
AKADEMİK PERSPEKTİFTEN MATEMATİK

Editör: Doç.Dr. Faik BABADAĞ



yaz
yayınları

Akademik Perspektiften Matematik

Editör

Doç.Dr. Faik BABADAĞ

yaz
yayınları

2025

Akademik Perspektiften Matematik

Editör: Doç.Dr. Faik BABADAĞ

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-5596-54-3

Haziran 2025 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

info@yazyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

On Some Propertuies of Split Fibonacci and Split Lucas Quaternions.....	1
<i>Ali ATASOY, Züleyha KURT, Faik BABADAĞ</i>	
Yüzey Üzerinde Tanımlı Birim Hızlı Eğrilerde Sabit Nokta Teorik İnceleme ve Uygulamaları	17
<i>Süheyla ELMAS</i>	
Meteorolojik Veriler Üzerinde SVR ve LSTM Modellerinin Performans Değerlendirmesi	30
<i>Burhan BEZEKÇİ</i>	
On Bivariate Moment-Type Operators Reproducing Some Exponential Functions	46
<i>Gümrah UYSAL</i>	
On m-Singular Modified Moment-Type Operators.....	58
<i>Gümrah UYSAL</i>	
Some Properties of Modified Gauss-Weierstrass Integral Operators	69
<i>Başar YILMAZ, Didem AYDIN ARI, Tuğba ÇAYDİBİ</i>	
Birleşmeli Cebirlerin Deformasyon Teorisi.....	83
<i>Elif A. ÖZASLAN</i>	
Visual and Enumerative Properties of Numerical Semigroups: A Rook Polynomial Approach.....	97
<i>Meral SÜER</i>	

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

ON SOME PROPERTIES OF SPLIT FIBONACCI AND SPLIT LUCAS QUATERNIONS

Ali ATASOY¹

Züleyha KURT²

Faik BABADAĞ³

1. INTRODUCTION

In recent years, quaternions have introduced considerable attention and application in the development of virtual reality systems and computer games, particularly for the representation of three-dimensional object orientations. Furthermore, their utility has been demonstrated in diverse domains such as robotics, control theory, and signal processing (Hamilton, 1844; Altmann, 1986).

Cockle (Cockle, 1849) introduced split quaternions as an extension of real quaternions. A key distinction from standard quaternions lies in the algebraic structure; split quaternions do not constitute a division algebra.

A split quaternion is defined as the following quadruple

$$Q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$$

where q_1, q_2, q_3 and q_4 are real numbers and i, j, k are hypercomplex units such that

$$i^2 = -1, j^2 = +1, ij = -ji = k. \quad (1)$$

For split quaternions $Q = q_1 + q_2 i + q_3 j + q_4 k$ and

$$Q' = q'_1 + q'_2 i + q'_3 j + q'_4 k:$$

$$\begin{aligned} Q \pm Q' &= (q_1 + q_2i + q_3j + q_4k) \\ &\quad + (q'_1 + q'_2i + q'_3j + q'_4k) \\ &= (q_1 + q'_1) + (q_2 + q'_2)i + (q_3 + q'_3)j + (q_4 + q'_4)k \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} QQ' &= (q_1 + q_2i + q_3j + q_4k)(q'_1 + q'_2i + q'_3j + q'_4k) \\ &= (q_1q'_1 + q_1q'_2i + q_1q'_3j + q_1q'_4k) \\ &\quad + (q_2q'_1i - q_2q'_2 + q_2q'_3k - q_2q'_4j) \\ &\quad + (q_3q'_1j - q_3q'_2k + q_3q'_3 - q_3q'_4i) \\ &\quad + (q_4q'_1k + q_4q'_2j + q_4q'_3i + q_4q'_4) \\ &= (q_1q'_1 - q_2q'_2 + q_3q'_3 + q_4q'_4) \\ &\quad + (q_1q'_2 + q_2q'_1 - q_3q'_4 + q_4q'_3)i \\ &\quad + (q_1q'_3 - q_2q'_4 + q_3q'_1 + q_4q'_2)j \\ &\quad + (q_1q'_4 + q_2q'_3 - q_3q'_2 + q_4q'_1)k. \end{aligned}$$

Its conjugation is defined as follows:

$$Q^* = q_1 - q_2 i - q_3 j - q_4 k. \text{ and } QQ^* = q_1^2 - q_2^2 - q_3^2 - q_4^2.$$

Sequences of positive integers have an important place and still are object of study for many researchers. The most famous of these sequences have been demonstrated in several areas of mathematics. Many authors were interested in introducing and investigating several generalizations and modifications of Fibonacci and Lucas sequences (Horadam, 1961; Iyer, 1969; Verner, 1969; Vajda, 1989; Dunlap, 1997; Koshy, 2001; Halıcı, 2012).

In this paper, we introduce the concepts of split Fibonacci quaternions and split Lucas quaternions based on the properties of Fibonacci and Lucas numbers. Additionally, we derive several identities associated with these quaternions. The Fibonacci numbers f_n are defined for all integers n by the second-order linear recurrence relation

$$f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$$

with the initial conditions $f_1 = f_2 = 1$. The Lucas numbers l_n are defined by the same recurrence relation:

$$l_{n+2} = l_{n+1} + l_n$$

but with different initial conditions: $l_1 = 1, l_2 = 3$. The Binet formulas for the Fibonacci and Lucas numbers are given by:

$$f_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \text{ and } l_n = \alpha^n + \beta^n$$

where $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

In this paper, we use of the following identities:

$$f_{n-1} + f_{n+1} = l_n \tag{2}$$

$$l_{n+4} - l_n = 5f_{2n} \tag{3}$$

$$l_{n+2} + l_n = 5f_{n+1} \tag{4}$$

$$f_n + f_{n+4} = l_{n+2} \tag{5}$$

$$f_{2n+1} = f_n^2 + f_{n+1}^2 \tag{6}$$

$$f_{-n} = (-1)^{n+1} f_n \tag{7}$$

$$l_{-n} = (-1)^n l_n \tag{8}$$

2. SPLIT FIBONACCI QUATERNIONS AND SPLIT LUCAS QUATERNIONS

Definition 2.1. The n^{th} split Fibonacci quaternion QF_n and the n^{th} split Lucas quaternion QL_n are defined, respectively, as

$$QF_n = f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k, \quad (9)$$

and

$$QL_n = l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k, \quad (10)$$

where f_n is the n^{th} Fibonacci number and l_n is the n^{th} Lucas number. Here, i, j and k are hypercomplex units satisfying multiplication rules in (1):

$$i^2 = -1, \quad j^2 = +1, \quad ij = -ji = k.$$

Starting from $n = 0$, the split Fibonacci quaternions and split Lucas quaternions are defined as follows:

$$QF_0 = 0 + 1i + 1j + 2k, \quad QF_1 = 1 + 1i + 2j + 3k, \dots$$

Similarly, the split Lucas quaternions are given by:

$$QL_0 = 2 + 1i + 3j + 4k, \quad QL_1 = 1 + 3i + 4j + 7k, \dots$$

3. SOME IDENTITIES ON SPLIT FIBONACCI AND SPLIT LUCAS QUATERNIONS

Identities 3. 1. Let $n \geq 1$ be integer. Then the following relations hold for split Fibonacci quaternions and split Lucas quaternions as:

$$QF_n - QF_{n+1}i - QF_{n+2}j - QF_{n+3}k = -5f_{n+3}.$$

and

$$QL_n - QL_{n+1}i - QL_{n+2}j - QL_{n+3}k = -5l_{n+3}$$

Proofs. We give the proof of identity

$QF_n - QF_{n+1}i - QF_{n+2}j - QF_{n+3}k$. Using the definitions and properties in (2), (3), (4) and (5), we obtain:

We have

$$\begin{aligned} & QF_n - QF_{n+1}i - QF_{n+2}j - QF_{n+3}k = \\ &= (f_n + f_{n+2} - f_{n+4} - f_{n+6}) \\ &\quad + (f_{n+1} - f_{n+1} + f_{n+5} - f_{n+5})i \\ &\quad + (f_{n+2} - f_{n+4} - f_{n+2} + f_{n+4})j \\ &\quad + (f_{n+3} + f_{n+3} - f_{n+3} - f_{n+3})k \\ &= (f_n + f_{n+2}) - (f_{n+4} + f_{n+6}) \\ &= l_{n+1} - l_{n+5} \\ &= 5f_{n+3} \end{aligned}$$

On the other hand

$$\begin{aligned} & QL_n - QL_{n+1}i - QL_{n+2}j - QL_{n+3}k = \\ & (l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k) \\ &\quad - (l_{n+1} + l_{n+2}i + l_{n+3}j + l_{n+4}k)i \\ &\quad - (l_{n+2} + l_{n+3}i + l_{n+4}j + l_{n+5}k)j \\ &\quad - (l_{n+3} + l_{n+4}i + l_{n+5}j + l_{n+6}k)k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= (l_n + l_{n+2}) - (l_{n+4} + l_{n+6}) \\ &= 5f_{n+1} - 5f_{n+5} \\ &= -5(f_{n+5} - f_{n+1}) \\ &= -5l_{n+3} \end{aligned}$$

Identity 3.2. For $n \geq 1$, let QF_n^* denote the conjugate of the split Fibonacci quaternion. Then, the following identity holds:

$$QF_n QF_n^* + QF_{n-1} QF_{n-1}^* = -5f_{2n+2}$$

Proof. By using (4), (5) and (6), we will have as follows:

$$\begin{aligned} QF_n QF_n^* + QF_{n-1} QF_{n-1}^* &= -5f_{2n+2} \\ (f_n^2 + f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2 - f_{n+3}^2) &+ (f_{n-1}^2 + f_n^2 - f_{n+1}^2 - f_{n+2}^2) \\ &= (f_n^2 + f_{n+1}^2) - (f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2) + (f_{n-1}^2 + f_n^2) - (f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2) \\ &= -(f_{2n+5} - f_{2n+1}) - (f_{2n+3} - f_{2n-1}) \\ &= -(l_{2n+3} + l_{2n+1}) \\ &= -5f_{2n+2} \end{aligned}$$

Identities 3.3. (Binet-like Formulas) For integers $n \geq 1$, the Binet-like formulas are respectively defined as:

$$QF_n = \frac{\alpha\alpha^n - \beta\beta^n}{\alpha - \beta} \quad (11)$$

and

$$QL_n = \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n \quad (12)$$

where $\underline{\alpha} = 1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3$ and $\underline{\beta} = 1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3$.

Proof. By using (11) and (12), and the Binet formulas for the Fibonacci and Lucas numbers we have

$$\begin{aligned} QF_n &= f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k \\ &= \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta}i \\ &\quad + \frac{\alpha^{n+2} - \beta^{n+2}}{\alpha - \beta}j + \frac{\alpha^{n+3} - \beta^{n+3}}{\alpha - \beta}k \\ &= \frac{(\alpha^n(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3))}{\alpha - \beta} - \frac{\beta^n(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3)}{\alpha - \beta} \\ &= \frac{\underline{\alpha}\alpha^n - \underline{\beta}\beta^n}{\alpha - \beta} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} QL_n &= l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k \\ &= \alpha^n + \beta^n + (\alpha^{n+1} + \beta^{n+1})i + (\alpha^{n+2} + \beta^{n+2})j \\ &\quad + (\alpha^{n+3} + \beta^{n+3})k \\ &= \alpha(1 + i\alpha + j\alpha^2 + k\alpha^3) + \beta(1 + i\beta + j\beta^2 + k\beta^3) \\ &= \underline{\alpha}\alpha^n + \underline{\beta}\beta^n. \end{aligned}$$

Identity 3.4. (Vajda-like identity) For positive integers m, n and r with $n > m \geq r \geq 2$, we have

$$QF_m QF_n - QF_{m-r} QF_{n+r} = \frac{1}{\sqrt{5}} (QF_r)(-\beta^{m-r} \underline{\alpha} \underline{\beta} - \alpha^{m-r} \beta^n \underline{\alpha} \underline{\beta}),$$

Proof. Using (11) and (12), we obtain

$$\begin{aligned}
 QF_m QF_n - QF_{m-r} QF_{n+r} &= \\
 &= \left(\frac{\alpha^m - \beta^m}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^{m-r} - \beta^{m-r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\alpha^m \beta^n (\alpha^{-r} \beta^r - 1) \underline{\alpha} \underline{\beta} + \alpha^n \beta^m (\alpha^r \beta^{-r} - 1) \underline{\alpha} \underline{\beta}) \\
 &= \frac{1}{\alpha - \beta} \left(-\alpha^m \beta^n \frac{\alpha^r - \beta^r}{\alpha^r (\alpha - \beta)} \underline{\alpha} \underline{\beta} + \alpha^n \beta^m \frac{\alpha^r - \beta^r}{\beta^r (\alpha - \beta)} \underline{\alpha} \underline{\beta} \right) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} (QF_r) (\alpha^n \beta^{m-r} \underline{\alpha} \underline{\beta} - \alpha^{m-r} \beta^n \underline{\alpha} \underline{\beta}).
 \end{aligned}$$

Identity 3.5. (Catalan-like Identity) For positive integers n and r with $n \geq r$, we have

$$QF_{n+r} QF_{n-r} - QF_n^2 = \frac{(-1)^{n+r+1}}{\sqrt{5}} (QF_r) (\underline{\alpha} \underline{\beta} \alpha^r - \underline{\beta} \underline{\alpha} \beta^r)$$

Proof. Using (11) and (12), and the Binet formulas for the Fibonacci and Lucas numbers, we obtain

$$\begin{aligned}
 QF_{n+r} QF_{n-r} - QF_n^2 &= \\
 &= \left(\frac{\alpha^{n+r} - \beta^{n+r}}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^{n-r} - \beta^{n-r}}{\alpha - \beta} \right) - \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right) \\
 &= \frac{1}{(\alpha - \beta)^2} (\underline{\alpha} \underline{\beta} \alpha^n \beta^n (1 - \alpha^r \beta^{-r}) + \underline{\beta} \underline{\alpha} \alpha^n \beta^n (1 - \alpha^{-r} \beta^r)) \\
 &= \frac{\alpha^n \beta^n}{\alpha - \beta} (\underline{\alpha} \underline{\beta} (-\frac{\alpha^r - \beta^r}{(\alpha - \beta)} \beta^{-r}) + \underline{\beta} \underline{\alpha} (\frac{\alpha^r - \beta^r}{(\alpha - \beta)} \alpha^{-r}))
 \end{aligned}$$

Identities 3.6. Split nega-quaternions.

Let QF_n and QL_n denote the split Fibonacci quaternion and split Lucas quaternion, respectively. The identities for the

Fibonacci split nega-quaternion and Lucas split nega-quaternion are defined as follows:

$$QF_{-n} = (-1)^{n+1}QF_n + (-1)^n l_n(i + j + 2k),$$

$$QL_{-n} = (-1)^n QL_n + (-1)^{n+1} 5f_n(i + j + 2k).$$

Proofs. We will now provide the proof for the identity of QF_{-n} . Using the definitions and properties in (2), (3), (4), (5), (6), (7), (8), we obtain:

$$\begin{aligned} QF_{-n} &= f_{-n} + f_{-n+1}i + f_{-n+2}j + f_{-n+3}k = f_{-n} + f_{-(n-1)}i \\ &\quad + f_{-(n-2)}j + f_{-(n-3)}k \\ &= (-1)^{n+1}f_n + (-1)^n f_{n-1}i + (-1)^{n-1}f_{n-2}j \\ &\quad + (-1)^{n-2}f_{n-3}k \\ &= (-1)^{n+1}(f_n + f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k) \\ &\quad - (-1)^{n+1}f_{n+1}i - (-1)^{n+1}f_{n+2}j \\ &\quad - (-1)^{n+1}f_{n+3}k + (-1)^n f_{n-1}i + (-1)^{n+1}f_{n-2}j \\ &\quad + (-1)^n f_{n-3}k \\ &= (-1)^{n+1}QF_n + (-1)^n(f_{n+1} + f_{n-1})i \\ &\quad + (-1)^n(f_{n+2} - f_{n-2})j + (-1)^n(f_{n+3} + f_{n-3})k \\ &= (-1)^{n+1}QF_n + (-1)^n l_n i + (-1)^n l_n j \\ &\quad + (-1)^n 2l_n k \\ &= (-1)^{n+1}QF_n + (-1)^n l_n(i + j + 2k). \end{aligned}$$

Next, we present the proof for the identity of QL_{-n} :

$$\begin{aligned}
 QL_{-n} &= l_{-n} + l_{-n+1}i + l_{-n+2}j + l_{-n+3}k = l_{-n} + l_{-(n-1)}i \\
 &\quad + l_{-(n-2)}j + l_{-(n-3)}k \\
 &= (-1)^n l_n + (-1)^{n-1} l_{n-1}i + (-1)^n l_{n-2}j \\
 &\quad + (-1)^{n-1} l_{n-3}k \\
 &= (-1)^n (l_n + l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k) \\
 &\quad - (-1)^n l_{n+1}i - (-1)^n l_{n+2}j - (-1)^n l_{n+3}k \\
 &\quad + (-1)^{n-1} l_{n-1}i + (-1)^n l_{n-2}j + (-1)^{n-1} l_{n-3}k \\
 &= (-1)^n L_n \\
 &\quad + (-1)^{n+1} ((l_{n+1} + l_{n-1})i + (l_{n+2} - l_{n-2})j \\
 &\quad + (l_{n+3} + l_{n-3})k) \\
 &= (-1)^n QL_n + (-1)^{n+1} (5f_n i + 5f_n j + 10f_n k) \\
 &= (-1)^n QL_n + (-1)^{n+1} 5f_n (i + j + 2k).
 \end{aligned}$$

Example 3.7. Let QF_0 , QF_1 and QF_2 be the split Fibonacci quaternions defined as

$$QF_0 = i + j + 2k, \quad QF_1 = 1 + i + 2j + 3k, \text{ and}$$

$$QF_2 = 1 + 2i + 3j + 5k. \text{ We consider the identity}$$

$$\begin{aligned}
 QF_{n+1}QF_{n-1} - QF_n^2 &= (-1)^n (2 + 2i + 2j + 5k) \\
 &= (-1)^n (2(1 + i + 2j + 3k) - 2j - k) \\
 &= (-1)^n (2QF_1 - 2j - k).
 \end{aligned}$$

For $n = 1$ and $n = 2$, we have:

$$\begin{aligned}
 QF_2 QF_0 - QF_1^2 &= (1 + 2i + 3j + 5k)(i + j + 2k) \\
 &\quad - (1 + i + 2j + 3k)^2 = -2 - 2i - 2j - 5k \\
 &= (-1)^1 (2 + 2i + 2j + 6k - k) \\
 &= -(2(1 + 1i + 2j + 3k) - 2j - k) \\
 &= -(2F_1 - 2j - k) \\
 &= -2QF_1 + 2j + k
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 QF_3 QF_1 - QF_2^2 &= (2 + 3i + 5j + 8k)(1 + i + 2j + 3k) \\
 &- (1 + 2i + 3j + 5k)^2 = 2 + 2i + 2j + 5k \\
 &= 2QF_1 - 2j - k.
 \end{aligned}$$

4. SOME APPLICATIONS ON THE SPLIT FIBONACCI QUATERNIONS

Definition 4.1. The n^{th} split Fibonacci quaternion vector $\overrightarrow{QF_n}$ and the n^{th} split Lucas quaternion vector $\overrightarrow{QL_n}$ are defined respectively as:

$$\overrightarrow{QF_n} = f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k$$

and

$$\overrightarrow{QL_n} = l_{n+1}i + l_{n+2}j + l_{n+3}k$$

where f_n and l_n are the n^{th} Fibonacci number and Lucas number. The scalar parts of these vectors are zero, and i, j and k are arbitrary units.

Definition 4.2. The vectoral product of split Fibonacci quaternion vectors, $\overrightarrow{QF_n}$ and $\overrightarrow{QF_m}$ is defined as

$$< \overrightarrow{QF_n}, \overrightarrow{QF_m} > = -f_{n+1}f_{m+1} + f_{n+2}f_{m+2} + f_{n+3}f_{m+3}.$$

The cross product of split Fibonacci quaternion vectors, $\overrightarrow{QF_n}$ and $\overrightarrow{QF_m}$, is given by the determinant:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QF_n} \times \overrightarrow{QF_m} &= \det \begin{bmatrix} -i & j & k \\ f_{n+1} & f_{n+2} & f_{n+3} \\ f_{m+1} & f_{m+2} & f_{m+3} \end{bmatrix} \\
 &= -i(f_{n+2}f_{m+3} - f_{m+2}f_{n+3}) - j(f_{n+1}f_{m+3} - f_{m+1}f_{n+3}) \\
 &\quad + k(f_{n+1}f_{m+2} - f_{m+2}f_{n+2}).
 \end{aligned}$$

Theorem 4.3. Let $\overrightarrow{QF_n}$ and $\overrightarrow{QF_{n+1}}$ be split Fibonacci quaternion vectors. The scalar and vectoral product of these vectors are given by the following expressions:

$$\langle \overrightarrow{QF_n}, \overrightarrow{QF_{n+1}} \rangle = \frac{1}{5} (l_{n+2}^2 + l_{n+3}^2 + l_{2n+5} - (-1)^n),$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QF_n} \times \overrightarrow{QF_{n+1}} &= \det \begin{bmatrix} -i & j & k \\ f_{n+1} & f_{n+2} & f_{n+3} \\ f_{n+2} & f_{n+3} & f_{n+4} \end{bmatrix} \\ &= (-1)^n (i - j + k). \end{aligned}$$

Proof. By using linear relationships involve only sums or differences of Fibonacci numbers or Lucas numbers or their multiples, we can write the scalar product as follows:

$$\begin{aligned} \langle \overrightarrow{QF_n}, \overrightarrow{QF_{n+1}} \rangle &= -f_{n+1}f_{n+2} + f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+4} \\ &= f_{n+2}(f_{n+3} - f_{n+1}) + f_{n+3}f_{n+4} \\ &= f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + f_{n+3}f_{n+2} \\ &= \frac{l_{n+2}^2 - 4(-1)^{n+2}}{5} + \frac{l_{n+3}^2 - 4(-1)^{n+3}}{5} \\ &\quad + \frac{l_{2n+5} - (-1)^n}{5} \\ &= \frac{1}{5} (l_{n+2}^2 + l_{n+3}^2 + l_{2n+5} - (-1)^n). \end{aligned}$$

For the vectoral product, we compute the determinant:

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QF_n} \times \overrightarrow{QF_{n+1}} &= \det \begin{bmatrix} -i & j & k \\ f_{n+1} & f_{n+2} & f_{n+3} \\ f_{n+2} & f_{n+3} & f_{n+4} \end{bmatrix} \\
 &= -i(f_{n+2}f_{n+4} - f_{n+3}^2) \\
 &\quad - j(f_{n+1}f_{n+4} - f_{n+2}f_{n+3}) \\
 &\quad + k(f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+2}^2) \\
 &= -i(-1)^{n+3} \\
 &\quad - j(f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+1}f_{n+2} \\
 &\quad - f_{n+2}f_{n+2} - f_{n+1}f_{n+2}) + k(-1)^{n+2} \\
 &= i(-1)^n - j(f_{n+1}f_{n+3} - f_{n+2}^2) + k(-1)^n \\
 &= i(-1)^n - j(-1)^n + k(-1)^n \\
 &= (-1)^n(i - j + k).
 \end{aligned}$$

Example 4.4. Consider two split Fibonacci quaternion vectors,

$$\overrightarrow{QF_1}=(1, 2, 3) \text{ and } \overrightarrow{QF_2}=(2, 3, 5).$$

The dot product and cross product of these vectors are computed as follows:

$$\begin{aligned}
 \langle \overrightarrow{QF_1}, \overrightarrow{QF_2} \rangle &= -f_2f_3 + f_3f_4 + f_4f_5 \\
 &= \frac{1}{5}(l_{1+2}^2 + l_{1+3}^2 + l_{2+5} - (-1)^1) \\
 &= \frac{1}{5}(16 + 49 + 29 + 1) = 19
 \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{QF_1} \times \overrightarrow{QF_2} = (-1)^1(i - j + k) = -i + j - k.$$

Theorem 4.5. (Cassini-like Identity for Split Fibonacci Quaternion Vector). Let $\overrightarrow{QF_{n-1}}$, $\overrightarrow{QF_n}$ and $\overrightarrow{QF_{n+1}}$ be split Fibonacci quaternion vectors. For $n \geq 1$, the Cassini-like identity for split Fibonacci quaternion vectors is given by

$$\overrightarrow{QF_{n+1}} \overrightarrow{QF_{n-1}} - Q\vec{F}_n^2 = (-1)^n(1 + i + j + k).$$

Proof. Using linear relationships involve only sums or differences of Fibonacci numbers or Lucas numbers, we obtain

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QF_{n+1}} \overrightarrow{QF_{n-1}} &= (f_{n+2}i + f_{n+3}j + f_{n+4}k)(f_n i + f_{n+1}j \\
 &\quad + f_{n+2}k) \\
 &= f_{n+2}f_n(-1) + f_{n+2}f_{n+1}(k) + f_{n+2}^2(-j) + f_{n+3}f_n(-k) \\
 &\quad + f_{n+3}f_{n+1}(1) + f_{n+3}f_{n+2}(-i) + f_{n+4}f_n(j) + f_{n+4}f_{n+1}(i) \\
 &\quad + f_{n+4}f_{n+2}(1) \\
 &= -f_n f_{n+2} + f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+2}f_{n+4} \\
 &\quad + i(f_{n+1}f_{n+4} - f_{n+2}f_{n+3}) \\
 &\quad + j(f_n f_{n+4} - f_{n+2}^2) + k(-f_{n+3}f_n + f_{n+1}f_{n+2}) \\
 &= -f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + (-1)^n + i(-1)^n + j(-1)^{n+1} \\
 &\quad + k(-1)^n
 \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{QF_n}^2 &= (f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k)(f_{n+1}i + f_{n+2}j + f_{n+3}k) \\
 &= -f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 + i(-f_{n+2}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+2}) \\
 &\quad + j(-f_{n+1}f_{n+3} + f_{n+3}f_{n+1}) + k(f_{n+1}f_{n+2} - f_{n+2}f_{n+1}) \\
 &= -f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + f_{n+3}^2 \\
 &\quad = -f_{n+1}^2 + f_{n+2}^2 + (f_{n+2} + f_{n+1})^2 \\
 &= 2f_{n+2}^2 + 2f_{n+1}f_{n+2} = 2f_{n+2}(f_{n+2} + f_{n+1}) \\
 &\quad = 2f_{n+2}f_{n+3}.
 \end{aligned}$$

Thus, we have shown that

$$\overrightarrow{QF_{n+1}} \overrightarrow{QF_{n-1}} - \overrightarrow{QF_n}^2 = (-1)^n(1 + i - j + k),$$

which completes the proof.

