpp2/>
- Jones, E., Oliphant, T., & Peterson, P. (2001). *SciPy: Open Source Scientific Tools for Python*. Retrieved from <https://www.scipy.org/>
- Oppenheim, A. V., & Schafer, R. W. (2009). *Discrete-Time Signal Processing* (3rd ed.). Pearson Education.
- Stieglitz, S., & Dang-Xuan, L. (2013). *Social Media and Political Communication: A Social Media Mining Approach*. Springer.
- van der Walt, S., Colbert, S. C., & Varoquaux, G. (2011). The NumPy array: A structure for efficient numerical computation. *Computing in Science & Engineering*, 13(2), 22-30.

SCHWARZ LEMMA ÜZERİNE

Nuray EROĞLU¹

1. GİRİŞ

Kompleks fonksiyonlar teorisi başta olmak üzere “Schwarz Lemma” matematikte önemli bir rol oynamaktadır. Aslında “lemma” olarak adlandırılrsa da bir teorem kadar güçlü ve önemlidir. Özellikle “Riemann Dönüşüm Teoremi” ve “Liouville Teoremi” gibi teoremlerin kanıtlarında kullanılması bu lemmanın gücünü ve değerini ortaya çıkarmaktadır.

Bu lemma adını, yine matematikte çok bilinen Cauchy-Schwarz eşitsizliği, konform dönüşümlerdeki Schwarz-Christoffel formülü, Schwarzian türev, Schwarz yansıma ilkesi gibi teoremleri ortaya koyan Alman matematikçi Hermann Amandus Schwarz’dan almıştır. Bu lemma ilk olarak Schwarz’ın kendi doktora tezinde yer almıştır. Her ne kadar da Yunan matematikçi Carathéodory bu lemma’yı isim vermeden 1905 [1] ve 1907 [2] yıllarındaki makalelerinde kullansa da asıl bilinen ispatını 1912 [3] yılında vermiştir.

Bilinen kadarıyla bu lemmanın özel hali Schwarz’ın 1869-70 yılları arasındaki derslerindeki notlarda yer almaktaydı. Bu notlar Schwarz’ın toplu eserlerinin 1890’da yayınlanmasına kadar basılmamıştır. 1884’te Poincare de bu lemmanın özel bir halini kanıtlamış ve bunu bir makalesinde ana lemma olarak kullanmıştır. Özellikle isim verildikten sonra Schwarz

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, neroglu@nku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-0780-2247.

Lemma'nın çok fazla uygulama alanı olması gerçeği, gelişmesini de bir o kadar hızlandırmıştır.

Schwarz Lemma, belirli hipotezler altında kompleks düzlemdeki birim çember üzerinde tanımlı ve değer kümesi de yine aynı birim çember olan analitik fonksiyonların sınırlarını ve davranışlarını anlamamızı ve tahmin etmemizi sağlamaktadır. Bu yüzden özellikle matematik alanında (Kompleks Fonksiyonlar Teorisi, onun alt dalı olan Geometrik Fonksiyonlar Teorisi, Harmonik Analiz, Kompleks Dinamik Sistemler, Diferansiyel Geometri) ve Mühendislik alanında (özellikle Elektrik-Elektronik mühendisliğinde devre analizi) çok sık kullanılmaktadır.

2. SCHWARZ LEMMA ve GELİŞİMİ

2.1. (Klasik) Schwarz Lemma

Ön teorem. (Schwarz Lemma)

$f, \mathbb{D}$ birim diskinde analitik, $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Bu durumda $\forall z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq |z|$ ve $|f'(0)| \leq 1$ 'dir. Ayrıca eşitlik hali, $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $|c| = 1$ özelliğindeki $f(z) = cz$ fonksiyonu için geçerlidir.

İspat. $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $g(z) = \frac{f(z)}{z}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $f, \mathbb{D}$ birim diskinde analitik olduğundan $z = 0$ civarında Taylor açılımına sahiptir. Ayrıca $f(0) = 0$ olması da göz önüne alınırsa

$$f(z) = c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{f(z)}{z} = \frac{c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots}{z} \\ &= c_1 + c_2 z + \dots + c_n z^{n-1} + \dots \end{aligned}$$

bulunur. O halde bu eşitlikten söyleyebiliriz ki g fonksiyonu $\mathbb{D}$ birim diskinde analitiktir ve sabit bir fonksiyon değildir. Dolayısıyla Maksimum Modül Teoremine göre fonksiyon maksimum değerini $\mathbb{D}$ 'nin sınırında alır. Yani $|g(z)| \leq 1$ yazılabilir.

$$|g(z)| = \left| \frac{f(z)}{z} \right| \leq 1$$

eşitsizliğinden $|f(z)| \leq |z|$ şeklinde ilk istenen sonuca ulaşılabilir.

Şimdi ise f fonksiyonunun $z = 0$ noktasında türev tanımının kullanılmasıyla aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z - 0} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z)}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} g(z) = g(0)$$

Bulunan bu ifade ve ulaşılan ilk sonuç birleştirilirse

$$|f'(0)| = |g(0)| \leq 1$$

ikinci istenen sonuca ulaşılabilir. [4]

Ayrıca $z_0 \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ için $|f(z_0)| = |z_0|$ eşitlik hali alındığında $|g(z_0)| = 1$ olur ki bu da g fonksiyonunun maksimum değeri aldığını gösterir. Maksimum Modül Teoreminden g fonksiyonu $\mathbb{D}$ bölgesinde sabittir. Yani $g(z) = c$ ve $|c| = 1$ ' dir. Bu da $|c| = 1$ için $f(z) = cz$ olmasına denktir.

Klasik Schwarz lemması, fonksiyonun birim diski kendisine ve orijini orijine eşlediği yönündeki küçük hipotezler altında analitik bir fonksiyonun birim disk üzerindeki davranışına ilişkin ayrıntılar sağlamaktadır. Acaba bunun yerine fonksiyon başka bir iç noktayı z_0 sabitliyorsa, yine de bir şeyler söylenebilir mi? İşte bu düşünceyle aşağıdaki lemma ortaya çıkacaktır.

2.2. Schwarz-Pick Lemma

Schwarz Lemmasının ilk genellemesi Georg Pick tarafından verilen “Schwarz-Pick Lemma” sıdır ve aşağıdaki şekilde ifade edilmektedir. Bu genellenenin klasik Schwarz Lemma’dan farkı $f(0) = 0$ kısıtlamasının kaldırılabilceğini göstermektedir.

Schwarz-Pick Lemma hiperbolik geometri için Schwarz lemma’nın bir uzantısıdır.

Ön teorem. (Schwarz-Pick Lemma)

$f, \mathbb{D}$ birim diskinde analitik ve $z, z_0 \in \mathbb{D}$ olsun. O halde

$$\left| \frac{f(z) - f(z_0)}{1 - \overline{f(z)}f(z_0)} \right| \leq \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

ve

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

Eşitlik hali sadece f fonksiyonunun, $z, z_0 \in \mathbb{D}$, $\phi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(z) = e^{i\phi} \frac{z - z_0}{1 - z\bar{z}_0}$$

şeklinde tanımlanan Möbius dönüşümü olması durumunda mümkündür. Yani, eşitlik hali birim diski kendi üzerine resmeden konform bir dönüşümdür.

2.3. Schwarz-Pick-Ahlfors Lemma

Schwarz-Pick-Ahlfors Lemma hiperbolik manifoldlar için benzer bir lemma ortaya koyar.

Ön teorem. (Schwarz-Pick-Ahlfors Lemma)

$\mathbb{D}$ birim diski ρ Poincaré metriğine sahip olsun. Gauss eğriliği ≤ -1 olan σ Hermitian metriğine sahip olan Riemann yüzeyi $\mathbb{S}$ olsun. $f: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{S}$ analitik fonksiyonu verilsin. O halde $z_1, z_2 \in \mathbb{D}$ için

$$\sigma(f(z_1), f(z_2)) \leq \rho(z_1, z_2)$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu Lemma bize $\mathbb{D}$ birim diskindeki herhangi bir eğrinin hiperbolik uzunluğunun en azından görüntüsünün uzunluğuna eşit olduğunu gösterir. [5]

2.4. Sınırdaki Schwarz Lemma

Ön teorem. (Sınırdaki Schwarz Lemma)

$f, \mathbb{D}$ birim diskinde analitik, $z \in \mathbb{D}$ için $|f(z)| \leq 1$ ve $f(0) = 0$ olsun. Ayrıca f fonksiyonu $|f(\zeta)| = 1$ olmak üzere sürekli olarak bir $\zeta \in \partial\mathbb{D}$ sınır noktasına kadar uzanıyorsa ve $f'(\zeta)$ türevi varsa

$$|f'(\zeta)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|}$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitlik hali sadece f fonksiyonunun, $0 \leq a \leq 1$ olmak üzere

$$f(z) = z \frac{z + a}{1 + az}$$

şeklinde tanımlanması ile mümkündür. Hatta buna ek olarak

$$f'(\zeta) \geq 1$$

eşitsizliği de kolaylıkla elde edilebilir. Bu eşitsizliğin eşitlik hali sadece f fonksiyonunun,

$\varphi \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$f(z) = ze^{i\varphi}$$

şeklinde tanımlanması ile mümkündür. [6]

3. SONUÇ

Schwarz Lemma ifadesi son derece uygulanabilir olduğundan zaman içerisinde oldukça fazla gelişim göstermiştir. Bu lemmanın sayısız genellemeleri olması ve hakkında en az iki kitap [5, 21] yazılması lemmanın önemini bir kez daha açığa çıkarmaktadır. Ayrıca son 25 yılda Schwarz Lemma'nın sınır biçimi hakkında da önemli çalışmalar mevcuttur.

KAYNAKÇA

- Carathéodory, C. (1905). Sur quelques g'énéralisations du th'éorème de M. Picard. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 141, 1213–1215.
- Carathéodory, C. (1907). Sur quelques applications du th'éorème de Landau–Picard. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 144, 1203–1206.
- Carathéodory, C. (1912). Untersuchungen über die konformen Abbildungen von festen und veränderlichen Gebieten. *Math. Ann.*, 72, 107–144.
- Goluzin, G. M. (1969). Geometric Theory of functions of a Complex variable. *American Mathematical Society*.
- Osserman, R. (1999). From Schwarz to Pick to Ahlfors and Beyond. *Notices of the AMS.*, 46(8), 868–873.
- Osserman, R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, 3513–3517.

ON THE NUMERICAL RADIUS OF HARDY-TYPE OPERATORS

Zameddin I. ISMAILOV¹

Pembe IPEK AL²

1. INTRODUCTION

Assumed that H be a Hilbert space that generates the norm $\|\cdot\|$ through the inner product $\langle \cdot, \cdot \rangle$. The Banach algebra of bounded linear operators acting on H is represented by $B(H)$, the operator norm is represented as

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \{\|Ax\|: x \in H\}, \quad A \in B(H).$$

The numerical range of a bounded linear operator A is given by

$$W(A) = \{\langle Ax, x \rangle: x \in H, \quad \|x\| = 1\}.$$

It is commonly known that an operator's spectrum is contained in the closure of its numerical range and that its numerical range is convex (the Toeplitz-Hausdorf Theorem). A is a self-adjoint if and only if $W(A) \subset \mathbb{R}$. The numerical radius of A is represented as

$$\omega(A) = \sup\{|\lambda|: \lambda \in W(A)\}$$

and the following inequalities

$$\frac{\|A\|}{2} \leq \omega(A) \leq \|A\|$$

¹ Prof., Karadeniz Technical University, Faculty of Science, Department of Mathematics, zameddin.ismailov@gmail.com, ORCID:0000-0001-5193-5349.

² Assoc. Prof., Karadeniz Technical University, Faculty of Science, Department of Mathematics, ipekpeembe@gmail.com, ORCID:0000-0002-6111-1121.

hold (see [7]).

