
MATEMATİK

Editör: Dr.Öğr.Üyesi NumanYALÇIN

MATEMATİK

Editör

Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN

yaz
yayınları

2024

MATEMATİK

Editör: Dr. Öğr. Üyesi Numan YALÇIN

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-6104-47-1

Ekim 2024 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

info@yazyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

Nötrosofik Esnek Kümelerde Bazı Tanım ve Uygulamalar	1
<i>Hatice TAŞBOZAN</i>	
Matematikte İlerleme.....	21
<i>Figen ÇİLİNGİR</i>	
On Fuzzy Parameterized Fuzzy Hypersoft Topological Spaces	46
<i>Adem YOLCU, Taha Yasin ÖZTÜRK</i>	
The Complex-Type k-Padovan Lengths Of The Dihedral Group D_m	67
<i>Ömür DEVECİ</i>	

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

NÖTROSOFİK ESNEK KÜMELERDE BAZI TANIM VE UYGULAMALAR

Hatice TAŞBOZAN¹

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren problemleri çözmek için önce Zadeh tarafından tanımlanan fuzzy küme teorisi verildi (Zadeh, 1979). Bulanık mantığın klasik mantığa göre daha popüler olmasının nedeni, arada yer alan değerlerin de kullanılmasıdır. Bununla birlikte, gri değerler olarak da adlandırılan bulanık değerlerin hesaplanmada kullanılıyor olması da bulanık mantığın önemini göstermekle birlikte yapay zeka mantığı ile insan aklının mantığına yakın sonuçlar vermektedir. 1979 yılında Zadeh, bulanık küme kavramında doğru ve yanlış arasında değerler alan elemanları tanımlamıştır (Zadeh, 1979). Bulanık kümede bulanık kümenin sonsuz değerli mantığının uygulandığı ve kesin kümede ise kesin kümenin iki değerli mantığının kullanıldığı farklı küme teorileri olduğu görülmektedir. Daha sonra klasik yöntemlerdeki sorunlarla baş etmede yetersiz kalındığından Molodtsov tarafından soft(esnek) küme teorisi verildi (Molodtsov, 1999). Soft küme kavramında belirsizliği çözmek için nesneler ve onların özelliklerinden faydalanılmıştır. Özellikler yardımıyla nesneler sınıflandırılmıştır. Böylece, bu kavram birçok alanda başarıyla uygulandı (Maji & ark., 2003; Aktas & Cagman, 2007; Ali & ark., 2009; Cagman & ark., 2011). 2003 yılında Maji ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, esnek kümenin bazı özellikleri tanımlanıp örneklerle ifade edildi. Ayrıca soft ikili

¹ Doç. Dr., Hatay Mustafa Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Hatay/Türkiye, htasbozan@mku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-6850-8658.

işlemler ve birleşim, kesişim işlemleri tanımlanıp, De Morgan formülleri ile birlikte esnek küme teorisi için önemli sonuçlar elde edildi (Maji & ark., 2003). 2007 yılında Aktas ve Cagman yaptıkları çalışmada esnek kümelerin temel özelliklerini verdi. Ayrıca esnek kümelerin özelliklerini bulanık kümeler ve kaba kümelerdeki ilgili kavramlar ile karşılaştırdılar. Daha sonra esnek grupların tanımını da verip, temel özelliklerini oluşturdular (Aktas & Cagman, 2007). Esnek küme ile ilgili 2009 yılında yapılan bir diğer çalışmada ise iki esnek kümenin sınırlı kesişimi, sınırlı birleşimi, sınırlı farkı gibi bazı yeni kavramlar ile birlikte bir esnek kümenin tümleyeni kavramı verildi (Ali & ark., 2009). Esnek bir küme üzerinde esnek topolojinin tanımı ile birlikte esnek topolojinin özellikleri, 2011 yılında Çağman ve arkadaşları tarafından verildi. Bunun yanında, esnek topolojik uzaylar teorisinin temellerinden bahsedildi (Cagman & ark., 2011). Sonraki yıllarda ise esnek kümeler teorisinde topolojik yapılar ve ayırma aksiyomları gibi kavramlar çalışıldı. Cebirsel olarak ise bu kavram 2013 yılında Wardowski tarafından incelendi (Wardowski, 2013). 2017 yılında Taşbozan ve arkadaşları tarafından, esnek kümeyi yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımlarla ifade eden yeni bir küme olan yakın esnek küme ve bu kümenin topolojisi verildi. Bu çalışmada esnek küme yakın küme kavramı ile birlikte özellikleriyle birleştirilerek yeni bir kavram olan yakın esnek küme kavramı tanımlandı (Tasbozan & ark., 2017).

1982 yılında Pawlak bilgi sistemlerinde eksik bilgilerin modellenmesi ve işlenmesi için kaba küme kavramını tanıttı (Pawlak, 1982). Nesnelerin, birbirlerine yakınlığının incelendiği yakın(near) küme kavramı ise özellikleri bakımından birbirine yakın, yani aynı ayırt edilebilir niteliklere sahip nesneleri bulmaya dayanan bir kavramdır. Kümelerin yakınlaştırılmasına dayanan yakın bir kümenin alt yaklaşımı ve üst yaklaşımı ile tanımlıdır. Bu operatörler denklik ilişkisine dayanmaktadır.

Yakın küme teorisi, nitelik seçimine göre incelenerek farklı ölçülebilir bilgi içeriğine sahip olur ve topluluklarda nesnelerin özelliklerine göre ayırt edilerek kolay sınıflandırılmasını sağlar. Ayrıca yakın nesnelere göre yakın özellikler, yakın kümeler ve yakınlık yaklaşım uzaylarının biçimsel bir açıklaması verildi ve niteliksel olarak birbirine yakın olan algısal nesnelerin keşfi için bir temel oluşturdu (Peters, 2007). Ayrıca, near ve soft küme tanımlarının birlikte kullanılmasıyla meydana gelen near soft küme kavramı tanımlandı. Bu kümelerin kavramları üzerine birçok araştırmacı tarafından çeşitli çalışmalar yapıldı ve hala daha yapılmaktadır. 2013 yılında Maji nütrosofik esnek kümeler kavramını tanımladı (Maji, 2013). Daha sonra Deli ve Broumi bu kavramı değiştirdiler (Deli ve Broumi, 2015). Ayrıca, bu kavram farklı birçok yazar tarafından çalışıldı (Broumi, 2013; Broumi & ark., 2014; Öztürk & ark., 2019a; Öztürk & ark., 2019b; Açıkgöz & ark., 2020).

Belirsizlikleri gidermek için tanımlanan başka bir küme olan nütrosofik küme kavramını Smarandache tanıttı, bu kavramın farklı özelliklerini verdi (Smarandache, 1999; Smarandache, 2005). Smarandache, bir durumu üyelik fonksiyonları denilen doğruluğu, yanlışlığı ve belirsizliği ile ele alınmaktadır. Nütrosofik küme kavramı bulanık mantıkta verilen özel bir kavramdır. Nütrosofik soft kümeler ise özellikleri ile verilen nesnelerin üçlü üyelik fonksiyonları ile ifade edilmektedir (Smarandache, 1999). 2013 yılında, Broumi tarafından yapılan çalışmada, genelleştirilmiş nütrosofik esnek küme adı verilen yeni bir kavram tanımlandı. Ayrıca bu kavramın bazı özelliklerini de verildikten sonra genelleştirilmiş nütrosofik esnek küme yardımı ile karar verme problemi uygulama olarak ele alındı (Broumi, 2013). Ayrıca bir çok çalışmada konunun karar verme problemlere uygulaması bulunmaktadır (Ye, 2014; Peng & ark., 2015; Wu & ark., 2016; Chen & Ye; 2017; Lu & Ye, 2017). 2014 yılında yapılan çalışmada ise hem nütrosofik kümeler teorisi hem

de kaba kümeler teorisi, belirsizliği çözebilmek için belirsiz, doğru ve yanlış bilgileri yönetmek için güçlü bir araç olarak ortaya çıkmaktadır. Bunu yanında kaba nôtrosifik kümeler adı verilen birleşik bir yapı geliştirilip, özellikleri incelendi (Broumi & ark., 2014). 2020 yılında, Açıkgöz ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada, nôtrosifik esnek ön-açık (ön-kapalı) küme kavramını ve nôtrosifik esnek topolojik uzaylarda ön ayırma aksiyomları tanımlandı. Yine bu çalışmada, nôtrosifik esnek topolojik alt uzay için yeni bir tanım ile beraber nôtrosifik esnek ön kararsız esnek ve nôtrosifik ön kararsız açık esnek fonksiyonlar tanımlandı (Açıkgöz & ark., 2020). 2019 yılında yapılan bir çalışmada, nôtrosifik esnek kümelerin bazı temel kavramları yeniden tanımlandıktan sonra nôtrosifik yumuşak nokta kavramı tanımlandı. Ayrıca, nôtrosifik esnek ayırma aksiyomları ile birlikte aralarındaki ilişkiler verildi (Öztürk & ark., 2019b). Nôtrosifik soft topolojik uzaylara ait tanımlar ile birlikte bazı özellikler örneklendirilerek verildi (Öztürk & ark., 2019a).

Bu çalışmada, nôtrosifik soft kümelerin özelliklerinin bir alt kümesi için nesnelerden elde edilen denklik sınıfları ile alt ve üst yaklaşım elde edildiğinde yeni bir çalışma olan yakın nôtrosifik soft kümelerin elde edilmesi düşünülmektedir. Ayrıca, çalışmadaki amacımız yakın yaklaşım uzaylarında nôtrosifik esnek kümeler kavramının nôtrosifik esnek kümelerle ilgili uygulamaya yönelik çözümlerinde kullanılabilmesini sağlamaktır. Bu küme yardımı ile nôtrosifik soft kümelere yakın küme özellikleri aktararak alt ve üst yaklaşımlar ile tanımlanmıştır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu kısımda, temel kavramlar olan soft küme, yakın soft küme, nütrosofik küme, nütrosofik soft kümelerin tanımları verildi.

Tanım 1: $P(U)$ kümesi U kümesinin kuvvet kümesi, boştan farklı bir B kümesi T parametreler kümesinin bir alt kümesi ve $K: B \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm olsun. $G = (K, B)$, U kümesi üzerinde bir esnek(soft) kümedir (Tasbozan & ark., 2017).