Example 4.6. Let $\overrightarrow{QF_0}$, $\overrightarrow{QF_1}$ and $\overrightarrow{QF_2}$ be split Fibonacci quaternion vectors defined as $\overrightarrow{QF_0} = i + j + 2k$, $\overrightarrow{QF_1} = i + 2j + 3k$, and

$\overrightarrow{QF_2} = 2i + 3j + 5k$. According to Theorem 4, for $n = 1$, the following identity holds:

$$\overrightarrow{QF_2} \overrightarrow{QF_0} - \overrightarrow{QF_1}^2 = (-1)^1(1 + i - j + k) = -1 - i + j - k.$$

To verify this result, we perform the indicated operations:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QF_2} \overrightarrow{QF_0} - \overrightarrow{QF_1}^2 &= (2i + 3j + 5k)(i + j + 2k) \\ &\quad - (i + 2j + 3k)(i + 2j + 3k) \\ &= (11 - i + j - k) - 12 = -1 - i + j - k. \end{aligned}$$

5. CONCLUSION

In this paper, we first present the notions of split Fibonacci quaternions and split Lucas quaternions, defined using coefficients from the Fibonacci and Lucas number sequences. We also establish several identities that hold significant relevance within the literature on split quaternions.

REFERENCES

- Altmann S. L., *Rotations, Quaternions, and Double Groups*, Oxford University Press, Oxford, 1986.
- Cockle J., *On Systems of Algebra Involving More than One Imaginary, and on Equations of the Fifth Degree*, The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Sci. 35(3), 434–437, 1849.
- Dunlap, R. A., *The Golden Ratio and Fibonacci Numbers*, World Scientific, 35-50, 1997.
- Halıcı S., *On Fibonacci quaternions*, Adv. Appl. Clifford Alg. 22, 321–327, 2012.
- Hamilton W. R., *On quaternions, or on a new system of imaginaries in algebra*, Edinb. Dublin Philosophical Mag. 25(3), 489–495, 1844.
- Horadam, A. F., *A Generalized Fibonacci Sequence*, American Math. Monthly, 68, 1961.
- Iyer, M. R., *Some Results on Fibonacci Quaternions*, The Fibonacci Quarterly, 7(2), 201-210, 1969.
- Koshy, T., *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, A Wiley-Interscience Publication, USA, 2001.
- Vajda, S., *Fibonacci and Lucas Numbers and the Golden Section*, Theory and Application (Mathematics & Its Applications), Dover Publications, Inc, Mineola, New York, 1989.
- Verner, E. and Hoggatt, Jr., *Fibonacci and Lucas Numbers*, Canadian Mathematical Bulletin, 3(12), 367, 1969.

YÜZEY ÜZERİNDE TANIMLI BİRİM HIZLI EĞRİLERDE SABİT NOKTA TEORİK İNCELEME VE UYGULAMALARI

Süheyla ELMAS¹

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometri, eğrilerin ve yüzeylerin incelenmesi üzerine odaklanan matematiksel bir disiplindir. Bu alan, 18. yüzyıldan itibaren Euler, Gauss ve Frenet gibi matematikçilerin öncü çalışmaları ile büyük bir gelişim göstermiştir. Bu çalışmaların temel amacı, eğrilerin ve yüzeylerin geometrik ve kinematik özelliklerini analitik olarak ifade edebilmektir.

Bu bağlamda, birim hızlı eğriler, hız büyüklüğünün sabit olduğu eğriler olarak tanımlanır. Bu tür eğriler, hareket analizlerinde ve kinematik çalışmalarda önemli bir yer tutar. Eğrilik ve burulma gibi kavramların incelenmesi, eğrinin geometrik yapısının daha iyi anlaşılmasını sağlar. Sabit nokta kavramı ise, eğrilik ve burulmanın sabit olduğu noktaların karakterizasyonunu ifade eder.

Bu çalışmada, yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı eğrilerde sabit nokta kavramı incelenmiş; bu tür eğrilerin eğrilik ve burulma koşulları matematiksel olarak ele alınmıştır. Ayrıca, semer ve regle yüzeyleri üzerinde bu eğrilerin analizi gerçekleştirilmiştir. Literatürde benzer çalışmalar bulunmasına karşın, bu çalışmada birim hızlı eğrilerin yakınsama hızı analizine odaklanılmış ve bu alanda yeni teoremler geliştirilmiştir.

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Atatürk Üniversitesi, K.K. Eğitim Fakültesi Matematik Bölümü, suheylaelmas@atauni.edu.tr, ORCID: 0000-0002-2639-9027.

Diferansiyel geometri, eğrilerin ve yüzeylerin incelenmesini konu edinen matematik dalıdır. Bu alan, 18. yüzyıldan itibaren büyük bir gelişim göstermiştir. Özellikle, Euler, Gauss ve Frenet gibi matematikçiler, eğrilerin ve yüzeylerin geometrik özelliklerini tanımlamak için önemli katkılarda bulunmuşlardır. Birim hızlı eğriler kavramı ise, eğrinin hız büyüklüğünün sabit tutulduğu durumlarda incelenen eğriler olarak tanımlanır. Bu tür eğriler, kinematik analizlerde ve hareket geometrisinde kritik bir öneme sahiptir.

Sabit nokta kavramı, eğrilik ve burulmanın sabit olduğu noktalar üzerinde yoğunlaşır. Diferansiyel geometri ve kinematik analizlerde bu tür noktaların belirlenmesi, eğrilerin ve yüzeylerin karakterizasyonunu sağlar. Bu çalışmada, yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı eğrilerde sabit noktanın tanımı, geometrik özellikleri, ilgili diferansiyel denklemler, teoremlleştirilen sonuçlar, bu teoremlerin ispatları ve belirli yüzeyler (semer yüzeyi ve regle yüzeyi) üzerindeki analizler detaylandırılacaktır.

2. TEMEL KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Tanım 1.1 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ tanımlı türevlenebilen dönüşüme $\mathbb{E}^n$ de bir eğri denir.

Tanım 1.2 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ tanımlı türevlenebilen dönüşüm olsun.

$$\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)) \text{ ise } \alpha_1(t), \alpha_2(t), \dots, \alpha_n(t)$$

türevlenebilen fonksiyonlara $\alpha(t)$ eğrisinin koordinat fonksiyonları denir.

Tanım 1.3 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow \mathbb{E}^n$ tanımlı bir eğri olsun. $\|\alpha'(t)\| = 1$ oluyor ise

$\alpha(t)$ eğrisine $\mathbb{E}^n$ de **birim hızlı** bir eğri denir.

Örnek 1.1 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere $\alpha(t) = (\sin t, \cos t)$ dönüşümü E^2 uzayında birim hızlı bir eğridir.

Çünkü ; $\alpha'(t) = (\cos t, -\sin t)$ den $\|\alpha'(t)\| = 1$ olur.

Tanım 1.4 $X \neq \emptyset$ bir küme olsun. $S : X^3 \rightarrow [0, \infty)$ tanımlı türevlenebilen bir fonksiyon ve X üzerinde tanımlı

S -metriği verilsin , $x, y, z, t \in X$ için;

$$(1) S(x, y, z) \geq 0,$$

$$(2) S(x, y, z) = 0 \text{ ise } x = y = z,$$

$$(3) S(x, y, z) \leq S(x, x, t) + S(y, y, t) + S(z, z, t).$$

olmak üzere (X, S) çiftine S -metrik uzayı denir.

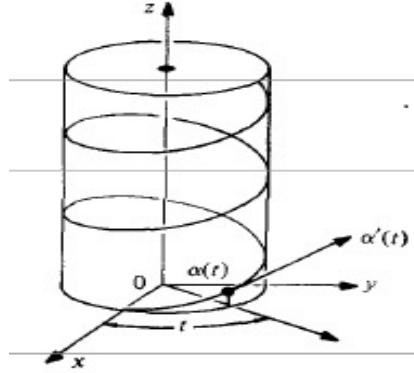
Tanım 1.5 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E^n$ tanımlı türevlenebilen dönüşüm olsun

$$S(t) = \int_{t_0}^t \|\alpha'(t)\| dt$$

dönüşümüne $\alpha(t)$ eğrisinin yay uzunluk fonksiyonu denir.

Tanım 1.6 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $\forall t \in I$ olmak üzere $\alpha : I \rightarrow E^3$ tanımlı eğrinin $\alpha'(t)$ hız vektörü sabit bir $\vec{U}$ vektörü ile sabit bir θ açısı yapıyor ise $\alpha(t)$ eğrisine HELİS EĞRİSİ denir.

$\|\alpha'(t)\| = \|\vec{U}\| = 1$ olur ki $\langle \alpha'(t), \vec{U} \rangle = \cos \theta$ olur (Şekil 1.1).



Şekil 1.1

Örnek 1.2 $I \subset \mathbb{R}$ açık ve $t \in I$ olmak üzere

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{2} \sin t, \frac{1}{2} \cos t, \frac{\sqrt{3}}{2} t \right)$$

dönüşümü E^3 uzayında birim hızlı bir eğridir. (Helis Eğrisi)

Çözüm;

$$\alpha'(t) = \left(\frac{1}{2} \cos t, -\frac{1}{2} \sin t, \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \text{ ve } \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\frac{1}{4} \cos^2 t + \frac{1}{4} \sin^2 t + \frac{3}{4}} = 1 \text{ olur.}$$

Tanım 1.7 X boş olmayan bir küme ve $T: X \rightarrow X$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer $Tx=x$ olacak şekilde bir $x \in X$ varsa, bu x noktasına T dönüşümünün **sabit noktası** denir.

Bu durum da $Tx=x$ denkleminin çözümü veya çözümleri T dönüşümünün sabit noktalarıdır.

T dönüşümünün tüm sabit noktalarının kümesi genelde $F(T)$ ile gösterilir.

Örnek 1.3 $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Tx = x^3$ dönüşümünün üç tam sayı sabit noktası vardır ve $F(T) = \{-1, 0, 1\}$ dir.

Örnek 1.4 $T: R^2 \rightarrow R^2$, $T(x,y) = (x^3, y^3)$ ise T dönüşümünün üç sabit noktası vardır. Sabit noktalar

$$F(T) = \{(-1, -1), (0,0), (1,1)\}$$

olur.

Tanım 1.8 $I \subset R$ açık ve $s \in I$ olmak üzere $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi E^n de birim hızlı bir eğri olsun.

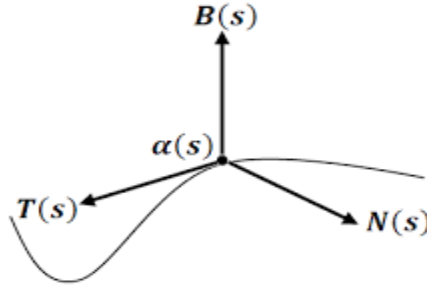
$T = \alpha'(s)$ vektörüne $\alpha(t)$ eğrisinin hız vektörü veya **Birim Teğet Vektör Alanı** denir.

T vektörünün kendisi ile iç çarpımı $\langle T, T \rangle = 1$ dir.

$\langle T, T \rangle = 1$ çarpımının her iki tarafın türevi alınır ise $\langle T, T' \rangle = 0$ olur. Buradan $T \perp T'$ olur. Bu vektör birim olmaya bilir. T' vektörünü normlarsak $N = \frac{T'}{\|T'\|}$ birim vektörünü elde ederiz. N birim vektörüne $\alpha(s)$ eğrisinin **Normal Vektör Alanı** denir.

Artık, eğri boyunca birbirine dik olan iki birim vektörümüz var. Bu iki vektöre dik olan $B = T \times N$ vektörü oluşur. B vektörüne de $\alpha(s)$ eğrisinin **Binormal Vektör Alanı** denir.

$\{T, N, B\}$ kümesine **Frenet Çatısı** denir.(Şekil 1.2)



Şekil 1.2

Bir eğride sabit nokta bakabilmek için eğrinin eğrilik ve burulma fonksiyonlarını da tanımlamamız gerekir.

Tanım 1.9 $\alpha: I \rightarrow E^n$ eğrisi E^n de birim hızlı bir eğri ve Frenet Vektör Alanları $T(t)$, $N(t)$, $B(t)$ olsun.

$$\chi(t) = \langle T'(t), N(t) \rangle$$

fonksiyonuna $\alpha(t)$ eğrisinin eğrilik veya 1. Eğrilik fonksiyonu,

$$\tau(t) = \langle N'(t), B(t) \rangle$$

fonksiyonuna da $\alpha(t)$ eğrisinin burulma fonksiyonu veya 2. Eğrilik fonksiyonu denir.

Tanım 1.10 M, E^3 Euclid uzayının bir alt kümesi olsun.

$$X: U \subset E^2 \rightarrow M \subset E^3$$

türevlenebilen bir dönüşüm olmak üzere; E^3 uzayında bir koordinat yaması oluşturur. Bu yama regülerse M kümesine E^3 uzayında diferansiyellenebilir (düzgün) bir **yüzey** denir.

3. TEOREM VE İSPATLAR

Teorem 3.1 Bir düzgün yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı bir eğri $\alpha(t)$, sabit bir noktadan geçiyor ve türevleri süreklilik koşulunu sağlıyorsa, bu noktada eğriliği (birinci eğrilik) tanımlı, sınırlı ve sabit bir değere sahiptir.

Hipotez:

- $\alpha(t)$: Birim hızlı (yani $\|\alpha'(t)\|=1$) bir eğri.
- Eğri bir yüzey üzerinde tanımlıdır, bu yüzden her $t \in I \subset \mathbb{R}$ için $\alpha(t)$ yüzeyin bir noktasını verir.
- Eğri bir sabit noktadan geçiyor, yani diyelim ki $\alpha(t_0) = p$ sabit bir noktadır.
- Türevlerin sürekliliği: $\alpha'(t)$ ve $\alpha''(t)$ süreklidir.

- Aranan: $\kappa(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|$ yani eğrilik, tanımlı, sınırlı ve sabittir.

İspat:

1. Birim Hızlı Eğrilerde Eğrilik Tanımı ; Birim hızlı bir eğri için eğrilik $\kappa(t) = \|\alpha''(t)\|$ dir. Bu bize yalnızca $\alpha''(t)$ varsa (yani ikinci türev tanımlıysa) anlamlıdır.

2. Türevlerin sürekliliği ve tanımlılığı; Verilenlere göre,

- $\alpha'(t)$ süreklidir.
- $\alpha''(t)$ süreklidir (çünkü türevler süreklilik koşulunu sağlıyor).
- Dolayısıyla $\alpha''(t_0)$ tanımlıdır ve süreklilikten dolayı $\|\alpha''(t_0)\|$ de tanımlıdır.

3. Eğrinin Sınırlılığı; Süreklilikten dolayı $\alpha''(t)$ bir açık aralıkta sürekli olduğu için bu bölgede sınırlıdır. Yani:

Her $t \in I \subset R$ için $\exists r > 0$ öyle ki $\|\alpha''(t)\| < r$ olur.

Bu ifade bize eğriliğin sınırlı olduğunu gösterir.

4. Eğrinin Sabit Bir Noktadan Geçmesi Ne Anlama Geliyor; Eğri sabit bir noktadan geçiyorsa, örneğin

$$\alpha(t_0) = p$$

sadece konumla ilgilidir. Ancak teorem, bu noktadaki eğrilikten bahsettiği için, $t = t_0$ anındaki geometriyi inceliyoruz. Bu, eğriliğin yalnızca bu noktadaki değerini ilgilendirir, dolayısıyla "sabit" kelimesi burada "bu noktadaki değeri sabittir" anlamındadır (yani $\kappa(t_0) \in R$ dir.). Eğriliğin zaman içinde sabit olması gerektiği anlamına gelmez.

5. **Sonuç:** $\kappa(t_0) = \|\alpha''(t_0)\|$ tanımlıdır. Sınırlıdır (çünkü türev süreklidir ve bu noktada türev normu sınırlıdır) ve eğrilik Sabittir (Belirli Bir Reel Sayı Olarak) .

Dolayısıyla teorem ispatlanmış olur.

Örnek 3.1 Küre Üzerindeki Birim Hızlı Eğri

Düzgün bir yüzey olarak **birim yarıçaplı küreyi** alalım:

$$S = \{(x, y, z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Bu yüzey üzerinde bir eğri ;

$$\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$$

Bu, kürenin ekvatoru boyunca hareket eden bir eğridir.

Adım 1:

$$\alpha'(t) = (-\sin t, \cos t, 0) \quad \text{ve} \quad \|\alpha'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \text{ dir.}$$

Dolayısıyla eğri **birim hızlıdır**.

Adım 2:

$$\alpha''(t) = (-\cos t, -\sin t, 0) \quad \text{ve} \quad \|\alpha''(t)\| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1. : \kappa(t) = 1 \text{ olur}$$

Yani bu eğrinin **her noktadaki eğriliği sabittir**.

Özellikle $t = 0$ noktasında:

$$\alpha(0) = (1, 0, 0) \text{ **sabit bir noktadır** ve } \kappa(0) = 1$$

Bu değer:

Tanımlıdır (çünkü $\alpha''(t)$ var ve sürekli),

Sınırlıdır (değeri 1),

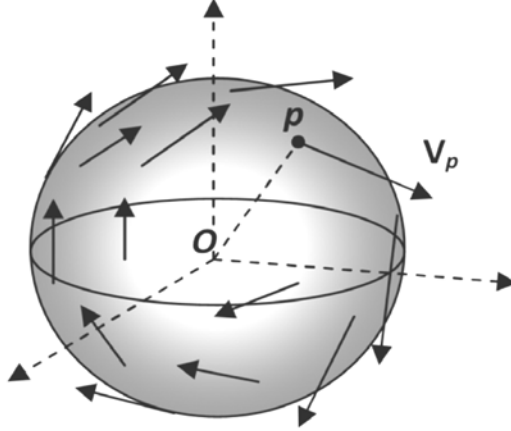
Sabittir (tek bir sayı olarak sabit anlamında; ayrıca burada her t için sabit).

Sonuç

Bu örnek, küre üzerindeki birim hızlı ve düzgün $\alpha(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ eğrisinin herhangi bir noktasındaki eğriliğin:

“ Tanımlı, Sınırlı ve Sabit bir değere sahip “olduğunu açıkça gösterir.

Böylece teorem somut olarak doğrulanmış olur.



Şekil 3.1 Küre Yüzeyi

Teorem 3.2 (Sabit Noktada Burulma Koşulu)

Bir diferansiyellenebilir yüzey $S \subset E^3$ üzerinde tanımlı, birim hızlı (yani $\|\alpha'(t)\|=1$) eğri $\alpha(t)$, bir noktada sabit kalıyor ve burulması $\tau(t)$ bu noktada tanımlı ise:

Eğer $\alpha(t_0) = p$ **sabit bir nokta** ve $\alpha'(t_0) = \vec{T} \neq 0$ ise, bu noktadaki burulma $\tau(t_0) = 0$ olur.

İspat: (Sabit Nokta Koşulu)

Eğer $\alpha(t_0) = p$ sabit bir noktada ise, konum değişmiyor demektir. Ancak bu, $\alpha'(t_0) = 0$ demek değildir. Çünkü parametrisasyon birim hızlıdır, dolayısıyla $\|\alpha''(t_0)\| = 1$, yani hız sıfır değil.

Ancak şöyle bir durum söz konusudur:

Eğri uzayda sabit bir noktaya dönük olabilir, fakat tüm türevleri uzaydaki belirli bir düzlem içinde kalıyorsa (örneğin bir yüzey üzerindeyse), burulması sıfır olur.

(Burulmanın Sıfır Olması)

Burulma, eğrinin uzayda düzlemden çıkma ölçüsüdür. Eğer bir eğri bir noktada konum olarak sabitse ve yüzeyin normal yönü sabitse (örneğin bir düzlem ya da sabit yüzey eğrisi), o zaman o noktada burulma sıfırdır. Çünkü eğri düzlem içinde kıvrılıyor ama bu düzlem dışına çıkmıyordur.

Yani:

- $B(t)$ sabit ise $B'(t)=0$
- Bu durumda $\tau(t)=-B'(t) \cdot N(t) = 0$
- Sonuç: Yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı bir eğri, bir noktada sabit kalıyor ve o noktadaki binormal vektör değişmiyorsa (örneğin yüzey düzlemsel ya da lokal olarak düzgünse), burulma sıfırdır.

Örnek 3.2

$$S=\{(x,y,z) \in E^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

Küresi üzerindeki bir paralel (enlem) daireyi şu şekilde tanımlayalım:

$$\alpha(t) = (\cos t \cdot \cos \theta, \sin t \cdot \cos \theta, \sin \theta)$$

Burada:

$\theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ aralığında sabit bir açı, t parametrik değişken (ark uzunluğu değil ama birim hızla yeniden parametrelendirilebilir), bu eğri sabit yükseklikte ($z = \sin \theta$) ve küre yüzeyine gömülüdür.

Bu eğri bir noktada sabit değildir ama bu örnek daha iyi anlaşılabilirlik için şu özel durumda sabitlenebilir,

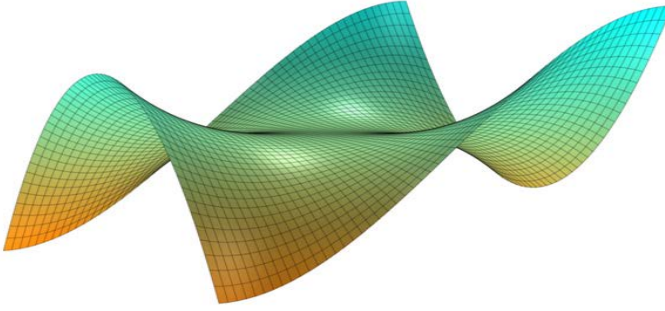
$$\theta = \frac{\pi}{2} \text{ için } \alpha(t) = (0,0,1)$$

Bu durumda her $t \in R$ için eğri sabit bir noktaya çöküyor. Bu durumda küre üzerindeki **Sabit Nokta** $(0,0,1)$ olur.

4. BİRİM HIZLI EĞRİLERDE YAKINSAMA HIZ

Tanım 1.1 ve Şekil 1.1 de verilen Helis eğrisi, sabit eğrilik ve burulma ile tanımlanan birim hızlı bir eğridir.

Semer yüzeyi, generatris bir doğru boyunca hareket eden ve sabit bir eğrilik ile dönen bir yüzeydir. Aşağıdaki şekilde, parametrik olarak tanımlanmış bir semer yüzeyi gösterilmiştir.



Şekil 4.1. Semer Yüzeyi

Birim hızlı eğrilerde yakınsama hızı, eğrinin belirli bir sabit noktaya yaklaşma hızını ifade eder. Bu kavram, eğrinin eğrilik ve burulma değerlerinin sabit olduğu durumlarda daha net analiz edilebilir. Eğrilik ve burulma sabit olduğunda, eğrinin yakınsama hızı, eğrilik merkezinin hareketi ile ilişkilendirilebilir.

Yakınsama hızını analiz etmek için eğrinin birinci türevi (eğrilik vektörü) ve ikinci türevi (burulma vektörü) incelenir. Birim hızlı eğrilerde yakınsama hızı genellikle aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Burada, sabit bir katsayıdır ve ikinci türev, eğrinin yakınsama hızını belirler. Bu ifade, eğrilik ve burulmanın sabit olduğu durumda türev büyüklüğünün de sabit kalacağını ifade eder.

Özellikle, ikinci türev (eğrilik vektörü) ve üçüncü türev (burulma vektörü) sabit değerler aldığında, eğri sabit noktaya

doğru düzgün bir yakınsama sergiler. Bu durum, eğrinin geometrik yapısının kararlı olduğunu gösterir. Eğrinin yakınsama hızı üzerinde daha fazla çalışma yapılması, özellikle kinematik analizlerde önemli çıkarımlar sağlar.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu çalışma, yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı eğrilerde sabit nokta kavramını ele alarak, semer ve regle yüzeyleri üzerinde detaylı analizler gerçekleştirmiştir. Elde edilen teoremler ve örnekler, hem teorik analizler hem de uygulamalı kinematik çalışmalar için temel teşkil etmektedir. Bu bağlamda, eğrilik ve burulmanın sabit olduğu eğrilerde yakınsama hızının analizi literatürdeki mevcut çalışmalarla uyumlu sonuçlar vermiştir.

Gelecekte yapılacak çalışmalar için öneriler şunlardır:

- Sabit noktalarda eğrilik ve burulmanın değişimi incelenerek daha kompleks yüzey tipleri için analizler yapılabilir.
- Eğrilerin yakınsama hızı ile ilgili daha fazla sayısal örnek ve simülasyon çalışmaları gerçekleştirilebilir.
- Semer ve regle yüzeyleri dışında hiperbolik ve parabolik yüzeyler üzerinde benzer analizler yapılabilir.