Volterra operator is defined as

$$(Vf)(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad f \in L^2: L^2(0,1).$$

The adjoint of the Volterra operator is in the form

$$(V^*f)(x) = \int_x^1 f(t)dt, \quad f \in L^2.$$

In [3] and [9], some convergence properties of p -numerical radii, p -Crawford numbers sequences, (p, q) -numerical radii, (p, q) -Crawford numbers sequences have been investigated, respectively.

In [10], some estimates have been obtained by means of the number of differences between the operator norm of the analytic functions of the linear bounded Hilbert space operator and the numerical radius, and the difference numbers of the powers of the operators.

For more detailed about numerical range and numerical radius, we refer to works [1,4,5,7].

In this work, the numerical radius of the following Hardy-type operators in the form

$$H_\varphi f(x) = \varphi(x) \int_0^x f(t)dt, \quad f \in L^2,$$

$$H_\varphi: L^2 \rightarrow L^2, \varphi \in C[0,1]$$

has been investigated. Note that H_φ is compact and quasinilpotent.

2. ESTIMATES FOR THE NUMERICAL RADIUS OF H_φ

Firstly, we give one result.

Proposition 2.1: If $\varphi(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots, \varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, then

$$\|H_\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

Proof. For any $f \in L^2$, we have

$$\begin{aligned} \|H_\varphi f\|^2 &= \left\| x^n \int_0^x f(t) dt \right\|^2 \\ &= \int_0^1 x^{2n} \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 x^{2n} \left(\int_0^x |f|(t) dt \right)^2 dx \\ &\leq \int_0^1 x^{2n} \left(\int_0^x 1^2 dt \right) \left(\int_0^x |f|^2(t) dt \right) dx \\ &\leq \int_0^1 x^{2n+1} dx \|f\|^2 \\ &= \frac{1}{2n+2} \|f\|^2. \end{aligned}$$

Hence, we get

$$\|H_\varphi\| \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}, n = 0, 1, 2, \dots$$

Note that the last result in more precise estimate (see, [6]).

Now, it will be give some results about to numerical radius for the operator H_φ in special cases of function φ .

Theorem 2.2.

- (1) If $\varphi(x) = x^n, n = 0, 1, 2, \dots$, then $\omega(H_n) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}$,
 (2) If $\varphi = P_m$ is polinomial function $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k, 0 \leq x \leq 1$, then

$$\omega(H_{P_m}) \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\sqrt{k+1}},$$

- (3) If φ is continous function in $[0, 1]$, then

$$\omega(H_\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(H_{P_n}).$$

Proof. (1) For any $f \in S_1(L^2)$, we have

$$\begin{aligned} |\langle H_\varphi f, f \rangle| &= \left| \int_0^1 \left(x^n \int_0^x f(t) dt \right) \overline{f(x)} dx \right| \\ &\leq \int_0^1 \left| x^n \int_0^x f(t) dt \right| |f(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 \left| x^n \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f(x)|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_0^1 x^{2n} \left(\int_0^x |f(t)| dt \right)^2 dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left(\int_0^1 x^{2n} \left(\int_0^x 1^2 dt \int_0^x |f|^2(t) dt \right) dx \right)^{1/2} \\
 &\leq \left(\int_0^1 x^{2n+1} dx \right)^{1/2} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2n+2}},
 \end{aligned}$$

where $S_1(L^2)$, is a unit sphere in L^2 .

Then,

$$\omega(H_\varphi) \leq \frac{1}{\sqrt{2n+2}}.$$

(2) Let us $P_m(x) = \sum_{k=0}^m a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{C}$, $k = 0, 1, \dots, m$. Then by subadditivity property of numerical radius function we have

$$\begin{aligned}
 \omega(H_{P_m}) &= \omega \left(\sum_{k=0}^m a_k x^k \int_0^x f(t) dt \right) \\
 &\leq \sum_{k=0}^m |a_k| \omega \left(x^k \int_0^x f(t) dt \right) \\
 &\quad \text{(using proposition (1) in Theorem 2.2)} \\
 &\leq \sum_{k=0}^m |a_k| \frac{1}{\sqrt{2k+2}} \\
 &\leq \frac{a}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^m \frac{1}{\sqrt{k+1}},
 \end{aligned}$$

where $a = \max_{0 \leq k \leq m} |a_k|$. Hence, it is clear that

$$\omega(H_{P_m}) \leq \frac{a(m+1)}{\sqrt{2}}$$

(3) If $\varphi \in C[0,1]$, then by Weierstrass Approximation Theorem there exist the polinomial sequences (P_n) in $[0,1]$, such that (P_n) uniformly converges to the function φ by supremum metric.

Then, we have

$$\begin{aligned} \|(H_\varphi - H_{P_n})f\|^2 &= \int_0^1 |H_\varphi f - H_{P_n} f|^2(t) dt \\ &= \int_0^1 \left| \varphi(t) \int_0^x f(t) dt - P_n(t) \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \\ &= \int_0^1 |\varphi - P_n|^2(t) \left| \int_0^x f(t) dt \right|^2 dx \\ &\leq \sup_{[0,1]} |\varphi - P_n|(t) \int_0^1 \left(x \int_0^x |f|^2(t) dt \right) \\ &\leq \frac{1}{2} \|\varphi - P_n\|_{C[0,1]}^2 \|f\|^2. \end{aligned}$$

Thus, we get

$$\|H_\varphi - H_{P_n}\| \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\varphi - P_n\|_{C[0,1]}, n \geq 1.$$

Hence, the operator sequences (H_{P_n}) converges to the operator H_φ in operator norm. Consequently, by Theorem 6 in [2] it is obtained that

$$\omega(H_\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(H_{P_n}).$$

Example: Let us

$$\varphi(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1, \varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}.$$

It is well-known that the following polinomial sequences

$$P_m(x) = \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} x^m, \quad m \geq 1$$

uniformly converges to φ in supremum norm.

Hence, by proposition (2) in Theorem 2.2 we have

$$\omega(H_{P_m}) \leq \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \frac{1}{\sqrt{2m+2}} \leq \sum_{m=0}^n \frac{1}{m!} \leq e.$$

Then, by (3) in Theorem 2.2 it implies that

$$\omega(H_\varphi) = \lim_{n \rightarrow \infty} \omega(H_{P_n}).$$

Theorem 2.3: If $\varphi \in L^2$, then the following are true

- (1) $\|H_\varphi\| \leq \left(\int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2},$
- (2) $\omega(H_\varphi) \leq \left(\int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2}.$

Proof.

(1) For any $f \in L^2(0,1)$, we have

$$\begin{aligned} \|H_\varphi f\|^2 &= \left\| \int_0^1 \left| \varphi(x) \int_0^x f(t) dt \right| \right\|^2 dx \\ &\leq \int_0^1 \left(|\varphi|^2(x) \int_0^x |f|(t) dt \right)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^1 |\varphi|^2(x) \left(\int_0^1 1^2 dt \int_0^x |f|^2(t) dt \right) dx \\ &\leq \int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \|f\|^2. \end{aligned}$$

Then, we get

$$\|H_\varphi\| \leq \left(\int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2}$$

(2) For any $f \in L^2$, $\|f\| = 1$ we have

$$\begin{aligned} |\langle H_\varphi f, f \rangle| &\leq \int_0^1 |\varphi|(x) \left| \int_0^x f(t) dt \right| |f(x)| dx \\ &\leq \int_0^1 |\varphi|(x) \sqrt{x} \left(\int_0^1 |f|^2(t) dt \right)^{1/2} |f(x)| dx \\ &\leq \left(\int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_0^1 |f|^2(x) dx \right)^{1/2} \\ &= \left(\int_0^1 x |\varphi|^2(x) dx \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Theorem 2.4: If $\varphi, \varphi^{-1} \in C[0,1]$, then

$$\frac{1}{8\|\varphi^{-1}\|_{C[0,1]}} \leq \omega(H_\varphi).$$

Proof. It is clear that

$$V = \varphi^{-1}\varphi V = \varphi^{-1}H_\varphi, V: L^2 \rightarrow L^2$$

is a classical Volterra operator. Then, by [8] on the numerical radius of product of two operator we have

$$\omega(V) \leq 4\omega(\varphi^{-1}I)\omega(H_\varphi).$$

On the other hand for $f \in L^2, \|f\| = 1$

$$\begin{aligned} |\langle \varphi^{-1}If, f \rangle| &= \left| \int_0^1 \varphi^{-1}(x)f(x)\overline{f(x)}dx \right| \\ &\leq \max_{0 \leq x \leq 1} |\varphi^{-1}|(t) \int_0^1 |f|^2(x)dx = \|\varphi^{-1}\|_{C[0,1]}. \end{aligned}$$

Then, we have

$$\omega(\varphi^{-1}I) \leq \|\varphi^{-1}\|_{C[0,1]}.$$

Since $\omega(V) = \frac{1}{2}$ (see, [11]), then we get

$$\frac{1}{2} \leq 4\|\varphi^{-1}\|_{C[0,1]}\omega(H_\varphi).$$

Consequently, we obtain

$$\frac{1}{8\|\varphi^{-1}\|_{C[0,1]}} \leq \omega(H_\varphi).$$

Example: Let us $\varphi(x) = e^x, 0 \leq x \leq 1, \varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ and $\varphi \in C[0,1]$ and $\varphi^{-1}(x) = e^{-x} \in C[0,1]$.

In this case, we have

$$\int_0^1 xe^{2x}dx = \frac{1}{2} \int_0^1 xd(e^{2x}) = \frac{e^2 + 1}{4}$$

and $\max_{0 \leq x \leq 1} e^{-x} = 1$. Then, by Theorem 2.3 and 2.4 it is established that

$$\frac{1}{8} \leq \omega(H_\varphi) \leq \frac{1}{2} \sqrt{1 + e^2}.$$

REFERENCES

- [1] Bhunia, P., Dragomir, S. S., Moslehian, M. S. & Paul, K. (2022). Lectures on numerical radius inequalities. New York: Springer Nature.
- [2] Bhunia, P., Ipek Al, P. & Ismailov, Z. I. (2024). On the convergence of some spectral characteristics of the converging operator sequences. *Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci.*, 134(1), 1-15.
- [3] Çağlayan Ü. & Ismailov Z. I. (2024). On the convergence properties of p –numerical radii and p –crawford numbers sequences. in Current Studies in Science and Mathematics, Ankara: Platanus Publishing.
- [4] Dragomir, S. S. (2013). Inequalities for the numerical radius of linear operators in Hilbert spaces. Cham: Springer.
- [5] Gustafson K. E. & Rao, D. K. (1997). Numerical range. New York: Springer.
- [6] Gürdal, M., Garayev, M. T. & Saltan, S. (2015). Some concrete operators and their properties. *Turkish J. Math.* 39(6), 970-989.
- [7] Halmos, P. R. A. (1982). Hilbert space problem book. New York: Springer.
- [8] Holbrook, J. A. R. (1969). Multiplicative properties of the numerical radius in operator theory. *J. Reine Angew. Math.* 237, 166-174.
- [9] Ipek Al, P., & Ismailov Z. I. (2024). On the convergence properties of (p, q) –numerical radii and (p, q) –crawford numbers sequences. International Research in the Field of Mathematics-I, Konya: Eğitim Yayınevi.

- [10] Ipek Al, P., Öztürk Mert, R., & Ismailov, Z. I. (2024). Operator norm-numerical radius gaps for analytic function of Hilbert space operators. *Konuralp Journal of Mathematics*, 12(1), 80-85.
- [11] Khadkhuu, L. & Tsedenbayar, D. (2018). On the numerical range and numerical radius of the Volterra operator, *Izv. Irkutsk. Gos. Univ. Ser. Mat.* 24,102-108.