Tanım 2: O nesnelerin kümesi, T parametrelerin kümesi, $B \subseteq T$ olmak üzere $NAS = (O, K, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$ uzayı, $K: B \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm ve O' 'da bir esnek küme $\sigma = (K, B)$ olsun. NAS uzayında bulunan $\sigma = (K, B)$ kümesinin alt yaklaşımı $N_r * (\sigma) = (K_*, B)$ ve üst yaklaşımı $N_r^* (\sigma) = (K^*, B)$ şeklinde birer soft kümedir. Ayrıca, her $t \in B$ olmak üzere

$$K(\phi) = N_r * (K(\phi)) = \{g \in O: [g]_{B_r} \subseteq K(\phi)\}$$

ve

$$K^*(\phi) = N_r^*(K(\phi)) = \{g \in O: [g]_{B_r} \cap K(\phi) \neq \emptyset\}$$

olup, N_r ve N_r^* yakın yaklaşımları esnek kümeler üzerinde alt ve üst yakın yaklaşımlardır. Eğer $Bnd_{N_r}(B) = (N_r^*(\sigma) - N_r * (\sigma)) \geq 0$ şartı sağlanıyorsa, esnek kümeye yakın esnek kümedir denir (Tasbozan & ark., 2017).

Tanım 3: O nesnelerin kümesi, K parametrelerin kümesi, $B \subseteq K$ olmak üzere $NAS = (O, K, B, \sim B_r, N_r, v_{N_r})$ uzayı, $K: B \rightarrow P(U)$ bir dönüşüm ve O' 'da bir esnek küme $\sigma = (K, B)$ olsun. $(K, B)^c$ kümesi (K, B) yakın esnek kümesinin tümleyeni olarak adlandırılır ve $K^c(t) = O - K(t), \forall t \in B$ şeklinde ifade edilir (Tasbozan & ark., 2017).

Tanım 4: $\sigma = (K, B)$, (O, B) kümesinde yakın esnek küme ve σ 'nın bütün yakın esnek alt kümelerinin ailesi τ olsun. B

özelliklerin kümesini göstermek üzere (O, τ) 'ya σ üzerinde yakın esnek topolojisi aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

i) $(\emptyset, B), (O, B) \in \tau$ olmak üzere $\forall t \in B$ için $\emptyset(t) = \emptyset$ ve $K(t) = K$.

ii) τ 'da bulunan bütün yakın esnek kümelerin kesişimi τ 'da bulunur.

iii) τ 'da bulunan bütün yakın esnek kümelerin birleşimi τ 'da bulunur.

Bu durumda, (O, τ, B) 'ye yakın esnek topolojik uzayı denir. Bu topolojik uzayının tüm elemanları yakın esnek açık kümelerden oluşmaktadır (Tasbozan & ark., 2017).

Tanım 5: O evrensel kümesi üzerinde bir S nütrosifik kümesi

$$S = \{ \langle h, (D_S(h), I_S(h), Y_S(h)) \rangle : h \in O \}$$

şeklinde. Burada $D, I, Y: O \rightarrow] - 0,1 + [$ dönüşümleri ile tanımlıdır. Burada $-0 \leq D_S(h) + I_S(h) + Y_S(h) \leq 3 +$ şeklindedir (Deli ve ark. 2015). Ayrıca $1+ = 1 + \varepsilon$ olup 1 standart kısmı ve ε standart olmayan kısmıdır. Benzer şekilde, $-0 = 0 - \varepsilon$, burada 0 standart kısmı ve ε standart olmayan kısmıdır. Felsefi açıdan bakıldığında, nütrosifik küme değerini $] - 0,1 + [$ 'den alır. Dolayısıyla teknik uygulamalar için $] - 0,1 + [$ yerine $[0,1]$ aralığını almamız gerekir, çünkü $] - 0,1 + [$ 'nin bilimsel ve mühendislik problemleri gibi gerçek uygulamalarda uygulanması zor olacaktır (Deli & ark., 2015).

Tanım 6: O evrensel küme ve T , O nun parametrelerinin kümesi ve $P(O)$, O nun tüm nütrosifik kümelerini göstermek üzere O üzerinde bir $(\tilde{K}, T)$ nütrosifik esnek kümesi $\tilde{K}: T \rightarrow P(O)$ dönüşümü ile tanımlıdır. Diğer bir deyişle nütrosifik esnek küme $P(O)$ 'nun bazı elemanlarının parametrelenmiş ailesi olup

$$(\tilde{K}, T) = \{ (t, \langle h, (D_{\tilde{K}(t)}(h), I_{\tilde{K}(t)}(h), Y_{\tilde{K}(t)}(h)) \rangle : h \in O, t \in T) \}$$

şeklinde tanımlıdır. $D_{\tilde{K}(t)}, I_{\tilde{K}(t)}, Y_{\tilde{K}(t)}$ fonksiyonları sırasıyla $\tilde{K}(e)$ 'nin doğru üyelik, belirsiz üyelik ve yanlış üyelik fonksiyonlarıdır. $D + I + Y$ supremumları 1 olduğundan

$$0 \leq D_{\tilde{K}(t)}(h), I_{\tilde{K}(t)}(h), Y_{\tilde{K}(t)}(h) \leq 3$$

olur (Yolcu & ark., 2023).

3. ARAŞTIRMA VE BULGULAR

Bu bölümde, yakın yaklaşım uzaylarında nôtrosifik soft küme denilen yakın nôtrosifik soft küme tanımlandı. Ayrıca, bu yakın nôtrosifik soft küme kavramı için temel matematikte büyük öneme sahip olan tümleyen, kesişim, birleşim, fark kavramları tanımlandı.

Tanım 7: O nesnelerin boştan farklı kümesi $X \subseteq O$, T , U 'nun parametrelerinin kümesi ve $B \subseteq T$ ve R , U üzerinde bir denklik bağıntısı olsun.

$$(\tilde{K}, B) = \{(t, < h, (D_{\tilde{K}(t)}(h), I_{\tilde{K}(t)}(h), Y_{\tilde{K}(t)}(h)) >) = (t, < a, \gamma_{\tilde{K}(t)}(h) >): \forall h \in O, \forall t \in T\}$$

nôtrosifik esnek kümesi sırasıyla $\tilde{K}(t)$ 'nin doğru üyelik $D_{\tilde{K}(t)}$, belirsiz üyelik $I_{\tilde{K}(t)}$ ve yanlış üyelik $Y_{\tilde{K}(t)}$ fonksiyonları ile

$$(D_{\tilde{K}(t)}(h), I_{\tilde{K}(t)}(h), Y_{\tilde{K}(t)}(h)) = \gamma_{\tilde{K}(t)}(h)$$

şeklindeir. Üyelik fonksiyonlarının alt ve üst yaklaşımları

$$(D_{*\tilde{K}(t)}(h), I_{*\tilde{K}(t)}(h), Y_{*\tilde{K}(t)}(h)) = \gamma_{*\tilde{K}(t)}(h),$$

$$(D^*_{\tilde{K}(t)}(h), I^*_{\tilde{K}(t)}(h), Y^*_{\tilde{K}(t)}(h)) = \gamma^*_{\tilde{K}(t)}(h)$$

olmak üzere

$$D_{*\tilde{K}(t)}(h) = \{ \cap D_{\tilde{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \subseteq X \}, \forall t \in T \}$$

$$I_{*\check{K}(t)}(h) = \{ \cap I_{\check{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \subseteq X, \forall t \in T \},$$

$$Y_{*\check{K}(t)}(h) = \{ \cap Y_{\check{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \subseteq X, \forall t \in T \}$$

ve

$$D^*_{\check{K}(t)}(h) = \{ \cup D_{\check{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \cap X \neq \emptyset, \forall t \in T \},$$

$$I^*_{\check{K}(t)}(h) = \{ \cup I_{\check{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \cap X \neq \emptyset, \forall t \in T \},$$

$$Y^*_{\check{K}(t)}(h) = \{ \cup Y_{\check{K}(t)}(h): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \cap X \neq \emptyset, \forall t \in T \}$$

tanımlanır.

$(O, \check{K}, B, \sim B_r, N_r, \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayında $(\check{K}, B)$ nütrosifik esnek kümesinin boştan farklı bir $X \subseteq O$ kümesi için alt yaklaşımı;

$$N_r * ((\check{K}, B))(X)$$

$$= \{ (t, < h, \gamma_{*\check{K}(t)}(h) >): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \subseteq X, \forall t \in T \}$$

ve üst yaklaşımı

$$N_r^* ((\check{K}, B))(X)$$

$$= \{ (t, < h, \gamma^*_{\check{K}(t)}(h) >): \forall h \in X \text{ için } [h]_t \cap X \neq \emptyset, \forall t \in B \}$$

olup,

$$Bnd_{N_r} ((\check{K}, B))(X) = (N_r^* ((\check{K}, B))(X) - N_r * ((\check{K}, B))(X)) \geq 0$$

şartı sağlanıyorsa, nütrosifik esnek kümeye yakın nütrosifik esnek kümedir denir.

$$N((\check{K}, B)) = (N_r * ((\check{K}, B)), N_r^* ((\check{K}, B)))$$

ile gösterilir.

Örnek 1: $O = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ nesnelerin ve $B \subseteq T = \{t_1, t_2\}$ özelliklerin kümelerini göstermek üzere $B = \{t_1\}$ olsun.

$$(\check{K}, B) = \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_5, (0.4, 0.6, 0.2) >, < h_2, (0.1, 0.3, 0.7) >) \}$$

nötrosofik esnek kümesi verilsin. O üzerinde bir denklik bağıntısı R , O 'nun T özelliklerine göre verilen Tablo 3 ile elde edilsin.

Tablo 1. O 'nun E Özelliklerine Göre Verilen Denklik Bağıntısı

R	h_1	h_2	h_3	h_4	h_5	h_6
t_1	1	2	2	1	3	2
t_2	2	3	3	2	4	3

$$[h_1]_{t_1} = \{h_1, h_4\}, [h_2]_{t_1} = \{h_2, h_3, h_6\}, [h_5]_{t_1} = \{h_5\}$$

denklek sınıfları O 'nun R denklik bağıntısı ile elde edilen denklik sınıflarıdır. Şimdi bir $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ kümesi için $N\left((\check{K}, B)\right)(X)$ yakın nötrosofik esnek kümesini bulalım.