Bu çalışma, yüzey üzerinde tanımlı birim hızlı eğrilerde sabit nokta kavramını ele alarak, semer ve regle yüzeyleri üzerinde daha detaylı analizler yapılmasını sağlamaktadır. Elde edilen teoremler ve örnekler, hem teorik analizler hem de uygulamalı kinematik çalışmalar için temel teşkil etmektedir.

KAYNAKLAR

- [1] Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publications.
- [2] Do Carmo, M. P. (2016). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall.
- [3] Kreyszig, E. (1991). Differential Geometry. Dover Publications.
- [4] Spivak, M. (1979). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish.
- [5] O'Neill, B. (2006). Elementary Differential Geometry. Academic Press.
- [6] Klingenberg, W. (2014). A Course in Differential Geometry. Springer.
- [7] Willmore, T. J. (2012). An Introduction to Differential Geometry. Oxford University Press.
- [8] Struik, D. J. (1988). Lectures on Classical Differential Geometry. Dover Publications.
- [9] Do Carmo, M. P. (2016). Differential Geometry of Curves and Surfaces. Prentice Hall.
- [10] Kreyszig, E. (1991). Differential Geometry. Dover Publications.
- [11] Spivak, M. (1979). A Comprehensive Introduction to Differential Geometry. Publish or Perish.
- [12] O'Neill, B. (2006). Elementary Differential Geometry. Academic Press.

METEOROLOJİK VERİLER ÜZERİNDE SVR VE LSTM MODELLERİNİN PERFORMANS DEĞERLENDİRMESİ

Burhan BEZEKÇİ¹

1. GİRİŞ

Günümüzde hava olaylarının doğru bir şekilde tahmin edilmesi, tarım, enerji, ulaşım, sağlık ve çevre planlaması gibi pek çok alanda hayati öneme sahiptir. Özellikle sıcaklık gibi temel meteorolojik değişkenlerin öngörülebilmesi, hem bireysel hem de kurumsal düzeyde alınacak kararların doğruluğunu artırmaktadır. Geleneksel istatistiksel tahmin yöntemleri bazı temel varsayımlara dayanmakta olup, gerçek hayattaki karmaşık ve doğrusal olmayan ilişkileri modellemede çoğu zaman yetersiz kalmaktadır. Bu nedenle son yıllarda makine öğrenmesi ve derin öğrenme temelli yaklaşımlar, zaman serisi tahmini gibi problemler için etkili alternatifler olarak öne çıkmıştır

Destek Vektör Regresyonu (SVR), yüksek boyutlu ve doğrusal olmayan verilerle başa çıkabilme yeteneği sayesinde, zaman serisi tahminlerinde sıklıkla tercih edilen bir yöntemdir. SVR, özellikle küçük veri setlerinde ve kısa vadeli tahminlerde başarılı sonuçlar vermektedir (Awad ve Khanna, 2015). Öte yandan, Uzun Kısa Süreli Bellek (LSTM) ağları, uzun vadeli bağımlılıkları öğrenme kapasitesiyle, özellikle uzun dönemli ve karmaşık zaman serisi verilerinde üstün performans sergilemektedir (Hochreiter ve Schmidhuber, 1997). Son yıllarda

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, burhanbezekci@kilis.edu.tr, ORCID: 0000-0001-7460-4091.

yapılan çalışmalar, LSTM'nin sıcaklık tahmini gibi meteorolojik uygulamalarda yüksek doğruluk sağladığını göstermektedir (Chen ve arkadaşları, 2020; Nizar ve arkadaşları, 2021).

Bu bağlamda, çalışmanın temel amacı; Hindistan'ın Delhi bölgesine ait 2013–2017 yıllarını kapsayan günlük meteorolojik veriler üzerinden ortalama sıcaklık tahmini yaparak, SVR ve LSTM modellerinin performanslarını karşılaştırmak ve bu yöntemlerin zaman serisi tahminindeki etkinliğini ortaya koymaktır. Modelleme süreci; veri ön işleme, öznitelik seçimi, eğitim ve test ayrımı, hiperparametre optimizasyonu ve değerlendirme metriklerini içermekte; sonuçlar hem sayısal metriklerle hem de görsel analizlerle değerlendirilmektedir.

Elde edilen bulguların, zaman serisi tahmini alanındaki çalışmalara katkı sağlaması ve benzer veri ile çalışan araştırmacılar için uygulanabilir bir yol haritası sunması hedeflenmektedir.

2. DESTEK VEKTÖR REGRESYONU

Makine öğrenmesi, örnek verilere dayalı olarak tahmin veya karar alma süreçlerini otomatikleştiren bir yöntemler bütünüdür (Bishop, 2006). Matematiksel olarak, makine öğrenmesi süreci, bir fonksiyonun öğrenilmesi problemi olarak tanımlanabilir. Bu bağlamda, elimizde giriş/çıkış örneklerinden oluşan bir veri seti $\mathcal{D} = \{(\mathbf{x}_i, y_i)\}_{i=1}^N$ bulunmaktadır ve amaç, $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ biçimindeki bir fonksiyonu yaklaşık olarak bulmaktır.

$$y_i = f(\mathbf{x}_i) + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Bu ifadede yer alan ε_i terimi, modelin hata bileşenini temsil eder; yani gözlenen çıktı y_i ile modelin tahmin ettiği $f(\mathbf{x}_i)$ değeri arasındaki farkı ifade eder. Bu hata, genellikle modele

dahil edilmeyen etkilerden veya ölçüm hatalarından kaynaklanır. $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ ifadesi ise bu hata teriminin ortalaması sıfır olan ve varyansı σ^2 olan bir normal dağılıma uyduğunu belirtir. Burada $\mathcal{N}$ normal dağılımı, 0 hata terimlerinin beklenen (ortalama) değerini, σ^2 ise hata terimlerinin varyansını ifade eder. Bu varsayım, modelin rastgele hataları da hesaba katarak gerçek veriye daha uygun bir tahmin fonksiyonu oluşturmasını sağlar.

Bu ifade, gözlemlenen çıktının, girdi verisinin altında yatan bilinmeyen bir fonksiyonun değeri etrafında rastgele bir gürültüyle dağıldığını varsayar. Uygulamada bu fonksiyon genellikle parametrik bir model ailesi içerisinde seçilir ve ilgili parametreler, eldeki veriye göre ayarlanarak belirlenir. Kurulan modelin başarısı ise yalnızca eğitim verisindeki doğruluğuyla değil, aynı zamanda daha önce hiç karşılaşmadığı yeni verilere ne kadar iyi genelleme yapabildiğiyle ölçülür.

Destek Vektör Regresyonu (SVR), destek vektör makineleri (SVM) algoritmasının regresyon problemlerine uyarlanmış bir biçimidir (Smola ve Schölkopf, 2004). SVR'nin temel amacı, ϵ duyarsız bir tüp içerisinde kalan hataları cezalandırmadan, en düz fonksiyonu bulmaktır:

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{w}, \mathbf{x} \rangle + b.$$

Bu formülde $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ modelin girdilerini temsil ederken $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^d$ her bir özniteliğe karşılık gelen ağırlıkları içeren katsayı vektörüdür ve $b \in \mathbb{R}$ terimi ise sapma değeridir. Bu regresyon fonksiyonu aşağıdaki optimizasyon problemi ile elde edilir:

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi_i, \xi_i^*} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*)$$

şu kısıtlamalar altında:
$$\begin{cases} y_i - \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle - b \leq \epsilon + \xi_i, \\ \langle \mathbf{w}, \mathbf{x}_i \rangle + b - y_i \leq \epsilon + \xi_i^*, \\ \xi_i, \xi_i^* \geq 0. \end{cases}$$

Burada:

- ϵ parametresi, duyarsızlık tüpünün genişliğini belirler.
- C ceza parametresi, modelin doğruluğu ile düzlüğü arasında denge kurar.
- ξ_i, ξ_i^* gevşeklik değişkenleridir; ve bu değişkenler ϵ tüpünün dışındaki hataları temsil eder.

SVR algoritması, doğrusal olmayan durumlar için çekirdek fonksiyonları ile genişletilebilir. Bu durumda giriş verileri, $\phi(\mathbf{x})$ ile yüksek boyutlu bir özellik uzayına göçürülerek hesaplama yapılır. Yaygın olarak kullanılan çekirdek fonksiyonları arasında doğrusal, polinomsal ve RBF yer alır (Vapnik, 1995). SVR modelleri, yalnızca karar sınırına en yakın veri noktalarına -yani destek vektörlerine- dayanarak öğrenme gerçekleştirir. Bu sayede model, tüm veriye değil yalnızca en anlamlı örneklerle odaklanır ve genelleme yeteneği artar. Ayrıca, ϵ -duyarsız kayıp fonksiyonu sayesinde küçük hatalar görmezden gelinir; bu durum modelin sadeleşmesine ve aşırı uyum riskinin azalmasına katkı sağlar. Öte yandan, çekirdek yöntemleri kullanılarak, giriş verileri daha yüksek boyutlu bir uzayda temsil edilebilir ve bu sayede doğrusal olmayan yapılar da etkili biçimde modellenenir. Tüm bu özellikler bir araya geldiğinde, SVR yöntemi hem esnek hem de aykırı değerlere karşı dirençli bir regresyon yaklaşımı sunar (Cortes ve Vapnik, 1995).

Doğrusal olmayan ilişkilerin modellenmesi gerektiğinde, SVR algoritması giriş verilerini daha yüksek boyutlu bir özellik uzayına dönüştüren $\phi(x)$ fonksiyonunu kullanır. Bu uzayda, regresyon fonksiyonu şu şekilde ifade edilir:

$$f(x) = \sum_{i=1}^N (\alpha_i - \alpha_i^*) K(x_i, x) + b.$$

Burada $K(x_i, x) = \langle \phi(x_i), \phi(x) \rangle$ çekirdek fonksiyonunu temsil eder. Bu fonksiyon, girdi verilerini $\phi(x)$ ile açıkça dönüştürmek yerine, iç çarpımı doğrudan kernel aracılığıyla hesaplayarak hesaplama maliyetini düşürür. Doğrusal çekirdek $K(x, x') = x^T x'$, polinomsal çekirdek $K(x, x') = (x^T x' + c)^d$ ve radyal tabanlı çekirdek $K(x, x') = \exp(-\gamma \|x - x'\|^2)$ olmak üzere farklı kernel türleri kullanılabilir. Bu biçim, SVR'nin dual formudur ve çözüm Lagrange çarpanları α_i, α_i^* üzerinden gerçekleştirilir. Yalnızca bu çarpanların sıfırdan farklı olduğu (yani destek vektör olan) örnekler tahmin fonksiyonuna katkıda bulunur. Bu durum, modelin hem sade kalmasını hem de genelleme gücünün yüksek olmasını sağlar (Smola ve Schölkopf, 2004).

Sonuç olarak, Destek Vektör Regresyonu (SVR), gerek teorik temelleri gerekse uygulamadaki başarısı sayesinde makine öğrenmesi tabanlı regresyon problemlerinde güçlü bir alternatif olarak öne çıkmaktadır. Duyarsızlık temelli kayıp fonksiyonu, sınırlı sayıda destek vektörüne dayanması ve çekirdek fonksiyonları aracılığıyla doğrusal olmayan yapıları da modelleyebilmesi, SVR'nin hem esnek hem de genellenebilir bir çözüm yöntemi sunmasını sağlar. Bu özellikleri sayesinde SVR, özellikle karmaşık ve gürültülü veriler üzerinde güvenilir tahminler yapmak isteyen araştırmacılar için tercih edilebilir bir yaklaşımdır.

3. UZUN KISA SÜRELİ BELLEK AĞ

Özyinelemeli sinir ağları (RNN), sıralı verilerde zaman bağımlılıklarını öğrenmek amacıyla geliştirilmiş derin öğrenme yapılarıdır. RNN'ler, geçmiş zamandaki bilgiyi güncel zamanla ilişkilendirebilir; bu özellikleriyle dil modelleme, zaman serisi analizi ve konuşma tanıma gibi uygulamalarda sıklıkla tercih edilir (Hochreiter ve Schmidhuber, 1997). Ancak klasik RNN'ler, uzun bağımlılıkları öğrenme konusunda ciddi sınırlamalara sahiptir. Geriye yayılım sırasında gradyanların çok küçülmesi veya büyümesi problemleri, bu modellerin eğitilmesini zorlaştırır (Bengio ve arkadaşları, 1994).

Bu sorunları aşmak amacıyla, Hochreiter ve Schmidhuber tarafından 1997 yılında Uzun Kısa Süreli Bellek ağı önerilmiştir (Hochreiter ve Schmidhuber, 1997). LSTM yapısı, klasik RNN'den farklı olarak, her zaman adımında bilgiyi uzun süre taşıyabilen ve gerektiğinde unutan bir hücre durumu içerir. Hücre durumu, unutma, giriş ve çıkış kapıları ile kontrol edilerek güncellenir. Bu kapılar, ağın hangi bilgileri tutması, hangilerini unutması ve neyi çıktı olarak üretmesi gerektiğini belirler (Gers ve arkadaşları, 2000). LSTM'nin matematiksel yapısı aşağıdaki gibi ifade edilir:

$$\begin{aligned} f_t &= \sigma(W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f) && (\text{Unutma kapısı}) \\ i_t &= \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i) && (\text{Giriş kapısı}) \\ \tilde{C}_t &= \tanh(W_c \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_c) && \text{□} \\ C_t &= f_t \odot C_{t-1} + i_t \odot \tilde{C}_t && (\text{Hücre durumu güncellemesi}) \\ o_t &= \sigma(W_o \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_o) && (\text{Çıkış kapısı}) \\ h_t &= o_t \odot \tanh(C_t) && (\text{Güncel gizli durum}) \end{aligned}$$

Yukarıda verilen formüller, LSTM hücresinin bir zaman adımındaki temel işlemlerini göstermektedir. İlk satırda yer alan f_t ifadesi, unutma kapısını temsil eder; bu kapı, hücre durumunun önceki bilgilerini ne ölçüde tutacağını belirler. i_t ifadesi, giriş

kapısı olarak adlandırılır ve yeni bilginin hücre durumuna ne kadar katkı yapacağını kontrol eder. $\tilde{C}_t$ ifadesi, aday hücre durumu olarak tanımlanır ve giriş kapısıyla birlikte yeni bilginin hangi ölçüde ekleneceğini belirler. C_t hücre durumunun güncellenmiş halidir ve hem unutma kapısı (f_t) yardımıyla geçmiş bilgileri, hem de giriş kapısı (i_t) ile yeni bilgileri içerir. o_t çıkış kapısını ifade eder ve bu kapı, hücre bilgisinden hangi kısmın çıkış (gizli durum) olarak aktarılacağını belirler. Son olarak h_t ifadesi, ağıın bu zaman adımındaki güncel gizli durumunu temsil eder. Buradaki σ sigmoid aktivasyon fonksiyonunu, $\tanh$ ise hiperbolik tanjant fonksiyonunu ifade ederken, $\odot$ sembolü ise eleman bazlı (Hadamard) çarpımı göstermektedir. W ve b terimleri sırasıyla ağırlık matrisleri ve bias vektörleridir. Bu yapılar sayesinde LSTM, hangi bilgileri ne kadar süreyle saklaması gerektiğini öğrenebilir.

Bu yapı sayesinde, LSTM'ler bilgileri kısa vadeli hafıza yerine uzun süreli hafızada taşıyabilir ve dil modeli gibi uzun bağımlılık gerektiren görevlerde oldukça başarılı sonuçlar verir (Staudemeyer ve Morris, 2019). Özellikle dil modelleme, konuşma tanıma, zaman serisi tahmini, resim altyazılama ve anomali tespiti gibi pek çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır (Cho ve arkadaşları, 2014). LSTM mimarisinin bir diğer güçlü yönü de, farklı kapı mekanizmaları sayesinde geçmiş bilgiyi selektif olarak taşımasıdır. Bu sayede model, yalnızca önemli bilgileri tutar ve önemsiz verileri elemine eder. Hücre durumu adeta bir taşıyıcı bant gibi çalışır; bilgi doğrusal olarak ilerler ve gereksiz bilgiler kapılar aracılığıyla sistemden elenir. Bu özellik, klasik RNN'lerin aksine, uzun sıralı girdilerde daha stabil ve etkili bir öğrenmeyi mümkün kılar (Greff ve arkadaşları, 2017).

Sonuç olarak, LSTM ağları, klasik RNN'lerin yapamadığı uzun dönemli bağımlılıkları öğrenme yeteneği sayesinde, modern

derin öğrenme modellerinde sıklıkla tercih edilen güçlü bir araç hâline gelmiştir. Bu modeller, karmaşık zaman serisi problemlerinin çözümünde yüksek doğruluk ve esneklik sunar.

4. MODEL EĞİTİMİ

Bu çalışmada, Delhi bölgesine ait 2013–2017 yıllarını kapsayan meteorolojik veri kümesi kullanılarak, sıcaklık tahmini yapılması amaçlanmıştır. Çalışmada kullanılan veri kümesi, çevrimiçi veri paylaşım platformu *Kaggle* üzerinden temin edilmiştir (Rao, 2019). Tahminleme sürecinde iki farklı makine öğrenmesi yöntemi -Destek Vektör Regresyonu (SVR) ve Uzun Kısa Süreli Bellek Ağı (LSTM)- karşılaştırmalı olarak değerlendirilmiştir. Modelleme süreci; veri ön işleme, eğitim ve test verilerinin ayrılması, hiperparametre seçimi, model eğitimi ve performans değerlendirmesi gibi aşamaları içermektedir.

Veri kümesi her bir gün için ortalama sıcaklık, bağıl nem, rüzgar hızı ve atmosferik basınç gibi temel hava durumu değişkenlerini içermektedir. Bu değişkenler arasındaki doğrusal ilişkileri incelemek amacıyla Pearson korelasyon katsayısına dayalı bir korelasyon matrisi oluşturulmuştur. Elde edilen sonuçlar, Şekil 1’de gösterilen ısı haritası ile görselleştirilmiştir. Buna göre, “Ortalama Sıcaklık” ile en güçlü negatif korelasyon -0.57 ile “Nem” değişkeninde gözlemlenirken; “Rüzgar Hızı” ile pozitif yönde ancak daha zayıf bir ilişki (0.31) tespit edilmiştir. “Ortalama Basınç” değişkeni ise sıcaklık ile anlamlı bir korelasyon göstermemiştir. Bu analiz doğrultusunda, tahminleme sürecinde yalnızca anlamlı ilişkilere sahip değişkenler modele dahil edilmiş, “Ortalama Basınç” değişkeni ise analiz dışı bırakılmıştır.

Veri seti herhangi bir eksik veya aykırı değer içermediğinden, doğrudan modelleme sürecine geçilmiştir. Model eğitimi sürecinde, veri kümesi zaman sırasına göre

kronolojik biçimde düzenlenmiş ve %80'i eğitim, %20'si ise test verisi olarak ayrılmıştır. Tüm değişkenler, ölçekleme gerektirdiğinden normalize edilmiştir. Bu işlem, veri dağılımlarını ortak bir ölçeğe getirerek öğrenme sürecinin kararlılığını ve doğruluğunu artırmayı amaçlamaktadır.

Bu çalışmada, SVR modelinin hiperparametre optimizasyonu için sistematik bir arama yöntemi olan GridSearchCV kullanılmıştır. GridSearchCV, belirlenen hiperparametre kombinasyonlarını tümler ve her bir kombinasyon için çapraz doğrulama uygular. Böylece modelin genel hata oranını minimize eden parametreler nesnel olarak seçilmiş olur. Bu yöntem, hem modelin aşırı uyum riskini azaltır hem de genelleme başarımını artırır (Pedregosa ve arkadaşları, 2011). Bu çalışmada SVR modeli için hiperparametre optimizasyonu, C , ϵ ve çekirdek fonksiyonu parametrelerini içerecek şekilde gerçekleştirilmiştir. Amaç, aşağıdaki optimizasyon problemini en iyi genel performansı sağlayacak parametre setiyle çözmektir:

$$\min_{\mathbf{w}, b, \xi_i, \xi_i^*} \frac{1}{2} \|\mathbf{w}\|^2 + C \sum_{i=1}^N (\xi_i + \xi_i^*)$$

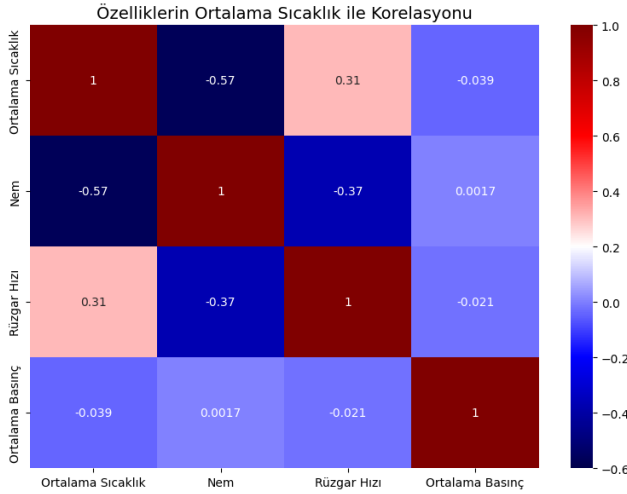
$$\begin{aligned} \text{şu kısıtlamalar altında: } y_i - \langle \mathbf{w}, \phi(\mathbf{x}_i) \rangle - b &\leq \epsilon + \xi_i, \\ \langle \mathbf{w}, \phi(\mathbf{x}_i) \rangle + b - y_i &\leq \epsilon + \xi_i^*, \\ \xi_i &\geq 0, \quad \xi_i^* \geq 0, \quad \text{her } i = 1, \dots, N \text{ için.} \end{aligned}$$

Burada $\phi(\cdot)$ giriş verisini yüksek boyutlu öznitelik uzayına yansıtan çekirdek dönüşümünü, ϵ duyarsızlık tüpünü, C ise modelin düzlüğü ile tolerans arasındaki dengeyi kontrol eden ceza katsayısını ifade eder. Bu amaçla, $C \in \{0.1, 1, 10\}$, $\epsilon \in \{0.01, 0.1, 0.5\}$ ve çekirdek fonksiyonu $K(\cdot, \cdot) \in \{\text{linear}, \text{polinomsal}, \text{radyal tabanlı}\}$ olacak şekilde bir parametre ızgarası tanımlanmış ve 5 katlı çapraz doğrulama uygulanmıştır.

GridSearchCV, her kombinasyonun ortalama kare hatasını (MSE) değerlendirerek en uygun modeli belirlemiştir.

LSTM modelinde iki ardışık katmandan oluşan bir mimari kullanılmıştır: ilk katman 256 ikinci katman ise 64 birimlik başka bir katmandır. Bu katmanları, sıcaklık tahmini yapan tek nöronlu tam bağlantılı bir çıkış katmanını takip etmektedir. Model, *Adam* optimizasyon algoritması ve ortalama kare hata kayıp fonksiyonu ile derlenmiştir.

SVR modelinin yapılandırması daha basit olup, doğrudan eğitim veri seti üzerinden regresyon uygulanmış; LSTM modelinde ise zaman serisi oluşturulması, sıralı dizilerin yeniden yapılandırılması ve çok katmanlı ağ mimarisi kurulması gibi adımlar izlenmiştir.



Şekil 1: Ortalama sıcaklık ile diğer meteorolojik değişkenler arasındaki Pearson korelasyonlarının ısı haritası. En güçlü ilişki nem ile negatif, rüzgar hızı ile ise pozitif yöndedir.

5. MODEL KARŞILAŞTIRMASI VE SONUÇLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde, sıcaklık tahmini için geliştirilen LSTM ve SVR modellerinin performansları karşılaştırmalı olarak değerlendirilmektedir. Model performanslarının nesnel olarak ölçülmesi amacıyla dört farklı regresyon metriği kullanılmıştır: Ortalama Mutlak Hata (MAE), Ortalama Kare Hata (MSE), Kök Ortalama Kare Hata (RMSE) ve Belirleme Katsayısı (R^2 Skoru). Bu metrikler, tahmin edilen sıcaklık değerlerinin gerçek sıcaklık değerleriyle ne derece örtüştüğünü değerlendirmede kullanılır.

Her bir metrik aşağıda formülüyle birlikte verilmiştir:

- ⊙ Asa Ortalama Mutlak Hata (MAE):

$$MAE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{y}_i|.$$

- ⊙ Ortalama Kare Hata (MSE):

$$MSE = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2.$$

- ⊙ Kök Ortalama Kare Hata (RMSE):

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}.$$

- ⊙ Belirleme Katsayısı (R^2 Skoru):

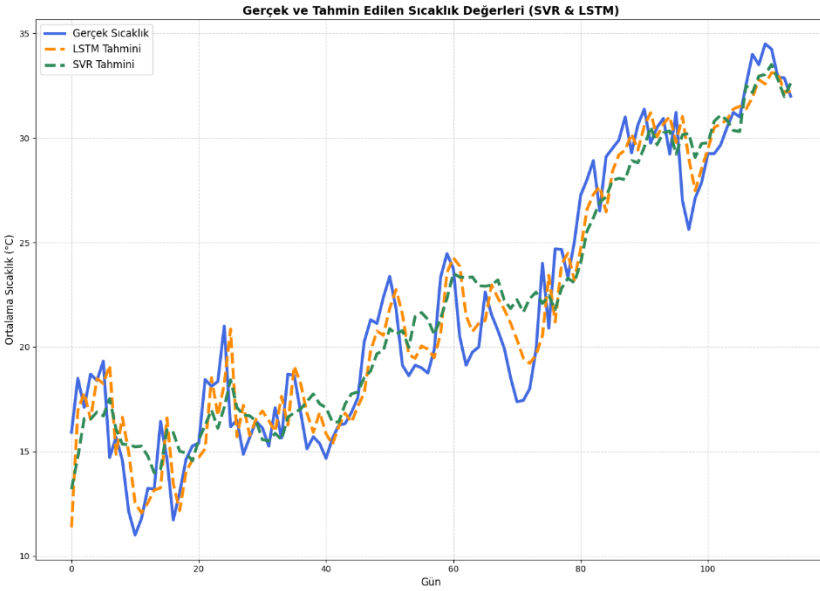
$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}.$$

Bu metrikler kullanılarak elde edilen sonuçlar aşağıdaki Tablo 1’de verilmiştir. Tabloda görüldüğü üzere, tüm metrikler açısından LSTM modeli, SVR modeline kıyasla daha düşük hata oranlarına ve daha yüksek R^2 skoruna sahiptir. Bu sonuçlar,

LSTM modelinin zaman serisi sıcaklık tahmininde daha başarılı bir yaklaşım sunduğunu göstermektedir.