SOME CATEGORICAL CONSTRUCTIONS ON THE GENERALIZED CROSSED MODULES

Hatice GÜLSÜN AKAY¹

1. INTRODUCTION

A group morphism $\partial: T \rightarrow Z$, together with an action of Z defined on T , becomes a crossed module if it satisfies the following Peiffer conditions:

$$\text{CM1)} \partial(z t) = z \partial(t) z^{-1}$$

$$\text{CM2)} \partial(t_1) t_2 = t_1 t_2 t_1^{-1}$$

for all $t, t_1, t_2 \in T$ and $z \in Z$. A crossed module is called crossed- Z module which have the same fixed codomain Z . Crossed modules of groups are initially defined by Whitehead (Whitehead, 1949a; 1949b) as models for (homotopy) 2-types.

Generalized crossed modules were firstly given by Yavari and Salemkar in (Yavari and Salemkar, 2019). They defined the generalized crossed module on a group morphism $\partial: T \rightarrow Z$ and actions of Z on Z and of T on T arbitrary instead of conjugation actions. Thus they generalized the crossed module concept. Furthermore they studied the relations between epimorphisms and the surjective morphisms.

Algebraic (co)limits in homotopy theory were computed by Brown and Sivera in (Brown and Sivera, 2009). Colimits in the categories of crossed modules (over groupoids) and modules (over groupoids) were introduced in (Brown and Higgins, 1981).

¹ Assistant Professor, Eskişehir Osmangazi University, Faculty of Science, Department of Mathematics and Computer Science, e-mail:hgulsun@ogu.edu.tr, ORCID: 0000-0001-7983-6852.

Over time, the (co)limits of crossed modules were explored in various algebraic structures, as seen in (Aytekin and Emir, 2020; Aytekin, 2021; Casas and Ladra, 2000; Ege Arslan, Akça, Onarlı, G. & Avcıoğlu, 2019; Emir and Çetin, 2017). The case of 2-crossed modules (over groups) was examined in (Soylu, 2022) and the case of 2-generalized crossed modules is studied in (Akay).

In this work, we give the some categorical properties of generalized crossed modules in detail.

2. GENERALIZED CROSSED MODULES

A generalized crossed module (T, Z, ∂) , is a morphism of groups $\partial: T \rightarrow Z$, together with the actions,

1. an action of T on T , denoted by $t_1 \triangleleft_T t_2$, for every $t_1, t_2 \in T$,
2. an action of Z on Z , denoted by $z_1 \triangleleft_Z z_2$, for every $z_1, z_2 \in Z$,
3. an action of Z on T , denoted by ${}^z t$, for every $t \in T, z \in Z$

satisfying the conditions:

$$\mathbf{GCM1)} \quad \partial({}^z t) = z \triangleleft_Z \partial(t)$$

$$\mathbf{GCM2)} \quad \partial(t) {}^{t'} = t \triangleleft_T t'$$

for all $t, t' \in T$ and $z \in Z$. If ∂ only satisfies condition **GCM1**, we get a pre-generalized crossed module.

Remark 2.2 Throughout this paper, an action of T on T is denoted by $\cdot$ instead of $\triangleleft_T$ for any group T .

A morphism $(f_1, f_2): (T, Z, \partial) \rightarrow (T', Z', \partial')$ of generalized crossed modules consists of group morphisms $f_1: T \rightarrow T'$ and $f_2: Z \rightarrow Z'$ such that the following diagram commutative:

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{f_1} & T' \\
 \partial \downarrow & & \downarrow \partial' \\
 Z & \xrightarrow{f_2} & Z'
 \end{array}$$

i.e. $f_2\partial = \partial'f_1$ and

$$f_1({}^Zt) = f_2({}^Z)f_1(t)$$

for all $t \in T$ and $z \in Z$. Thus we obtain the category of generalized crossed modules, denoted by **GCM**.

Some examples of generalized crossed modules are given below:

- 1) If $\partial: T \rightarrow Z$ is any crossed module then it is also generalized crossed module.
- 2) Let $\partial: T \rightarrow Z$ be a group morphism. Then ∂ is a generalized crossed module, if all actions trivial.
- 3) Let Z and T be two groups. If the action of T on T is trivial and the actions of Z on Z and Z on T are arbitrary then the trivial morphism $1: T \rightarrow Z$ is a generalized crossed module.
- 4) Every group gives a generalized crossed module. If T is a group then $id_T: T \rightarrow T$ is a generalized crossed module by the arbitrary action of T on itself.

3. SOME CATEGORICAL CONSTRUCTIONS

In this section, we provide details on the categorical properties of generalized crossed modules, as presented in (Yavari and Salemkar, 2019).

Theorem 2.1 The category of generalized crossed modules have products.

Proof: Let (T_1, Z_1, ∂_1) and (T_2, Z_2, ∂_2) be two generalized crossed modules. Put $\mathbf{Z} = Z_1 \times Z_2$ and $\mathbf{T} = T_1 \times T_2$. Define the all actions of $\mathbf{Z}$ on $\mathbf{T}$, ($\mathbf{T}$ on $\mathbf{T}$, $\mathbf{Z}$ on $\mathbf{Z}$) are componentwise, i.e. for all $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}$ and $(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}$,

$$^{(z_1, z_2)}(t_1, t_2) = ({}^{z_1}t_1, {}^{z_2}t_2).$$

Then $\partial = \partial_1 \times \partial_2: \mathbf{T} \rightarrow \mathbf{Z}$ is a generalized crossed module which is defined by:

$$\partial(t_1, t_2) = (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2))$$

for all $(t_1, t_2) \in \mathbf{T}$:

GCM1)

$$\begin{aligned} \partial(^{(z_1, z_2)}(t_1, t_2)) &= \partial(^{z_1}t_1, {}^{z_2}t_2) \\ &= (\partial_1(^{z_1}t_1), \partial_2(^{z_2}t_2)) \\ &= (z_1 \cdot \partial_1(t_1), z_2 \cdot \partial_2(t_2)) \\ &= (z_1, z_2) \cdot (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2)) \\ &= (z_1, z_2) \cdot \partial(t_1, t_2) \end{aligned}$$

GCM2)

$$\begin{aligned} \partial_{(t_1, t_2)}(t'_1, t'_2) &= (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2))(t'_1, t'_2) \\ &= (\partial_1(t_1)t'_1, \partial_2(t_2)t'_2) \\ &= (t_1 \cdot t'_1, t_2 \cdot t'_2) \\ &= (t_1, t_2) \cdot (t'_1, t'_2) \end{aligned}$$

for all $(t_1, t_2), (t'_1, t'_2) \in \mathbf{T}$ and $(z_1, z_2) \in \mathbf{Z}$. Also its easily check that the projections maps $(p_1, p'_1): (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \partial) \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1)$ and $(p_2, p'_2): (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \partial) \rightarrow (T_2, Z_2, \partial_2)$ are the morphisms of generalized crossed module.

Suppose that (D, Z, γ) be a generalized crossed module and

$$(\phi_1, \varphi_1): (D, Z, \gamma) \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1),$$

$$(\phi_2, \varphi_2): (D, Z, \gamma) \rightarrow (T_2, Z_2, \partial_2)$$

be two morphisms of generalized crossed modules. Then there is a unique generalized crossed module morphism:

$$(\theta, \theta'): (D, Z, \gamma) \rightarrow (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \partial)$$

such that the diagram

$$\begin{array}{ccccc} & (D, Z, \gamma) & & & (1) \\ & \swarrow (\phi_1, \varphi_1) & \downarrow (\theta, \theta') & \searrow (\phi_2, \varphi_2) & \\ (T_1, Z_1, \partial_1) & \xleftarrow{(p_1, p'_1)} & (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \partial) & \xrightarrow{(p_2, p'_2)} & (T_2, Z_2, \partial_2) \end{array}$$

commutes. Define

$$(\theta, \theta')(d, z) = ((\phi_1(d), \phi_2(d)), (\varphi_1(z), \varphi_2(z)))$$

for all $d \in D$ and $z \in Z$. Then (θ, θ') is a generalized crossed module morphism because of:

$$\begin{aligned} \theta({}^z d) &= (\phi_1({}^z d), \phi_2({}^z d)) \\ &= (\varphi_1(z)\phi_1(d), \varphi_2(z)\phi_2(d)) \\ &= (\varphi_1(z), \varphi_2(z))(\phi_1(d), \phi_2(d)) \\ &= \theta'({}^z z)\theta(d) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \theta'\gamma(d) &= (\varphi_1\gamma(d), \varphi_2\gamma(d)) \\ &= (\partial_1\phi_1(d), \partial_2\phi_2(d)) \\ &= \partial\theta(d) \end{aligned}$$

for all $d \in D$ and $z \in Z$.

Moreover, for all $d \in D$ and $z \in Z$ the diagram 1 is commutative, that is:

$$\begin{aligned} p_1\theta(d) &= p_1(\phi_1(d), \phi_2(d)) = \phi_1(d) \\ p'_1\theta'(z) &= p'_1(\varphi_1(z), \varphi_2(z)) = \varphi_1(z). \end{aligned}$$

Then we get $(p_1, p'_1)(\theta, \theta') = (\phi_1, \varphi_1)$, similarly $(p_2, p'_2)(\theta, \theta') = (\phi_2, \varphi_2)$.

Let $(\theta_1, \theta_2): (D, Z, \gamma) \rightarrow (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ be a generalized crossed module morphism which have the same properties with (θ, θ') , i.e.

$$(p_1, p'_1)(\theta_1, \theta_2) = (\phi_1, \varphi_1) \text{ and } (p_2, p'_2)(\theta_1, \theta_2) = (\phi_2, \varphi_2).$$

Define $d \in D$ by $\theta_1(d) = (t_1, t_2)$ and $z \in Z$ by $\theta_2(z) = (z_1, z_2)$. Then we have,

$$p_1\theta_1(d) = \phi_1(d) \Leftrightarrow p_1(t_1, t_2) = \phi_1(d) \Leftrightarrow t_1 = \phi_1(d)$$

$$p'_1\theta_2(z) = \varphi_1(z) \Leftrightarrow p'_1(z_1, z_2) = \varphi_1(z) \Leftrightarrow z_1 = \varphi_1(z)$$

$$p_2\theta_1(d) = \phi_2(d) \Leftrightarrow p_2(t_1, t_2) = \phi_2(d) \Leftrightarrow t_2 = \phi_2(d)$$

$$p'_2\theta_2(z) = \varphi_2(z) \Leftrightarrow p'_2(z_1, z_2) = \varphi_2(z) \Leftrightarrow z_2 = \varphi_2(z)$$

Then

$$\begin{aligned} (\theta_1, \theta_2)(d, z) &= ((t_1, t_2), (z_1, z_2)) \\ &= ((\phi_1(d), \phi_2(d)), (\varphi_1(z), \varphi_2(z))) \\ &= (\theta, \theta')(d, z). \end{aligned}$$

So $(\theta, \theta'): (D, Z, \gamma) \rightarrow (\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ is unique.

Thus, $(\mathbf{T}, \mathbf{Z}, \boldsymbol{\theta})$ is the product object of (T_1, Z_1, ∂_1) and (T_2, Z_2, ∂_2) .

Theorem 2.2 The category of generalized crossed modules have pullbacks.