Yakın nötrosofik esnek kümenin alt yaklaşımı

$$N_r * \left((\check{K}, B)\right)(X) = \left\{ \cap (t, < h, \gamma_{*\check{K}(t)}(h) >): \forall h \in X \text{ ve } [h]_t \subseteq X, \forall t \in B \right\}$$

şeklinde olduğundan,

$$[h]_{B_r} \subseteq X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$$

şartını sağlayan denklik sınıfı $[h_1]_{t_1} = \{h_1, h_4\} \subseteq X$ şeklindedir.

$$(D_{*\check{K}(t)}(h_1), I_{*\check{K}(t)}(h_1), Y_{*\check{K}(t)}(h_1)) = \gamma_{*\check{K}(t)}(h_1) = (0.2, 0.6, 0.7)$$

$$(D_{*\check{K}(t)}(h_4), I_{*\check{K}(t)}(h_4), Y_{*\check{K}(t)}(h_4)) = \gamma_{*\check{K}(t)}(h_4) = (0.2, 0.6, 0.7)$$

dir. Dolayısıyla

$$N_r * \left((\check{K}, B)\right)(X)$$

$$= \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >)\}$$

olur. Yakın nôtrosifik esnek kümenin üst yaklaşımı

$$N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X)$$

$$= \left\{ \left(t, < h, \gamma_{\check{K}(t)}^*(h) > \right) : \forall h \in X \text{ için } [h]_t \cap X \neq \emptyset, \forall t \in B \right\}$$

şeklinde olduğundan, $\forall h \in X$ ve $[h]_t \cap X \neq \emptyset$ şartını sağlayan denklik sınıfları

$$[h_1]_{t_1} = \{h_1, h_4\}, [h_2]_{t_1} = \{h_2, h_3, h_6\}$$

şeklindedir.

$$\left(D_{\check{K}(t)}^*(h_1), I_{K(t)}^*(h_1), Y_{\check{K}(t)}^*(h_1) \right) = \gamma_{\check{K}(t)}^*(h_1) = (0.2, 0.6, 0.7),$$

$$\left(D_{\check{K}(t)}^*(h_4), I_{K(t)}^*(h_4), Y_{\check{K}(t)}^*(h_4) \right) = \gamma_{\check{K}(t)}^*(h_4) = (0.2, 0.6, 0.7),$$

$$\left(D_{\check{K}(t)}^*(h_2), I_{K(t)}^*(h_2), Y_{\check{K}(t)}^*(h_2) \right) = \gamma_{\check{K}(t)}^*(h_2) = (0.1, 0.3, 0.7),$$

$$\left(D_{\check{K}(t)}^*(h_3), I_{K(t)}^*(h_3), Y_{\check{K}(t)}^*(h_3) \right) = \gamma_{\check{K}(t)}^*(h_3) = (0.1, 0.3, 0.7),$$

$$\left(D_{\check{K}(t)}^*(h_6), I_{K(t)}^*(h_6), Y_{\check{K}(t)}^*(h_6) \right) = \gamma_{\check{K}(t)}^*(h_6) = (0.1, 0.3, 0.7)$$

olarak bulunur. Dolayısıyla

$$N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X)$$

$$= \{(t_1, < h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >, \\ < h_2, (0.1, 0.3, 0.7) >, < h_3, (0.1, 0.3, 0.7) >, \\ < h_6, (0.1, 0.3, 0.7) >)\}$$

şeklindedir. Buradan

$$Bnd_{N_r} \left((\check{K}, B) \right) (X) = \left(N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) - N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right) \geq 0$$

şartı sağlanır. O halde

$$N \left((\check{K}, B) \right) (X) = \left(N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right)$$

kümesi yakın nôtrosifik esnek kümedir.

Tanım 8: O üzerinde bir yakın nötrosifik esnek küme

$$N(\check{K}, B)(X) = \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right)$$

olsun. $X \subseteq O$ kümesi ve $B \subseteq T$ özelliklerin kümesi verilsin.

$N(\check{K}, B)$ 'nin tümleyeni

$$N(K^\sim, B)^c = (N_r * (K^\sim, B)^c(X), N_r^* (K^\sim, B)^c(X))$$

ile gösterilir.

$$N_r * (K^\sim, B)^c = \{ (t, < h, (Y_{N_r * \check{K}(t)}(h), 1 - I_{N_r * \check{K}(t)}(h), D_{N_r * \check{K}(t)}(h)) > : h \in X, t \in B \},$$

$$N_r^* (K^\sim, B)^c = \{ (t, < h, (D_{N_r^* \check{K}(t)}(h), 1 - I_{N_r^* \check{K}(t)}(h), Y_{N_r^* \check{K}(t)}(h)) > : h \in X, t \in B \}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 9: O üzerinde iki yakın nötrosifik esnek küme $N(\check{K}, B)$ ve $N(\check{L}, B)$ olsun. O kümesi ve $B \subseteq T$ özelliklerin kümesi verilsin.

i) Eğer $N_r * \left((\check{K}, B) \right) \subseteq N_r * \left((\check{L}, B) \right)$ ise $N(\check{K}, B)$ 'ye $N(\check{L}, B)$ 'nin yakın nötrosifik esnek alt kümesi denir ve $N(\check{K}, B) \subseteq N(\check{L}, B)$ ile gösterilir.

ii) Eğer $N(\check{K}, B) \subseteq N(\check{L}, B)$ ve $N(\check{L}, B) \subseteq N(\check{K}, B)$ sağlanıyorsa $N(\check{K}, B), N(\check{L}, B)$ yakın nötrosifik esnek kümeleri eşittir denir.

Tanım 10: O üzerinde iki yakın nötrosifik esnek küme $N(\check{K}, B)$ ve $N(\check{L}, B)$ olsun. $X \subseteq O$ kümesi ve $B \subseteq T$ özelliklerin kümesi verilsin.

$$N(\check{K}, B)(X) = \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right),$$

$$N(\check{L}, B)(X) = \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right),$$

$$\left(D_{\check{M}(t)}(h), I_{\check{M}(t)}(h), Y_{\check{M}(t)}(h) \right) = \gamma_{\check{M}(t)}(h)$$

olmak üzere, $N(\check{K}, B) \cup N(\check{L}, B) = N(\check{M}, B)$ yakın nötrosofik esnek kümelerinin birleşim kümesi

$$\begin{aligned} N(\check{M}, B) &= \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right) \\ &\quad \cup \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right) \\ &= \left(\left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cup N_r * \left((\check{L}, B) \right) \right), \left(N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cup N_r^* \left((\check{L}, B) \right) \right) \right) (X) \\ &= \{ (t, < h, \gamma_{*\check{M}(t)}(h) >), (t, < h, \gamma_{*\check{M}(t)}^*(h) >) : h \in X, t \in B \} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{aligned} N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cup N_r * \left((\check{L}, B) \right) &= N_r * \left((\check{M}, B) \right), \\ D_{N_r * \check{M}(t)}(h) &= \max\{D_{N_r * \check{K}(t)}(h), D_{N_r * \check{L}(t)}(h)\}, \\ I_{N_r * \check{M}(t)}(h) &= \max\{I_{N_r * \check{K}(t)}(h), I_{N_r * \check{L}(t)}(h)\}, \\ Y_{N_r * \check{M}(t)}(h) &= \min\{Y_{N_r * \check{K}(t)}(h), Y_{N_r * \check{L}(t)}(h)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \cup N_r^* \left((\check{L}, B) \right) &= N_r^* \left((\check{M}, B) \right), \\ D_{N_r^* \check{M}(t)}(h) &= \max\{D_{N_r^* \check{K}(t)}(h), D_{N_r^* \check{L}(t)}(h)\}, \\ I_{N_r^* \check{M}(t)}(h) &= \max\{I_{N_r^* \check{K}(t)}(h), I_{N_r^* \check{L}(t)}(h)\}, \\ Y_{N_r^* \check{M}(t)}(h) &= \min\{Y_{N_r^* \check{K}(t)}(h), Y_{N_r^* \check{L}(t)}(h)\} \end{aligned}$$

ile tanımlıdır.

Tanım 11: O üzerinde iki yakın nötrosofik esnek küme $N(\check{K}, B)$ ve $N(\check{L}, B)$ olsun. $X \subseteq O$ kümesi ve $B \subseteq T$ özelliklerin kümesi verilsin.

$$N(\check{K}, B)(X) = \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right),$$

$$N(\check{L}, B)(X) = \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right),$$

$$\left(D_{\check{M}(t)}(h), I_{\check{M}(t)}(h), Y_{\check{M}(t)}(h) \right) = \gamma_{\check{M}(t)}(h)$$

olmak üzere, $N(\check{K}, B) \cap N(\check{L}, B) = N(\check{M}, B)$ yakın nütrosifik esnek kümelerinin kesişim kümesi:

$$\begin{aligned} N(\check{M}, B) &= \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right) \\ &\quad \cap \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cap N_r * \left((\check{L}, B) \right) \right), \left(N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \cap N_r^* \left((\check{L}, B) \right) \right) \right) (X) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \{ ((t, < h, \gamma_{\check{M}(t)}(h) >), (t, < h, \gamma_{\check{M}(t)}^*(h) >)) : h \in X, t \\ &\quad \in B \} \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada

$$N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cap N_r * \left((\check{L}, B) \right) = N_r * \left((\check{M}, B) \right),$$

$$D_{N_r * \check{M}(t)}(h) = \min\{D_{N_r * \check{K}(t)}(h), D_{N_r * \check{L}(t)}(h)\},$$

$$I_{N_r * \check{M}(t)}(h) = \min\{I_{N_r * \check{K}(t)}(h), I_{N_r * \check{L}(t)}(h)\},$$

$$Y_{N_r * \check{M}(t)}(h) = \max\{Y_{N_r * \check{K}(t)}(h), Y_{N_r * \check{L}(t)}(h)\}$$

ve

$$N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \cap N_r^* \left((\check{L}, B) \right) = N_r^* \left((\check{M}, B) \right),$$

$$D_{N_r^* \check{M}(t)}(h) = \min\{D_{N_r^* \check{K}(t)}(h), D_{N_r^* \check{L}(t)}(h)\},$$

$$I_{N_r^* \check{M}(t)}(h) = \min\{I_{N_r^* \check{K}(t)}(h), I_{N_r^* \check{L}(t)}(h)\},$$

$$Y_{N_r * \tilde{M}(t)}(h) = \max\{Y_{N_r * \tilde{K}(t)}(h), Y_{N_r * \tilde{L}(t)}(h)\}$$

ile tanımlıdır.

Örnek 2: Örnek 1 ‘de

$$O = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$$

nesnelerin ve $\{t_1\} = B \subseteq T = \{t_1, t_2\}$ özelliklerin kümesi olsun
ve

$$(\tilde{K}, B) = \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_5, (0.4, 0.6, 0.2) >, < h_2, (0.1, 0.3, 0.7) >)\}$$

nötrosofik esnek kümesi verilsin.