Tablo 1. SVR ve LSTM modellerinin test verisi üzerindeki regresyon performans karşılaştırması.

METRİK	SVR	LSTM
MAE	1.7665	1.4107
MSE	4.4762	3.0864
RMSE	2.1157	1.7568
R^2 Skoru	0.8884	0.9230



Şekil 2: Gerçek ortalama sıcaklık değerleri ile LSTM ve SVR modellerinin test verisi üzerindeki tahminlerinin karşılaştırılması

Şekil 2’de, test verisi üzerinde LSTM ve SVR modelleriyle elde edilen tahminler, gerçek sıcaklık değerleriyle birlikte görselleştirilmiştir. Grafik incelendiğinde, her iki modelin genel eğilimi başarılı bir şekilde takip ettiği, ancak LSTM modelinin ani değişimlere daha duyarlı olduğu ve gerçek değerlere daha yakın tahminler sunduğu gözlemlenmektedir.

SVR modelinin tahminleri ise özellikle bazı bölümlerde düzleşme eğilimi göstererek genelleme yapma eğilimindedir.

Yukarıda sunulan nicel metrikler ve görsel analiz birlikte değerlendirildiğinde, LSTM modeli hem düşük hata oranları hem de yüksek R^2 skoru ile SVR modeline göre daha üstün bir performans sergilemiştir. Bu bağlamda, zaman serisi sıcaklık tahmini uygulamaları için LSTM mimarisinin daha uygun bir yaklaşım sunduğu sonucuna varılabilir.

6. SONUÇ VE GELECEK ÇALIŞMALAR

Bu çalışmada, Delhi bölgesine ait meteorolojik zaman serisi verileri kullanılarak günlük sıcaklık tahmini gerçekleştirilmiş ve iki farklı yöntem olan Destek Vektör Regresyonu (SVR) ile Uzun Kısa Süreli Bellek (LSTM) ağı karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Verilerin ön işleme süreci, anlamlı öznitelik seçimi ve normalizasyon işlemlerini kapsamış; SVR için hiperparametre optimizasyonu GridSearchCV yöntemiyle yapılırken, LSTM modeli çok katmanlı bir mimari ile eğitilmiştir.

Elde edilen sonuçlar, LSTM modelinin tüm değerlendirme metriklerinde SVR'ye kıyasla daha düşük hata oranları ve daha yüksek R^2 skoru ile üstün bir performans sergilediğini ortaya koymuştur. Ayrıca, görsel analizler de LSTM'nin, sıcaklık değişimlerindeki ani dalgalanmalara daha iyi uyum sağladığını ve tahminlerinde gerçek verilere daha yakın sonuçlar ürettiğini göstermiştir. SVR modeli ise bazı durumlarda tahminlerini genellemeye eğilimli olup, daha düz bir yapıda sonuçlar vermiştir.

Gelecek çalışmalar kapsamında, bu probleme farklı derin öğrenme yaklaşımlarının—örneğin GRU, Bi-LSTM veya Transformer tabanlı modellerin—uygulanması planlanmaktadır.

Ayrıca, mevsimsel etkiler, tatil günleri veya ani iklimsel değişimler gibi dışsal değişkenlerin modele dahil edilmesiyle tahmin başarımının artırılması hedeflenmektedir. Veri setinin genişletilmesiyle birlikte, uzun vadeli ve çok adımlı tahmin stratejilerinin de test edilmesi olasıdır. Son olarak, modellerin yalnızca noktasal tahmin üretmesi yerine, tahmin sonuçlarına belirsizlik analizi entegre edilerek güven aralıklarıyla desteklenmiş karar destek sistemlerinin geliştirilmesi de amaçlanmaktadır.

Bu bağlamda, çalışmanın bulguları, iklim temelli erken uyarı sistemlerinin geliştirilmesinde ve çevresel planlamada kullanılabilecek veri odaklı karar süreçlerine katkı sunabilecek niteliktedir.

KAYNAKÇA

- Awad, M. ve Khanna, R. (2015). Efficient learning machines: Theories, concepts, and applications for engineers and system designers. Apress.
- Bengio, Y., Simard, P. ve Frasconi, P. (1994). Learning long-term dependencies with gradient descent is difficult. IEEE Transactions on Neural Networks, 5(2), 157–166.
- Bishop, C. M. (2006). Pattern recognition and machine learning. New York, NY: Springer.
- Chen, Y., Zhang, Y., Wang, J. ve Liu, Y. (2020). Short-term load forecasting with deep residual networks. IEEE Transactions on Smart Grid, 11(4), 3943–3952.
- Cho, K., van Merriënboer, B., Gulcehre, C., Bahdanau, D., Bougares, F., Schwenk, H. ve Bengio, Y. (2014). Learning phrase representations using RNN encoder–decoder for statistical machine translation. arXiv preprint arXiv:1406.1078.
- Cortes, C. ve Vapnik, V. (1995). Support-vector networks. Machine Learning, 20(3), 273–297.
- Hochreiter, S. ve Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory. Neural Computation, 9(8), 1735–1780.
- Gers, F. A., Schmidhuber, J. ve Cummins, F. (2000). Learning to forget: Continual prediction with LSTM. In Proceedings of the 9th International Conference on Artificial Neural Networks, 1811, 850–855. Edinburgh, Scotland: Springer.
- Greff, K., Srivastava, R. K., Koutnik, J., Steunebrink, B. R. ve Schmidhuber, J. (2017). LSTM: A search space odyssey. IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems, 28(10), 2222–2232.

- Nizar, M. H., Dong, Z. Y. ve Wang, Y. (2021). Power utility nontechnical loss analysis with extreme learning machine method. *IEEE Transactions on Power Systems*, 22(3), 1180–1187.
- Pedregosa, F., Varoquaux, G., Gramfort, A., Michel, V., Thirion, B., Grisel, O. ve Duchesnay, É. (2011). Scikit-learn: Machine learning in Python. *Journal of Machine Learning Research*, 12, 2825–2830.
- Rao, S. V. (2019). Daily Climate time series data. Retrieved June 3, 2025, from <https://www.kaggle.com/datasets/sumanthvrao/daily-climate-time-series-data/data>
- Smola, A. J. ve Schölkopf, B. (2004). A tutorial on support vector regression. *Statistics and Computing*, 14(3), 199–222.
- Staudemeyer, R. C. ve Morris, E. R. (2019). Understanding LSTM—A tutorial into Long Short-Term Memory Recurrent Neural Networks. *arXiv preprint arXiv:1406.1078*.
- Vapnik, V. N. (1995). *The nature of statistical learning theory*. New York, NY: Springer-Verlag.

ON BIVARIATE MOMENT-TYPE OPERATORS REPRODUCING SOME EXPONENTIAL FUNCTIONS

Gümrah UYSAL¹

1. INTRODUCTION

Recent advances in approximation theory have led to a growing interest in the development of new linear positive operators grounded in classical formulations. One of the main motivations behind these efforts is to construct operators that preserve certain exponential functions. By ensuring the reproduction of such functions, researchers aim to facilitate more accurate assessments of the convergence behavior of newly introduced operators in comparison with their classical analogues. This approach not only deepens the theoretical understanding of operator approximation but also contributes to improved performance in various applied fields, such as image restoration, surface modeling, and three-dimensional object reconstruction. Owing to the structural efficiency and potential applications of this novel framework, a significant volume of scholarly work has emerged within a limited timeframe (see, for example, Agratini et al., 2017; Aral et al. 2020; Yılmaz et al., 2021; Bardaro et al., 2021; Uysal, 2021a; Uysal, 2021b; Bozkurt et al. (2021)).

Among the tools that have significantly shaped the evolution of approximation theory, integral operators occupy a central position. Their influence spans from foundational

¹ Assoc. Prof. Dr., Karabük University, fgumrahuysal@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7747-1706.

results—such as those concerning Korovkin-type approximation theorems (see (Korovkin, 1953; Altomare and Campiti, 1994))—to contemporary investigations in applied mathematics and engineering (see (Butzer and Nessel, 1971)). The flexibility and effectiveness of integral operators in approximating a wide range of function classes have made them a focal point in both theoretical and practical studies.

In this study, we address the problem of exponential approximation by introducing modified bivariate moment-type operators. These operators are constructed to reproduce exponential functions, thereby extending the classical framework and enabling improved convergence results within a bivariate setting.

We define $\mathbb{N}$ as the set of all positive integers, $\mathcal{R}$ as the set of all real numbers, and consider $\mathcal{R}^2 := \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Motivated by the methodologies outlined in (Firlej et al., 1999; İzgi, 2009; Bozkurt et al., 2021), we focus on a bivariate generalization of the modified moment-type operators first proposed in (Uysal, 2021b):

$$M_n^*(w; x) = \frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} w(\theta_n(x) + s) \kappa(s) ds, \quad (1.1)$$

where $x \in \mathcal{R}$, $\theta_n(x) = x - \alpha_n$, $\alpha_n = \frac{1}{2c} \ln \left(\frac{n}{2c} \sinh \left(\frac{2c}{n} \right) \right)$ is positively defined for any fixed real number $c > 0$, for all $n \in \mathbb{N}$ satisfying $n \geq n_\alpha$ with $n_\alpha \in \mathbb{N}$, which is sufficiently large. Also, $\kappa(s) := \kappa_{\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]}(s)$ is characteristic function of the set $\left[-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right]$ and $w: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ belongs to an appropriate function space such that the above-mentioned operators are well-defined. These operators fix constant functions and e^{2cz} on $\mathcal{R}$ as in the work of Agratini et al. (2017).

The operators introduced in equation (1.1) are well-defined for all function spaces in which the associated integrals are finite. These operators exactly reproduce constant functions and the exponential function e^{2cx} for any fixed real number $c > 0$, over the real line $\mathcal{R}$. Furthermore, in the limiting case as $c \rightarrow 0^+$ they reduce to their classical counterparts. A bivariate extension of the sequence of operators defined in equation (1.1) is formulated as follows:

$$M_{k,l}^*(u; z, v) = \frac{kl}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta_k(z) + r, \beta_l(v) + p) \xi(r) \lambda(p) dr dp, \quad (1.2)$$

where $(z, v) \in \mathcal{R}^2$, $\theta_k(z) = z - \alpha_k$ with the definition of α_k given as $\alpha_k := \frac{1}{2c_1} \ln \left(\frac{k}{2c_1} \sinh \left(\frac{2c_1}{k} \right) \right) > 0$, $\beta_l(v) = v - \zeta_l$ with the definition of β_l given as $\zeta_l = \frac{1}{2c_2} \ln \left(\frac{l}{2c_2} \sinh \left(\frac{2c_2}{l} \right) \right) > 0$ for any fixed real numbers $c_1, c_2 > 0$, for all $k, l \in \mathbb{N}$ satisfying $k \geq k_\alpha$ and $l \geq l_\zeta$ with $k_\alpha, l_\zeta \in \mathbb{N}$, which are sufficiently large. Also, $\xi(r) := \xi_{[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]}(r)$ and $\lambda(p) := \lambda_{[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}]}(p)$ are characteristic functions of the sets $[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}]$ and $[-\frac{1}{l}, \frac{1}{l}]$, respectively, and $u: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ belongs to an appropriate function space such that the above-mentioned operators are well-defined. These operators fix constant functions, $e^{2c_1 z}$, $e^{2c_2 v}$ and $e^{2(c_1 z + c_2 v)}$ defined on $\mathcal{R}^2$ with fixed $c_1, c_2 > 0$. Additionally, as $c_1, c_2 \rightarrow 0^+$ the older versions of the operators stated in equation (1.2) are obtained. For a more comprehensive treatment of moment-type operators, the reader is referred to the works of Barbieri (1983), Świdorski and Wachnicki (2000), Bardaro and Mantellini (2008), Yılmaz et al. (2021) and Bardaro et al. (2021).

The current work is a continuation of (Uysal, 2021a). In this work, we establish bivariate analogues of two theorems proved in (Aral et al., 2020) for modified moment-type operators.

To this end, employing the concept of exponentially weighted Lebesgue spaces (cf. (Becker et al., 1978); see also (Lesniewicz et al., 1996)) and following the bivariate framework of these works, we consider the function space $L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$ with fixed $c_1, c_2 > 0$ and $1 \leq P < \infty$ whose elements are the functions $u: \mathcal{R}^2 \rightarrow \mathcal{R}$ for which P -th power of $e^{-c_1|z|}e^{-c_2|v|}u(z, v)$ is integrable by means of Lebesgue integral. The norm in this space:

$$\|u\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)} := \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-c_1|z|}e^{-c_2|v|}u(z, v)|^P dz dv \right)^{1/P}$$

attains a finite value. Here, $e^{-c_1|z|}e^{-c_2|v|}$ with fixed $c_1, c_2 > 0$ and $(z, v) \in \mathcal{R}^2$ is a bivariate weight function which is of exponential-type.

2. KEY FINDINGS

This section opens with an existence lemma related to the operators specified in equation (1.2).

Lemma 2.1. Let $u \in L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$ with $1 \leq P < \infty$ and fixed $c_1, c_2 > 0$. Then, one has $M_{k,l}^*u \in L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$ and the following relation holds there:

$$\|M_{k,l}^*u\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)} \leq e^{c_1|\alpha_k|}e^{c_2|\zeta_l|} \frac{kl(e^{c_1/k}-1)(e^{c_2/l}-1)}{c_1c_2} \|u\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)}$$

for sufficiently large numbers $k \geq k_\alpha$ and $l \geq l_\zeta$, $k_\alpha, l_\zeta \in \mathbb{N}$.

Proof. The result can be established through routine calculations and is thus omitted.

We recall the following definition from (Uysal, 2021a), which constitutes the two-dimensional counterpart of Definition 6.1 in (Aral et al., 2020) (cf. also Rydzewska, 1974).

Definition 2.1. (Uysal, 2021a) Let $u \in L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$. Denote $w(r, p) := u(\theta_k(z) + r, \beta_l(v) + p) + u(\theta_k(z) + r, \beta_l(v) - p) + u(\theta_k(z) - r, \beta_l(v) + p) + u(\theta_k(z) - r, \beta_l(v) - p) - 4u(z, v)$.

The point $(z, v) \in \mathcal{R}^2$, referred to as the weighted P –Lebesgue point of $u \in L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$, possesses the following specific property:

$$\lim_{h,g \rightarrow 0^+} \frac{1}{hg} \int_0^g \int_0^h \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^P dr dp = 0$$

with fixed $c_1, c_2 > 0$ and $P \geq 1$.

Based on the preceding definition, we establish the following theorem concerning pointwise convergence. In the proof, we use classical arguments (see, for example, (Taberski, 1964; Ryzewska, 1974; Siudut, 1994).

Theorem 2.1. Assume that $(z, v) \in \mathcal{R}^2$ is a weighted P –Lebesgue point of $u \in L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)$ for fixed $c_1, c_2 > 0$ and $1 \leq P < \infty$. Then, one has

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} M_{k,l}^*(u; z, v) = u(z, v)$$

pointwise at such points.

Proof. Consider $P > 1$. We clearly have

$$M_{k,l}^*(u; z, v) - u(z, v) = \frac{kl}{4} \int_0^{1/l} \int_0^{1/k} w(r, p) dr dp.$$

Invoking Hölder's inequality (see, for example, (Rudin, 1987)) yields

$$\begin{aligned} |M_{k,l}^*(u; z, v) - u(z, v)|^P &\leq \frac{kl}{4} \int_0^{1/l} \int_0^{1/k} \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^P dr dp \\ &\quad \times \left(\frac{kl}{4} \int_0^{1/l} \int_0^{1/k} e^{qc_1 r} e^{qc_2 p} dr dp \right)^{P/q}, \end{aligned}$$

where $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ with $1 < p, q < \infty$. Observe that

$$\left(\frac{kl}{4} \int_0^{1/l} \int_0^{1/k} e^{qc_1 r} e^{qc_2 p} dr dp \right)^{p/q} = \left(\frac{kl(e^{c_1 q/k} - 1)(e^{c_2 q/l} - 1)}{4q^2 c_1 c_2} \right)^{p/q}.$$

Therefore, we have

$$\begin{aligned} |M_{k,l}^*(u; z, v) - u(z, v)|^p &\leq \frac{kl}{4} \int_0^{1/l} \int_0^{1/k} \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^p dr dp \\ &\quad \times \left(\frac{kl(e^{c_1 q/k} - 1)(e^{c_2 q/l} - 1)}{q^2 c_1 c_2} \right)^{p/q}. \end{aligned}$$

Following Definition 2.1, for every $\varepsilon > 0$, there exists a number $\rho > 0$ such that

$$\int_0^g \int_0^h \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^p dr dp < \varepsilon h g. \quad (2.1)$$

where $0 < h, g \leq \rho \leq \min \left\{ \frac{1}{k}, \frac{1}{l} \right\}$. According to this fact, we can write

$$\begin{aligned} |M_{k,l}^*(u; z, v) - u(z, v)|^p &\leq \frac{kl}{4} \int_0^\rho \int_0^\rho \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^p dr dp \times \left(\frac{kl(e^{\frac{c_1 q}{k}} - 1)(e^{\frac{c_2 q}{l}} - 1)}{q^2 c_1 c_2} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &\quad + \frac{kl}{4} \iint_Q \left| \frac{w(r, p)}{e^{c_1 r} e^{c_2 p}} \right|^p dr dp \times \left(\frac{kl(e^{c_1 q/k} - 1)(e^{c_2 q/l} - 1)}{q^2 c_1 c_2} \right)^{p/q} \\ &=: A_\rho(k, l) + B_\rho(k, l), \end{aligned}$$

where $Q := [0, 1/k] \times [0, 1/l] \setminus [0, \rho] \times [0, \rho]$.

Using inequality (2.1), we get

$$A_\rho(k, l) \leq \varepsilon \left(\frac{kl \left(e^{\frac{c_1 q}{k}} - 1 \right) \left(e^{\frac{c_2 q}{l}} - 1 \right)}{q^2 c_1 c_2} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Since $\varepsilon > 0$ is arbitrary, it follows that for sufficiently large k and l , we have $A_\rho(k, l)$ tends to 0 as $k, l \rightarrow \infty$. Furthermore, for each fixed $\rho > 0$ it is evident that $B_\rho(k, l)$ tends to 0 as $k, l \rightarrow \infty$. This completes the proof for this case. For the case $P = 1$, the argument proceeds analogously, and the proof is thus complete.

Theorem 2.2. Let $u \in L_{P, c_1, c_2}(\mathcal{R}^2)$ for fixed $c_1, c_2 > 0$ and $1 \leq P < \infty$. Then, one has

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|M_{k, l}^* u - u\|_{L_{P, c_1, c_2}(\mathcal{R}^2)} = 0.$$

Proof. By Lemma 2.1, we know that the sequence of operators $(M_{k, l}^*)$ is uniformly bounded. To prove our claim, we verify the following certain conditions given in (Gadjiev & Aral, 2007):

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|M_{k, l}^* e_i - e_i\|_{L_{P, c_1, c_2}(\mathcal{R}^2)} = 0, \text{ where } i = 0, 1, 2, 3 \text{ and}$$

$e_0(r, p) = 1$, $e_1(r, p) = r$, $e_2(r, p) = p$ and $e_3(r, p) = r^2 + p^2$ are bivariate Korovkin test functions defined on $\mathcal{R}^2$. From Lemma 2.1 of (Uysal, 2021b), we infer that

$$M_{k, l}^*(e_0; z, v) = 1, M_{k, l}^*(e_1; z, v) = \theta_k(z), M_{k, l}^*(e_2; z, v) = \beta_l(v) \text{ and } M_{k, l}^*(e_3; z, v) = \theta_k^2(z) + \beta_l^2(v) + \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{3l^2}.$$

We easily see that

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|M_{k, l}^* e_0 - e_0\|_{L_{P, c_1, c_2}(\mathcal{R}^2)} = 0,$$

$$\lim_{k, l \rightarrow \infty} \|M_{k, l}^* e_1 - e_1\|_{L_{P, c_1, c_2}(\mathcal{R}^2)}$$

$$= \lim_{k, l \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-c_1|z|} e^{-c_2|v|} [\theta_k(z) - z]|^P dz dv \right)^{1/P}$$

$$= \lim_{k,l \rightarrow \infty} \frac{1}{2c_1} \ln \left(\frac{k}{2c_1} \sinh \left(\frac{2c_1}{k} \right) \right) \left(\frac{2}{c_1^P} \right)^{\frac{1}{P}} \left(\frac{2}{c_2^P} \right)^{\frac{1}{P}}$$

$$= 0,$$

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|M_{k,l}^* e_2 - e_2\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)}$$

$$= \lim_{k,l \rightarrow \infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |e^{-c_1|z|} e^{-c_2|v|} [\beta_l(v) - v]|^P dz dv \right)^{1/P}$$

$$= \lim_{k,l \rightarrow \infty} \frac{1}{2c_2} \ln \left(\frac{l}{2c_2} \sinh \left(\frac{2c_2}{l} \right) \right) \left(\frac{2}{c_1^P} \right)^{\frac{1}{P}} \left(\frac{2}{c_2^P} \right)^{\frac{1}{P}}$$

$$= 0$$

and

$$\|M_{k,l}^* e_3 - e_3\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)}^P$$

$$\leq 2^{2P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 P|z|} e^{-c_2 P|v|} |\theta_k^2(z) - z^2|^P dz dv$$

$$+ 2^{2P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 P|z|} e^{-c_2 P|v|} |\beta_l^2(v) - v^2|^P dz dv$$

$$+ 2^{2P} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-c_1 P|z|} e^{-c_2 P|v|} \left| \frac{1}{3k^2} + \frac{1}{3l^2} \right|^P dz dv$$

$$=: 2^{2P} (I_1(k, l) + I_2(k, l) + I_3(k, l)).$$

Simple computations yield:

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} (I_1(k, l) + I_2(k, l) + I_3(k, l)) = 0.$$

That means

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|M_{k,l}^* e_3 - e_3\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)}^P = 0.$$

Thus,

$$\lim_{k,l \rightarrow \infty} \|M_{k,l}^* u - u\|_{L_{P,c_1,c_2}(\mathcal{R}^2)} = 0.$$

The proof is completed.

3. CONCLUDING REMARKS

The present work extends some certain results from (Uysal, 2021b) to the context of the moment-type operators defined by equation (1.2), with the bivariate case presenting new theorems in addition to univariate results. Prospective studies will focus on the investigation of weighted uniform convergence in relevant function spaces and the estimation of convergence rates through suitable moduli of continuity.

REFERENCES

- Agratini, O., Aral, A. & Deniz, E. (2017). On two classes of approximation processes of integral type. *Positivity*, 21(3), 1189–1199.
- Altomare, F., & Campiti, M. (1994). Korovkin-type Approximation Theory and its Applications. Appendix A by Michael Pannenberg and Appendix B by Ferdinand Beckhoff. *De Gruyter Studies in Mathematics*, 17. Walter de Gruyter & Co., Berlin.
- Aral, A., Yılmaz, B., & Deniz, E. (2020). Weighted approximation by modified Picard operators. *Positivity*, 24(2), 427–439.
- Barbieri, F. (1983). Approssimazione mediante nuclei momento. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 32, 308–328.
- Bardaro, C., & Mantellini, I. (2008). Multivariate moment type operators: approximation properties in Orlicz spaces. *J. Math. Inequal.*, 2(2), 247–259.
- Bardaro, C., Mantellini, I., Uysal, G., & Yılmaz, B. (2021). A class of integral operators that fix exponential functions. *Mediterr. J. Math.*, 18(5), 1–21.
- Becker, M., Kucharski, D., & Nessel, R. J. (1978). Global approximation theorems for the Szász-Mirakjan operators in exponential weight spaces, in: *Linear Spaces and Approximation (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977)*. *Internat. Ser. Numer. Math.*, 40, Birkhäuser, Basel, 319–333.
- Bozkurt, K., Özşarac, F., & Aral, A. (2021). Bivariate Bernstein polynomials that reproduce exponential functions. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, 70(1), 541–554.