Proof: Let

$$(\alpha_1, \alpha_2): (T_1, Z_1, \partial_1) \rightarrow (T_3, Z_3, \partial_3),$$

$$(\alpha'_1, \alpha'_2): (T_2, Z_2, \partial_2) \rightarrow (T_3, Z_3, \partial_3)$$

be two generalized crossed module morphisms. Define:

$$P_T = \{(t_1, t_2) \mid \alpha_1(t_1) = \alpha'_1(t_2)\} \subseteq T_1 \times T_2$$

$$P_Z = \{(z_1, z_2) \mid \alpha_2(z_1) = \alpha'_2(z_2)\} \subseteq Z_1 \times Z_2$$

Then $\partial: P_T \rightarrow P_Z$, given by $\partial(t_1, t_2) = (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2))$ is a generalized crossed module: For all $(t_1, t_2), (t'_1, t'_2) \in P_T$ and $(z_1, z_2) \in P_Z$,

GCM1)

$$\begin{aligned} \partial^{(z_1, z_2)}(t_1, t_2) &= \partial^{(z_1 t_1, z_2 t_2)} \\ &= (\partial_1^{(z_1 t_1)}, \partial_2^{(z_2 t_2)}) \\ &= (z_1 \cdot \partial_1(t_1), z_2 \cdot \partial_2(t_2)) \\ &= (z_1, z_2) \cdot (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2)) \\ &= (z_1, z_2) \cdot \partial(t_1, t_2) \end{aligned}$$

GCM2)

$$\begin{aligned} \partial^{(t_1, t_2)}(t'_1, t'_2) &= (\partial_1(t_1), \partial_2(t_2))(t'_1, t'_2) \\ &= (\partial_1(t_1)t'_1, \partial_2(t_2)t'_2) \\ &= (t_1 \cdot t'_1, t_2 \cdot t'_2) \\ &= (t_1, t_2) \cdot (t'_1, t'_2) \end{aligned}$$

Moreover, it is clear that, the projections maps

$$(p_1, p'_1): (P_T, P_Z, \partial) \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1)$$

given by $(p_1, p'_1)((t_1, t_2), (z_1, z_2)) = (t_1, z_1)$ and similarly,

$$(p_2, p'_2): (P_T, P_Z, \partial) \rightarrow (T_2, Z_2, \partial_2)$$

given by $(p_2, p'_2)((t_1, t_2), (z_1, z_2)) = (t_2, z_2)$ are generalized crossed module morphisms. Thus we get the following diagram,

$$\begin{array}{ccc}
 (P_T, P_Z, \partial) & \xrightarrow{(p_2, p'_2)} & (T_2, Z_2, \partial_2) \\
 \downarrow (p_1, p'_1) & & \downarrow (\alpha'_1, \alpha'_2) \\
 (T_1, Z_1, \partial_1) & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & (T_3, Z_3, \partial_3)
 \end{array}$$

which is commutative. This construction satisfies the universal property: Let (S, P, ϕ) be a generalized crossed module and $(u, u'): (S, P, \phi) \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1)$, $(v, v'): (S, P, \phi) \rightarrow (T_2, Z_2, \partial_2)$, be two generalized crossed module morphism, where $(\alpha_1, \alpha_2)(u, u') = (\alpha'_1, \alpha'_2)(v, v')$. Then there is a unique generalized crossed module morphism;

$$(\theta, \theta'): (S, P, \phi) \rightarrow (P_T, P_Z, \partial)$$

such that the diagram

$$\begin{array}{ccccc}
 (S, P, \phi) & & & & (2) \\
 & \searrow^{(v, v')} & & & \\
 & \quad \quad \quad (P_T, P_Z, \partial) & \xrightarrow{(p_2, p'_2)} & (T_2, Z_2, \partial_2) \\
 & \quad \quad \quad \downarrow (p_1, p'_1) & & \downarrow (\alpha'_1, \alpha'_2) \\
 & \quad \quad \quad (T_1, Z_1, \partial_1) & \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} & (T_3, Z_3, \partial_3) \\
 & \swarrow_{(u, u')} & & & \\
 & \quad \quad \quad \nearrow_{(\theta, \theta')} & & &
 \end{array}$$

commutes. Define

$$(\theta, \theta')(s, p) = ((u(s), v(s)), (u'(p), v'(p)))$$

for all $s \in S$ and $p \in P$. Then see the diagram:

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\theta} & P_T \\ \phi \downarrow & & \downarrow \partial \\ P & \xrightarrow{\theta'} & P_Z. \end{array}$$

For all $s \in S$ and $p \in P$;

$$\begin{aligned} \theta(p s) &= (u(p s), v(p s)) \\ &= (u'(p) u(s), v'(p) v(s)) \\ &= (u'(p), v'(p)) (u(s), v(s)) \\ &= \theta'(p) \theta(s) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \theta' \phi(s) &= (u'(\phi(s)), v'(\phi(s))) \\ &= (u' \phi(s), v' \phi(s)) \\ &= (\partial_1 u(s), \partial_2 v(s)) \\ &= (\partial_1 \theta(s), \partial_2 \theta(s)) \\ &= \partial \theta(s). \end{aligned}$$

Then (θ, θ') is a generalized crossed module morphism.

Moreover,

$$\begin{aligned} (p_1, p'_1)(\theta, \theta')(s, p) &= (p_1, p'_1)(\theta(s), \theta'(p)) \\ &= (p_1 \theta(s), p'_1 \theta'(p)) \\ &= (p_1(u(s), v(s)), p'_1(u'(s), v'(s))) \\ &= (u(s), u'(s)) \end{aligned}$$

that is $(p_1, p'_1)(\theta, \theta') = (u, u')$. Similarly we get $(p_2, p'_2)(\theta, \theta') = (v, v')$. Then the diagram 2 is commutative. The uniqueness of (θ, θ') is shown similarly to the previous theorem.

Thus (P_T, P_Z, ∂) is the pullback object of (T_1, Z_1, ∂_1) and (T_2, Z_2, ∂_2) .

Theorem 2.3 The category of generalized crossed modules have equalisers.

Proof: Let

$$(T_1, Z_1, \partial_1) \begin{matrix} \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} \\ \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} \end{matrix} (T_2, Z_2, \partial_2)$$

be two parallel morphism of generalized crossed module.
Define:

$$Eq_T = \{t \in T_1 \mid \alpha_1(t) = \beta_1(t)\}$$

$$Eq_Z = \{z \in Z_1 \mid \alpha_2(z) = \beta_2(z)\}$$

and $\partial: Eq_T \rightarrow Eq_Z$ by $\partial(t) = \partial_1(t)$ for all $t \in Eq_T$. Since $t, t' \in Eq_T$ and $z \in Eq_Z$;

GCM1)

$$\begin{aligned} \partial(z \cdot t) &= \partial_1(z \cdot t) \\ &= z \cdot \partial_1(t) \\ &= z \cdot \partial(t) \end{aligned}$$

GCM2)

$$\begin{aligned} \partial(t)_{t'} &= \partial_1(t)_{t'} \\ &= t \cdot t' \end{aligned}$$

Then (Eq_T, Eq_Z, ∂) is a generalized crossed module. Then we say that the inclusion map,

$$(h, h'): (Eq_T, Eq_Z, \partial) \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1)$$

is a generalized crossed module morphism. Moreover the diagram

$$(Eq_T, Eq_Z, \partial) \xrightarrow{(h, h')} (T_1, Z_1, \partial_1) \begin{matrix} \xrightarrow{(\alpha_1, \alpha_2)} \\ \xrightarrow{(\beta_1, \beta_2)} \end{matrix} (T_2, Z_2, \partial_2)$$

commutes, i.e.

$$\begin{aligned}
 ((\alpha_1, \alpha_2)(h, h'))(t, z) &= (\alpha_1, \alpha_2)(h(t), h'(z)) \\
 &= (\alpha_1, \alpha_2)(t, z) \\
 &= (\alpha_1(t), \alpha_2(z)) \\
 &= (\beta_1(t), \beta_2(z)) \\
 &= (\beta_1, \beta_2)(t, z) \\
 &= (\beta_1, \beta_2)(h(t), h'(z)) \\
 &= ((\beta_1, \beta_2)(h, h'))(t, z)
 \end{aligned}$$

for all $t \in Eq_T$ and $z \in Eq_Z$. Moreover this construction satisfies the universal properties: Let $(Eq'_T, Eq'_Z, \partial')$ be a generalized crossed module and $(k, k'): (Eq'_T, Eq'_Z, \partial') \rightarrow (T_1, Z_1, \partial_1)$ be a generalized crossed module morphism such that $(\alpha_1, \alpha_2)(k, k') = (\beta_1, \beta_2)(k, k')$. Then there is a unique generalized crossed module morphism

$$(\beta, \beta'): (Eq'_T, Eq'_Z, \partial') \rightarrow (Eq_T, Eq_Z, \partial)$$

such that $(h, h')(\beta, \beta') = (k, k')$. Define $(\beta, \beta')(t', z') = (k(t'), k'(z'))$ for all $t' \in Eq'_T$ and $z' \in Eq'_Z$. Since, $(\alpha_1, \alpha_2)(k, k') = (\beta_1, \beta_2)(k, k')$ then $k(t') \in Eq_T$, $k'(z') \in Eq_Z$. So (β, β') is well defined. Furthermore,

$$\begin{aligned}
 (h, h')(\beta, \beta')(t', z') &= (h, h')(\beta(t'), \beta'(z')) \\
 &= (h, h')(k(t'), k'(z')) \\
 &= (hk(t'), h'k'(z')) \\
 &= (k(t'), k'(z'))
 \end{aligned}$$

for all $t' \in Eq'_T$ and $z' \in Eq'_Z$.

Thus we get the following commutative diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 (Eq_T, Eq_Z, \partial) & \xrightarrow{(h, h')} & (T_1, Z_1, \partial_1) & \xrightleftharpoons[(\beta_1, \beta_2)]{(\alpha_1, \alpha_2)} & (T_2, Z_2, \partial_2) \\
 \uparrow \scriptstyle (\beta, \beta') & \nearrow \scriptstyle (k, k') & & & \\
 (Eq'_T, Eq'_Z, \partial') & & & &
 \end{array}$$

The uniqueness of (β, β') can be shown analogous to the Theorem 2.1. Thus (Eq_T, Eq_Z, ∂) is the equaliser object of (T_1, Z_1, ∂_1) and (T_2, Z_2, ∂_2) .

4. CONCLUSION

The category of generalized crossed modules have the product, pullback and equaliser objects. Looking at the equaliser object, one can obtain equaliser object through product and pullback objects in the category of generalized crossed modules. More clearly, the equaliser of two parallel morphisms $\alpha, \beta: T \rightarrow Z$ is the pullback of $(1_T, \alpha): T \rightarrow T \times Z$ and $(1_T, \beta): T \rightarrow T \times Z$.

REFERENCES

- [1] Aytekin, A. & Emir, K. (2020). Colimits of crossed modules in modified categories of interest. *Electronic Research Archive*, 28, 1227-1238.
- [2] Aytekin, A. (2021). (Co)Limits of Hom-Lie crossed module. *Turkish Journal of Mathematics*, 45, 2140-2153.
- [3] Brown, R. & Higgins, P.J. (1981). Colimit theorems for relative homotopy groups. *J Pure Appl Algebra*, 22, 11-41.
- [4] Brown, R. & Sivera, R. (2009). Algebraic colimit calculations in homotopy theory using fibred and cofibred categories. *Theory and Applications of Categories*, 22, 222-251.
- [5] Casas, JM. & Ladra, M. (2000). Colimits in the crossed modules category in lie algebras. *Georgian Mathematical Journal*, 7, 461-474.
- [6] Ege Arslan, U., Akça, İ.İ., Onarlı, G. & Avcıoğlu, O. (2019). Fibrations of 2-crossed modules, *Math Meth Appl Sci*, 42, 5293–5304.
- [7] Emir, K. & Çetin, S. (2017). Limits in modified categories of interest. *Bulletin of the Iranian Mathematical Society*, 43, 2617-2634.
- [8] Gülsün Akay, H. Limits in the Category of 2-Generalized Crossed Modules. Preprint.
- [9] Whitehead, J.H.C. (1949a). Combinatorial homotopy I. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(3), 213-245.
- [10] Whitehead, J.H.C. (1949b). Combinatorial homotopy II. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 55(5), 453-496.