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ kümesi için $N((\tilde{K}, B))(X)$ yakın nötrosofik esnek kümesi;

$$N_r * ((\tilde{K}, B))(X) = \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >)\}$$

ve

$$N_r^* ((\tilde{K}, B))(X) = \{(t_1, < h_1, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.6, 0.7) >, < h_2, (0.1, 0.3, 0.7) >, < h_3, (0.1, 0.3, 0.7) >, < h_6, (0.1, 0.3, 0.7) >)\}$$

olmak üzere

$$N((\tilde{K}, B))(X) = (N_r * ((\tilde{K}, B))(X), N_r^* ((\tilde{K}, B))(X))$$

ile tanımlıdır.

Benzer şekilde

$$(\tilde{L}, B) = \{(t_1, < (h_1, (0.3, 0.5, 0.6) >, < h_4, (0.6, 0.5, 0.3) >)\}$$

nötrosofik esnek kümesi verilsin.

$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ kümesi için $N((\tilde{L}, B))(X)$ yakın nötrosofik esnek kümesi;

$$N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X) = \{(t_1, < (h_1, (0.3, 0.5, 0.6) >, < h_4, (0.6, 0.5, 0.3) >) \}$$

ve

$$N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) = \{(t_1, < h_1, (0.3, 0.5, 0.6) >, < h_4, (0.6, 0.5, 0.3) >) \}$$

olmak üzere

$$N \left((\check{L}, B) \right) (X) = \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right)$$

ile tanımlıdır.

$N \left((\check{K}, B) \right) (X)$ ve $N \left((\check{L}, B) \right) (X)$ kümelerinin birleşimi:

$$\begin{aligned} N_r * (\check{M}, B) &= N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cup N_r * \left((\check{L}, B) \right) \\ &= \{(t_1, < (h_1, (0.3, 0.6, 0.6) >, < h_4, (0.6, 0.6, 0.3) >) \} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_r^* \left((\check{M}, B) \right) &= N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \cup N_r^* \left((\check{L}, B) \right) \\ &= \{(t_1, < h_1, (0.3, 0.6, 0.6) >, < h_4, (0.6, 0.6, 0.3) >) \} \end{aligned}$$

olup

$$N(\check{M}, B) = \left(N_r * (\check{M}, B), N_r^* \left((\check{M}, B) \right) \right)$$

şeklindedir.

$N \left((\check{K}, B) \right) (X)$ ve $N \left((\check{L}, B) \right) (X)$ kümelerinin kesişimi ise

$$\begin{aligned} N_r * (\check{M}, B) &= N_r * \left((\check{K}, B) \right) \cap N_r * \left((\check{L}, B) \right) \\ &= \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.5, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.5, 0.7) >) \} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_r^* \left((\check{M}, B) \right) &= N_r^* \left((\check{K}, B) \right) \cap N_r^* \left((\check{L}, B) \right) \\ &= \{(t_1, < h_1, (0.2, 0.5, 0.7) >, < h_4, (0.2, 0.5, 0.7) >) \} \end{aligned}$$

olup

$$N(\tilde{M}, B) = (N_r * (\tilde{M}, B), N_r * ((\tilde{M}, B)))$$

şeklindedir.

Tanım 12: O üzerinde bir yakın nötrosifik esnek küme $N(K, B)$ olmak üzere O üzerinde tüm nötrosifik esnek kümelerin ailesi $NSS(O, B)$ ve $\tau \subseteq NSS(O, B)$. $X \subseteq O$ kümesi ve $B \subseteq T$ özelliklerin kümesini göstermek üzere τ , O üzerinde bir nötrosifik esnek topoloji olup aşağıdaki şartları sağlamaktadır.

i) $N(\emptyset, B), N(O, B) \in \tau$ olmak üzere $\forall t \in B$ için $\emptyset(t) = \emptyset$ ve $K(t) = K$.

ii) τ 'da bulunan bütün yakın nötrosifik esnek kümelerin kesişimi τ 'da bulunur.

iii) τ 'da bulunan bütün yakın nötrosifik esnek kümelerin birleşimi τ 'da bulunur.

Bu durumda, $N(O, \tau, B)$ nötrosifik esnek topolojik uzayı denir. Bu topolojik uzayının tüm elemanları yakın nötrosifik esnek açık kümelerden oluşmaktadır. Nötrosifik esnek açık kümelerin tümleyenine nötrosifik esnek kapalı kümeler denir.

Örnek 3: $O = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$ nesnelerin ve $B \subseteq T = \{t_1, t_2\}$ özelliklerin kümelerini göstermek üzere $B = \{t_1\}$ olsun ve

$$(\tilde{K}, B) = \{(t_1, < (h_1, (0.2, 0.5, 0.7) >, < h_2, (0.2, 0.5, 0.7) >, < h_3, (0.4, 0.6, 0.6) >, < h_4, (0.4, 0.6, 0.2) >)\}$$

nötrosifik esnek kümesi verilsin. O üzerinde bir denklik bağıntısı R olsun. R 'nin denklik sınıfları

$$[h_1]_{t_1} = \{h_1, h_2\}, [h_3]_{t_1} = \{h_3\}, [h_4]_{t_1} = \{h_4\}$$

şeklindedir. Bir $X = \{h_1, h_2, h_3\}$ kümesi için $N((\tilde{K}, B))(X)$ yakın nötrosifik esnek kümesi;

$$N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X) = \{ (t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7)) >, < h_2, (0.2, 0.5, 0.7)) >, < h_3, (0.4, 0.6, 0.6)) > \}$$

ve

$$N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) = \{ (t_1, < (h_1, (0.2, 0.6, 0.7)) >, < h_2, (0.2, 0.5, 0.7)) >, < h_3, (0.4, 0.6, 0.6)) > \}$$

olmak üzere

$$N \left((\check{K}, B) \right) (X) = \left(N_r * \left((\check{K}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{K}, B) \right) (X) \right)$$

şeklindedir. Ayrıca $N \left((\check{L}, B) \right) (X)$ yakın nötrosifik esnek kümesi;

$$N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X) = \{ (t_1, < h_3, (0.4, 0.6, 0.6)) > \},$$

$$N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) = \{ (t_1, < h_3, (0.4, 0.6, 0.6)) > \}$$

olmak üzere

$$N \left((\check{L}, B) \right) (X) = \left(N_r * \left((\check{L}, B) \right) (X), N_r^* \left((\check{L}, B) \right) (X) \right)$$

olarak elde edilir.

$$\tau = \{ N(\emptyset, B), N(O, B), N(\check{K}, B), N(\check{L}, B) \}$$

olmak üzere τ , O üzerinde X kümesinin bir nötrosifik esnek topolojisi. τ daki kümelerin sonlu kesişimleri ve keyfi birleşimleri yine kümeye ait olduğundan $N(O, \tau, B)$ nötrosifik esnek topolojik uzaydır.

KAYNAKÇA

- Açıkgöz, A. & Esenbel, F. (2020). An approach to pre-separation axioms in neutrosophic soft topological spaces. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 69(2), 1389-1404.
- Aktas, H. & Cagman, N. (2007). Soft sets and soft groups. *Inform. Sci.*, 177, 2726-2735.
- Ali, M.I., Feng, F., Liu, X., Min, W.K. & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547-1553.
- Broumi, S. (2013). Generalized Neutrosophic Soft Set. *International Journal of Computer Science, Engineering and Information Technology*, 3, 17-30.
- Broumi, S., Smarandache F. & Dhar, M. (2014). Rough neutrosophic sets. *Infinite Study*, 88-97.
- Chen, J.Q. & Ye, J. (2017). Some single-valued neutrosophic Dombi weighted aggregation operators for multiple attribute decision-making. *Symmetry*, 9, 82.
- Çağman, N., Karataş, S. & Enginoglu, S. (2011). Soft topology. *Computers & Mathematics with Applications*, 62, 351-358.
- Deli, I. & Broumi, S. (2015). Neutrosophic soft relations and some Properties. *Ann. Fuzzy Math. Inform.*, 9, 169-182.
- Li, X. & Zhang, X. (2018). Single-valued neutrosophic hesitant fuzzy Choquet aggregation operators for multi-attribute decision making. *Symmetry*, 10, 50.
- Lu, Z. & Ye, J. (2017). Single-valued neutrosophic hybrid arithmetic and geometric aggregation operators and their decision-making method. *Information*, 8, 84.

- Maji, P.K. (2013). Neutrosophic soft set. *Ann. Fuzzy Math. Inform*, 5, 157-168.
- Maji, P.K., Biswas, R. & Roy, A.R. (2003). Soft set theory. *Computers & Mathematics with Applications*, 45, 555-562.
- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory first results. *Computers & Mathematics with Applications*, 37, 19-31.
- Ozturk, T.Y., Aras, C.G. & Bayramov, S. (2019). A new approach to operations on neutrosophic soft sets and to neutrosophic soft topological spaces. *Communication in Mathematics and Applications*, 10, 481-493.
- Ozturk, T.Y., Aras, C.G. & Bayramov, S. (2019). Separation axioms on neutrosophic soft topological spaces. *Turkish Journal of Mathematics*, 43, 498-510.
- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International journal of computer & information sciences*, 11, 341-356.
- Peng, J.J., Wang, J.Q., Wu, X.H., Wang, J. & Chen, X.H. (2015). Multi-valued neutrosophic sets and power aggregation operators with their applications in multi-criteria group decision-making problems. *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, 8, 345-363.
- Peters, J.F. (2007). Near sets: General theory about nearness of objects. *Applied Mathematical Sciences*. 1, 2609-2029.
- Smarandache, F. (1999). A Unifying Field in Logics. Neutrosophy: Neutrosophic Probability, Set and Logic Rehoboth. *American Research Press*. 1999.
- Smarandache, F. (2005). Neutrosophic set, a generalisation of the intuitionistic fuzzy sets. *Int. J. Pure Appl. Math.*, 24, 287-297.