- Butzer, P. L., & Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation, Volume 1: One-dimensional Theory*, Pure and Applied Mathematics, 40. Academic Press, New York–London.
- Firlej, B., Lesniewicz, M., & Rempulska, L. (1999). Approximation of functions two variables by some operators in weighted spaces, *Rendiconti del Seminario Matematico della Universita di Padova*, 101, 63–82.
- Gadjiev, A. D., & Aral, A. (2007). Weighted L_p –approximation with positive linear operators on unbounded sets. *Appl. Math. Lett.*, 20(10), 1046–1051.
- İzgi, A. (2009). Order of approximation of functions of two variables by new type gamma operators. *Gen. Math.*, 17(1), 23–32.
- Korovkin, P. P. (1953). On convergence of linear positive operators in the spaces of continuous functions (Russian). *Doklady Akad. Nauk. S.S.S.R.*, 90, 961–964.
- Lesniewicz, A., Rempulska, L. & Wasiak, J. (1996). Approximation properties of the Picard singular integral in exponential weighted spaces. *Publ. Math.*, 40(2), 233–242.
- Rydzewska, B. (1974). Approximation des fonctions de deux variables par des integrales singulieres doubles. *Fasc. Math.*, vol. 8, 35–45.
- Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. (Third Ed.) McGraw-Hill Book Company, New York.
- Siudut, S. (1994). Some remarks on double singular integrals. *Comment. Math. (Prace Mat.)*, 34, 173–181.

- Świderski, T., & Wachnicki, E. (2000). Nonlinear singular integrals depending on two parameters. *Comment. Math. (Prace Mat.)*, 40, 181–189.
- Taberski, R. (1964). On double integrals and Fourier series. *Ann. Polon. Math.*, 15, 97–115.
- Uysal, G. (2021a). On modified bivariate Picard integral operators which fix some exponential functions. Presented at the Latin American International Conference on Natural and Applied Sciences, Villahermosa, 16–23.
- Uysal, G. (2021b). On modified moment-type operators. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 10(12), 3669–3677.
- Yılmaz, B., Uysal, G., & Aral, A. (2021). Reconstruction of two approximation processes in order to reproduce e^{ax} and e^{2ax} , $a > 0$. *J. Math. Inequal.*, 15(3), 1101–1118.

ON m -SINGULAR MODIFIED MOMENT-TYPE OPERATORS

Gümrah UYSAL¹

1. INTRODUCTION

In light of recent developments in approximation theory, considerable attention has been directed towards the construction of new linear positive operators derived from classical formulations. A prominent strategy involves modifying these operators so as to preserve certain exponential functions, thereby facilitating more precise comparisons of convergence behavior between contemporary and classical counterparts. Such modifications are expected to enhance the efficiency and applicability of approximation methods in various practical domains, including image reconstruction, three-dimensional modeling, and related computational tasks. The works (Agratini et al., 2017; Aral et al., 2020, Bardaro et al., 2021; Uysal, 2021; Yılmaz, 2021) may be given as some of these. Integral operators, in particular, have played a fundamental role in the evolution of approximation theory. For an extensive treatment of this topic, the reader is referred to (Butzer & Nessel, 1971; Stein, 1970).

The present work focuses on the problem of exponential approximation by constructing modified forms of m –singular moment-type operators capable of reproducing some exponential functions.

¹ Assoc. Prof. Dr., Karabük University, fgumrahuysal@gmail.com, ORCID: 0000-0001-7747-1706.

Let $\mathcal{R}$ stand for the set of all real numbers and $\mathbb{N}$ represent the set of all positive integers. We consider modified moment-type operators first proposed in (Uysal, 2021):

$$M_k^*(u; z) = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u(\theta_k(z) + s) \kappa(s) ds, \quad (1.1)$$

where $z \in \mathcal{R}$, $\theta_k(z) = z - \alpha_k$, $\alpha_k = \frac{1}{2d} \ln \left(\frac{k}{2d} \sinh \left(\frac{2d}{k} \right) \right)$ is positively set for any fixed real number $d > 0$, for all $k \in \mathbb{N}$ satisfying $k \geq k_\alpha$ with $k_\alpha \in \mathbb{N}$, which is large enough. Also, $\kappa(s) := \kappa_{\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]}(s)$ is characteristic function of the set $\left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right]$ and $u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ belongs to a suitable function space such that the indicated operators are well-defined. These operators reproduce constant functions and e^{2dz} on $\mathcal{R}$ as in the study (Agratini et al., 2017). Some of the works in the literature about moment-type operators can be given as (Barbieri, 1983; Bardaro & Mantellini, 2008; Swiderski & Wachnicki, 2000; Uysal, 2021).

Mamedov (1963) constructed the following m –singular integral operators:

$$\begin{aligned} T_r^{[m]}(u; z) \\ = (-1)^{m+1} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^m (-1)^{m-j} \binom{m}{j} u(z + js) \right) K_r(s) ds, \end{aligned} \quad (1.2)$$

where $z, s \in \mathcal{R}$. In equation (1.2), m is a certain positive integer and the (kernel) function $K_r, K_r: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$, where r denotes a positive parameter which belongs to the index set X , is possessing some certain properties analogous to the approximate identities in known literature. Some contributions concerning m –singular integral operators were presented by Rydzewska, (1978); Bardaro et al. (2013), Yılmaz (2014), Uysal (2018), Uysal (2019) and Uysal and Yılmaz (2021).

Building upon operators (1.1) and (1.2), we introduce the following m –singular modified moment-type operators:

$$M_k^{*[m]}(u; z) = \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^m \left((-1)^{j-1} \binom{m}{j} u(\theta_k(z) + js) \right) \kappa(s) ds, \quad (1.3)$$

where m is a certain positive integer, $z \in \mathcal{R}$, $\theta_k(z) = z - \alpha_k$, $\alpha_k = \frac{1}{2d} \ln \left(\frac{k}{2d} \sinh \left(\frac{2d}{k} \right) \right)$ is positively set for any fixed real number $d > 0$, for all $k \in \mathbb{N}$ satisfying $k \geq k_\alpha$ with $k_\alpha \in \mathbb{N}$, which is large enough. Also, $\kappa(s) = \kappa_{\left[-\frac{1}{k'}, \frac{1}{k}\right]}(s)$ is characteristic function of the set $\left[-\frac{1}{k'}, \frac{1}{k}\right]$ and $u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$. Taking $m = 1$, one recovers the operators in equation (1.1) from equation (1.3).

Given the weight function w_d as $w_d(z) = e^{-d|z|}$ with $w_d: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}^+$ and fixed $d > 0$, we consider the function space $L_{p,d}(\mathcal{R})$. Drawing on (Becker et al., 1978) (see also (Rempulska and Tomczak, 2009)), the exponential weighted Lebesgue space $L_{p,d}(\mathcal{R})$ with fixed $d > 0$ and $1 \leq p < \infty$ is consisting of all functions $u: \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}$ which are measurable on $\mathcal{R}$ in the sense of Lebesgue such that $\int_{-\infty}^{\infty} |w_d(z)u(z)|^p dz < \infty$. The norm of the function in $L_{p,d}(\mathcal{R})$ is stated as follows:

$$\|u\|_{p,d} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |w_d(z)u(z)|^p dz \right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Some studies centered on approximation in exponential weighted Lebesgue spaces can be given as (Deeba et al., 1988; Lèsniewicz et al., 1996; Rempulska and Tomczak, 2009; Uysal, 2019; Aral et al., 2020; Yilmaz, 2021).

2. PRIMARY OUTCOMES

We prove an existence lemma for m-singular modified moment-type operators defined in equation (1.3).

Lemma 2.1. Let $k \geq k_\alpha$. If $u \in L_{p,d}(\mathcal{R})$ with fixed $d > 0$ and $1 \leq p < \infty$, then $M_k^{*[m]}u \in L_{p,d}(\mathcal{R})$ and the inequality:

$$\|M_k^{*[m]}u\|_{p,d} \leq \|u\|_{p,d} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{\left(e^{\frac{dj}{k}} - 1\right)k}{dj} e^{d|\alpha_k|}$$

holds.

Proof. Using the norm structure of the space $L_{p,d}(\mathcal{R})$ together with $1 < p < \infty$, it follows that

$$\|M_k^{*[m]}u\|_{p,d} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |e^{-d|z|} (M_k^{*[m]}u)(z)|^p dz \right)^{1/p}.$$

By virtue of generalized Minkowski inequality (see, for example, (Stein, 1970)) for $1 < p < \infty$ and utilizing change of variables, we have

$$\begin{aligned} & \|M_k^{*[m]}u\|_{p,d} \\ & \leq \frac{k}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa(s) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{|u(\theta_k(z)+js)|}{e^{d|\theta_k(z)+js|}} \frac{e^{d|\theta_k(z)+js|}}{e^{d|z|}} \right|^p dz \right)^{1/p} ds \\ & \leq \|u\|_{p,d} \frac{k}{2} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} e^{d|\alpha_k|} \int_{-1/k}^{1/k} e^{dj|s|} ds \\ & = \|u\|_{p,d} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} \frac{\left(e^{\frac{dj}{k}} - 1\right)k}{dj} e^{d|\alpha_k|}. \end{aligned}$$

The case $p = 1$ is similar. The proof is completed.

Now, we present and prove a pointwise convergence theorem that is analogous to the one established in (Aral et al., 2020) and

(Yılmaz, 2021). The definition introduced below is formulated by combining the concept of an $m - p$ -Lebesgue point as given by Mamedov (1963) with the notion of a weighted Lebesgue point described in (Yılmaz, 2021).

Definition 2.1. (Uysal, 2019) A point $z \in \mathcal{R}$ at which the following expression:

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} \int_0^h \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(s,j)}{e^{djs}} \right] \right|^p ds = 0$$

holds, where

$$F(s, j) := u(\theta_k(z) + js) + u(\theta_k(z) - js) - 2u(z),$$

is called weighted $m - p$ -Lebesgue point of $u \in L_{p,d}(\mathcal{R})$ with fixed $d > 0$ and $1 \leq p < \infty$.

Theorem 2.1. Let $k \geq k_\alpha$ and $d > 0$ be fixed. If $u \in L_{1,d}(\mathcal{R})$, then

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) \right| = 0$$

holds at each weighted m -Lebesgue point ($p = 1$) $z \in \mathcal{R}$ of $u \in L_{1,d}(\mathcal{R})$.

Proof. We have

$$M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) = \frac{k}{2} \int_0^{1/k} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] e^{djs} ds.$$

For every given $\varepsilon > 0$ there exists a number $\tau > 0$ such that

$$\int_0^h \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(s, j)}{e^{djs}} \right] \right| ds \leq \varepsilon h, \quad (2.1)$$

where $0 < h \leq \tau \leq 1/k$, holds.

Next, based on preceding $\tau > 0$, the following inequality can be obtained:

$$\begin{aligned}
 & \left| M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) \right| \\
 & \leq \frac{k}{2} \int_0^\tau \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] \right| e^{dms} ds \\
 & \quad + \frac{k}{2} \int_\tau^{1/k} \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] \right| e^{dms} ds \\
 & =: I_{(1)} + I_{(2)}.
 \end{aligned}$$

Since e^{dms} is an increasing function of s on $[0, \tau]$, we continue in the following fashion:

$$I_{(1)} \leq \frac{k}{2} e^{dm/k} \int_0^\tau \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] \right| ds.$$

Using inequality (2.1), we get $I_{(1)} \leq \varepsilon e^{dm/k}$. Since given $\varepsilon > 0$ is arbitrary, there holds that $I_{(1)}$ tends to 0 as k tends to $+\infty$. In particular, for each fixed $\tau > 0$, $I_{(2)}$ tends to 0 as k tends to $+\infty$. This completes the proof.

Theorem 2.2. Let $k \geq k_\alpha$, $1 < p < \infty$ and $d > 0$ be fixed. If $u \in L_{p,d}(\mathcal{R})$, then

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left| M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) \right| = 0$$

holds at each weighted $m - p$ -Lebesgue point $z \in \mathcal{R}$ of $u \in L_{p,d}(\mathcal{R})$.

Proof. Let $p > 1$. We write

$$M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) = \frac{k}{2} \int_0^{1/k} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] e^{djs} ds.$$

For every given $\varepsilon > 0$ there exists a number $\sigma > 0$ such that

$$\int_0^h \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(s, j)}{e^{djs}} \right] \right|^p ds \leq \varepsilon h, \quad (2.2)$$

where $0 < h \leq \sigma$, holds.

Next, based on the previously established $\sigma > 0$, the following inequality can be derived:

$$\begin{aligned} & \left| M_k^{*[m]}(u; z) - u(z) \right|^p \\ & \leq 2^p \left| \frac{k}{2} \int_0^\sigma \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] e^{dms} ds \right|^p \\ & + 2^p \left| \frac{k}{2} \int_\sigma^{1/k} \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] e^{dms} ds \right|^p \\ & =: 2^p (II_{(1)} + II_{(2)}). \end{aligned}$$

By the aid of Hölder's inequality (see, for example, (Rudin, 1987)) in $II_{(1)}$ with $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 < p, q < \infty$, we continue as follows:

$$II_{(1)} \leq \frac{k}{2} \int_0^\sigma \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] \right|^p ds \times \left(\frac{k}{2} \int_0^\sigma e^{q dms} ds \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Observe that

$$\frac{k}{2} \int_0^\sigma e^{q dms} ds = \frac{k}{2} \frac{\left(e^{\frac{dmq}{k}} - 1 \right)}{dmq}.$$

Therefore, we can write

$$\begin{aligned} I_{(1)} &\leq \frac{k}{2} \int_0^\sigma \left| \sum_{j=1}^m \binom{m}{j} (-1)^{j-1} \left[\frac{F(z, j)}{e^{djs}} \right] \right|^p ds \times \left(\frac{k \left(e^{\frac{dmq}{k}} - 1 \right)}{2 dmq} \right)^{\frac{p}{q}} \\ &=: I_{(1,1)} \times \left(\frac{k \left(e^{\frac{dmq}{k}} - 1 \right)}{2 dmq} \right)^{\frac{p}{q}}. \end{aligned}$$

Using inequality (2.2), we get $I_{(1,1)} \leq \varepsilon$, and in view of this, we obtain

$$I_{(1)} \leq \varepsilon \left(\frac{k \left(e^{\frac{dmq}{k}} - 1 \right)}{2 dmq} \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Since given $\varepsilon > 0$ is arbitrary, it follows that $I_{(1)}$ tends to 0 as k tends to $+\infty$. Moreover, for each fixed $\sigma > 0$, $I_{(2)}$ tends to 0 as k tends to $+\infty$. This completes the proof.

3. CONCLUSION

This work focuses on the analysis of the m -singular modifications of the operators presented in equation (1.1), with a particular emphasis on proving a pointwise approximation result. The operators presented in equation (1.3) offer potential for further investigation in multiple directions, with particular emphasis on their behavior in the context of Korovkin-type approximation.

REFERENCES

- Agratini, O., Aral, A., & Deniz, E. (2017). On two classes of approximation processes of integral type. *Positivity*, 21(3), 1189–1199.
- Aral, A., Yılmaz, B., & Deniz, E. (2020). Weighted approximation by modified Picard operators. *Positivity*, 24(2), 427–439.
- Barbieri, F. (1983). Approssimazione mediante nuclei momento. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 32, 308–328.
- Bardaro, C., & Mantellini, I. (2008). Multivariate moment type operators: approximation properties in Orlicz spaces. *J. Math. Inequal.*, 2(2), 247–259.
- Bardaro, C., Karşı, H., & Vinti, G. (2013). On pointwise convergence of Mellin type nonlinear m –singular integral operators. *Comm. Appl. Nonl. Anal.*, 20(2), 25–39.
- Bardaro, C., Mantellini, I., Uysal, G., & Yılmaz, B. (2021). A class of integral operators that fix exponential functions. *Mediterr. J. Math.*, 18(5), 1–21.
- Becker, M., Kucharski, D., & Nessel, R. J. (1978). Global approximation theorems for the Szász-Mirakjan operators in exponential weight spaces. In: *Linear Spaces and Approximation (Proc. Conf., Math. Res. Inst., Oberwolfach, 1977)*, Internat. Ser. Numer. Math., Vol. 40, Birkhäuser, Basel, 319–333.
- Butzer, P. L., & Nessel, R. J. (1971). *Fourier Analysis and Approximation. Volume 1: One-dimensional Theory.* Pure and Applied Mathematics, Vol. 40. Academic Press, New York, London.

- Deeba, E., Mohapatra, R. N., & Rodriguez, R. S. (1988). On the degree of approximation of some singular integrals. *Rend. Mat. Appl.* (7), 8(3), 345–355.
- Lèsniewicz, A., Rempulska L., & Wasiak, J. (1996). Approximation properties of the Picard singular integral in exponential weighted spaces. *Publ. Mat.*, 40(2), 233–242.
- Mamedov, R. G. (1963). On the order of convergence of m –singular integrals at generalized Lebesgue points and in the space $L_p(-\infty, \infty)$. (Russian) *Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat.*, 27, 287–304.
- Rempulska, L., & Tomczak, K. (2009). On some properties of the Picard operators. *Arch. Math. (Brno)*, 45, 125–135.
- Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis*. (Third Ed.) McGraw-Hill Book Company, New York.
- Rydzewska, B. (1978). Point-approximation des fonctions par des certaines intégrales singulières. (French) *Fasc. Math.*, 10, 13–24.
- Stein, E. M. (1970). *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. (PMS-30) Princeton University Press, New Jersey.
- Swiderski, T., & Wachnicki, E. (2000). Nonlinear singular integrals depending on two parameters. *Comment. Math. (Prace Mat.)*, 40, 181–189.
- Uysal, G. (2018). Nonlinear m –singular integral operators in the framework of Fatou type weighted convergence. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Sér. A1 Math. Stat.*, 67(1), 262–276.
- Uysal, G. (2019). Approximation by m –singular modified Picard operators. In: *Proceeding Book of Applied Sciences of*

International Symposium on Recent Developments in Science, Technology and Social Sciences, 20-22 December, Ankara, 255–261.

Uysal, G. (2021). On modified moment-type operators. *Advances in Mathematics: Scientific Journal*, 10(12), 3669–3677.

Uysal, G., & Yılmaz, B. (2021). On modified m –singular Gauss-Weierstrass operators. In: *Current Academic Studies in Science and Mathematics Sciences*. Livre De Lyon, Lyon, 49–63.

Yılmaz, B. (2014). Jackson type generalization of nonlinear integral operators. *J. Comput. Anal. Appl.*, 17(1), 77–83.

Yılmaz, B. (2021). Approximation properties of modified Gauss-Weierstrass integral operators in exponential weighted L_p spaces. *Facta Univ. Ser. Math. Inform.*, 36(1), 89–100.

SOME PROPERTIES OF MODIFIED GAUSS-WEIERSTRASS INTEGRAL OPERATORS

Başar YILMAZ¹

Didem AYDIN ARI²

Tuğba ÇAYDİBİ³

1. INTRODUCTION

The Gauss-Weierstrass singular integrals of f functions belonging to

$$W_n(f; x) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-nt^2} dt, x \in (-\infty, \infty), n \in \mathbb{N}.$$

have been the subject of extensive research. Their approximation properties have been investigated in various studies, such as Uysal&Yılmaz, 2021, Uysal&Yılmaz, 2020, Bardaro et al., 2021, Yılmaz et al., 2021, Butzer&Nessel,1971, Uysal,2023) and the references therein. In addition, numerous researchers have explored generalized forms of the Gauss-Weierstrass singular integrals and established the corresponding rates of approximation to functions (See Agratini et al., 2016, Anastassiou&Aral, 2010, Aral, 2006).

¹ Doç.Dr., Kırıkkale University, Faculty of Engineering and Natural Science, Department of Mathematics, basaryilmaz77@yahoo.com, ORCID: 0000-0003-3937-992X

² Doç Dr., Kırıkkale University, Faculty of Engineering and Natural Science, Department of Mathematics, didemaydn@hotmail.com, ORCID: 0000-0002-5527-8232

³ Kırıkkale University, Institute of Science, Yahsihan, 71450, Kırıkkale, Turkey tugba.caydibi@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8852-919X

$$W_n(f; x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x+t) e^{-nt^2} dt \quad (1.1)$$

We discuss the following modification of the classical operators defined in (1.1), which ensures that the resulting operators preserve the functions 1 and e^{2ax} . The generalizations of these operators are introduced as follows:

For $f \in C[0, \infty)$, $x \in [0, \infty)$ we consider and

$$\mathcal{W}_n^*(f; x) = 2\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\theta_n(x) + t) e^{-nt^2} dt \quad (1.2)$$

where

$$\theta_n(x) = x - \frac{a}{2n}, \quad (1.3)$$

and $a > 0$.

This study focuses on the operators introduced in (1.2). Initially, we establish several auxiliary lemmas necessary for the subsequent theoretical developments. Section 3 addresses the uniform convergence of the operators, along with an analysis of its convergence rate. Section 4 investigates the asymptotic nature of the operators $\mathcal{W}_n^*$ by proving a quantitative version of the Voronovskaya theorem. A uniform weighted approximation result is then obtained via a weighted Korovkintype theorem, followed by an alternative approach that yields similar results without employing this theorem. The final section presents findings concerning the global smoothness preservation properties of the operators $\mathcal{W}_n^*$.

2. PRELIMINARY RESULTS

Here, we establish some fundamental results concerning these operators for use in later sections.

Lemma 2.1. For the operators given by (1.2), with $n \in \mathbb{N}, x \in [0, \infty)$ and $e_k(t) = t^k, k = 0, 1, 2, \dots$, the moments given as follows:

$$\mathcal{W}_n^*(e_0; x) = 1$$

$$\mathcal{W}_n^*(e_1; x) = \theta_n(x) + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$$\mathcal{W}_n^*(e_2; x) = \theta_n(x) \left(\theta_n(x) + \frac{2}{\sqrt{n\sqrt{\pi}}} \right) + \frac{1}{2n}$$

Proof. From (1.2), we obtain

$$\mathcal{W}_n^*(e_0; x) = 2 \sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_0^\infty e^{-nt^2} dt$$

By applying the change of variable $t = \frac{\sqrt{u}}{\sqrt{n}}$, we obtain the expression for

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^*(e_0; x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty u^{-\frac{1}{2}} e^{-u} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \end{aligned}$$

In a similar manner,

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^*(e_1; x) &= \theta_n(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{n\pi}} \\ &= \theta_n(x) + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n^*(e_2; x) &= \theta_n^2(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) + 2\theta_n(x) \frac{\Gamma(1)}{\sqrt{n\pi}} + \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{n\sqrt{\pi}} \\ &= \theta_n(x) \left(\theta_n(x) + \frac{2}{\sqrt{n\pi}} \right) + \frac{1}{2n}\end{aligned}$$

can be derived, which confirms the validity of the lemma.

Lemma 2.2. If we denote $M_{n,r}(x) = \mathcal{W}_n^*((t-x)^r; x)$, $r = 0, 1, 2, \dots$, then we have

$$M_{n,0}(x) = 1$$

$$M_{n,1}(x) = \theta_n(x) - x + \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

$$M_{n,2}(x) = (\theta_n(x) - x)^2 + \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(\theta_n(x) - x) + \frac{1}{2n}$$

Moreover, from equality (1.3), we obtain the following result.

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left(\theta_n(x) - x + \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \right) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \\ \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} \left((\theta_n(x) - x)^2 + \frac{2}{\sqrt{n\pi}}(\theta_n(x) - x) + \frac{1}{2n} \right) &= 0\end{aligned}$$

Lemma 2.3. For the operators $\mathcal{W}_n^*$, we have

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n^*(e^{at}; x) &= e^{a\theta_n(x)} e^{\frac{a^2}{4n}} = e^{\frac{-a^2}{4n}} e^{ax} \\ \mathcal{W}_n^*(e^{2at}; x) &= e^{2a\theta_n(x)} e^{\frac{a^2}{n}} = e^{2ax} \\ \mathcal{W}_n^*(e^{3at}; x) &= e^{3a\theta_n(x)} e^{\frac{9a^2}{4n}} = e^{\frac{3a^2}{4n}} e^{3ax} \\ \mathcal{W}_n^*(e^{4at}; x) &= e^{4a\theta_n(x)} e^{\frac{4a^2}{n}} = e^{\frac{2a^2}{n}} e^{4ax}\end{aligned}$$

3. UNIFORM CONVERGENCE OF $\mathcal{W}_n^*$

In this section, we provide an estimate for the rate of convergence of the operators $\mathcal{W}_n^*$. Let $C[0, \infty)$ represent the set of all real-valued functions that are continuous on the interval $[0, \infty)$,

and for which the limit of $f(x)$ as x approaches infinity exists and is finite. This space is considered with the uniform norm. To derive this estimate, we make use of the succeeding modulus of continuity:

$$\omega^*(f; \mu) = \sup_{\substack{x, t \in [0, \infty) \\ |e^{-x} - e^{-t}| \leq \mu}} |f(t) - f(x)|$$

given for every $\mu \geq 0$ and every function $f \in C^*[0, \infty)$. The above modulus has the property

$$|f(t) - f(x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\mu^2}\right) \omega^*(f; \mu), \quad \delta > 0 \quad (3.1)$$

Details on $\omega^*(.; \mu)$ can be found in (Holhoş, 2010). Moreover, the following assertion is provided.

Theorem 3.1. If a sequence of positive linear operators $L_n: C^*[0, \infty) \rightarrow C^*[0, \infty)$ satisfy the equalities

$$\begin{aligned} \|L_n(1; x) - 1\|_{[0, \infty)} &= a_n, \\ \|L_n(e^{-t}; x) - e^{-x}\|_{[0, \infty)} &= b_n, \\ \|L_n(e^{-2t}; x) - e^{-2x}\|_{[0, \infty)} &= c_n, \end{aligned}$$

then

$$\|L_n f - f\|_{[0, \infty)} \leq 2\omega^*(f; \sqrt{a_n + 2b_n + c_n}), f \in C^*[0, \infty)$$

Theorem 3.2. For each function $f \in C^*[0, \infty)$ following relation

$$\|\mathcal{W}_n^* f - f\|_{[0, \infty)} \leq 2\omega^*(f; \sqrt{2b_n + c_n})$$

Where

$$\begin{aligned} b_n &= e^{\frac{a}{2n} + \frac{1}{4n}} - 1 \\ c_n &= e^{\frac{a}{n} + \frac{1}{n}} - 1 \end{aligned}$$

where b_n and c_n tend to zero as $n \rightarrow \infty$.