- [11]Yavari, M. & Salemkar, A. (2019). The category of generalized crossed modules. *Categ. Gen. Algebr. Struct. Appl.*, 10(1), 157–171.
- [12]Yılmaz, ES. (2022). (Co) Limit calculations in the category of 2-crossed R-modules. *Turkish Journal of Mathematics*, 46, 2902-2915.

SAĞKALIM ANALİZİ YÖNTEMLERİ VE PERAKENDE SEKTÖRÜ VERİLERİ ÜZERİNE BİR UYGULAMA¹

Tuğba DEMİRCİOĞLU²

Müjgan TEZ³

1. GİRİŞ

Sağkalım analizi, sonuç değişkeni ilgilenilen olay meydana gelene kadar geçen süre olan verileri analiz etmek için kullanılan istatistiksel yöntemler topluluğudur (Kleinbaum ve Klein, 2010). Sağkalım analizinin temel amacı, araştırmacı tarafından belirlenen gözlem süresince ilgilenilen olayın meydana gelmesini etkileyen değişkenleri ve bu olay meydana gelene kadar geçen süreyi modellemektir (Lee ve Wang, 2003). İlgilenilen olay, hastanın; belirli bir hastalıktan ölümü, kanserli hastanın remisyondan çıkarak tekrar kötüleşmesi veya iyileşmesi, hastalık insidansı olabileceği gibi çiftlerin boşanması, makine arızalanması, şirket iflası, gibi çalışmanın amacına göre tanımlanmış herhangi bir olay olabilir (Kleinbaum ve Klein, 2010).

Sağkalım analizinde kullanılan en popüler yöntem Cox Oransal Hazard regresyon modelidir. Cox regresyon modeli; gözlemlenen ortak değişkenlerin bir olayın meydana gelme riski

¹ Bu çalışma Ulusal Tez Merkezi 787872 Numaralı “Sağkalım veri modellenmesi: makine öğrenmesi yaklaşımları” başlıklı Yüksel Lisans Tezinden üretilmiştir.

² tugbademircioglu@gmail.com, ORCID: 0009-0007-4764-7169.

³ Prof. Dr., Marmara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, İstatistik Bölümü, mtez@marmara.edu.tr, ORCID: 0000-0002-8633-1980.

üzerindeki etkilerini hesaplayan yarı parametrik istatistiksel yöntemdir. Cox regresyon analizinde; bağımsız değişkenlerin hazard fonksiyonu üzerindeki etkileri log lineer olması ve bağımsız değişkenlerin log-lineer fonksiyonu ile hazard fonksiyonu arasındaki ilişki çarpımsal olması varsayımları söz konusudur. Bu iki varsayımın yanında hazard (tehlike) oranının zamana göre değişmemesi ve gözlemlerin birbirinden bağımsız olması gerekmektedir. Cox regresyonunun bu varsayımlarını kabul etmek gerçek dünya uygulamaları için çoğu zaman mümkün değildir. Bu nedenle, sansürlü sağkalım verilerini doğrusal olmayan log risk fonksiyonlarına uydurmak için zengin bir sağkalım modelleri ailesine ihtiyaç duyulmuştur. Makine öğrenmesi yöntemleri, son dönemde yapılan araştırmalarla doğrusal olmayan ilişkileri modelleme ve tahminleme performansı açısından önemli başarılar elde ederek birçok farklı alanda popüler hale gelmişlerdir. Sağkalım analizinde kullanılan geleneksel istatistiksel yöntemleri makine öğrenmesi yöntemleriyle değiştirme fikri caziptir. Makine öğrenmesi yöntemleri sansürlü sağkalım verilerine doğru şekilde işlendiğinde Cox regresyon yöntemine göre daha doğru sağkalım tahminlerine sahip olabilir.

Bu çalışmasının amacı, sağkalım analizi için literatürde var olan gelenekselleşmiş istatistiksel yöntemlerin yanı sıra makine öğrenmesi yöntemlerini araştırmak ve sağkalım analizinin uygulanabilirliğini perakendecilik gibi farklı bir sektörde ortaya koymaktır. Çalışmada, Türkiye’ de gıda perakende alanında faaliyet gösteren süpermarket zincirlerinden birine ait gıda e-ticaret sitesinin 16.01.2022 ile 28.09.2022 tarihleri arasında kampanya düzenlenen fakat kampanyalı satış adedi stoklarla sınırlı olan ürünlerin sağkalım olasılığı ve sağkalım olasılıklarına etki eden değişkenler Kaplan Meier analizi, Cox Oransal Hazard Regresyon, LASSO Cox ve Sağkalım Ağaçları yöntemleri ile incelenmiştir. Gelenekselleşmiş

sağkalım analiz yöntemi olan Cox Oransal Hazard regresyon modeli ile makine öğrenmesi yöntemi olan Rastgele Sağkalım Ormanları yöntemi, sağkalım analizi için ortak değerlendirme ölçütü C-index sonuçlarına göre karşılaştırılarak veri setinin detaylı bir analizi ortaya konulmuştur.

2. VERİ SETİ VE YÖNTEMLER

2.1. Veri Seti

Çalışmada Türkiye’de gıda perakende alanında faaliyet gösteren zincir marketlerden birine ait online alışveriş uygulamasında 16.01.2022 ile 28.09.2022 tarihleri arasında kampanya düzenlenen fakat kampanyalı satışı stoklarla sınırlı olan ürünlerin sağkalım olasılıkları sağkalım analiz yöntemleriyle R programlama dili ile R Studio geliştirme ortamında incelenmiştir. Çalışma kapsamında 141 adet ürünün satışı 15 saat boyunca gözlemlenmiştir. 15 saat sonunda kampanya başlangıcında indirimli olarak satılmasına karar verilen ürün stok adeti satışı gerçekleşmez ise bu gözlem sansürlü gözlem olarak kabul edilmiştir.

Ürünlerin; kampanyaya girmeden önceki satış fiyatı için satış, kampanyalı fiyatı için kampanya, kampanyayla birlikte sahip olduğu yüzdelik indirim oranı için oran, kampanyalı satılacak ürün miktarı için stok, kampanyadan yararlanabilmek için minimum yapılması gereken alışveriş tutarı minimum, ürünün e-ticaret sitesinde tanımlandığı kategori için kategori, kampanyanın uygulama tipi için tip, kampanyanın düzenlendiği gün için gün, her bir ürünün izlem süresi için time ve sonuç değişkeni için status (stok; tükendi=1, tükenmedi=0) değişkenleri baz alınmıştır.

2.2. Yöntemler

2.2.1. Kaplan-Meier (KM) Yöntemi

Kaplan ve Meier 1958’de, sağkalım fonksiyonunu tahmin etmek için gerçek gözlem süresini kullanan Kaplan-Meier (KM) eğrisini geliştirmişlerdir (Kaplan ve Meier, 1958).

Çalışmada; n adet birim olduğu ve $k \leq n$ olmak üzere, k adet birimde ilgilenilen olayın meydana geldiği varsayımı altında, sıralanmış sağkalım süreleri $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ olsun. $j = 1, 2, \dots, k$ olmak üzere ilgilenilen olayın meydana geldiği bir t_j anı belirlensin. t_{j-1} ile t_j periyodu arasında, ilgilenilen olayın gerçekleşmediği birimlerin sayısı r_j , bu aralıktaki sansürlü birim sayısı ise c_j ile gösterilsin. Belirlenen t_j anında ilgilenilen olay meydana gelen birim sayısı ise d_j olsun. $r_j = r_{j-1} - d_{j-1} - c_{j-1}$ olmak üzere sağkalım fonksiyonunun t anındaki Kaplan-Meier tahmin edicisi aşağıdaki şekilde bulunur (Kleinbaum ve Klein, 2010).

$$\hat{S}(t) = \prod_{j: t_j < t} \left(1 - \frac{d_j}{r_j}\right) \quad (1)$$

2.2.2. Cox Oransal Hazard Regresyon Yöntemi

Cox tarafından 1972 (Cox, 1972) yılında yapılan çalışma ile ortaya konulan regresyon modeli, 1980 yılında Kalbfleisch ve Prentice‘ in katkıları ile bugünkü önemi kazanmıştır (Bradburn ve ark., 2003). Cox regresyon modelinin iki temel varsayımı bulunmaktadır:

1. Risk (hazard) fonksiyonu üzerindeki bağımsız değişkenlerin etkileri loglineerdir.
2. Bağımsız değişkenlerin loglineer fonksiyonu ile risk fonksiyonu arasındaki ilişki çarpımsaldır (Kleinbaum ve Klein, 2010).

Yukarıdaki iki varsayıma ek olarak gözlemlerin birbirinden bağımsız olması ve risk oranının zamana göre değişmeyip sabit olması gerekir. Risk oranı ile ilgili varsayım orantısal risk varsayımı olarak bilinmektedir (Hosmer ve ark., 2002). Cox regresyon modeli aşağıdaki şekilde ifade edilir (Kleinbaum ve Klein, 2010).

$$h(t; X) = h_0(t)e^{\sum_{i=1}^p \beta_i X_i} \quad (2)$$

$X_1, X_2, \dots, X_p$ açıklayıcı değişkenlerdir. $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ regresyon katsayıları, $h_0(t)$ ise $X = 0$ yani bağımsız değişkenlerin sağkalım süresi üzerindeki etkisi sıfır olduğu durumunda temel risk (hazard) fonksiyonudur (Wang ve ark., 2019).

Cox regresyon modelinde, regresyon parametresi β ve temel tehlike(hazard) fonksiyonu $h_0(t)$ olmak üzere iki adet bilinmeyen bileşen bulunmaktadır (Kleinbaum ve Klein, 2010). $h_0(t)$ 'nin tanımlanmış belirli bir fonksiyonu olmadığından Cox yarı parametrik bir modeldir. $h_0(t)$ 'nin dağılım şekli üzerinde herhangi bir varsayım bulunmadığından dolayı hesaplanmasına gerekmemektedir. β bilinmeyen katsayılar vektörünün tahmininde kısmi en çok olabilirlik fonksiyonundan faydalanılır.

n tane birey ve bireylerin r tane farklı başarısızlık zamanı olsun. Bireylerin $n-r$ tanesi sağdan sansürlenmiş olsun. t_j j.sıradaki sağkalım fonksiyonu olmak üzere, r tane sağkalım süresi $t_1, t_2, \dots, t_r$ olsun. j. olayın meydana gelme zamanında ilgilenilen olayı yaşamamış yani başarısızlığa uğrama risk altında olan bireylerin oluşturduğu kümeyi risk kümesi olarak isimlendirelim. Risk kümesi $R(t_j)$ ile gösterilsin. t_j anına kadar yaşamış olan birimde t_j anında ilgilenilen olayın meydana gelme olasılığıdır. Yapılan bütün bu tanımlamalar ile Cox tarafından β 'ların tahmin edilmesinde önerilen orantılı tehlike regresyon

modeli için kısmi en çok olabilirlik fonksiyonu olarak aşağıdaki şekildedir (Wang ve ark., 2019):

$$l(\beta) = \prod_{j=1}^r \frac{\exp(\beta^T X_j)}{\sum_{l \in R(t_j)} \exp(\beta^T X_l)} \quad (3)$$

Olabilirlik fonksiyonunda sağkalım süresi gözlemlenmiş birimlerin yanı sıra sansürlenmiş gözlemler de hesaba katılırsa kısmi en çok olabilirlik fonksiyonu sansürlenmeye uygun forma gelir. δ_i sansürlenme değişkeni olmak üzere; $\delta_i = 0$ ise sansürleme var, $\delta_i = 1$ ise sansürleme yoktur. Cox orantılı tehlike modeli için kısmi en çok olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki şekilde ifade edilir (Wang ve ark., 2019):

$$l(\beta) = \prod_{j=1}^N \left[\frac{\exp(\beta^T X_j)}{\sum_{l \in R(t_j)} \exp(\beta^T X_l)} \right]^{\delta_i} \quad (4)$$

Kısmi en çok olabilirlik fonksiyonunun logaritması alınarak aşağıdaki şekilde log-kısmi olabilirlik fonksiyonu elde edilir (Wang ve ark., 2019).

$$\log l(\beta) = \sum_{j=1}^N \delta_j \{ \beta^T X_j - \log \sum_{l \in R(t_j)} \exp(\beta^T X_l) \} \quad (5)$$

Orantılı tehlike regresyon modelindeki β katsayıları, log-kısmi en çok olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesiyle bulunur. Herhangi bir bağımsız değişken için elde edilen pozitif katsayı riskin yüksek, prognostik etkenlerin kötü olduğuna yorumlanırken, negatif bir katsayı gözlemler için daha iyi prognostik etkenlerin olduğu şeklinde yorumlanır (Özdemir, 2015).