- Tasbozan, H., Icen, I., Bagirmaz, N. & Ozcan, A.F. (2017). Soft sets and soft topology on nearness approximation spaces. *Filomat*, 31, 4117-4125.
- Tasbozan, H. (2020). Near soft bağlantılılık. *Afyon Kocatepe Üniversitesi Fen ve Mühendislik Bilimleri Dergisi*, 5, 815-818.
- Wardowski, D. (2013). On a soft mapping and its fixed points. *Fixed point theory and Applications*, 182, 1-11.
- Wu, X.H., Wang, J.Q., Peng, J.J. & Chen, X.H. (2016). Cross-entropy and prioritized aggregation operator with simplified neutrosophic sets and their application in multi-criteria decision-making problems. *J. Intell. Fuzzy Syst.*, 18, 1104–1116.
- Ye, J. (2014). A multicriteria decision-making method using aggregation operators for simplified neutrosophic sets. *Int. J. Fuzzy Syst.*, 26, 2459–2466.
- Yolcu, A., Benek, A. & Öztürk, T.Y. (2023). A new approach to neutrosophic soft rough sets. *Knowl Inf Syst.*, 65, 2043–2060.
- Zadeh, L.A. (1979). Fuzzy sets and information granularity. *Advances in fuzzy set theory and applications*, 11, 3-18.

MATEMATİKTE İLERME

Figen ÇİLİNGİR¹

1. GİRİŞ

Hangi branşta olursa olsun bilim insanı ister farkında olsun ister olmasın araştırma yaparken mutlaka matematik kullanılır. Matematik bilim midir, matematik ne işe yarar, matematikçi ne yapar? Benzer sorular hep sorulur ve sorulacaktır. Doğru soru, matematikçinin yaptığı matematik ne işe yarar? Bunun cevabı genellikle, “matematik hem çok işe yarar hem de hiçbir işe yaramaz” biçimindedir. İşte burada matematiğin ne olduğu sorusu akla gelir. Matematik, soyutlama yöntemi ile evreni anlamamıza veya keşfetmemize yarayan bir dildir. Ancak, kuralları kolay olmayan bu dili kullanarak yeni bir şeyler elde etmek zordur. Bunu başaran matematikçi elde ettiği sonucun nerede kullanıldığını çoğu zaman düşünmez ama bilir ki bir gün birinin işine yarayacaktır. Bilim tarihi bunun örnekleri ile doludur. Örneğin Lie gruplar teorisi ortaya atıldığında hiçbir anlama ifade etmezken bugünlerde fizik biriminin merkezindedir.

2. NEDEN MATEMATİK YAPILIR

Temel olarak matematik doğru düşünmeyi öğretir. Matematik yapanlar doğru düşünme yollarını öğrenirken içten bir sevinç yaşarlar. Kişi yeni matematik keşfederken, eski matematiği daha iyi özümseyip açıklamanın yeni bir yolunu bulabilir ve bunun de sevincini hissedebilir. Bu içsel bir

¹ Prof. Dr., Iğdır Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, cilingirfigen@gmail.com ORCID:0000-0001-5526-9937.

motivasyon yaratır. Bu durumda, matematik yalnızca matematikçinin kendi sevinç ve tatmini için yapılmış gibi düşünülebilirse de bu doğru değildir. Burada sosyal ortam ve matematik topluluğu son derece önemlidir. Başka matematikçilerden ilham almak, başkalarının takdirini aramak, diğer matematikçilerin problemlerini çözmelerine katkı vermek ve sosyal etkileşimde bulunmak önemli motivasyon kaynaklarıdır. Sosyal etkileşim yüz yüze görüşme ve tartışmalarla, yazışmalarla ve yazılan makalelerle gerçekleşir. Çoğu matematikçi yalnız kalmaktan hoşlanmaz ve kişisel olarak ilerleme kaydetseler bile, heyecanlarını paylaşan meslektaşları olmadığı sürece, bir konu hakkında heyecanlarını korumakta zorluk çekerler.

Jaffe ve Quinn, matematik yapma motivasyonunu teoremlere olan itibar açısından tanımlıyor. Teorem ispatı yaptıkça matematik yapma istek ve iştahı artıyor. Ancak teorem ispatı tek başına yapılan bir çabanın değil bir ekip çalışmasının ürünü olarak yapılır. Teoremlere olan itibar güçlü toplumsal vurgumuzun matematiksel ilerleme üzerinde olumsuz bir etkisi olduğu kaçınılmaz. Eğer başardığımız şey matematiğe dair insan anlayışını ilerletmekse, o zaman çok daha geniş bir faaliyet yelpazesini tanımak ve değerlendirmek çok daha iyi olur. Teoremleri ispatlamanın yolunu gören insanlar bunu bir matematik topluluğu bağlamında yapıyorlar; kendi başlarına çok nadir çalışıyorlar. Diğer matematikçilerden edindikleri matematik anlayışına, onların fikirlerine güveniyorlar. Bir teorem ispatlandıktan sonra matematik topluluğu fikirleri onları daha fazla kullanabilecek insanlara yaymak için dergileri ve sosyal ağları kullanır.

Matematikte ilerleme genellikle bir grup matematikçinin düşüncelerinin birikimi ile olur. Bu ilerleme yolunda, bir kişi tarafından ispatlanacak teoremler de olabilir. Ancak genellikle teoremler bir takımın kolektif çabaları sayesinde ispatlanma

durumdadırlar. Takımın, teoremleri ispatladıktan sonra özümseyip kullanma gibi başka bir işlevi daha vardır. Bu işlev ilerlemenin kaçınılmaz gerekliliğidir.

Takımda teorem ispatını yapabilme olasılığı yüksek olan birkaç matematikçi vardır. Topluluktaki statüleri, hiyerarşileri, hemen ve önemli ölçüde yükselir. Bu olduğunda, genellikle fikirlerin merkezi ve teoremlerin kaynağı olarak çok daha üretken hale gelirler. Neden? Öncelikle, öz saygıda büyük bir artış ve buna eşlik eden üretkenlikte bir artış olur. İkinci olarak, statüleri arttığında, insanlar fikir ağının daha merkezinde olurlar. Diğerleri onları daha ciddiye alır. Son olarak ve belki de en önemlisi, matematiksel bir atılım genellikle yeni bir düşünme biçimini temsil eder ve etkili düşünme biçimleri genellikle birden fazla durumda uygulanabilir. Jaffe ve Quinn, spekülasyon ve ispatlama olarak ayrılmış tanınmış roller sistemi öneriyor. Bu şekilde matematikte ilerleme sürdürülmektedir.

Matematikte, kesin ispatlar başka teoremlerin ispatları için kullanılır. karakterize edilir. Bu uygulama, matematiğe başka hiçbir bilimin ulaşamadığı bir netlik ve güvenilirlik getirmiştir. Matematik tartışmasız insan entelektüel faaliyetlerinin en disiplinli olanıdır. Kesin ispatlara ulaşmak için matematikçi sezgilerini kullanır. Sezgisel yaklaşım matematikçi için olmazsa olmazdır; elbette bu bir bilgi birikimi ve çok düşünmeyi gerektirir. Sezgisel yaklaşım ile bir dereceye kadar ilerleme olur yine de nihai sonuca erişmek ve sonucu kabul edilir hala getirmek için ortaya atılan teoriyi ispatlamak gerekir. Matematikçi hisseder ancak onu ifade etmekte zorlanır; başarısız birçok denemeden sonra ispatı yapabildiğinde işte şimdi doğru ifade etme zamanı gelmiştir diyerek ihtiyacı olan alsın kullansın diye kaleme almaya başlar.

Matematik ilerledikçe onu düşüncemize dahil ederiz. Düşüncemiz daha karmaşık hale geldikçe, yeni matematiksel

kavramlar ve yeni matematiksel yapılar üretiriz. Matematiğin konusu düşünme şeklimizi yansıtacak şekilde değişir. Eğer yaptığımız şey daha iyi düşünme yolları inşa etmekse, o zaman psikolojik ve sosyal boyutlar matematiksel ilerleme açısından iyi bir model için olmazsa olmazdır. Matematikçiler birkaç temel matematiksel yapıdan ve bu yapılar hakkında verilen bir dizi aksiyomdan yola çıkarlar, bu yapılar hakkında cevaplanması gereken çeşitli önemli sorular vardır ki bunlar resmi matematiksel önermeler olarak ifade edilebilir. Matematikçinin görevi aksiyomlardan önermelere veya bunların inkarlarına giden tündengelimli bir yol aramaktır. Buna matematiğin tanım-teorem-ispat(TTİ) modeli diyebiliriz. TTİ modelinin zor tarafı varsayımlarda bulunmak, sorular ortaya atmak, akıllı tahminlerde bulunmak ve muhtemelen neyin doğru olduğuyla ilgili sezgisel argümanlar üretebilmektir.

Kısacası matematiksel yapılara ilişkin bilgi iki aşamada elde edilir. Önce, sezgisel içgörüler geliştirilir, varsayımlar yapılır ve gerekçelendirmelerin spekülatif ana hatları önerilir. Sonra varsayımlar ve spekülasyonlar düzeltilir; bunlar ispatlanarak güvenilir hale getirilir. Spekülatif ve sezgisel çalışma için matematikçiler teorik matematik terimini kullanırlar. Matematikçiler ispat odaklı evreyi titiz matematik olarak isimlendirir. Matematiksel keşfin ilk aşamaları yani, bilimlerdeki teorik çalışma gibi sezgisel ve varsayımsal çalışma, gerçekliğin doğası hakkında yerleşik bilginin ötesinde spekülasyonlar içerir. Matematikte teorik kelimesinin daha eski bir kullanımı vardır; uygulamalı matematikten ziyade pür(katkısız) matematiği tanımlamak için bu terim kullanılır. Bu artık yaygın olmayan ve benimsemediğimiz geçmişten kalma bir kullanımdır. Teorik çalışma, deney veya ispat yoluyla düzeltme, iyileştirme ve doğrulama gerektirir. Bu nedenle, matematikte kesin ispatın rolünün, doğa bilimlerindeki deneyin rolüne işlevsel olarak benzediğini iddia ediyoruz. Bu tez, alışılmadık olabilir ancak

üzerinde düşünüldükten sonra en azından matematikçiler için açık olmalıdır.