Proof. By calculation we can write

$$\begin{aligned}\mathcal{W}_n^*(e^{-t}; x) &= e^{-\theta_n(x)} e^{\frac{a^2}{4n}} = e^{-x + \frac{a}{2n}} e^{\frac{1}{4n}}, \\ \mathcal{W}_n^*(e^{-2t}; x) &= e^{2a\theta_n(x)} e^{\frac{a^2}{n}} = e^{-2x + \frac{a}{n}} e^{\frac{1}{n}}.\end{aligned}$$

Therefore,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{W}_n^*(1; x) - 1\|_{[0, \infty)} &= a_n, \\ \|\mathcal{W}_n^*(e^{-t}; x) - e^{-x}\|_{[0, \infty)} &= b_n, \\ \|\mathcal{W}_n^*(e^{-2t}; x) - e^{-2x}\|_{[0, \infty)} &= c_n,\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}a_n &= 0 \\ b_n &= e^{\frac{a}{2n} + \frac{1}{4n}} - 1 \\ c_n &= e^{\frac{a}{n} + \frac{1}{n}} - 1\end{aligned}$$

Furthermore, b_n and c_n tend to zero as $n \rightarrow \infty$. The proof is complete.

4. QUANTITATIVE VORONOVSKAYA FORMULA

In this section, we offer $\mathcal{W}_n^*$ operators which the quantitative Voronovskaya theorem.

Theorem 4.1. Let $f, f'' \in C^*[0, \infty)$. Then we have

$$\begin{aligned}& \left| \sqrt{n}[\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)] - \frac{1}{\sqrt{\pi}} f'(x) \right| \\ & \leq \left| \sqrt{n}M_{n,1}(x) - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \right| |f'(x)| + \frac{1}{2} |\sqrt{n}M_{n,2}(x)| |f''(x)| \\ & \quad + K \omega^* \left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}} \right)\end{aligned}$$

where M and K are nonnegative constant.
Proof. Using the Taylor's formula there exist η lying between x and t such that

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{f''(x)}{2}(t-x)^2 + h(t,x)(t-x)^2$$

where

$$h(t,x) := \frac{f''(\eta) - f''(x)}{2}$$

and consider a continuous function h which is zero at the origin. Upon applying the operator $\mathcal{W}_n^*$ to both sides of the aforementioned identity, we arrive at

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n^*(f;x) - f(x) &= f'(x)M_{n,1}(x) + \frac{f''(x)}{2}M_{n,2}(x) \\ &\quad + \mathcal{W}_n^*(h(t,x)(t-x)^2;x) \end{aligned}$$

also we can write that

$$\begin{aligned} &|n[\mathcal{W}_n^*(f;x) - f(x)] - 2f'(x)| \\ &\leq f'(x)[nM_{n,1}(x) - 2] + \frac{f''(x)}{2}[nM_{n,2}(x)] \\ &\quad + n\mathcal{W}_n^*(|h(t,x)|(t-x)^2;x) \end{aligned}$$

To estimate last inequality using the inequality (3.1), we get

$$|h(t,x)| \leq \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\mu^2}\right) \omega^*(f'';\mu)$$

Since

$$|h(y,x)| \leq \begin{cases} 2\omega^*(f'';\mu), & |e^{-x} - e^{-t}| < \mu \\ 2\frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\mu^2}\omega^*(f'';\mu), & |e^{-x} - e^{-t}| \geq \mu \end{cases}$$

So we have

$$|h(t, x)| \leq 2 \left(1 + \frac{(e^{-x} - e^{-t})^2}{\mu^2} \right) \omega^*(f''; \mu)$$

We deduce that

$$\begin{aligned} & n\mathcal{W}_n^*(|h(t, x)|(t-x)^2; x) \\ & \leq 2n\omega^*(f''; \mu)M_{n,2}(x) \\ & \quad + \frac{2n}{\mu^2} \omega^*(f''; \mu)\mathcal{W}_n^*((e^{-x} - e^{-t})^2(t-x)^2; x) \end{aligned}$$

Applying the Cauchy-Schwarz inequality, we obtain

$$\begin{aligned} & n\mathcal{W}_n^*(|h(t, x)|(t-x)^2; x) \\ & \leq 2n\omega^*(f''; \mu)M_{n,2}(x) \\ & \quad + \frac{2n}{\mu^2} \omega^*(f''; \mu)\sqrt{\mathcal{W}_n^*((e^{-x} - e^{-t})^4; x)}\sqrt{M_{n,4}(x)} \end{aligned}$$

Choosing $\mu = \frac{1}{\sqrt{n}}$ we have $n\mathcal{W}_n^*(|h(t, x)|(t-x)^2; x)$

$$\begin{aligned} & \leq 2n\omega^*\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)M_{n,2}(x) \\ & \quad + 2\omega^*\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\sqrt{n^2\mathcal{W}_n^*((e^{-x} - e^{-t})^4; x)}\sqrt{n^2M_{n,4}(x)} \end{aligned}$$

Using Mathematica, the followings were obtained

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 M_{n,4}(x) &= 0 \\ \lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \mathcal{W}_n^*((e^{-x} - e^{-t})^4; x) &= 0 \end{aligned}$$

Thus, we arrive at

$$\begin{aligned} & |n[\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)] - 2f'(x)| \\ & \leq |nM_{n,1}(x) - 2||f'(x)| \\ & \quad + \frac{1}{2}|nM_{n,2}(x)||f''(x)| + K\omega^*\left(f''; \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \end{aligned}$$

which was our claim.

Theorem 4.2. Let $f \in C^{m-1}[0, \infty)$, such that $f^{(m)}$ exists, $m \in \mathbb{N}$. Furthermore suppose that $f^{(j)}(t)e^{-nt} \in L_1(R)$ for all $j = 1, 2, \dots, m-1, n > 0$. Suppose that there exist $g_{i,n} \geq 0, j = 1, 2, \dots, m, g_{i,n} \in L_1(R)$ such that for each $x \in R$ we have

$$|f^{(j)}(x+t)|e^{-nt} \leq g_{i,n}(t)$$

for almost all $t \in R$, all $t \in R$, all $j = 1, 2, \dots, m$.

Then $f^{(j)}(x+t)e^{-nt}$ defines a Lebesgue integrable function with respect to t for each $x \in R$, all $j = 1, 2, \dots, m$, and

$$\mathcal{W}_n^*(f; x)^j = \mathcal{W}_n^*(f^{(j)}; x)$$

for all $x \in R$, all $j = 1, 2, \dots, m$.

Proof. The proof is as in Theorem 11.3 pp. 141 of (Anastassiou, 2011).

5. WEIGHTED APPROXIMATION

In this context, we consider the exponential weighted space B_{ρ_a} where $a > 0$ is fixed. This space consists of all real-valued functions defined on $\mathbb{R}^+$ that satisfy the inequality $|f(x)| \leq M\rho_a(x)$ with $\rho_a(x) = e^{ax}$ and $M > 0$ being a constant. The subspace C_{ρ_a} includes all continuous functions that belong to B_{ρ_a} . Equipped with the norm

$$\|f\|_{\rho_a} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|f(x)|}{\rho_a(x)}$$

this becomes a normed space. Furthermore, we define $C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$ as the set of all functions $f \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ for which

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|f(x)|}{\rho_a(x)} = k$$

where k is a positive constant.

Now we show the conditions under which both classes of operators maps $C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$ to $C_{\rho_b}(\mathbb{R}^+)$ with the uniformly bounded norm.

Lemma 5.1. Let $0 < a < b$. $\mathcal{W}_n^*$ is a positive linear operator from the space C_{ρ_a} into C_{ρ_b} such that the norms $\|\mathcal{W}_n^*\|_{C_{\rho_a} \rightarrow C_{\rho_b}}$ are uniformly bounded.

Proof. We can write

$$\|\mathcal{W}_n^*(\rho_a; x)\|_{\rho_b} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{\left| e^{a\theta_n(x)} e^{\frac{a^2}{4n}} \right|}{\rho_b(x)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^+} e^{\frac{-a^2}{4n}} e^{(a-b)x} = e^{\frac{-a^2}{4n}}, \quad (5.1)$$

the operators $\mathcal{W}_n^*$ maps the space C_{ρ_a} into C_{ρ_b} . Also, for $x \in \mathbb{R}^+$, we obtain

$$\begin{aligned} \frac{|\mathcal{W}_n^*(\rho_a; x) - \rho_a(x)|}{\rho_b(x)} &= \frac{\left| e^{\frac{-a^2}{4n}} e^{ax} - e^{ax} \right|}{e^{bx}} \\ &= e^{(a-b)x} \left| e^{\frac{-a^2}{4n}} - 1 \right| \\ &= e^{(a-b)x} \left(1 - e^{\frac{-a^2}{4n}} \right) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \|\mathcal{W}_n^*(\rho_a; x) - \rho_a\|_{\rho_b} &= \left(1 - e^{\frac{-a^2}{4n}} \right) \sup_{x \in \mathbb{R}^+} e^{(a-b)x} \\ &\leq 1 - e^{\frac{-a^2}{4n}} \end{aligned}$$

which tends to zero when $n \rightarrow \infty$. This shows that the norms $\|\mathcal{W}_n^*\|_{C_{\rho_a} \rightarrow C_{\rho_b}}$ are uniformly bounded.

Theorem 5.1. Let $0 < a < b$. For $f \in C_{\rho_a}(\mathbb{R}^+)$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)\|_{\rho_b} = 0$$

Proof. Using the theorem in (Coşkun,2003), we see that it is sufficient to verify the following three conditions

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}_n^*(\rho_a^\nu; x) - \rho_a^\nu\|_{\rho_b} = 0, \nu = 0, 1, 2$$

Since $\mathcal{W}_n^*(1; x) = 1$ and $\mathcal{W}_n^*(e^{2at}; x) = e^{2ax}$, for $\nu = 0$ and $\nu = 2$, the above equality is true. For $\nu = 0$, from (5.1) the proof is obvious.

Theorem 5.2. Let $0 < a < b$. For $f \in C_{\rho_a}^k(\mathbb{R}^+)$, we have

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|\mathcal{W}_n^*(f) - f\|_{\rho_b} = 0$$

Proof. For each $x_0 > 0$,

$$\begin{aligned} & \sup_{x \in \mathbb{R}^+} \frac{|\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} \\ & \leq \sup_{x \leq x_0} \frac{|\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} + \sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{W}_n^*(f; x) - f(x)|}{e^{bx}} \\ & \leq \|\mathcal{W}_n^*(f) - f\|_{C[0, x_0]} + \|f\|_{\rho_a} \sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{W}_n^*(e^{ax}; x)|}{e^{bx}} \\ & \quad + \sup_{x \geq x_0} \frac{|f(x)|}{e^{bx}} \end{aligned}$$

Obviously, the first term of the above inequality tends to zero. By Lemma 2.3, for any fixed $x_0 > 0$, it is easily seen that $\sup_{x \geq x_0} \frac{|\mathcal{W}_n^*(e^{ax}; x)|}{e^{bx}} = e^{\frac{-a^2}{4n}} e^{(a-b)x_0}$ tends to zero as $n \rightarrow \infty$. Finally, we can choose $x_0 > 0$ sufficiently large that the last part of above inequality can be made small enough.

6. CONCLUSION

In this study, we introduce and investigate a modified version of the Gauss-Weierstrass integral operators, where the function f is defined on the positive half-line. We establish the uniform convergence of the operators $\mathcal{W}_n^*$ and also determine the rate of this convergence. Furthermore, we analyze the asymptotic behavior of these operators by proving a quantitative form of the Voronovskaya-type theorem. In addition, a uniform approximation result in weighted spaces is obtained for the operators by employing a weighted version of the Korovkin-type theorem.

REFERENCES

- Agratini, O., Aral, A. & Deniz, E. (2016). "On Two Classes of Approximation Processes of Integral Type", Positivity, DOI 10.1007/s11117-016-0460-y.
- Anastassiou, G.A. & Aral, A. (2010), On Gauss-Weierstrass Type Integral Operators, Demonstratio Math. Vol XLIII, No:4 , 853-861.
- Anastassiou, G.A. (2011), Intelligent Mathematics: Computational Analysis, Vol 5, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Aral, A. (2006), On the generalized Picard and Gauss Weierstrass Singular Integrals, J. Comp. Anal. and Appl. Vol 8, No:3, 246-261.
- Bardaro, C., Mantellini, I., Uysal, G. & Yılmaz, B. (2021). A class of integral operators that fix exponential functions, Mediterr. J. Math., 18(5), 1-21.
- Butzer, P.L. & Nessel, R.J. (1971). Fourier Analysis and Approximation, Vol. 1, Birkhäuser, Basel and Academic Press, New York.
- Coşkun, T. (2003), Weighted approximation of unbounded continuous functions by sequences of linear positive operators, Indian J. Pure Appl. Math., 34 (3), 477-485.
- Holhoş, A. (2010). The rate of approximation of functions in an infinite interval by positive linear operators, Studia Univ. "Babes-Bolyai", Mathematica, 55 (2), 133-142.
- Uysal, G. & Yılmaz, B. (2021). On modified m-Singular Gauss-Weierstrass Operators, Livre de Lyon ISBN:978-2-38236-154-2, 49-63.

- Uysal, G. (2023). On a special class of modified integral operators preserving some exponential functions. *Mathematical Foundations of Computing*, 6(1), 78-93.
- Uysal, G. & Yılmaz, B. (2020). On Kirov- type Generalization of Gauss-Weierstrass Operators, *Livre de Lyon* ISBN:978-2-38236-051-4, 59-69.
- Yılmaz, B., Uysal, G & Aral, A. (2021). Resonstruction of two approximation processes in order to reproduce and J. *Math. Inequal.*, 15(3), 1101-1118.

BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN DEFORMASYON TEORİSİ

Elif A. ÖZASLAN¹

1. GİRİŞ

Bu çalışmada, birleşmeli cebirlerin deformasyon teorisini ele alıyoruz. $\mathbb{K}$ bir cisim olmak üzere, eğer bir $\mathbb{K}$ -vektör uzayı A üzerinde tanımlı

$$m : A \otimes A \rightarrow A$$

$\mathbb{K}$ -bilineer fonksiyonu var ve her $a, b, c \in A$ için

$$m(m(a, b), c) = m(a, m(b, c))$$

koşulunu sağlıyorsa A 'ya bir birleşmeli cebir denir.

Birleşmeli cebirlerin deformasyon teorisi, 1960'lı yıllarda Murray Gerstenhaber tarafından başlatılmış olup (Gerstenhaber, 1964), bu cebirlerin Hochschild kohomolojisi ile bağlantılarının keşfiyle şekillenmiştir. Bu bağlamda, bir birleşmeli cebirin deformasyon teorisinin temel kavramları arasında formal deformasyonlar, Maurer–Cartan denklemleri, dereceli diferansiyel Lie cebirleri gibi cebirsel yapılar yer almaktadır. Bu çalışmanın amacı, birleşmeli cebirlerin deformasyon teorisine ilişkin temel tanımları, ana sonuçları ve önemli örnekleri sistematik bir şekilde sunmak

¹Öğr. Grv. Dr., Kastamonu Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, eaozaslan@kastamonu.edu.tr, ORCID: 0000-0001-9560-1973

ve okuyucuya bu alanın genel çerçevesi hakkında bilgi vermektir (Bertelson, Cahen, & Gutt, 1997; Kodaira & Spencer, 1959; Altınay-Ozaslan, 2017; Kontsevich, 2003).

Bu bölümde $\mathbb{K}$ karakteristiği sıfır olan bir cismi ve A , $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlı birleşmeli cebiri göstermektedir. A üzerindeki bilinen çarpma işlemini

$$m_0 : A \otimes A \rightarrow A$$

ile göstereceğiz. $\otimes$ ve Hom , $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlanır.

$$\text{Hom}(A^{\otimes n}, A) = \{f : \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots A}_{n\text{-kere}} \rightarrow A \mid f, \text{ bir } \mathbb{K}\text{-lineer dönüşüm}\}$$

2. BİRLEŞMELİ CEBİRLERİN FORMAL DEFORMASYONLARI

Tanım 1 A , $\mathbb{K}$ üzerinde tanımlı bir birleşmeli cebir olsun. A 'nın **formal bir deformasyonu**, aşağıdaki gibi tanımlanan $\mathbb{K}[[\varepsilon]]$ -bilineer birleşmeli bir çarpımdır:

$$m_\varepsilon : A[[\varepsilon]] \otimes_{\mathbb{K}[[\varepsilon]]} A[[\varepsilon]] \rightarrow A[[\varepsilon]],$$

$$m_\varepsilon(a, b) = m_0(a, b) + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k m_k(a, b) \quad a, b \in A.$$

Burada ε derecesi sıfır olan formal bir parametredir ve her $m_k : A \otimes A \rightarrow A$ birleşme özelliğini sağlayan bilineer bir fonksiyondur:

$$m_\varepsilon(m_\varepsilon(a, b), c) = m_\varepsilon(a, m_\varepsilon(b, c))$$

Tanım 2 A bir değişmeli cebir olsun. Eğer A üzerinde tanımlı bir $\{, \} : A \otimes A \rightarrow A$ Lie braketi var ve bu braket

$$\{fg, h\} = f\{g, h\} + \{f, h\}g \quad \forall \quad f, g, h \in A, \quad (1)$$

Leibniz kuralını sağlıyorsa A 'ya bir **Poisson cebiri** denir.

Önerme 1 *Eğer A değişmeli bir cebir ve $m_\varepsilon = m_0 + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k m_k$, A 'nın bir formal deformasyonu ise A aynı zamanda bir Poisson cebiridir.*

İspat

$$\{a, b\} := \frac{1}{2}(m_\varepsilon(a, b) - (m_\varepsilon(b, a)))$$

braketi A üzerinde bir Poisson cebiri yapısı tanımlar.

Tanım 3 m_0 , A üzerinde tanımlı bilinen çarpma işlemi ve

$$m_\varepsilon = m_0 + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k m_k \quad \text{ve} \quad \tilde{m}_\varepsilon = m_0 + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k \tilde{m}_k,$$

A üzerinde tanımlı iki formal deformasyon olsun. Eğer bir $\mathbb{K}[[\varepsilon]]$ -lineer fonksiyonu

$$T : A[[\varepsilon]] \rightarrow A[[\varepsilon]] \quad (2)$$

$$T = Id + \sum_{k \geq 1} \varepsilon^k T_k \quad (3)$$

aşağıdaki şartı sağlıyorsa m_ε ve $\tilde{m}_\varepsilon$ için A 'nın **denk deformasyonları** denir:

$$T(m_\varepsilon(a, b)) = \tilde{m}_\varepsilon(T(a), T(b)) \quad a, b \in A[[\varepsilon]].$$

Örnek 1 $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ ve $||\lambda^{ij}|| \in Mat_{d \times d}(\mathbb{K})$ olsun.

$$m_\varepsilon(a, b) = \left(\exp \left(\varepsilon \lambda^{ij} \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial y^j} \right) a(x) b(y) \right)_{|x=y}$$

A 'nın bir formal deformasyonudur.

2.1. Hochschild Eşzincir Kompleksi

Tanım 4 $C^n(A) = \text{Hom}(A^{\otimes n}, A)$ olmak üzere,

$$0 \rightarrow C^0(A) \xrightarrow{\partial^{\text{Hoch}}} \dots C^n(A) \xrightarrow{\partial^{\text{Hoch}}} C^{n+1}(A) \xrightarrow{\partial^{\text{Hoch}}} \dots, \quad (4)$$

şeklinde yazılan zincire **Hochschild eşzincir kompleksi** denir. Burada, $\partial^{\text{Hoch}} : C^n(A) \rightarrow C^{n+1}(A)$ diferansiyeli, $f \in C^n(A)$ ve $a_0, \dots, a_n \in A$ için aşağıdaki formül ile verilir:

$$\begin{aligned} \partial^{\text{Hoch}} f(a_0, \dots, a_n) &:= a_0 f(a_1, \dots, a_n) \\ &+ \sum_{i=0}^{n-1} (-1)^i f(a_0, \dots, a_i a_{i+1}, \dots, a_n) \\ &+ (-1)^{n+1} f(a_0, \dots, a_{n-1}) a_n. \end{aligned} \quad (5)$$

Doğrudan bir hesaplama ile ∂^{Hoch} fonksiyonunun gerçekten bir diferansiyel olduğu, yani $(\partial^{\text{Hoch}})^2 = 0$ eşitliğini sağladığını gösterebiliriz.

Tanım 5 (4)'te tanımlanan kompleksin

$$HH^\bullet(A, A) := \frac{\text{Ker } \partial^{\text{Hoch}}}{\text{Im } \partial^{\text{Hoch}}}$$

kohomolojisine A 'nın **Hochschild kohomolojisi** denir.

Örnek 2 A 'nın bilinen çarpma işlemi m_0 derecesi 2 olan bir Hochschild eşzinciridir. Genel olarak, A üzerinde tanımlı bütün birleşmeli çarpma işlemleri derecesi 2 olan bir Hochschild eşzinciridir.

Örnek 3 A 'nın her formal deformasyonu m_ε için, $m_\varepsilon \in \text{Hom}(A \otimes A, A)[[\varepsilon]] = C^2(A)[[\varepsilon]]$ yazabiliriz.

Örnek 4

$$HH^0(A, A) = \{a \in A \mid ab = ba, \forall b \in A\}$$

A 'nın merkezine eşittir. Eğer A değişmeli cebir ise A 'nın kendisidir.

$$HH^1(A, A) = \frac{\text{ker}(\partial^{\text{Hoch}} : C^1(A) \rightarrow C^2(A))}{\text{Im}(A \rightarrow C^1(A))}$$

$f : A \rightarrow A$ için, $\partial^{\text{Hoch}} f(a, b) = af(b) - f(ab) + f(a)b$ olduğundan, $\partial^{\text{Hoch}} f = 0$ ise $f(ab) = af(b) + f(a)b$ elde ederiz. Bu eşitliği sağlayan fonksiyonlara A 'nın bir $\mathbb{K}$ -türevi denir ve $\text{Der}(A)$ ile gösterilir.

$\text{Im}(A \rightarrow C^1(A)) = \{g : A \rightarrow A | g(a) = ab - ba\}$ elde ederiz. Bu şekildeki fonksiyonlara A 'nın bir $\mathbb{K}$ -iç türevi denir ve $\text{InnDer}(A)$ ile gösterilir. A 'nın her iç türevi aynı zamanda bir türevidir ve

$$HH^1(A, A) = \frac{\text{Der}(A)}{\text{InnDer}(A)}$$

elde ederiz.

Şu andan itibaren, $C^{\bullet+1}(A)$, ötelenmiş dereceli Hochschild eşzincir kompleksini ele alacağız. $f \in C^{\bullet+1}(A)$, derecesi n olan bir Hochschild eşzincir ise $f \in \text{Hom}(A^{\otimes n+1}, A)$ demektir.

Tanım 6 $C^{\bullet+1}(A)$ üzerinde

$$[P_1, P_2]_G(a_1, a_2, \dots, a_{k_1+k_2-1}) :=$$

$$\sum_{i=0} (-1)^{k_1+1} (-1)^{i(k_2+1)} P_1(a_0, \dots, P_2(a_i, \dots, a_{i+k_2}), a_{i+k_2+1}, \dots, a_{k_1+k_2}) \\ - (-1)^{k_1 k_2} (1 \leftrightarrow 2), \quad P_j \in C^{k_j}(A),$$

şeklinde tanımlanan brakete **Gerstenhaber braketi** (Gerstenhaber, 1964) denir.

Önerme 2 $[\ , \]_G, A$ üzerinde bir Lie cebiri tanımlar.

m_0, A üzerindeki bilinen çarpma işlemi olmak üzere

$$[m_0, m_0]_G(a, b, c) = 2(m_0(m_0(a, b), c)) - m_0(a, m_0(b, c)) \quad (6)$$

m_0 birleşmeli çarpma işlemi olduğu için (6) denkleminin sağ tarafı sıfıra eşittir. O halde, A üzerinde tanımlı her birleşmeli çarpma işlemi m için $[m, m]_G = 0$ yazılabilir. Bu gözlemi yaptıktan sonra, aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

Sonuç 1 $m \in \text{Hom}(A \otimes A, A)$, A üzerinde tanımlı bir çarpma işlemi olsun. m işleminin A üzerinde birleşme özelliğini sağlaması için gerek ve yeter koşul $[m, m]_G = 0$ olmasıdır.

Sonuç 2 m_0 , A üzerindeki bilinen çarpma işlemi ve $f \in C^{k-1}(A)$ olmak üzere $[m_0, f]_G = (-1)^{k+1} \partial^{\text{Hoch}} f$ dir.

2.2. Deformasyonlar ve Hochschild eşzincir kompleksi

A 'nın bir formal deformasyonu

$$m_\varepsilon : A \otimes A \rightarrow A[[\varepsilon]], \quad m_\varepsilon = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots$$

olsun. O halde, m_ε için

$$m_\varepsilon \in \text{Hom}(A \otimes A, A)[[\varepsilon]] = C^2(A)[[\varepsilon]] \quad (7)$$

yazabilir ve m_ε çarpımını, m_0 ile başlayan, katsayıları Hochschild eşzincirlerinden oluşan, ε nun kuvvetlerini içeren bir formal kuvvet serisi olarak düşünebiliriz.

Önerme 3 A 'nın bir formal deformasyonu

$$m_\varepsilon : A \otimes A \rightarrow A[[\varepsilon]], \quad m_\varepsilon = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots$$

olsun. O halde,

(i) $m_1 \in C^1(A)[[\varepsilon]]$ bir eşdevirdir.