2.2.3. LASSO Cox Yöntemi

En Küçük Mutlak Küçülme ve Seçim Operatörü (Least Absolute Shrinkage and Selection Operator, LASSO) (Tibshirani R. , 1996) değişken seçimi yapmak ve regresyon katsayılarını

tahmin etmek için kullanılan l_1 -norm düzenleştiricisidir. LASSO yöntemi kullandığı ceza parametresinden dolayı bazı değişken katsayılarını küçültürken bazı değişken katsayılarını da sıfıra indirir. Tibshirani (Tibshirani R. , 1997) değişken seçiminde l_1 -norm düzenleştiricisinin özelliklerini esas alan Lasso-Cox algoritmasını elde etmek için l_1 cezalandırma katsayısını denklem 5’de verilen log-kısmi olabilirlik fonksiyonuna aşağıdaki şekilde dahil etti.

$$\arg \min \left\{ -\sum_{j=1}^n \delta_j [\beta^T X_j - \log \left(\sum_{l \in R(t_j)} \exp(\beta^T X_l) \right)] + \lambda \|\beta\|_1 \right\} (6)$$

Eşitlik 6’da $\|\beta\|_1 = \sum_{p=1}^p |\beta_p|$ ’ye eşittir ve l_1 -norm olarak bilinir. λ ise çapraz doğrulama ile belirlenen LASSO ayar parametresidir.

2.2.4. Rastgele Sağkalım Ormanları (Random Survival Forests) Yöntemi

Rastgele sağkalım ormanları (Random Survival Forests-RSF) yöntemi, Ishwaran ve ark. tarafından 2008’de sağ sansürlü sağkalım verilerinin analizinde kullanılmak üzere Random Forests (RF) yönteminin genişletilmesiyle tanıtıldı (Wang ve ark., 2019). RSF yönteminde kullanılan genel algoritma adımları aşağıdaki şekildedir:

- 1) Verileri eğitmek için veri kümesinden B tane bootstrap örnekleme çekilir. Her bootstrap örnekleme rastgele değiştirilerek seçilen n adet birimden oluşur ve orijinal verinin %37 sini dışarıda bırakmalıdır. Dışarıda bırakılan veri out-of-bag (OOB) data olarak adlandırılır.
- 2) Her bootstrap örnekleme için bir ağaç büyütülür. Sağkalım ağacının her düğümünde , rastgele olarak p aday değişken seçilir. Düğüm, çocuk düğümler arasındaki sağkalım farkını maksimize eden aday değişken kullanılarak bölünür.

- 3) Her bir terminal düğümde, en az 1 adet ilgilenilen olay meydana gelene kadar bölme işlemi devam eder.
- 4) Büyütülen her bir sağkalım ağacı için kümülatif hazard fonksiyonu (KHF) hesaplanır. Topluluk KHF elde etmek için ortalama alınır.
- 5) OOB verisi kullanılarak topluluk KHF için tahmin hatası hesaplanır (Ishwaran ve ark., 2008).

2.3. Performans Değerlendirme Ölçütü

2.3.1. Concordance index - C-index)

Sağkalım analizinde ortak performans değerlendirme ölçütü Concordance Index (C-index) dir. C-index rasgele seçilen herhangi iki gözlem için uyum olasılığı olarak tanımlanır. Burada uyum, daha kısa sağkalım süresine sahip gözlemin daha büyük risk puanına sahip olmasıdır. Gözlemlerin ikisi de sansürlü olduğunda veya sansürlü gözlemlerde ilgilenilen olayın meydana geldiği zaman sansürlü gözlemin sansürlenme süresinden daha küçük olduğu durumda iki gözlem için sağkalım süresi karşılaştırılabilir. İki birim için hem gözlem hem de tahmin değerleri sırasıyla $(y_1, \hat{y}_1)$ ve $(y_2, \hat{y}_2)$ ikilileri ile gösterilsin. Burada y_i gerçek gözlem süresini $\hat{y}_i$ ise tahmin edilen değeri temsil eder. Birimlerin aralarındaki uyum olasılığı şu şekilde hesaplanabilir (Ishwaran ve ark., 2008a):

$$c = \Pr(\hat{y}_1 > \hat{y}_2 | y_1 \geq y_2) \quad (7)$$

$i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ için num karşılaştırılabilir tüm çiftler sayısını, $I[\cdot]$ gösterge (indicator) fonksiyon, $\hat{\beta}$ Cox tabanlı modellerde tahmin edilen parametreleri temsil etmek üzere; modelin çıktısı tehlike (hazard) oranı olduğunda C-index aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hat{c} = \frac{1}{num} \sum_{i: \delta_i=1} \sum_{j: y_i < y_j} I[X_i \hat{\beta} > X_j \hat{\beta}] \quad (8)$$

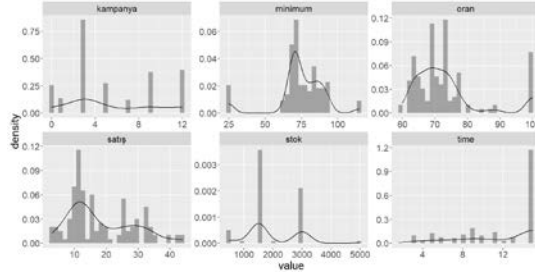
Sağkalım süresini doğrudan öğrenmeyi amaçlayan sağkalım yöntemleri için C-indeksi aşağıdaki şekilde hesaplanır:

$$\hat{c} = \frac{1}{num} \sum_{i:\delta_i=1} \sum_{j:y_i < y_j} I[S(\hat{y}_j X_j) > S(\hat{y}_i X_i)] \quad (9)$$

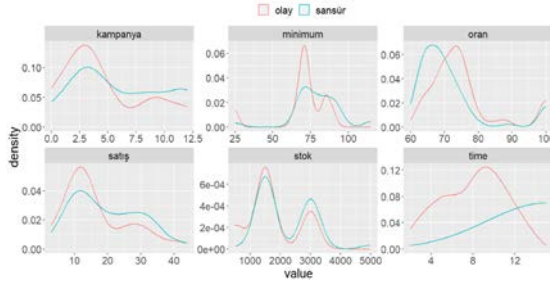
3. BULGULAR

3.1. Değişkenlere İlişkin İstatistiksel Bilgiler

Şekil 1’de çalışma kapsamında ele alınan ürünler için tanımlanan sürekli değişkenlerin yoğunluk grafikleri, Şekil 2’ de ise her bir sürekli değişkenin kendi içinde sansürlenme durumuna göre yoğunluk grafikleri gösterilmektedir. Çalışma kapsamında ele alınan tüm kategorik değişkenlere ait özellikler Tablo 1’de verilmiştir.



Şekil 1. Sürekli değişkenlere ait yoğunluk grafikleri



Şekil 2. Sansürlü ve sansürsüz gözlemlerin yoğunluklarının karşılaştırması

Tablo 1. Kategorik değişkenlere göre özellikler

Değişken	Değişken Tipi	Toplam Olay		Olay	Sansür
		Sayısı(n)	%		
Kahvaltılık	Atıştırmalık	60	%42,55	34	26
	İçecek	22	%15,60	6	16
	MeyveSebze	12	%8,51	8	4
	SütKahvaltılık	23	%16,31	12	11
	Temizlik	24	%17,02	7	17
Tip	Gör inan	126	%89,36	59	67
	Bedava	15	%10,64	8	7
Gün	Hafta içi	81	%57,45	33	48
	Hafta sonu	60	%42,55	34	26

3.2.Kaplan-Meier Analizi Sonuçları

Kampanyalı ürünlerin kategori değişkeni bazında, saatlere göre sağkalım olasılıkları Şekil 3 ile verilmiştir.

```

strata(kategori)=atıştırmaılık
time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
2 60 1 0.983 0.0165 0.951 1.000
3 59 2 0.950 0.0281 0.896 1.000
5 57 6 0.850 0.0461 0.764 0.945
6 51 4 0.783 0.0532 0.686 0.895
7 47 2 0.750 0.0559 0.648 0.868
8 45 3 0.700 0.0592 0.593 0.826
9 42 7 0.583 0.0636 0.471 0.722
10 35 4 0.517 0.0645 0.405 0.660
11 31 1 0.500 0.0645 0.388 0.644
12 30 2 0.467 0.0644 0.356 0.612
13 28 2 0.433 0.0640 0.324 0.579

strata(kategori)=içecek
time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
9 22 2 0.909 0.0613 0.797 1.000
10 20 1 0.864 0.0732 0.732 1.000
11 19 2 0.773 0.0893 0.616 0.969
13 17 1 0.727 0.0950 0.563 0.939

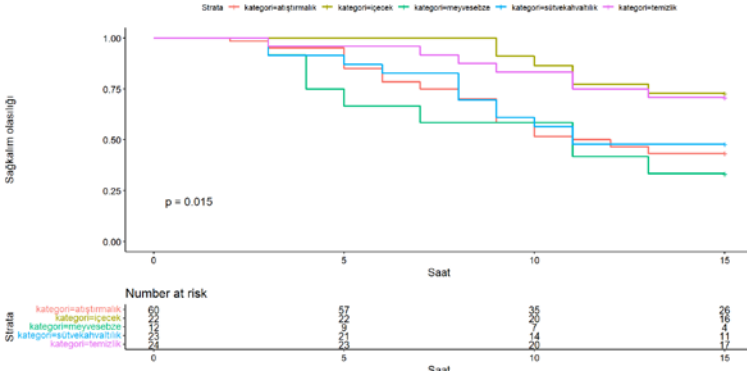
strata(kategori)=meyvesebze
time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
3 12 1 0.917 0.0798 0.773 1.000
4 11 2 0.750 0.1250 0.541 1.000
5 9 1 0.667 0.1361 0.447 0.995
7 8 1 0.583 0.1423 0.362 0.941
11 7 2 0.417 0.1423 0.213 0.814
13 5 1 0.333 0.1361 0.150 0.742

strata(kategori)=sütvekahvaltılık
time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
3 23 2 0.913 0.0588 0.805 1.000
5 21 1 0.870 0.0702 0.742 1.000
6 20 1 0.826 0.0790 0.685 0.996
8 19 3 0.696 0.0959 0.531 0.912
9 16 2 0.609 0.1018 0.439 0.845
10 14 1 0.565 0.1034 0.395 0.809
11 13 2 0.478 0.1042 0.312 0.733

strata(kategori)=temizlik
time n.risk n.event survival std.err lower 95% CI upper 95% CI
3 24 1 0.958 0.0408 0.882 1.000
7 23 1 0.917 0.0564 0.813 1.000
8 22 1 0.875 0.0675 0.752 1.000
9 21 1 0.833 0.0761 0.697 0.997
11 20 2 0.750 0.0884 0.595 0.945
13 18 1 0.708 0.0928 0.548 0.916

```

Şekil 3. Kampanyalı ürünlerin kategorilerine göre sağkalım olasılıkları



Şekil 4. Kategori değişkenine göre sağkalım olasılıkları Kaplan-Meier grafiği

Kategori değişkeninin sağkalım süresi üzerindeki etkisini veren Kaplan-Meier analiziyle elde edilen grafik Şekil 4’de verilmiştir. Kategori değişkenine göre kampanyalı ürünlerin sağkalım sürelerinin eşitliğini kıyaslamak için Log-Rank testi kullanılmıştır. Şekil 4’de görüldüğü üzere kategorilerin sağkalım süreleri arasındaki fark Log-Rank test istatistiğine göre anlamlıdır ($p < 0,05$).