İspatların iki ana sonucu vardır. Birincisi, ispatlar tıpkı laboratuvar doğrulamasının diğer bilimlerde bir kontrol sağlaması gibi, matematiksel iddiaların güvenilirliğini sağlamanın bir yolunu garantiler. İkincisi, bir ispatı gerçekleştirme eylemi, tıpkı laboratuvardaki çalışma gibi, genellikle bir yan ürün olarak, yeni içgörüler ve beklenmedik yeni veriler üretir. Matematikçiler, laboratuvar bilimlerinin fiziksel gerçekliğe sahip olduğundan daha iyi deneysel matematiksel gerçekliğe erişebilirler. Modellemenin amacı budur. Fiziksel bir fenomen, matematiksel bir modelle yaklaşık olarak belirlenir; sonra model, daha erişilebilir olduğu için tam olarak incelenir. Bu erişilebilirliğin, matematik için sosyal düzeyde de sonuçları olmuştur. Matematik, fizikten çok daha ince alt disiplinlere ayrılmıştır çünkü yöntemler konuya daha derin odaklanmayı sağlamıştır. Matematikte ispatın kullanımı işlevsel olarak deneyle paralel olsa da, ispatların deneysel matematik olarak adlandırılması gerektiği söylenemez. Bu terimin matematiksel kavramların testleri olarak sayısal hesaplamalara ve bilgisayar simülasyonlarına atıfta bulunmak için halihazırda yerleşik ve uygun bir kullanımı vardır. Aslında, bilgisayar deneylerinin sonuçları, test vakaları, karşılaştırmalar, genel sonuçlar şeklinde olmak üzere teorik diyeceğimiz bir şekilde sunulur. Sonuçlar tamamen güvenilir değildir ve gerçek ispat sağlama çabası kaçınılmaz olarak istisnalarla ve sınırlamalarla ortaya çıkar.

3. İSPAT NEDİR?

Matematik lisans öğrencileri matematik okumaya başladıklarında, yeni ve ilginç bir matematik teoremini nasıl ispatlayabileceklerini hayal etmekte zorluk çekerler. İspatın ne olduğunu tam olarak idrak edemezler. Derslere katılarak hevesli

olanlar seminerlere de katılarak, makaleler okuyarak ve diğer lisans(üstü) öğrencileriyle konuşarak, yavaş yavaş anlamaya başlarlar. Herhangi bir alanda, genel olarak bilinen ve genel olarak kabul edilen belirli teoremler ve belirli teknikler vardır. Bir makale yazıldığında, bunlara ispat olmadan atıfta bulunulur. Alandaki diğer makalelere bakarsınız ve ispat olmadan hangi gerçekleri alıntıladıklarını ve bibliyografyalarında nelere atıfta bulunduklarını görürsünüz. Bu konu üzerinde araştırma yapan diğer araştırmacılardan ispatlar hakkında bir fikir edinilir. Genel olarak bilinen şeylerin çoğu, bilinen yazılı kaynağı olmayabilecek şeylerdir. Alandaki araştırmacılar fikrin işe yaradığından emin oldukları sürece, resmi bir yazılı kaynağa ihtiyaç duymaz. Matematiksel bilgi ve anlayış, belirli bir konu hakkında düşünen araştırmacıların zihinlerine ve toplumsal yapısına yerleşmiştir. Bu bilgi, yazılı belgelerle desteklenir ancak yazılı belgeler gerçekten birincil değildir. Bu durum alandan alana oldukça değişim gösterir. Matematiğin geometrik alanlarıyla ilgilenenlerin bildiği gibi bu alanda araştırmacıların gerçekte düşünme biçimini iyi yansıtan bir makaleye rastlamak zordur. Cebirsel veya sembolik alanlarda bu bilgilere rastlamak daha olasıdır. Bilimsel olarak herhangi bir alanda, güçlü bir sosyal geçerlilik ve doğruluk standardı vardır. Cebir alanında Andrew Wiles'in, Fermat'ın son teoreminin ispatı, bunun iyi bir örneğidir. Uzmanlar ayrıntıların kontrol edilebilmesinden çok önce bu ispatın doğru olduğuna hızla inanmaya başladılar. Bu ispat, çoğu matematiksel ispata kıyasla çok daha fazla inceleme, kontrol ve doğrulama süreci geçirmiştir. Bu süreç, matematiğin organik, psikolojik ve sosyal süreçler vasıtası ile nasıl gelişip dönüştüğünü göstermeye örnek teşkil eder. Araştırmacılar matematik yaparken fikir akışı ve geçerliliğin sosyal standardı herhangi bir formal belgeden çok daha güvenilirdir. Matematikçiler genellikle ispatların formal doğruluğunu kontrol etmede çok iyi değillerdir, ancak ispatlardaki olası zayıflıkları veya kusurları tespit etmede oldukça iyidirler. İspat süreci genel olarak iyi işlemektedir. Çünkü,

birincisi matematikçilerin ispatlarına daha fazla özen göstermeleri, onları gerçekten açık ve mümkün olduğunca basit hale getirmeleri sonucunda herhangi bir zayıflık varsa bunları tespit etmeleri daha kolay olmaktadır. İkincisi, formal ispatların matematiksel çalışması eleştirilemez, ayrıca matematiksel argümanları daha açık ve daha formal hale getirmek için enerji harcayan araştırmacılar da eleştirilemez. Her ikisi de matematiğe yeni bakış açıları kazandıran faydalı aktivitelerdir.

Bilgisayarla matematik sorularını keşfetmeye epeyce çaba harcanmaktadır buna rağmen hala matematiğin son derece yavaş ve zor olduğu ve tartışmasız tüm araştırma faaliyetlerinin en disiplinlisi olduğu tartışılmaz. Bir bilgisayar programının çalışması için gereken doğruluk ve eksiksizlik standardı, matematik camiasının geçerli ispatlar standardından birkaç kat daha yüksektir. Yine de büyük bilgisayar programları, çok dikkatli bir şekilde yazılmış ve test edilmiş olsalar bile, her zaman hatalara sahip gibi görünür.

Matematik yapmak, entelektüel insan faaliyetleri içinde en çok tatmin edici olanlarından biridir. Matematik bu entelektüel tatmin boyutunda çok hızlı hareket eder. Tüm matematiksel manzaralar tek bir kariyer boyunca şaşırtıcı şekillerde değişir ve tekrar değişir.

Matematik, bilim insanının uyguladığı şekliyle diğer bilimlerden çok daha biçimsel olarak eksiksiz ve kesindir fakat içeriği bilgisayar programlarından çok daha az biçimsel olarak eksiksiz ve kesindir. Aradaki fark sadece çaba miktarıyla ilgili değildir; çabanın niteliği ile de ilgilidir. Örneğin, büyük bilgisayar programlarında, tüm tanımların tutarlı olduğundan emin olmak veya işlevler için doğru genelliğe karar vermek hantal olmayan genelliğe sahip iyi veri yapıları geliştirmek çok sayıda uyumluluk sorunu gösterebilir bunu bertaraf etmek için muazzam miktarda çaba harcanmalıdır. Büyük bir programın muhasebe bölümünden

farklı olarak çalışan kısmına harcanan enerji oranı şaşırtıcı derecede küçüktür. Genellik ve işlevsellik eklendikçe doğru tanımlar değiştiği için neredeyse kaçınılmaz olarak kontrolden çıkan uyumluluk sorunları nedeniyle, bilgisayar programlarının çoğunlukla sıfırdan yeniden yazılması gerekir. Matematiği biçimsel olarak doğru ve eksiksiz hale getirmek için buna çok benzer bir çaba sarf edilmesi gerekir. Matematikçiler boşlukları doldurabilir, hataları düzeltebilir ve daha fazla ayrıntı ve daha dikkatli bir akademik çalışma sağlayabilirler. Sistem sağlam bir şekilde desteklenebilecek güvenilir teoremler üretmede oldukça iyidir. Sadece güvenilirlik, öncelikle matematikçilerin biçimsel argümanları biçimsel olarak kontrol etmesinden değil, matematikçilerin matematiksel fikirler hakkında dikkatli ve eleştirel bir şekilde düşünmesinden gelir.

En temel düzeyde, matematiğin temelleri araştırmacının derin ve zor araştırma probleminden çok daha alt düzeyde kalır. Çoğu matematikçi, nazik kurgular olduğu bilinen temel ilkelere bağlı kalır. Örneğin, gerçek sayıların iyi bir şekilde sıralanmasının aslında hiçbir zaman inşa edilemeyeceği veya tanımlanamayacağı teoremdir. Bu nazik kurgularla yakalanmadan kurtulabileceğimize dair önemli ispatlar vardır, ancak bu onları doğru yapmaz. Küme teorisyenleri, biri tutarlıysa diğerlerinin de tutarlı olduğu birçok alternatif ve birbiriyle çelişen matematiksel evren inşa ederler. Bu durum, birinin veya diğerinin doğru seçim veya doğal seçim olduğuna dair çok az güven bırakır. Gödel'in eksiklik teoremi, tutarlı ancak yaptığımız tüm matematiğin temeli olarak hizmet edebilecek kadar güçlü bir formal sistemin olamayacağını ima eder. İnsanların aksine, bilgisayarlar formal süreçleri gerçekleştirmede çok daha etkilidir. Matematik parçalarını bilgisayarla, gerçekten biçimsel olarak doğru, biçimsel çıkarımlarla biçimselleştirme projesi üzerinde sıkı bir şekilde çalışan araştırmacılar var. Bu süreçte matematiği

basitleştirmeye ve açıklığa kavuşturmaya yardımcı olacak gelişmeler her geçen gün artmaktadır.

Çok uzun yıllar içinde, insanların biçimsel olarak tamamlanmış ve doğru matematiğin önemli parçalarını en azından açık varsayımlara dayanarak derlemelerine yardımcı olabilecek etkileşimli bilgisayar programlarına sahip olacağımızı ve bunların standart matematikçinin çalışma ortamının bir parçası olacağı beklenmektedir. Yapılan ispatlar anlaşılabilir ve uzmanlar tarafından kontrol edilebilir ispatların en önemli faaliyet olduğunu ve bunların biçimsel ispatlardan oldukça farklı olduğunun kabul edilmesi gerekir.

4. İŞ BÖLÜMÜ YAPMAK

Deneyisel branşlarda örneğin, fizikte teorisyenler ve deneyciler arasında bir iş bölümü kabul edilmektedir. Aslında bu ayrım ancak yakın zamanda bu kadar belirgin hale geldi. Yirminci yüzyılın başına kadar temelde tek bir fizikçi topluluğu vardı. Aynı insanların hem teori hakkında spekülasyon yapması hem de spekülasyonlarını laboratuvar deneyimiyle doğrulaması idealdi ve genel olarak da uygulamaydı.