(ii) m_ε ve $\tilde{m}_\varepsilon$ denk deformasyonlar ise $[m_1] = [\tilde{m}_1] \in C^1(A)[[\varepsilon]]$.

Tanım 7 m_1 eşdevirine karşılık gelen $HH^1(A)$ içindeki kohomoloji sınıfına **Kodaira–Spencer sınıfı** denir (Kodaira & Spencer, 1959).

Başka bir ifadeyle, A 'nın denk formal deformasyonlarının Kodaira–Spencer sınıfları aynıdır.

3. HOCHSCHILD-KONSTANT-ROSENBERG TEOREMİ

$A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$, $\mathbb{R}^d$ uzayı üzerinde tanımlı polinomal fonksiyonların cebiri ve $V_A^\bullet$, $\mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı polinomal vektör alanlarının cebiri olsun. $V_A^\bullet$ cebirini şu şekilde ifade edebiliriz:

$$V_A^\bullet = [x^1, x^2, \dots, x^d, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_d]$$
$$\text{der}(x^i) = 0, \quad \text{der}(\theta_i) = 1, \quad \theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i$$

Her $v \in V_A^\bullet$ vektörünü

$$v = \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} v^{i_1, i_2, \dots, i_n} \theta_{i_1} \theta_{i_2} \dots \theta_{i_n}$$

şeklinde yazabiliriz.

Teorem 1 (Hochschild-Konstant-Rosenberg Teoremi)

$A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ olmak üzere

$$\mathcal{U} : V_A^\bullet \rightarrow C^\bullet(A)$$
$$\mathcal{U}(v)(a_1, a_2, \dots, a_n) := \sum_{i_1, i_2, \dots, i_n} v^{i_1, i_2, \dots, i_n} \partial_{x^{i_1}} a_1 \partial_{x^{i_2}} a_2 \dots \partial_{x^{i_n}} a_n$$

fonksiyonu aşağıdaki izomorfizmayı verir (Kostant, Hochschild, & Rosenberg, 2009):

$$V_A^\bullet \cong H^\bullet(C^\bullet(A))$$

Burada $V_A^\bullet$ cebirini, diferansiyeli 0 olan bir eşzincir kompleksi olarak düşünüyoruz.

Önerme 4 $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ cebirinin her formal deformasyonu $\mathbb{K}^d$ üzerinde bir Poisson cebiri tanımlar.

İspat $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ 'nin bir formal deformasyonunu m_ε olsun.

$$m_\varepsilon : A \otimes A \rightarrow A[[\varepsilon]], \quad m_\varepsilon = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots$$

$\partial^{\text{Hoch}} m_1 = 0$ olduğunu biliyoruz. Teorem (1)'den dolayı $m_1 - \mathcal{U}(\pi_1) = \partial^{\text{Hoch}}(\dots)$ olacak şekilde en az bir $\pi_1 \in V_A^2$ vardır. Genelliği bozmadan, $m_1 = \mathcal{U}(\pi_1)$ alabiliriz. Bu durumda

$$\begin{aligned} [m_1, m_1]_G &= \partial^{\text{Hoch}}(\xi) \quad \exists \xi \\ [\mathcal{U}(\pi_1), \mathcal{U}(\pi_1)]_G &= \partial^{\text{Hoch}}(\xi) \\ \mathcal{U}([\pi_1, \pi_1]_S) &= 0. \end{aligned}$$

elde ederiz. $\mathcal{U}$ fonksiyonu 1-1 olduğu için, $[\pi_1, \pi_1]_S = 0$ elde ederiz. Sonuç olarak, $\pi_1, \mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı bir polinomal Poisson cebiri yapısıdır.

Örnek 5 $m_\varepsilon = \exp(\varepsilon \lambda^{ij})$ ise karşılık gelen Poisson yapısı

$$\pi_1\{a, b\} = \frac{-1}{2}(\lambda^{ij} - \lambda^{ji}) \frac{\partial a}{\partial x^i} \frac{\partial b}{\partial x^j}$$

ile tanımlanır.

Geri kalan bölümde ” $\mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı her π_1 Poisson yapısına karşılık $m_1 = \mathcal{U}(\pi_1)$ olacak şekilde bir m_ε formal deformasyonu var mıdır?” sorusuna cevap arayacağız ve $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ cebirinin formal deformasyonlarının denklik sınıflarını belirleyeceğiz.

4. DERECELİ DİFERANSİYEL LİE CEBİRLERİ

Tanım 8 (L, ∂_L) bir eş zincir kompleksi olsun. Eğer L üzerinde tanımlı bir $[\cdot, \cdot] : L^k \otimes L^l \rightarrow L^{k+l}$ bilineer fonksiyonu

$$\bullet \quad \partial_L[a, b] = [\partial_L a, b] + (-1)^{|a|}[a, \partial_L b] \quad (\text{dereceli Leibniz kuralı})$$

- $[a, b] = -(-1)^{|a||b|}[b, a]$ (dereceli anti-simetri özelliği)
- $[a, [b, c]] + (-1)^{|a|(|b|+|c|)}[b, [c, a]] + (-1)^{|c|(|a|+|b|)}[c, [a, b]] = 0$ (dereceli Jakobi özdeşliği)

koşullarını sağlıyorsa L ye bir **dereceli diferansiyel Lie cebiri** denir.

Örnek 6 $(C^{\bullet+1}(A), \partial^{\text{Hoch}}, [,]_G)$ dereceli diferansiyel Lie cebiridir.

Örnek 7 $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$, $\mathbb{R}^d$ uzayı üzerinde tanımlı polinomal fonksiyonların cebiri ve $V_A^\bullet$, $\mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı polinomal vektör alanlarının cebiri olsun. $V_A^\bullet$ üzerinde Schouten braketi $[,]_S$ şu şekilde tanımlanır:

$$[x^i, x^j]_S = [\theta_i, \theta_j]_S = 0, \quad [\theta_i, x^j]_S = -[x^j, \theta_i]_S = \delta_i^j \quad (8)$$

ve çarpma ile Leibniz koşulunu sağlar:

$$[v, v_1 v_2]_S = [v, v_1]_S v_2 + (-1)^{(|v_1|+1)|v|} v_1 [v, v_2]_S.$$

$(V_A^{\bullet+1}, 0, [,]_S)$ bir dereceli diferansiyel Lie cebiridir.

Tanım 9 $(L, \partial_L, [,])$ bir dereceli diferansiyel Lie cebiri olsun. Eğer (L, ∂_L) eşzincir kompleksi üzerinde aşağıdaki gibi tam bir azalan filtreleme tanımlanıyorsa L 'ye **filtrelenmiş dereceli diferansiyel Lie cebiri** denir.

$$\dots \supset \mathcal{F}_0 L \supset \mathcal{F}_1 L \supset \mathcal{F}_2 L \supset \mathcal{F}_3 L \supset \dots \quad L \cong \lim_k L / \mathcal{F}_k L.$$

$$\partial_L \mathcal{F}_k L \subset \mathcal{F}_k L, \quad [\mathcal{F}_{k_1} L, \mathcal{F}_{k_2} L]_L \subset \mathcal{F}_{k_1+k_2} L.$$

Örnek 8 Hochschild diferansiyelini ve Gerstenhaber braketini $\mathbb{K}[[\varepsilon]]$ -lineerliği kullanarak $\varepsilon C^\bullet[[\varepsilon]]$ cebiri üzerinde tanımlayabiliriz. O halde, $L = \varepsilon C^\bullet[[\varepsilon]]$ dereceli diferansiyel Lie cebiri üzerinde

$$\mathcal{F}_k L := \varepsilon^k C^\bullet[[\varepsilon]].$$

olacak şekilde bir filtreleme tanımlayabiliriz.

Her filtrelenmiş dereceli diferansiyel Lie cebiri $(L, \partial_L, [,]_L)$ için, diferansiyel ile Lie braketinin filtreleme ile aşağıdaki anlamda uyumlu olduğunu var sayarız:

$$\partial_L(\mathcal{F}_k L) \subset \mathcal{F}_k L, \quad [\mathcal{F}_{k_1} L, \mathcal{F}_{k_2} L]_L \subset \mathcal{F}_{k_1+k_2} L. \quad (9)$$

Tanım 10 L ve $\tilde{L}$ dereceli diferansiyel Lie cebirleri olsun. Eğer $f : L \rightarrow \tilde{L}$ şeklinde derecesi sıfır olan ve

$$f \circ \partial_L = \partial_{\tilde{L}} \circ f \quad (10)$$

$$f([x, y]) = [f(x), f(y)]_{\tilde{L}} \quad (11)$$

koşullarını sağlayan lineer homojen bir fonksiyon ise f 'ye bir **dereceli diferansiyel Lie cebir morfizması** denir.

Tanım 11 $f : L \rightarrow \tilde{L}$ bir dereceli diferansiyel Lie cebir morfizması olsun. Eğer f fonksiyonu kohomoloji grupları arasında bir izomorfizma veriyorsa, yani

$$H^\bullet(L, \partial_L) \cong H^\bullet(\tilde{L}, \partial_{\tilde{L}})$$

ise f 'ye bir **kuazi-izomorfizma** denir.

Tanım 12 L bir dereceli diferansiyel Lie cebiri olsun. Eğer $\alpha \in L^1$ elemanı

$$\partial_L \alpha + \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]_L = 0.$$

koşulunu sağlıyorsa α 'ya bir **Maurer–Cartan (MC) eleman** denir.

Önerme 5 A bir birleşmeli cebir ve A 'nın bir formal deformasyonu $m_\varepsilon = m_0 + \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots$ olsun. O halde,

$$\mu = \varepsilon m_1 + \varepsilon^2 m_2 + \dots \in \varepsilon C^2(A)[[\varepsilon]] \quad (12)$$

bir MC elemanıdır.

İspat m_ε birleşme özelliğini sağladığından dolayı $[m_\varepsilon, m_\varepsilon]_G = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu denklemi açtığımız zaman, μ için

$$[m_\varepsilon, m_\varepsilon] = 0 \Leftrightarrow \partial^{\text{Hoch}}\mu + \frac{1}{2}[\mu, \mu]_G = 0 \quad (13)$$

denkleminin sağlandığını görürüz.

Örnek 9 $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$, $\mathbb{R}^d$ uzayı üzerinde tanımlı polinomal fonksiyonların cebiri ve $V_A^\bullet$, $\mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı polinomal vektör alanlarının cebiri olsun. Her Poisson yapısı $\pi_1 \in V_A^2$ için Jakobi özdeşliği ile $[\pi_1, \pi_1]_S = 0$ denklemi aynı ifadelerdir: $[\pi_1, \pi_1]_S = 0$ denklemi, $(V_A^{\bullet+1}, 0, [\cdot, \cdot]_S)$ dereceli diferansiyel denklemi için MC denklemini verir.

$\mathcal{F}_1 L$ içindeki derece sıfır elemanların alt cebiri olan $\mathcal{F}_1 L^0$, ($\mathbb{C}$ -vektör uzayları kategorisinde) pro-nilpotent bir Lie cebiridir. Dolayısıyla, $\mathcal{F}_1 L^0$ üssel bir gruba dönüştürülebilir ve bu grubu

$$\exp(\mathcal{F}_1 L^0) \quad (14)$$

ile gösteririz.

$\exp(\mathcal{F}_1 L^0)$ grubunun elemanları $\mathcal{F}_1 L^0$ kümesinin elemanlarından oluşur. Bu grup üzerinde tanımlı işlem, Campbell - Hausdorff serisi ile tanımlanır:

$$\text{CH}(\xi, \eta) = \log(e^\xi e^\eta) = \xi + \eta + \frac{1}{2}[\xi, \eta] + \dots \quad (15)$$

her $\xi, \eta \in \mathcal{F}_1 L^0$ için geçerlidir.

Derece sıfır bir eleman ξ ve L 'nin bir MC elemanı α için, aşağıdaki formülle tanımlanan yeni bir derece 1 eleman $\tilde{\alpha} \in L$ elde ederiz:

$$e^\xi(\alpha) := e^{[\xi, \cdot]} \alpha - \frac{e^{[\xi, \cdot]} - 1}{[\xi, \cdot]} (\partial_L \xi), \quad \xi \in \mathcal{F}_1 L^0 \quad (16)$$

Denklem (16)'da geçen $e^{[\xi, \cdot]}$ ve

$$\frac{e^{[\xi, \cdot]} - 1}{[\xi, \cdot]}$$

ifadeleri, sırasıyla $x = 0$ noktasında e^x ve $(e^x - 1)/x$ fonksiyonlarının Taylor açılımı ile tanımlanır. Denklem (16)'ın sağ tarafındaki her iki terim de, L üzerindeki filtrasyonun tamam olması sayesinde iyi tanımlıdır.

Her derece sıfır eleman $\xi \in \mathcal{F}_1 L^0$ ve her MC elemanı α için, formül (16) ile elde edilen $\mathcal{F}_1 L$ 'nin derece 1 elemanı da bir MC elemanıdır.

Ayrıca, formül (16), $\exp(\mathcal{F}_1 L^0)$ grubunun L 'nin MC elemanları kümesi üzerinde sol etkisini (gauge action) tanımlar. Yani, her $\xi, \eta \in \mathcal{F}_1 L^0$ için şu eşitlik sağlanır:

$$e^\xi(e^\eta(\alpha)) = e^{\text{CH}(\xi, \eta)}(\alpha).$$

Tanım 13 *Gauge etkisine karşılık gelen dönüşüm grupoidi, **Goldman - Millson grupoidi** (Goldman & Millson, 1988) olarak adlandırılır ve $\text{MC}(L)$ ile gösterilir.*

- Bu grupoidin nesneleri, L 'nin MC elemanlarıdır.
- İki MC elemanı α ile $\tilde{\alpha}$ arasındaki morfizmalar, α 'yı $\tilde{\alpha}$ 'ya dönüştüren $\exp(\varepsilon L^0[[\varepsilon]])$ grubunun elemanlarıdır.

Tanım 14 *İki MC elemanı eğer $\text{MC}(L)$ içinde izomorfik ise bu MC elemanları denktir, denir ve MC elemanlarının denklik sınıfları $\text{İsom}(\text{MC}(L))$ ile gösterilir.*

Önerme 6 m_ε ve $\tilde{m}_\varepsilon$ deformasyonlarının denk olabilmesi için gerek ve yeter koşul karşılık gelen $\mu, \tilde{\mu} \in C^{\bullet+1}(A)[[\varepsilon]]$ MC elemanlarının izomorfik olmasıdır.

İspat $\mu, \tilde{\mu} \in C^{\bullet+1}(A)[[\varepsilon]]$ izomorfik MC elemanları olsun.

$$\tilde{\mu} = e^{[\xi, \cdot]} \mu - \frac{e^{[\xi, \cdot]} - 1}{[\xi, \cdot]} \partial^{\text{Hoch}} \xi, \quad \exists \xi \in \varepsilon L^0[[\varepsilon]]$$

$$T_\xi : A[[\varepsilon]] \rightarrow A[[\varepsilon]], \quad T_\xi(a) := a + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \xi^k(a)$$

operatörü, $m_\varepsilon = m_0 + \mu$ ve $\tilde{m}_\varepsilon = m_0 + \tilde{\mu}$ çarpımları arasında bir geçiş sağlar:

$$T_\xi(m_\varepsilon(a, b)) = \tilde{m}_\varepsilon(T_\xi(a), T_\xi(b)), \quad \forall a, b \in A[[\varepsilon]].$$

Dolayısıyla, A cebirinin formal deformasyonlarının denklik sınıfları, $C^{\bullet+1}(A)[[\varepsilon]]$ içindeki MC elemanlarının izomorfizma sınıfları ile birebir eşleşir.

Tanım 15 Bir $f : L \rightarrow \tilde{L}$ diferansiyelli dereceli Lie cebirlerinin morfizması olsun. O halde, aşağıdaki fonksiyon tanımlanabilir.

$$f_* : \text{MC}(\varepsilon L[[\varepsilon]]) \rightarrow \text{MC}(\varepsilon \tilde{L}[[\varepsilon]])$$

Teorem 2 Eğer $f : L \rightarrow \tilde{L}$ diferansiyelli dereceli Lie cebirlerinin bir kuazi-izomorfizması ise f_* aşağıdaki 1-1 eşlemeyi verir (Getzler, 2009; Goldman & Millson, 1988):

$$\text{İsom}(\text{MC}(\varepsilon L[[\varepsilon]])) \rightarrow \text{İsom}(\text{MC}(\varepsilon \tilde{L}[[\varepsilon]]))$$

Teorem 3 (Kontsevich Teoremi) $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ olmak üzere, diferansiyel dereceli Lie cebirleri arasında bir dizi kuazi-izomorfizma vardır (Kontsevich, 1997):

$$C^{\bullet+1}(A) \leftarrow \bullet \rightarrow \bullet \leftarrow \bullet \cdots \leftarrow \bullet \rightarrow V_A^{\bullet+1}$$

Sonuç 3 $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ olmak üzere, A 'nın formal deformasyonlarının denklik sınıfları ile $(\varepsilon V_A^{\bullet+1}[[\varepsilon]], 0, [\cdot, \cdot]_S)$ diferansiyel dereceli Lie cebirinin

$$\varepsilon \pi_1 + \varepsilon^2 \pi_2 + \varepsilon^3 \pi_3 + \cdots \quad \pi_k \in V_A^2. \quad (17)$$

şeklindeki MC elemanlarının izomorfizma sınıfları birebir eşleşir.

5. SONUÇ

A birleşmeli bir cebir olmak üzere A 'nın formal deformasyonlarının denklik sınıfları ile $C^{\bullet+1}[[\varepsilon]]$ dereceli diferansiyel Lie cebirinin Maurer-Cartan elemanlarının denklik sınıfları arasında birebir eşleme vardır. $A = \mathbb{K}[x^1, x^2, \dots, x^d]$ olmak üzere, A 'nın formal deformasyonlarının denklik sınıfları ile $\mathbb{K}^d$ üzerinde tanımlı Poisson cebir yapıları arasında birebir eşleme vardır.

KAYNAKÇA

- Altınay-Ozaslan, E. (2017). *Deformation quantization over a $\mathbb{Z}$ -graded base*. Temple University.
- Bertelson, M., Cahen, M., & Gutt, S. (1997). Equivalence of star products. *Classical and Quantum Gravity*, 14(1A), A93.
- Gerstenhaber, M. (1964). On the deformation of rings and algebras. *Annals of Mathematics*, 79(1), 59–103.
- Getzler, E. (2009). Lie theory for nilpotent-algebras. *Annals of mathematics*, 271–301.
- Goldman, W. M., & Millson, J. J. (1988). The deformation theory of representations of fundamental groups of compact kähler manifolds. *Publications Mathématiques de l'IHÉS*, 67, 43–96.
- Kodaira, K., & Spencer, D. (1959). On deformations of complex analytic structures. *Kunihiko Kodaira: Collected Works*, 846.
- Kontsevich, M. (1997). Formality conjecture, deformation theory and symplectic geometry. , 20, 139–156. (Conference held in Ascona, 1996)
- Kontsevich, M. (2003). Deformation quantization of poisson manifolds. *Letters in Mathematical Physics*, 66, 157–216.
- Kostant, B., Hochschild, G., & Rosenberg, A. (2009). *Differential forms on regular affine algebras*. Springer.

VISUAL AND ENUMERATIVE PROPERTIES OF NUMERICAL SEMIGROUPS: A ROOK POLYNOMIAL APPROACH

Meral SÜER¹

1. GİRİŞ

Numerical semigroups are central mathematical structures with diverse applications across various disciplines. In commutative algebra, they emerge naturally as value semigroups of one-dimensional analytically irreducible local domains (Rosales & García-Sánchez, 2009). Within algebraic geometry, they are closely linked to the analysis of singularities on algebraic curves and to the characterization of Weierstrass gap sequences. Their structural properties also make them valuable in combinatorics, particularly in the exploration of integer partitions, factorization patterns, and tiling problems. In the realm of number theory, they are crucial to classical problems such as the Frobenius problem and the study of nonnegative integer solutions to linear Diophantine equations. Furthermore, numerical semigroups have found significant applications in coding theory, especially in the construction of algebraic-geometric codes and in the analysis of the Feng–Rao bound (Kirfel & Pellikaan, 1995). These extensive connections underscore the interdisciplinary nature and ongoing research interest in numerical semigroups.

Young diagrams, on the other hand, are key combinatorial constructs consisting of rows of unit squares aligned to the left,

¹ Doç.Dr., Department of Mathematics, Faculty of Science and Letters, Batman University, meral.suer@batman.edu.tr, ORCID: 0000-0002-5512-4305.

with each successive row containing no more squares than the previous one. They serve as a graphical representation of integer partitions and play an important role in areas such as representation theory and the theory of symmetric functions. More recently, their use has been extended to the study of numerical sets and numerical semigroups, offering both visual and structural insights into these algebraic objects. Significant contributions in this direction include the works of Keith ve Nath (2010), as well as Constantin, Houston-Edwards ve Kaplan (2017), who established bijections among Young diagrams, integer partitions, and numerical sets. Building upon these relationships, Süer ve Yeşil (2021) introduced novel methods for examining symmetric and pseudo-symmetric numerical semigroups via their corresponding Young diagrams, and further analyzed the structural aspects of the associated semigroup rings.

A board in this context refers to a finite rectangular grid of cells, often modeled by a binary matrix $B = (b_i, b_j) \in M_{p,q}[\mathbb{F}_2]$, where $\mathbb{F}_2 = \{0,1\}$. Entries with value 1 indicate active or usable cells. A rook placement of size k on such a board involves placing k indistinguishable rooks in different rows and columns, such that all rooks occupy only the active cells. The total number of such placements is denoted by $r_k(B)$. The rook polynomial of the board B is then defined as:

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B)x^k$$

with $r_0(B) = 1$ and $r_1(B)$ corresponding to the number of active cells. Rook polynomials are fundamental in enumerative combinatorics, especially for counting permutations under positional constraints. They also appear in broader mathematical settings, such as group representation theory, matrix enumeration

over finite fields, and the study of hypergeometric series (Haglund, 1998).

Closely connected to rook theory are the Stirling numbers of the second kind $S(n, k)$, which count the number of ways to partition a set of n elements into k nonempty, unordered subsets. These numbers appear in diverse areas such as recurrence relations, generating functions, and enumerative combinatorics. In particular, Petkovšek ve Pisanski'ye (2007) provide a combinatorial interpretation of unsigned Stirling numbers through rook placements and diagrammatic methods.

Recent work has deepened the link between numerical semigroups, rook theory, and Young diagrams, emphasizing their role in additive number theory and visual combinatorics. For instance, Constantin, Houston-Edwards ve Kaplan (2017) study core partitions through geometric representations tied to numerical sets. Inspired by this framework, we examine the structure of rook placements on Ferrers boards derived from numerical semigroups and demonstrate that their corresponding rook polynomials can be described via Stirling numbers of the second kind.

This correspondence not only provides a new enumerative interpretation of semigroup-associated diagrams but also sheds light on the internal structure of semigroup gaps and partitions. By bridging classical partition theory and the algebraic properties of numerical semigroups, our approach reinforces the significance of Stirling numbers as a unifying tool across multiple areas of discrete mathematics.

Numerical semigroups constitute a fundamental object of study in commutative algebra and combinatorics, owing to their deep connections with various number-theoretic structures. In particular, they exhibit intriguing relationships with specific sets of integers and integer sequences. The study by Sürer ve İlhan

(2015) highlights how certain numerical sequences can be naturally embedded within the framework of semigroup structures, thereby offering new perspectives on the algebraic behavior of these sets.

2. FOUNDATIONAL CONCEPTS AND NOTATION

Let $\mathbb{N}$ denote the set of non-negative integers. A subset $S \subseteq \mathbb{N}$ is called a numerical set if it contains 0 and its complement in $\mathbb{N}$ is finite. Within this broader class, a numerical set that is closed under addition—meaning that for any $x, y \in S$, the sum $x + y$ also belongs to S —is referred to as a numerical semigroup.

Given a numerical set S , the elements of $\mathbb{N}$ that are not in S are called the gaps of S , and the collection of these elements is denoted by $G(S)$. The genus of S , written as $g(S)$, is defined as the number of gaps; in other words, it is the cardinality of $G(S)$. If $S = \mathbb{N}$, then no gaps exist, so $G(S) = \emptyset$, making S itself a (trivial) numerical set. A numerical set S is termed proper when it does not include all non-negative integers—that is, when $G(S) \neq \emptyset$. In such cases, the largest integer not contained in S , equivalently the maximum element of $G(S)$, is known as the Frobenius number and is denoted by $F(S)$. By convention, for the full set $\mathbb{N}$, one sets $F(\mathbb{N}) = -1$.

The quantity $F(S) + 1$ is referred to as the conductor of S , written as $C(S)$. Elements of S that are strictly less than the conductor are called the small elements of S , and the set they form is denoted by $N(S)$. The number of small elements, given by $n(S)$, provides further insight into the structure of S . If the elements of $N(S)$ are listed in increasing order as $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1}$, then the full set S can be expressed as

$$S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \rightarrow\}$$

where the arrow indicates that all integers greater than or equal to the conductor also belong to S .

Every numerical semigroup S admits a unique finite subset $M(S) \subseteq S$ called the minimal generating set, such that every element in S can be written as a finite non-negative linear combination of elements from $M(S)$, and no proper subset of $M(S)$ possesses this generating property. The elements of $M(S)$, known as the minimal generators, are the additive irreducible components of the semigroup.

Two key invariants associated with a numerical semigroup are the embedding dimension and the multiplicity. The embedding dimension, denoted $e(S)$, is defined as the cardinality of the minimal generating set $M(S)$, and reflects the combinatorial complexity of the semigroup. The multiplicity, denoted $m(S)$, is the smallest positive integer contained in S ; equivalently, it is the least element of $M(S)$. Multiplicity often governs the number and distribution of gaps in S , and plays a fundamental role in shaping the overall structure of the semigroup.