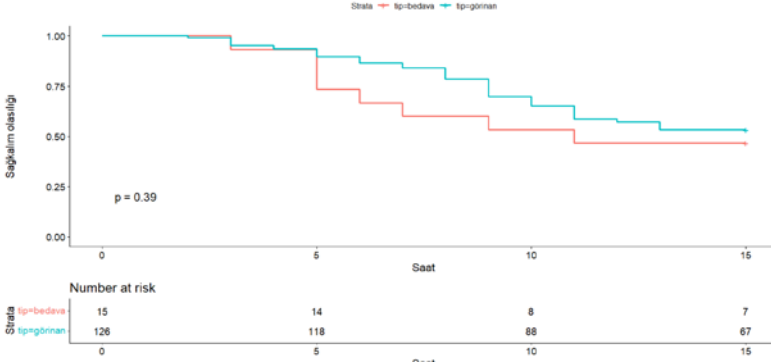
Kampanyalı ürünlerin kampanya tipi değişkeni bazında saatlere göre sağkalım olasılıkları Şekil 5 ile verilmiştir.

strata(tip)=bedava							
time	n.risk	n.event	survival	std.err	lower 95% CI	upper 95% CI	
3	15	1	0.933	0.0644	0.815	1.000	
5	14	3	0.733	0.1142	0.540	0.995	
6	11	1	0.667	0.1217	0.466	0.953	
7	10	1	0.600	0.1265	0.397	0.907	
9	9	1	0.533	0.1288	0.332	0.856	
11	8	1	0.467	0.1288	0.272	0.802	

strata(tip)=görinan							
time	n.risk	n.event	survival	std.err	lower 95% CI	upper 95% CI	
2	126	1	0.992	0.0079	0.977	1.000	
3	125	5	0.952	0.0190	0.916	0.990	
4	120	2	0.937	0.0217	0.895	0.980	
5	118	5	0.897	0.0271	0.845	0.952	
6	113	4	0.865	0.0304	0.807	0.927	
7	109	3	0.841	0.0326	0.780	0.908	
8	106	7	0.786	0.0366	0.717	0.861	
9	99	11	0.698	0.0409	0.623	0.783	
10	88	6	0.651	0.0425	0.573	0.740	
11	82	8	0.587	0.0439	0.507	0.680	
12	74	2	0.571	0.0441	0.491	0.665	
13	72	5	0.532	0.0445	0.451	0.626	

Şekil 5. Kampanyalı ürünlerin kampanya tipine göre sağkalım olasılıkları

Şekil 6 tip değişkeninin sağkalım süresi üzerindeki etkisini veren Kaplan-Meier analiziyle elde edilen grafiğdir. Şekil 6'da görüldüğü üzere kampanya tipinin sağkalım süreleri arasındaki fark Log-Rank test istatistiğine göre anlamlı değildir ($p>0,05$).



Şekil 6. Tip değişkenine göre sağkalım olasılıkları Kaplan-Meier grafiği

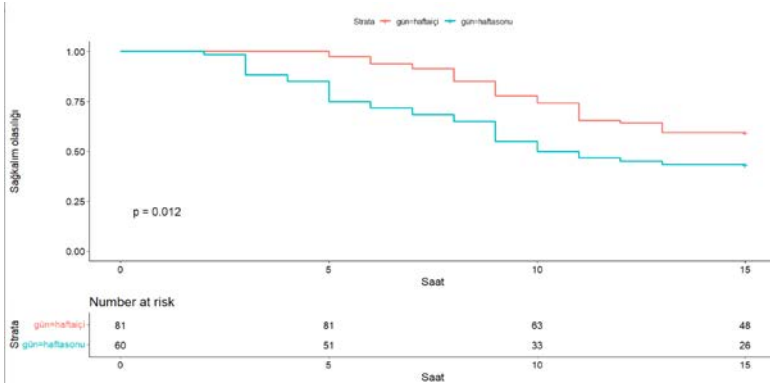
Kampanyalı ürünlerin kampanya günü değişkeni bazında saatlere göre sağkalım olasılıkları Şekil 7 ile verilmiştir.

strata(gün)=haftaici							
time	n.risk	n.event	survival	std.err	lower	95% CI upper	95% CI
5	81	2	0.975	0.0172	0.942	1.000	
6	79	3	0.938	0.0267	0.887	0.992	
7	76	2	0.914	0.0312	0.854	0.977	
8	74	5	0.852	0.0395	0.778	0.933	
9	69	6	0.778	0.0462	0.692	0.874	
10	63	3	0.741	0.0487	0.651	0.843	
11	60	7	0.654	0.0528	0.559	0.767	
12	53	1	0.642	0.0533	0.546	0.755	
13	52	4	0.593	0.0546	0.495	0.710	

strata(gün)=haftasonu							
time	n.risk	n.event	survival	std.err	lower	95% CI upper	95% CI
2	60	1	0.983	0.0165	0.951	1.000	
3	59	6	0.883	0.0414	0.806	0.968	
4	53	2	0.850	0.0461	0.764	0.945	
5	51	6	0.750	0.0559	0.648	0.868	
6	45	2	0.717	0.0582	0.611	0.840	
7	43	2	0.683	0.0601	0.575	0.812	
8	41	2	0.650	0.0616	0.540	0.783	
9	39	6	0.550	0.0642	0.437	0.691	
10	33	3	0.500	0.0645	0.388	0.644	
11	30	2	0.467	0.0644	0.356	0.612	
12	28	1	0.450	0.0642	0.340	0.595	
13	27	1	0.433	0.0640	0.324	0.579	

Şekil 7. Kampanyalı ürünlerin kampanya gününe göre sağkalım olasılıkları

Şekil 8 gün değişkeninin sağkalım süresi üzerindeki etkisini veren Kaplan-Meier analiziyle elde edilen grafiktir. Şekil 8’de görüldüğü üzere kampanya gününün sağkalım süreleri arasındaki fark Log-Rank test istatistiğine göre anlamlıdır ($p < 0,05$).



Şekil 8. Gün değişkenine göre sağkalım olasılıkları Kaplan-Meier grafiği

3.3. Cox Oransal Hazard Regresyon ve LASSO Cox Yöntemi Sonuçları

Çalışmada çıktıları Şekil 9 ile gösterilen şekilde tüm değişkenler kullanılarak Cox regresyon analizi uygulanmıştır. Kullanılan bağımsız değişkenler arasındaki çoklu bağlantı(multicollinearity) probleminin kontrolü için her bir değişkenin Tablo 2’de Varyans Enflasyon Faktörü (Variance Inflation Faktörse-VIF) değeri hesaplanmıştır.

```

              coef exp(coef) se(coef)      z Pr(>|z|)
satış        0.1936159  1.2136301  0.0734504  2.636  0.00839 **
oran        -0.0119405  0.9881305  0.0443276  -0.269  0.78765
stok        -0.0013343  0.9986666  0.0002668  -5.002  5.69e-07 ***
minimum     -0.0459464  0.9550912  0.0177241  -2.592  0.00953 **
kategoriicecek -1.2526295  0.2857524  0.5548312  -2.258  0.02397 *
kategorimeyvesebze 1.8799041  6.5528764  0.5764513  3.261  0.00111 **
kategorisütvekahvaltılık 0.3743241  1.4540083  0.4708175  0.795  0.42658
kategoritenizlik -0.5757644  0.5622749  0.4330683  -1.330  0.18368
tipgöranan -0.0368742  0.9637974  1.0149240  -0.036  0.97102
günhaftasonu 0.2388001  1.2697247  0.2671180  0.894  0.37133
kampanya    -0.5639721  0.5689447  0.2377425  -2.372  0.01768 *
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

              exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
satış        1.2136    0.8240    1.05091    1.4015
oran         0.9881    1.0120    0.90590    1.0778
stok         0.9987    1.0013    0.99814    0.9992
minimum     0.9551    1.0470    0.92248    0.9889
kategoriicecek 0.2858    3.4995    0.09632    0.8477
kategorimeyvesebze 6.5529    0.1526    2.11717    20.2819
kategorisütvekahvaltılık 1.4540    0.6878    0.57784    3.6587
kategoritenizlik 0.5623    1.7785    0.24061    1.3139
tipgöranan  0.9638    1.0376    0.13185    7.0452
günhaftasonu 1.2697    0.7876    0.75221    2.1433
kampanya    0.5689    1.7576    0.35703    0.9066

Concordance= 0.785 (se = 0.028 )
Likelihood ratio test= 68.21 on 11 df,  p=3e-10
Wald test = 53.56 on 11 df,  p=1e-07
Score (logrank) test = 56.06 on 11 df,  p=5e-08

```

Şekil 9. Tüm değişkenlerle kurulan Cox regresyon analizi çıktıları

VIF değerlerinin 5 ya da 10'un üzerinde olması güçlü çoklu bağlantının bir göstergesidir. Tablo 2 ile verilen değerlere göre çoklu bağlantı problemi bulunmaktadır. Probleminin üstesinden gelebilmek için veri setine Tablo 3'de sonuçları görülecek şekilde LASSO yönetimi uygulanarak değişken seçimi yapılmıştır.

Tablo 2. Tüm bağımsız değişkenler için VIF'ler

değişken	VIF
satış	39,289
oran	14,825
stok	2,725
minimum	5,102
kategori	7,094
tip	7,236
gün	1,186

Tablo 3. LASSO değişken seçimi

değişken	s0
satış	.
oran	0,0382
stok	-0,009
kategoriıcecek	-0,017
kategori meyvesebze	-0,739
kategorisütvekahvaltılık	1,272
kategoritemizlik	0,322
tipgörinan	.
günhaftasonu	-0,220
kampanya	.

LASSO yöntemine göre satış, tip ve kampanya değişkenleri anlamsız değişkenlerdir ve katsayıları sıfıra eşit olmalıdır. Bu değişkenler çıkartılarak yeniden model kurulmuştur. Oran, stok, minimum, kategori, gün değişkenleriyle oluşturulan Cox regresyon analizi sonuçlarına göre gün değişkeninin stok tükenme süresi üzerinde anlamlı bir etkisi bulunmamaktadır.

Gün değişkenini çıkartarak oran, stok, minimum ve kategori değişkenleriyle kurulan Cox regresyon analiz sonuçları Şekil 11'deki gibidir.

```

n= 141, number of events= 67

              coef exp(coef)    se(coef)      z Pr(>|z|)
oran          0.0563691  1.0579881  0.0192556  2.927  0.00342 **
stok         -0.0014548  0.9985462  0.0002663 -5.462  4.70e-08 ***
minimum     -0.0265618  0.9737879  0.0139249 -1.907  0.05646 .
kategoriıcecek -0.9752535  0.3770967  0.4689940 -2.079  0.03758 *
kategorimeyvesebze  2.2173359  9.1828344  0.5367892  4.131  3.62e-05 ***
kategorisütvekahvaltılık 0.7240170  2.0627025  0.3799297  1.906  0.05669 .
kategoritemizlik -0.3810709  0.6831294  0.4226320 -0.902  0.36724

---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1

              exp(coef) exp(-coef) lower .95 upper .95
oran            1.0580      0.9452      1.0188      1.0987
stok            0.9985      1.0015      0.9980      0.9991
minimum        0.9738      1.0269      0.9476      1.0007
kategoriıcecek  0.3771      2.6518      0.1504      0.9455
kategorimeyvesebze  9.1828      0.1089      3.2067     26.2962
kategorisütvekahvaltılık 2.0627      0.4848      0.9796     4.3434
kategoritemizlik  0.6831      1.4639      0.2984     1.5640

Concordance= 0.762 (se = 0.031 )
Likelihood ratio test= 59.88 on 7 df,  p=2e-10
Wald test            = 45.42 on 7 df,  p=1e-07
Score (logrank) test = 45.34 on 7 df,  p=1e-07

```

Şekil 10. Oran, stok, minimum ve kategori değişkenleri Cox regresyon modeli

Tablo 4’de oran, stok, minimum değişkenlerine ait VIF’ler verilmiştir. Tablo 4 incelendiğinde tüm değişkenler için VIF değerleri 5’den küçük görülmektedir. Şekil 10’da kurulan Cox regresyon modelinde çoklu bağlantı problemi yoktur ve kurulan model Likelihood ratio, Wald ve Score testlerine göre anlamlıdır ($p<0,05$). Sağkalım analiz yöntemleri ortak değerlendirme ölçütü olan C-index değeri ise 0,76 olarak bulunmuştur.