Avrupa'da 1900'e gelindiğinde bir çatallanmanın meydana geldiği açıklığa kavuşmuştu. Çalışmalarının yalnızca teorik tarafına odaklanan yeterince çok fizikçi vardı ve iki ayrı topluluk tanımlanabiliyordu[H]. Bu eğilim Amerika Birleşik Devletleri'nde biraz daha yavaş ilerledi. Harvard Üniversitesi'nde kuantum teorisi alanında çalışan E. C. Kemble, 1917 tezinde deneyisel bir ek olmasına rağmen, tamamen teorik fizikte doktora yapan ilk Amerikalı olarak kabul edilir. Teorik ve deneyisel fizik topluluklarının farklılığı, bağımsızlıklarıyla karıştırılmamalıdır. Teori, deneycilerin kritik testleri belirlemesi ve verileri yorumlaması için hayati öneme sahip olduğu gibi deney de, teorisyenlerin spekülasyonlarını düzeltmesi ve yönlendirmesi

için hayati önem taşımaktadır. Teorik ve deneysel gruplar, yakın etkileşimli çiftler halinde oluşmadıkları sürece istikrarsız ve etkisizdir. Fizikteki bu işbölümünü, matematikteki mevcut durumla karşılaştırıyoruz. Aynı insanların hem matematiksel yapılar hakkında spekülasyon yapması hem de spekülasyonlarını kesin ispatlarla doğrulaması hala ideal ve genel uygulamadır. Başka bir deyişle, matematik topluluğu teorik ve kesin dallara ayrılmamıştır. Bireysel düzeyde bile teorik matematiği uygun bir ana faaliyet olarak nadiren tanırız. Matematiksel çabalarda bu şekilde bölme girişimleri olmuştur, ancak bu girişimler çoğunlukla başarısız olarak sonuçlanmıştır. Neden? Matematiğin kendisinde, fizikle analogiyi geçersiz kılan ve böyle bir ayrışmayı engelleyen bir şey mi var? Teorik matematik sonunda bir oksimoron mudur? Yoksa geçmişteki girişimlerde onları mahveden ama bugün önlenebilecek kusurlar mı vardı?

5. FİZİK İLE İLİŞKİLER

Fizikle yeni bir bağlantı, matematikte spekülasyona doğru itici gücün büyük bir kısmını sağlıyor. Son zamanlarda fizikte, sicim teorisi, konformal alan teorisi, topolojik kuantum alan teorisi ve kuantum yerçekimi gibi başlıklar altında matematiksel türde bir faaliyet patlaması yaşandı. Büyük ölçüde bu, teorik yüksek enerjili fizikçiler olarak eğitilmiş kişiler tarafından başlatıldı. Bunların en ünlüsü ve etkili olanı Edward Witten'dir. Fiziksel bir bakış açısından, bu çalışmanın çoğu henüz doğa hakkında gözlemlenebilir tahminlerin yapıldığı aşamaya gelmedi. Dahası, çalışma genellikle gerçek olayların yalnızca analoglarını göstermek için tasarlanmış oyuncak modeller ile ilgilidir. Ve gerçek dünyaya uygulanabilecek bazı kısımlar deneysel olarak erişilemez olaylarla ilgilidir. Bunlar inanılmaz enerjili parçacıklar, evrenin ölçeğinde hareket veya yeni evrenlerin yaratılması türünden olaylardır. Tahmin eksikliğinin bir sonucu

olarak, bu fizikçiler varsayımsal deneysel topluluklarından kopmuşlardır. Teorileştirmelerini kısıtlayacak ve ilham verecek ilgili fiziksel gerçeklere dair bir kaynakları yoktur. İlerleme teori ve deney arasındaki etkileşimden kaynaklandığı için, teorik bir grup uzun süre izole bir şekilde var olamaz. Aslında ana akım fizik topluluğunun çoğu, sözde gerçek dünyadan izole olmaları nedeniyle bu gelişmelere şüpheyile yaklaşmaktadır. Aslında fizikçiler izole değillerdir. Yeni bir deneysel topluluk bulmuşlardır. Bu topluluk matematikçilerden oluşmaktadır. Artık matematikçiler, inceledikleri yapılar hakkında güvenilir yeni bilgiler sağlamaktadır. Genellikle, yeni deneysel çalışmaları teşvik etmek için spekülasyonlarını matematikçilere iletirler; büyük başarılar, fiziğe değil, matematiğe dair yeni bakış açıları ile oluşur. Ortaya çıkan şey yeni bir parçacık değil, Kac-Moody cebirlerinde tepe noktası operatörlerini kullanarak canavar sporadik grubunun temsillerinin bir açıklamasıdır. Üretilen şey yeni bir fiziksel alan teorisi değil, Feynman yol integralleri veya kuantum gruplarının temsilleri kullanılarak çok katlılardaki düğümlerin ve bağlantıların polinom değişmezlerine dair yeni bir bakış açısıdır. Bu fizikçiler hala teorik fiziğin spekülatif ve sezgisel modunda çalışmaktadırlar. Birçoğunun titizlik için ne eğitimi ne de ilgisi vardır. Onlar teorik matematik yapmaktadırlar. Bazı matematik araştırmacıları daha spekülatif bir moda doğru ilerlemektedir. Teorik fizikçiler ve geleneksel matematikçilerin titiz doğrulayıcıların ortak topluluğu halinde olmaları kaçınılmazdır. Ancak bu, yeni yapıyı istikrarlı hale getirmek için gereken topluluk normlarının ve davranış standartlarının evrimi olmadan gerçekleşmiştir. Bu tür aile değerlerinin hızla geliştirilmesi ve benimsenmesi olmadan, matematik ve fizik arasındaki yeni ilişki çökebilir.

Matematik ve fizik arasındaki zengin etkileşim, bunların ayrı konular olarak tanınmasından bile öncesine dayanır. Bir anlamda ikisinin arasındaki sınırları aşan matematiksel çalışma,

genellikle matematiksel fizik olarak adlandırılır, ancak kesin bir tanımı muhtemelen imkansızdır. Özellikle son doksan yıl veya daha uzun bir süredir, D. Hilbert, F. Klein, H. Poincar'e, M. Born ve daha sonra H. Weyl, J. von Neumann, E. P. Wigner, M. Kac, A. S. Wightman, R. Jost ve R. Haag gibi kişilerin etrafında bir matematiksel fizikçiler topluluğu oluştu. Bu kişiler hem fizik hem de matematik alanında eğitim almışlardı. Bu kişiler genellikle fizikten kaynaklanan sorular üzerinde çalıştılar, ancak matematiğin geleneklerini ve değerlerini korudular. Bu topluluğun araştırmalarından elde edilen sonuçlar çeşitli zamanlarda hem matematik hem de fizik için önemli olmuştur. Gelişimler uzun vadeli ilgi çeken sonuçların birikmesiyle ilerlemiştir. Yakın tarihli örnek arasında kuantum alan teorisinin varlığı ve görelilikle uyumluluğu üzerine çalışmalar, Lieb ve Baxter'ın kafes modelleri ve ilgili transfer matrisleri üzerine çalışmaları, Schoen ve Yau'nun görelilikteki pozitif enerji teoremi ve minimal yüzeylerin geometrisiyle ilişkisi üzerine çalışmaları, Ruelle ve diğerlerinin dinamik sistemler ve türbülans üzerine çalışmaları, yerel kuantum teorisine operatör cebiri yaklaşımı ve Connes'in fiziğe olan erken ilgisi, faktörler üzerine matematiksel çalışmalarının ve daha sonra değişmeli olmayan geometrinin temellerinin ortaya çıkması yer alır. Bu topluluğun çalışmaları, akademik standartlar ve matematiğin en iyi gelenekleriyle tutarlı literatür bilgisi ile karakterize edilir. Tanımlar, iddiaların formülasyonu veya teoremlerin ispatları konusunda hiçbir belirsizlik yoktur. Bu geleneksel titiz matematiktir. Fiziğe bu kadar yakın mesafede bile matematiğin geleneksel değerleri korunmuştur. Matematiksel fizikçiler, teorik fizikçilerin engin ve zengin bir spekülasyon gövdesine erişebilirler. Ancak bu spekülasyonlar geleneksel olarak matematikçilere değil, fizikçilere yönelik olmuştur.

Teorik fizik ve matematiksel fizik oldukça farklı kültürlerle sahiptir ve aralarında sıklıkla bir gerginlik vardır.

Fizikteki teorik çalışma, gerçeklikle temas deneylere bırakılabileceğinden, doğrulama veya ispat içermek zorunda değildir. Bu nedenle fizik sosyolojisi, ispatı teorik sürecin gereksiz bir parçası olarak küçümseme eğilimindedir. Richard Feynman, matematikçileri işe yarayan ancak kesin olarak gerekçelendirilemeyen yöntemleri kullanma konusundaki isteksizlikleri konusunda kızdırmaktan zevk alırdı [F, G2]. Matematiksel ifadeleri birkaç iyi seçilmiş vakayı doğrulayarak test etmenin oldukça tatmin edici olduğunu düşünüyordu. Gelişimin içsel olarak uygun bir hızda ilerlemesi ve fizikçilerin vizyonunun kapsamı tarafından ezilmemesi gerektiği konusunda bir anlayış vardı. McShane ve matematiksel fizik topluluğunun çoğu, serbest, teorik yaklaşımı reddetti. İlgili bir gözlem, çoğu teorik fizikçinin deneysel meslektaşlarına oldukça saygılı olmasıdır. Fizikçiler matematikçileri küçümseyerek gereksiz yere zorlayıcı teorisyenler olarak düşünmek yerine entelektüel deneyciler olarak kabul etselerdi, fizik ve matematik arasındaki ilişkiler önemli ölçüde daha kolay olurdu. Fizikçilerin matematiğe karşı tipik tutumu, P. W. Anderson'ın bir kitabından bir pasajla örneklendirilebilir; "Burada teorik fizikten bahsediyoruz ve bu nedenle elbette matematiksel titizlik alakasız ve imkansızdır."² Bununla birlikte, fizik öğrencileri genellikle matematik karşıtı kavramlarla aşılınırlar ve eğer matematiksel sorulara dahil olurlarsa, sadece teorik olma eğiliminde olmazlar, aynı zamanda çalışmalarının eksik olduğunu da sıklıkla inkar ederler. Matematiksel fiziğin tamamı yukarıda açıklanan kadar açık bir şekilde matematiksel olmamıştır. Örneğin, Alman matematiksel fizikçi K. Symanzik'in çalışmaları çoğunlukla teorikti fakat matematiksel kesinlik konusunda haksız iddialarda

² Bu, Anderson tarafından Landau'ya atfedilir [A, s. 132]. Anderson devam eder, "Bu tam olarak öyle değil, ama buna çok yakın." Ancak, pasajı yanlış hatırladığı açıktır; [LL] şöyle okunur, "Teorik fizikte bu zaten yanıltıcı olduğundan, tedavide matematiksel kesinliğe dair hiçbir girişimde bulunulmamıştır,"

bulunmamaya çok dikkat ediyordu. Aslında, 1968'de matematikçi S. R. S. Varadhan ile işbirliği yaparak teorik programının önemli bir bölümünü titiz bir seviyede kurmak için ciddi bir girişimde bulundu. Birkaç yıl sonra, bu E. Nelson, Osterwalder, Schrader ve diğerleri tarafından başarıldı ve kuantum teorisi, olasılık ve istatistiksel mekanikle ilgili geniş kapsamlı sonuçları oldu. Ayrıca, bir süredir neredeyse tamamen teorik bir bakış açısıyla büyük ölçüde matematiksel soruları ele alan Benoit B. Mandelbrot ve M. Feigenbaum dan da bahsediyoruz. Popüler bir açıklama için[G] ve bu etkinlikle ilgili matematiksel rahatsızlığın bir ifadesi için de [Kr]kaynaklarına bakınız. Çoğunlukla matematiksel fiziğin ana akımı, salt teorik çalışmayı geçerli bir matematiksel stil olarak reddetmiştir. Ancak, fizikle yeni ilişkiler içinde olan matematikçilerin geleneksel matematiksel fizikçilerden farklı olduğunu açığa çıkarır.