Each proper numerical set S can be uniquely represented by a corresponding Young diagram Y_S through a geometric construction in the integer lattice $\mathbb{Z}^2$. Beginning at the origin, one traces a path using unit steps: a rightward step is taken whenever an integer $s \in S$, while an upward step is made if $s \notin S$, that is, if $s \in G(S)$. This path construction proceeds sequentially through the non-negative integers until it reaches the Frobenius number $F(S)$. The region enclosed by this path, the vertical axis (the y -axis), and the horizontal line $y = g(S)$ (which corresponds to the genus of S) defines the Young diagram Y_S .

If the proper numerical set is given in the form $S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \rightarrow\}$ then, by the nature of this

construction, the associated Young diagram Y_S will have exactly $n(S) = n$ columns and $g(S)$ rows.

This geometric interpretation defines a bijection between the set of proper numerical sets and the set of Young diagrams. Furthermore, because every Young diagram corresponds uniquely to an integer partition—that is, a decomposition of a positive integer into a sum of positive integers arranged in non-increasing order—this mapping naturally extends to a one-to-one correspondence between proper numerical sets and integer partitions.

The rook polynomial is a combinatorial generating function that encodes the number of ways to place k nonattacking rooks on a given board. Formally, if $r_k(B)$ denotes the number of valid placements of k nonattacking rooks on a board B , then the rook polynomial is defined as

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B)x^k$$

This polynomial captures both the geometric structure of the board and the combinatorial complexity of permissible rook placements. In the context of enumerative combinatorics, rook polynomials serve as a powerful tool for analyzing the configuration space of nonattacking rooks.

For a rectangular board of size $m \times n$, it is clear that no more than $\min(m, n)$ nonattacking rooks can be placed. Therefore, the associated rook polynomial is a polynomial of degree at most $\min(m, n)$.

Moreover, the rook polynomial is invariant under any permutation of the board's rows or columns, as such transformations preserve the set of valid rook placements. This invariance reflects a fundamental symmetry in the structure of

rook configurations and emphasizes the combinatorial elegance of the model.

Example 2.1 Consider the numerical set

$$S = \{0, 3, 4, 5, 7, 9, 11, \rightarrow\},$$

which, by definition, contains all nonnegative integers greater than or equal to its conductor.

To analyze the structure of this set, we begin by determining its key invariants. The set of gaps, denoted $G(S)$, consists of all nonnegative integers not included in S . In this case,

$$G(S) = \{1, 2, 6, 8, 10\}.$$

The genus of S , which is the number of gaps, is thus $g(S) = 5$. The Frobenius number, defined as the largest integer not contained in the set, is

$$F(S) = 10,$$

and the conductor is one more than the Frobenius number:

$$C(S) = F(S) + 1 = 11.$$

The elements of S that lie strictly below the conductor are known as the small elements, and are listed as

$$N(S) = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}.$$

Therefore, the number of small elements is $n(S) = 6$.

Geometric Construction of the Young Diagram:

Using the method of geometric path encoding, we can associate a Young diagram Y_S with the numerical set S . Beginning at the origin in the integer lattice $\mathbb{Z}^2$, we construct a path by scanning integers from 0 up to $F(S) = 10$. For each $s \in S$, a unit step to the right is taken; for each $s \in G(S)$, a unit step upward is taken. The resulting staircase-like path terminates at $s = 10$.

The Young diagram Y_S is defined as the region bounded by this path, the vertical axis, and the horizontal line $y = g(S) = 5$. It consists of five rows—one for each gap in S —and visually encodes the additive and combinatorial structure of the set. This diagram is illustrated in Figure 1.

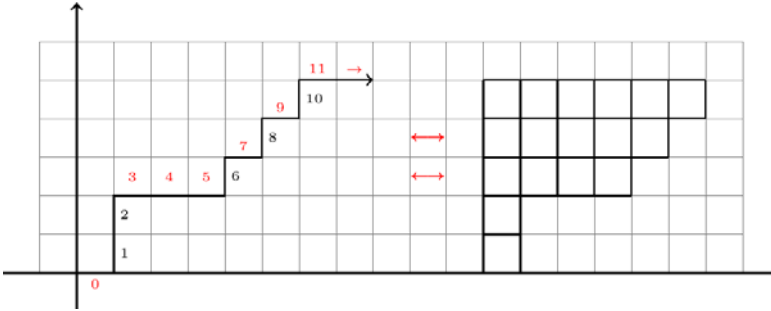


Figure 1. Young diagram corresponding to $S = \{0, 3, 4, 5, 7, 9, 11, \rightarrow\}$.

We now consider the rook polynomial associated with the board defined by the Young diagram Y_S . Denoted $R_{Y_S}(x)$, this polynomial encodes the number of ways to place nonattacking rooks on the board. For this example, the rook polynomial is given by:

$$R_{Y_S}(x) = 1 + 4x + 55x^2 + 65x^3 + 16x^4.$$

One of the remarkable properties of rook polynomials is their invariance under geometric transformations. In this case, the polynomial remains unchanged under rotations of the board by 90° , 180° , or 270° , in either clockwise or counterclockwise direction. Additionally, it is also invariant under reflections across both the horizontal and vertical axes.

These symmetries emphasize the underlying combinatorial regularity of rook placements and highlight the utility of rook polynomials in capturing the essential features of a board's structure, regardless of orientation.

Theorem 2.2 ((Riordan, 1958), Chapter 7) Let $R_{p,q}(x)$, denote the rook polynomial of a rectangular board with dimensions $p \times q$. Then $R_{p,q}(x)$ is given by the formula:

$$R_{p,q}(x) = \sum_{k=0}^{\min(p,q)} \binom{p}{k} \binom{q}{k} k! x^k.$$

This expression counts the number of ways to place k nonattacking rooks on a full $p \times q$ board, for each $k \leq \min(p, q)$, and encodes this data in a generating function.

Remark 2.3 In the case where $p = q = 0$, the board is empty, containing no cells. By convention, we define the rook polynomial $R_{0,0}(x) = 1$, which corresponds to the unique configuration in which zero rooks are placed on an empty board. This definition preserves consistency with the combinatorial interpretation of rook polynomials as counting functions, even in the degenerate case.

Example 2.4 Consider a rectangular board with 5 rows and 2 columns (see Figure 2). According to Theorem 2.2, the rook polynomial for a 5×2 board is calculated as:

$$R_{5,2}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{5}{k} \binom{2}{k} k! x^k.$$

We compute each term in the sum:

- For $k = 0$: $\binom{5}{0} \binom{2}{0} 0! = 1$
- For $k = 1$: $\binom{5}{1} \binom{2}{1} 1! = 10$
- For $k = 2$: $\binom{5}{2} \binom{2}{2} 2! = 20$

Thus, the rook polynomial is:

$$R_{5,2}(x) = 1 + 10x + 20x^2.$$

This polynomial encodes the number of ways to place k non-attacking rooks on the board, for $k = 0, 1, 2$. For instance:

- There is exactly 1 way to place zero rooks (the empty configuration),
- 10 ways to place a single rook,
- 20 valid arrangements to place two non-attacking rooks.

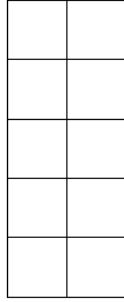


Figure 2. A rectangular board of size 5×2 .

For more complex or irregular boards, methods such as block decomposition and cell decomposition are useful in simplifying the computation of rook polynomials. In this study, we employ the block decomposition technique, particularly when analyzing boards derived from numerical sets and their associated Young diagrams.

Definition 2.5 Let B be a board represented as a matrix over the field $\mathbb{F}_2$. A subboard H of B is determined by two injective mappings:

- ω_1 : from the row indices of H to the row indices of B ,
- ω_2 : from the column indices of H to the column indices of B .

Each entry of H is defined in terms of the entries of B as follows:

$$h_{i,j} = b_{\omega_1(i), \omega_2(j)}.$$

The subboard H is said to cover row i of B if $i \in \text{Im}(\omega_1)$, and to cover column j of B if $j \in \text{Im}(\omega_2)$ (Mitchell, 2004)

Example 2.6 Let us consider the board B , represented as a 4×4 binary matrix over $\mathbb{F}_2$:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

We aim to construct a subboard H of B , as defined in Definition 2.5, by selecting specific rows and columns through injective mappings. Suppose we choose rows 2 and 4, and columns 1 and 3 of B . Define the mappings as follows:

$$\omega_1(1)=2, \omega_1(2)=4, \text{ and } \omega_2(1)=1, \omega_2(2)=3.$$

According to the rule $h_{i,j} = b_{\omega_1(i), \omega_2(j)}$, the entries of the subboard H are computed from the corresponding entries of B . Thus, the resulting 2×2 subboard is:

$$H = \begin{bmatrix} b_{2,1} & b_{2,3} \\ b_{4,1} & b_{4,3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Let us verify each entry of H based on the mappings:

- $h_{1,1} = b_{\omega_1(1), \omega_2(1)} = b_{2,1} = 0$
- $h_{1,2} = b_{\omega_1(1), \omega_2(2)} = b_{2,3} = 0$
- $h_{2,1} = b_{\omega_1(2), \omega_2(1)} = b_{4,1} = 0$
- $h_{2,2} = b_{\omega_1(2), \omega_2(2)} = b_{4,3} = 0$

Hence, the subboard is entirely filled with zeros:

$$H = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

This example clearly illustrates how a subboard is constructed through injective row and column selections. Each entry of the

subboard is directly inherited from the corresponding position in the original board B , consistent with the formulation provided in Definition 2.5.

Moreover, this example demonstrates the process of extracting a structured submatrix (or subboard) from a matrix defined over $\mathbb{F}_2$. This technique will prove particularly valuable in subsequent theorems, where it plays a central role in analyzing rook placements and performing board transformations.

Definition 2.7 A subboard $H \subseteq B$ is called a block if it satisfies the following conditions:

- If H includes two distinct rows i and i' but does not include a particular column j , then the corresponding entries in that column must be equal: $b_{i,j} = b_{i',j}$
- Similarly, if H includes two distinct columns j and j' but does not include a particular row i , then the entries in that row across those columns must be equal: $b_{i,j} = b_{i,j'}$, (Mitchell, 2004).

In essence, a block is a subboard in which uniformity is preserved across the excluded columns or rows: the entries of uncovered columns must be identical across all rows in the block, and likewise, the entries of uncovered rows must be identical across all columns in the block. This condition ensures a form of local structural consistency or symmetry within the board B .

From a more intuitive perspective, an $s \times t$ block H can be thought of as a subboard formed by selecting s rows and t columns, such that the entries outside of H , but within its corresponding rows and columns, are constant. Notably, every individual cell of B is trivially considered a 1×1 block.

Definition 2.8. Let B be a $p \times q$ board, and let H be an $s \times t$ block within B . For each integer $1 \leq j \leq \min(s, t)$, we

define the board $B_{H,j}$, referred to as the j -th inclusion board of B with respect to the block H , as follows:

- Delete j of the s rows covered by H ,
- Delete j of the t columns covered by H ,
- Remove all cells that belong to the block H .

The resulting board $B_{H,j}$ is well-defined due to the structural property of blocks: the selected rows (and likewise the selected columns) are identical outside of H . This uniformity ensures that the deletion process preserves the integrity of the remaining board (Mitchell, 2004).

Theorem 2.9 ((Mitchell, 2004), Theorem 3.5) Let B be a $p \times q$ board, and let H be an $s \times t$ block within B . If $r_j(H)$ denotes the coefficient of x^j , in the rook polynomial of H , then the rook polynomial of B can be expressed as:

$$R_B(x) = \sum_{j=0}^{\min(s,t)} r_j(H) x^j R_{B_{H,j}}(x)$$

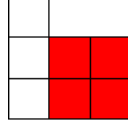
This recursive formulation decomposes the rook polynomial of a complex board B into contributions from its block substructure H and the simpler inclusion boards $B_{H,j}$. It serves as the foundation of the block decomposition method, a powerful technique for systematically computing rook polynomials on large or irregular boards.

Example 2.10 Let us compute the rook polynomial of the board B depicted in Figure 3, where a red 2×2 block H occupies the bottom-right portion of the board.



Figure 3. A board B with size 3×3 .

Step 1: Let's define block H . Let block H consist of red colored cells as follows:



We will apply Theorem 2.9 to compute $R_B(x)$ by breaking it down via inclusion boards $B_{H,j}$ and the polynomial $R_H(x)$.

Step 2: Compute the rook polynomial of H . This is a standard 2×2 full board, so:

$$R_H(x) = 1 + 4x + 2x^2.$$

Therefore,

$$r_0(H) = 1, r_1(H) = 4, r_2(H) = 2$$

Step 3: Determine inclusion boards.

$B_{H,0}$: Remove the block H , but keep all rows and columns. The remaining board includes three white cells:



This is a vertical column of 3 cells: $R_{B_{H,0}}(x) = 1 + 3x$

$B_{H,1}$: : Remove one row and one column of the block, along with all cells in H . This leaves two white cells:



Hence: $R_{B_{H,1}}(x) = 1 + 2x$.

$B_{H,2}$: Remove both rows and both columns of the block. The only remaining cell:



$$R_{B_{H,2}}(x) = 1 + x.$$

Step 4: Apply Theorem 2.9

$$R_B(x) = r_1(H)xR_{B_{H,1}}(x) + r_2(H)x^2R_{B_{H,2}}(x)$$

Substituting in the known values:

$$R_B(x) = 1 + 7x + 10x^2 + 2x^3.$$

The Stirling numbers of the second kind $S(n, k)$ count the number of ways to partition a set $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ into k nonempty, unlabeled, and unordered subsets. Unlike permutations or ordered partitions, the order of both the blocks and the elements within each block is disregarded. These numbers are fundamental in enumerative combinatorics, especially in problems involving set partitions, equivalence relations, and function mappings with restricted codomain sizes.

For all integers $n, k \geq 1$, the Stirling numbers of the second kind satisfy the recurrence relation:

$$S(n, k) = k \cdot S(n - 1, k) + S(n - 1, k - 1),$$

with initial conditions:

$$S(0, 0) = 1, S(n, 0) = 0, S(0, k) = 0 \text{ for } n, k > 0.$$

This recurrence allows for recursive computation of all $S(n, k)$ values. Table 1 below illustrates the triangular arrangement of $S(n, k)$ values for $0 \leq n, k \leq 7$, showcasing their combinatorial richness and rapid growth.

In addition to the recurrence, the Stirling numbers of the second kind admit a closed-form expression involving a summation:

$$S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (k-j)^n,$$

which is especially useful for theoretical exploration and explicit computation. This formula reveals the connection between Stirling numbers and the inclusion-exclusion principle, as well as mappings from sets of size n onto codomains of size k (Petkovšek & Pisanski, 2007).

Stirling numbers of the second kind also naturally appear in the expansion of powers of variables and exponential generating functions, further demonstrating their central role in discrete mathematics and combinatorics.

Table 1. Stirling Numbers of the Second Kind $S(n, k)$ for $0 \leq n, k \leq 7$.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0	0
2	0	1	1	0	0	0	0	0
3	0	1	3	1	0	0	0	0
4	0	1	7	6	1	0	0	0
5	0	1	15	25	10	1	0	0
6	0	1	31	90	65	15	1	0
7	0	1	63	301	350	140	21	1

3. MAIN RESULTS

In Lemma 3.2 of Sürer ve Sezgin (2025), the computation of the rook polynomial of a numerical semigroup is expressed through a specific combinatorial formula. However, in this study, we present a novel approach by representing the same numerical semigroup using a structured integer sequence. This allows us to directly relate the coefficients of the corresponding rook polynomial to the elements of the sequence. Unlike existing methods, which typically rely on algebraic or recurrence-based formulations, our sequence-based interpretation offers a more

intuitive and computationally accessible framework. This not only provides a new perspective on rook polynomial computation but also bridges the gap between numerical semigroups and sequence-driven combinatorial models, contributing a valuable alternative to the literature

Theorem 3.1 Let $n \geq 1$ be a positive integer, and consider the proper numerical semigroup

$$S = \langle 2, 2n + 1 \rangle.$$

Let Y_S be the associated Young diagram of S . The rook polynomial of Y_S is given by

$$R_{Y_S}(x) = \sum_{k=0}^n r_k^{(n)} x^k$$

where the coefficients $r_k^{(n)}$ are expressed by the formula

$$r_k^{(n)} = S(n + 1, n - k + 1).$$

Proof. Let $S = \langle 2, 2n + 1 \rangle$ be a numerical semigroup with $n \geq 1$. This semigroup possesses the following characteristics:

- Its elements consist of all even integers starting from 0 up to $2n$, together with all larger integers. Explicitly,

$$S = \{0, 2, 4, \dots, 2n, \rightarrow\}$$

- The set of gaps of S , i.e., the positive integers not contained in S , is given by

$$G(S) = \{1, 3, 5, \dots, 2n - 1\}.$$

- The Frobenius number of S , which is the largest integer not in S , is $F(S) = 2n - 1$.
- The genus of S , i.e., the number of gaps, is $g(S) = n$.

The Young diagram associated with the semigroup S can be constructed by taking a board whose rows and columns

correspond to the gaps $G(S)$, arranged in decreasing order. For this specific semigroup, the diagram forms a staircase shape with n rows and n columns.

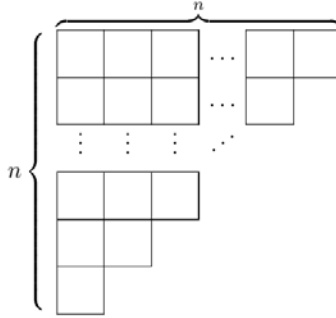


Figure 4. The Young diagram corresponding to the numerical semigroup $S = \langle 2, 2n + 1 \rangle$.

We proceed by mathematical induction on n

Base Case: $n = 1$

Let $S = \langle 2, 3 \rangle$. Then the gap set is $G(S) = \{1\}$, and the associated Young diagram Y_S is a 1×1 board as follows:



The rook polynomial of this board is:

$$R_{Y_S}(x) = 1 + 1 \cdot x$$

Here, the constant term corresponds to placing zero rooks, and the linear term corresponds to one possible placement of a rook.

Let's verify that the coefficients agree with the formula:

- For $k = 0$:

$$\begin{aligned} r_0^{(1)} &= s(2,2) = \frac{1}{(2)!} \sum_{j=0}^2 (-1)^j \binom{2}{j} (2-j)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[(-1)^0 \binom{2}{0} (2)^2 + (-1)^1 \binom{2}{1} (1)^2 + (-1)^2 \binom{2}{2} (0)^2 \right] \\ &= 1 \end{aligned}$$

- For $k = 1$

$$\begin{aligned} r_1^{(1)} &= S(2,1) = \frac{1}{(1)!} \sum_{j=0}^1 (-1)^j \binom{1}{j} (1-j)^2 \\ &= 1 \left[(-1)^0 \binom{1}{0} (1)^2 + (-1)^1 \binom{1}{1} (0)^2 \right] = 1 \end{aligned}$$

Thus, the base case holds:

$$R_{Y_S}(x) = r_0^{(1)} + r_1^{(1)}x.$$

Induction Hypothesis:

Assume the statement holds for some fixed $n \geq 1$, i.e.,

$$R_{Y_S}(x) = \sum_{k=0}^n r_k^{(n)} x^k, \text{ where } r_k^{(n)} = S(n+1, n-k+1).$$

Induction Step:

We aim to prove the formula for $n+1$. Consider the semigroup:

$$S' = \langle 2, 2(n+1) + 1 \rangle = \langle 2, 2n+3 \rangle$$

Let $Y_{S'}$ denote the Young diagram associated with S' . According to the recursive structure (as described in Theorem 2.2), the new diagram is formed by appending one row and one column to Y_S .

Let $B = Y_{S'}$ and let $H = Y_S \subseteq B$ denote the red-shaded subdiagram (see Figure 5), which is an $n \times n$ board.

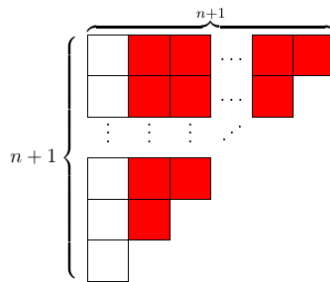


Figure 5. The board Y_S is marked in red on the board $B = Y_{S'}$.

Applying Theorem 2.9, we express the rook polynomial of B as:

$$R_B(x) = \sum_{j=0}^n r_j^{(n)} x^j \cdot [1 + (n - j + 1)x],$$

Expanding this:

$$\begin{aligned} R_B(x) &= r_0^{(n)} x^0 \cdot [1 + (n + 1)x] + r_1^{(n)} x^1 \cdot [1 + (n)x] \\ &\quad + r_2^{(n)} x^2 \cdot [1 + (n - 1)x] + \cdots + r_k^{(n)} x^k \cdot [1 + \\ &\quad (n - k + 1)x] + \cdots + r_n^{(n)} x^n \cdot [1 + (1)x]. \end{aligned}$$

Group by powers of x to obtain:

$$\begin{aligned} R_B(x) &= r_0^{(n)} x^0 + [(n + 1) \cdot r_0^{(n)} + r_1^{(n)}] \\ &\quad + [(n) \cdot r_1^{(n)} + r_2^{(n)}] x^2 \\ &\quad + \cdots + [(n - k + 2) \cdot r_{k-1}^{(n)} + r_k^{(n)}] x^k + \cdots \\ &\quad + [(2) r_{n-1}^{(n)} + r_n^{(n)}] x^n + [1] \cdot r_n^{(n)} \cdot x^{n+1}. \quad (1) \end{aligned}$$

In general, the coefficient of x^k is:

$$(n - k + 2) \cdot r_{k-1}^{(n)} + r_k^{(n)}.$$

Substituting $r_j^{(n)} = S(n + 1, n - j + 1)$, we obtain:

$$(n - k + 2) \cdot S(n + 1, n - k + 2) + S(n + 1, n - k + 1).$$

Let $t = n - k + 2$ and $m = n + 2$, then the expression becomes:

$$t \cdot S(m - 1, t) + S(m - 1, t - 1).$$

Thus:

$$r_k^{(n+1)} = S(n + 2, (n + 1) - k + 1).$$

Finally, the rook polynomial of $Y_{S'}$ is:

$$R_{Y_{S'}}(x) = R_B(x) = \sum_{k=0}^{n+1} S(n+2, (n+1) - k + 1) \cdot x^k$$

which proves the statement for $n+1$. Hence, by the principle of mathematical induction, the theorem holds for all $n \geq 1$.

Remark 3.2 The theorem remains valid in the case $n = 0$. In this situation, the numerical semigroup is $S = \mathbb{N}$, the set of all nonnegative integers. Since there are no gaps in $\mathbb{N}$, the associated Young diagram is the empty board.

The rook polynomial of the empty board is:

$$R_{Y_{\mathbb{N}}}(x) = 1,$$

which corresponds to the single configuration of placing zero rooks. This agrees with the Stirling number formula, as:

$$r_0^{(0)} = S(1,1) = 1.$$

Hence, the formula holds for $n = 0$ as well.

4. CONCLUSION AND FURTHER WORK

This study establishes a meaningful connection between numerical semigroups and classical combinatorial structures such as rook polynomials and integer sequences. In future work, this method can be extended to broader families of numerical semigroups, including the investigation of relations with other algebraic invariants and the development of algorithmic or bijective frameworks. In particular, similar correspondences may be obtained for the family of Almost Arf numerical semigroups discussed in [10], offering new insights into their combinatorial behavior

REFERENCES

- Constantin, H., Houston-Edwards, B., & Kaplan, N. (2017). Numerical sets, core partitions, and integer points in polytopes. In M. B. Nathanson (Ed.), *Combinatorial and additive number theory II* (pp. 99–127). New York, NY: Springer.
- Haglund, J. (1998). q-Rook polynomials and matrices over finite fields. *Advances in Applied Mathematics*, 20(4), 450–487. <https://doi.org/10.1006/aama.1997.0598> (DOI örnektir)
- Keith, W. J., & Nath, R. (2010). Partitions with prescribed hooksets. *arXiv preprint*. arXiv:1011.1945
- Kirfel, C., & Pellikaan, R. (1995). The minimum distance of codes in an array coming from telescopic semigroups. *IEEE Transactions on Information Theory*, 41(6), 1720–1732.
- Mitchell, A. (2004). A block decomposition algorithm for computing rook polynomials. *arXiv preprint*. arXiv:math/0407004
- Petkovšek, M., & Pisanski, T. (2007). Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers. *Pi Mu Epsilon Journal*, 12, 417–424.
- Riordan, J. (1958). *An introduction to combinatorial analysis*. New York, NY: Wiley Press.
- Rosales, J. C., & García-Sánchez, P. A. (2009). *Numerical semigroups*. New York, NY: Springer.
- Süer, M., & İlhan, S. (2015). İndirgenme boyutu üç olan Fibonacci simetrik sayısal yarıgrupların bir sınıfı. *Batman Üniversitesi Yaşam Bilimleri Dergisi*, 5(1), 78–84.

- Süer, M., & Sezgin, M. Ş. (2025). The rook polynomials of almost symmetric Arf numerical semigroups. *Communications in Algebra*. (In press).
- Süer, M., & Yeşil, M. (2021). Symmetric and pseudo-symmetric numerical semigroups via Young diagrams and their semigroup rings. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 58(6), 1367–1383.

AKADEMİK PERSPEKTİFTEN MATEMATİK

yaz
yayınları

YAZ Yayınları
M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar / AFYONKARAHİSAR
Tel : (0 531) 880 92 99
yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com