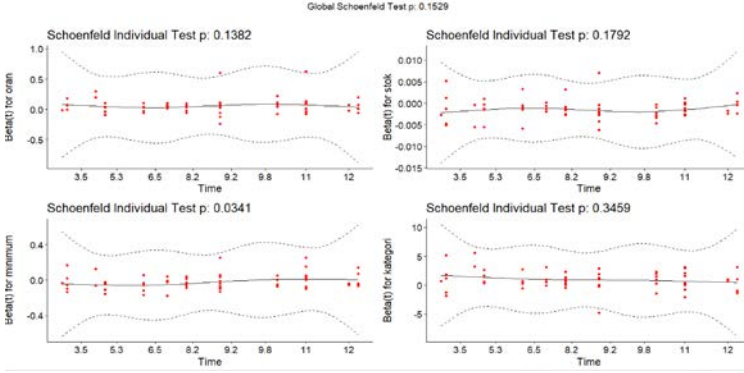
Tablo 4. Oran, stok, minimum ve kategori bağımsız değişkenlerine ait VIF’ler

değişken	VIF
oran	3,158
stok	2,777
minimum	3,697
kategori	2,336

Cox oransal hazard modelinin sağlaması gereken en önemli varsayım oransallığın sağlanmasıdır. Şekil 11’de modelde kullanılan değişkenlerin Schoenfeld artıklarına ait grafikler verilmiştir. Bu grafiklerden oluşturulan Tablo 5 incelendiğinde GLOBAL değer 0,153 olarak görülmektedir. Bulunan bu değere göre oransallığın sağlanmadığı varsayımı reddedilir. ($p>0,05$)

Tablo 5. Cox regresyon modeli oransallık varsayımı için değerler

değişken	chisq	df	p
oran	2,20	1	0,138
stok	1,80	1	0,179
minimum	4,49	1	0,034
kategori	4,47	4	0,346
GLOBAL	10,69	7	0,153

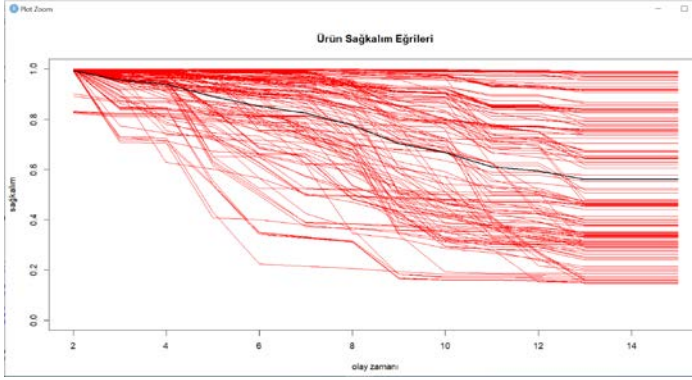


Şekil 11. Schoenfeld artıklarına ait grafikler

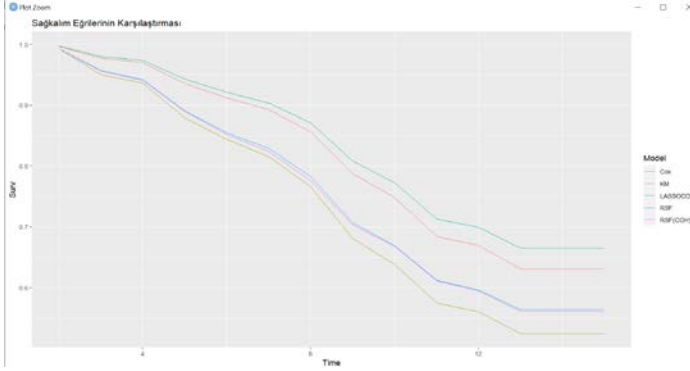
3.4. Rastgele Sağkalım Ormanları Yöntemi Sonuçları

Rasgele sağkalım ormanları-RSO yöntemi için ranger paketi kullanılmıştır. RSO yöntemi kullanılarak yapılan ilk modelde tüm bağımsız değişkenler kullanılmıştır. Bu modele göre önemli olan ilk üç değişken oran, minimum ve stok değişkenleri olarak bulunmuştur. Ranger paketi sağkalım analizinde ortak bir performans değerlendirme ölçütü olan C-index kullanır. Tüm değişkenlerin modele dahil edilerek kurulduğu ilk modelde log-rank ayırma kriteri kullanılmıştır. Bu model için modelin test verisindeki hata oranı %24 olup, C-index değeri 0,76 olarak bulunmuştur.

Oransal hazard varsayımın sağlandığı değişkenlerle kurulan Şekil 11’de sonuçları verilen Cox regresyon yöntemindeki değişkenler ile oluşturulan RSO yönteminde log-rank ayırma kriteri kullanılmıştır. Bu model için C-index değeri ise 0,75’dir. Aynı değişkenlerle kurulan Cox oransal hazard regresyon analizi için bu değer 0,76 olarak görülmektedir. Şekil 13’de bu model kullanılarak oluşturulmuş tüm ürünlere ait sağkalım eğrileri çizdirilmiştir. Şekil 5.14’de yapılan uygulama çalışmasında kullanılan tüm modellere ait ortalama sağkalım eğrileri gösterilmektedir.



Şekil 13. RSO yöntemi ile elde edilen sağkalım eğrileri



Şekil 14. Yöntemlere göre sağkalım eğrilerinin karşılaştırılması

4. SONUÇ

Çalışma kapsamında perakende alanında faaliyet gösteren süpermarket zincirlerinden birine ait gıda e-ticaret sitesinin 16.01.2022 ile 28.09.2022 tarihleri arasında kampanya düzenlenen fakat kampanyalı satışı stoklarla sınırlı olan ürünlerin sağkalım olasılıkları ve sağkalım olasılıklarına etki eden değişkenler sağkalım analiz yöntemleriyle incelenmiştir. İlgilenilen olay indirimli kampanya ürünlerinin stok tükenme zamanı olduğundan değişkenlerin sağ kalma üzerindeki etkileri

araştırılmıştır. Parametrik olmayan sağkalım analiz yöntemi olan Kaplan-Meier kullanılarak her bir değişken için sağkalım eğrileri çizdirilmiştir. Kategori, gün, stok, oran, kampanya, minimum, satış değişkenleri için Kaplan-Meier eğrilerinin Log-rank test istatistiğine göre anlamlı olarak farklılık gösterdiği ortaya konulmuştur. Tüm değişkenler kullanılarak yapılan Cox regresyon analizinde Kaplan-Meier analizini destekler nitelikte satış, stok, minimum, kampanya değişkenleri anlamlı bulunmuştur. Ancak değişkenlere ait VIF'ler hesaplandığında değişkenlerin birbirleriyle ilişkili olduğu gösterilmiştir. Modelde meydana gelen çoklu bağlantı problemi LASSO değişken seçim yöntemiyle ortadan kaldırılmıştır. Analizler sonucunda; modelde kullanılan değişkenler arasında çoklu bağlantı problemi bulunmayan ve oransal hazard varsayımının sağlandığı Cox Oransal Hazard regresyon modeline göre; oran, stok, minimum, kategori süt ve kahvaltılık, kategori meyve ve sebze, kategori atıştırılabilirlik değişkenleri anlamlı bulunmuştur ($p < 0,05$). Cox Oransal Hazard regresyon modelinden elde edilen β katsayıları ise kampanyayla birlikte ürüne uygulanan indirim oranını temsil eden oran değişkeni için indirim oranındaki artış, kampanyadan yararlanmak için yapılması gereken minimum alışveriş tutarındaki azalış ve kampanyaya tanımlanan stok miktarındaki azalışın sonuç değişkeni olan stok tükenme süresini hızlandıracağını göstermektedir. Bu model için C-index değeri 0,76 olarak bulunmuştur. Oransal hazard varsayımının sağlandığı Cox oransal hazard regresyon yöntemindeki değişkenler kullanılarak oluşturulan RSO yönteminde ayırma kriteri olarak log-rank ayırma kriteri kullanılmıştır. Bu model için C-index değeri ise 0,75 olarak bulunmuştur. Yapılan çalışma sonucunda geleneksel sağkalım yöntemleri ile makine öğrenmesi yöntemlerinin model performansı açısından hemen hemen aynı olduğu gösterilmiştir. İstatistiksel olarak anlamlı bulunan risk faktörleri de aynı şekilde birbirlerini destekler niteliktedir. Bu çalışma ile gelenekselleşmiş sağkalım yöntemlerinin alternatifi

olarak makine öğrenmesi yöntemlerinin kullanılabileceği perakende gibi farklı bir sektöre ait veriler kullanılarak detaylıca ortaya konmuştur.

KAYNAKÇA

- Bradburn, M. J., Clark, T. G., Love, S. B., & Altman, D. G. (2003). *Survival analysis part II: multivariate data analysis—an introduction to concepts and methods*. *British Journal of Cancer*, 89(3), 431-436.
- Cox, R. D. (1972). *Regression models and life tables*. *Journal of the Royal Statistical Society*, 2(34), 187-220.
- Hosmer, D. W., Lemeshow, S., & May, S. (2002). *Applied survival analysis: regression modeling of time to data*. NY: Wiley New York.
- Ishwaran, H., Kogalur, U. B., Blackstone, E. H., & Lauer, M. S. (2008a). *Random survival forests*. *The Annals of Applied Statistics*, 2(3), 841-860.
- Ishwaran, H., Kogalur, U. B., Blackstone, E. H., & Lauer, M. S. (2008b). *RandomForestSRC: Random Forests for Survival, Regression and Classification*. R package version 2.4.1: <https://cran.r-project.org/> adresinden alındı
- Kaplan, E. L., & Meier, P. (1958). *Nonparametric estimation from incomplete observations*. *Journal of the American Statistical Association*, 457-481.
- Kleinbaum, D. K., & Klein, M. (2010). *Survival analysis* (Third b.). Springer.
- Lee, E. T., & Wang, J. (2003). *Statistical Methods for Survival Data Analysis* (Cilt 476). John Wiley & Sons.
- Özdemir, O. (2015). *Sağkalım Analizi Yöntemleri-1. İyi Klinik Uygulamalar Dergisi*(3), 21-33.
- Tibshirani, R. (1996). *Regression Shrinkage and Selection via the Lasso*. *Journal of the Royal Statistical Society*, 58(1), 267-288.

- Tibshirani, R. (1997). *The lasso method for variable selection in the Cox model*. *Statistics in medicine*, 16(4), 385-395.
- Wang, P., Li, Y., & Chandan, R. K. (2019). *Machine Learning for Survival Analysis: A Survey*. *ACM Computing Surveys*, 51(6), 1-36.

MATEMATİK KONULARI

yaz
yayınları

YAZ Yayınları

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3

İscehisar / AFYONKARAHİSAR

Tel : (0 531) 880 92 99

yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com