6. BAŞARI

Varsayımların ortaya atılması, ispat içermeyen en belirgin matematiksel aktivitedir. Varsayımlar parlak olandan sıkıcıya, imkansız olandan bariz olana kadar değişir. Editörler ve hakemler tarafından değil, ilham verdikleri ilgiye göre filtrelenirler. Daha iyi olanlar, bütün alanların gelişimine ilham vermiştir. En ünlü örneklerden bazıları Riemann Hipotezi, Fermat'ın son teoremi ve Poincaré varsayımdır. Şaşırtıcı genişlik ve derinliğe sahip Hilbert problem listesi, bu yüzyılda matematiğin gelişiminde çok etkili olmuştur. Diğer örnekler arasında topolojideki Adams varsayımı, Serre'nin birkaç sorusu, Novikov varsayımı ve kuantum alan teorisi için Wightman aksiyomları sayılabilir.

Bazı varsayımlara teknik detaylar veya bir ispat önerisi eşlik eder. Örneğin, Weil varsayımları Riemann hipotezinin p - $adik$ bir analoguna bir yaklaşımı özetler. Bu programın Grothendieck ve Deligne tarafından uygulanması, modern

cebirsal geometri için büyük bir başarı örneğidir. Benzer bir başarı örneği de Fermat teoremine yaklaşmak için bir programın parçası olan Falting'in Mordell varsayımının ispatıdır. Otomorfik formları anlamak için Langlands programı bu alan için büyük bir teşvik olmuştur ve ayrıca cebirsel üç katlılıkların araştırılması için Mori'nin programı da bu alanın canlanmasına katkı sağladığı çok açıktır. Sonlu basit grupların sınıflandırılması, Gorenstein tarafından geliştirilen bir programın uygulanması için verdiği katkı çok önemlidir. Bu örnekler, formüle edildiklerinde açıkça spekülâtif olmaları veya en azından Fermat'ta olduğu gibi hızla spekülâtif olarak tanınma özelliğini paylaşırlar. Başarının birincil kredisi, ispatı bulan kişiye açıkça atanacak olmasıdır. Başka bir matematiksel çalışma türü geleneksel ve teorik arasında bir orta yoldur. "A doğruysa, X, Y ve Z gelir" veya "A ise, R, S ve T'yi varsaymak mantıklıdır" şeklinde ilerler. Bu durumda "A", örneğin Riemann hipotezi gibi önemli bir matematiksel varsayım olabilir. Bu tarzdaki çalışmaların çarpıcı bir son örneği örüntüler teorisinde görülür ve son zamanlarda Séminaire Bourbaki, Deligne ve Beilinson'un varsayımlarına dayalı olarak sayılar teorisi ve cebirsel geometri alanındaki çalışmaların evrimine adanmıştır[Fo]. Bir zamanlar en muhafazakar geleneksel matematiğin kalesi olan Bourbaki'nin şimdi varsayım piramitleri ile ilgilenmesi ilginçtir. Büyük ölçekli, hedef formüle eden çalışmaların zorunlu olarak teorik önemi artırılmaktadır. Büyük bilim çağındayız ve matematik de bir istisna değil. Örneğin, sonlu basit grupların sınıflandırılmasının 15.000 dergi sayfası kapladığı tahmin edilmektedir.

Ülkelerdeki hükümet kuruluşları matematiği işbirlikçi ve disiplinler arası çalışmaya doğru yönlendirme çabasıdadır. Ancak matematikteki büyük projelerin bir hibe, bir teknik veya bir makine etrafında merkezlenmediğini kabul etmek gerekir. Bunlar, vizyon sahibi bir teorik program tarafından çekirdekleştirilen gayri resmi topluluklar tarafından üstlenilir.

Teorik matematikle ilgili deneyimlerin çoğu yukarıda anlatılanlardan daha az olumlu olmuştur. Bu, özellikle yanlış veya spekülâtif materyal bilinen ve güvenilir olarak sunulduğunda ve failin itibarı talep edildiğinde doğrudur. Bazen bu dürüst bir hatadır, bazen de ispatı oluşturan şeyin standart dışı kavramlarının sonucudur. Düz hatalar daha az zararlıdır. Örneğin, üç manifolddaki iki disk üzerindeki temel Dehn lemması 1910'da sunulmuştur. Bir hata bulunmuştur ve ispatı yapıldığında 1957'de Papakyriakopolos tarafından önemli bir varsayım olarak kabul edilmiştir.

Zayıf ispat standartları daha fazla zorluğa neden olur. On sekizinci yüzyılda, rastgele akıl yürütme, serilerin yakınsaklığı ve fonksiyonların düzgün yakınsaklığı gibi konularla ilgili analizde bir dizi soruna yol açmıştır. Kesinlik panzehir olarak tanıtılmıştır. Büyük hasardan kaçınmak için zamanla bazı teorisyenlerin itirazlarına rağmen benimsenmiştir. Daha yakın zamanda bu yüzyılda cebirsel geometrinin İtalyan okulu büyük hasarlardan kaçınmadı ve sonra bir nesil süren parlak spekülasyondan sonra çöktü[EH, K]. 1946'da konu hala o kadar şüpheyile karşılanıyordu ki Weil bu konudaki ilgisini savunmak zorunda hissetti[W]. Cebirsel ve diferansiyel topoloji, aşırı teorik çalışmaların yapıldığı birkaç bölüm geçirdi. Dieudonné, tarihçesinde bu alanın başlangıcını Poincaré'nin 1895 tarihli Analysis Situs'una dayandırır[D]. Bu büyüleyici ve sinir bozucu makale son derece sezgiseldi. Açıkça önemli olmasına rağmen gerçek gelişimin başlaması on beş yıldan fazla sürdü. Dieudonné bu yavaş başlangıçta şaşkınlığını dile getiriyor[D, s. 36]. Poincaré çok fazla şey iddia etti, çok az şey ispatladı ve onun yöntemleri taklit edilemedi. Bu alan ilerleme katledilmeden önce çözülmesi gereken ölü bir alandı. Dieudonné, rastgele akıl yürütmenin matematiksel alanlarda çocukluk hastalığı olduğunu öne sürüyor ve şöyle diyor ". . . 1910'dan sonra. . . doğru bir ispatı oluşturan şeyin tekdüze standartları topolojide evrensel olarak kabul edildi.

.. bu standart o zamandan beri değişmeden kaldı." René Thom'un Fields madalyasını aldığı türevlenebilir manifoldlar üzerine erken dönem çalışmaları parlak ve genel olarak sağlamlandı. Tekillikler üzerine daha sonraki çalışmalar o kadar sağlam değildi. Topolojik olarak kararlı haritaların C^∞ yoğunluğu iddiası, daha sonra John Mather tarafından düzeltilen ayrıntılı ancak eksik bir taslakla desteklendi. Thom, fiziksel fenomenlerin biçimlerini açıklamak için tekilliklere dayanan felaket teorisinin kullanımını önermeye devam etti. Uygulama matematiksel olarak teorikti ve özellikle E. C. Zeeman tarafından popülerleştirilmesi fiziksel olarak tartışmalı oldu.

Dennis Sullivan'ın erken dönem çalışmaları başka bir örnek sunar. Sağlam bir başlangıçtan sonra, 1970'lerde manifoldların topolojisinin parlak ve çok beğenilen ancak teorik bir keşfine girişti. Ayrıntılar zayıftı ve bunları doldurmak için yapılan ciddi çabalar tıkandı. Sullivan'ın kendisi alanları değiştirdi ve daha titiz bir yaklaşıma geri döndü. Bu alan hala bulanık ispatlardan daha fazlasına sahip gibi görünüyor. William Thurston'ın üç manifoldu üzerindeki yapılarla ilgili geometrizeasyon teoremi sıklıkla atıfta bulunulan bir başka örnektir. Güzel ancak yetersiz ipuçlarıyla sunulan büyük bir içgörü, ispat asla tam olarak yayınlanmadı. Birçok araştırmacı için bu kurtarılmamış iddia bir ilham kaynağı olmaktan çok bir engel haline geldi. Bu örneklerde, Poincaré'de olduğu gibi, önerilen içgörüler hedefe ulaşmış gibi görünüyor. Teorik içgörülerin de kusurlu olduğu durumlar kesinlikle var. Mesele şu ki, en iyi durumlarda bile önlenebilecek hoş olmayan yan etkiler vardı. Ayrıca, Jones polinomunun [Wi] bir uzantısının sezgisel bir tanımını veren Witten'in, topoloji içinde bile uzun ve sorunlu bir geleneği sürdürdüğünü görüyoruz. Rus matematik okulunun bazı alanlarında, genellikle erken araştırma duyuruları aracılığıyla yürütülen kapsamlı teorik çalışma gelenekleri vardır. Çok sayıda olası örnekten sadece ikisinden bahsediyoruz. Birincisi, faz uzayı

değişmez toruslarla foliye edilmiş entegre edilebilir Hamilton sistemlerinin bozulma teorisiyle ilgilidir. 1954'te Kolmogorov, rezonansız frekanslara sahip torusların bir bozulmaya dayanabileceğini duyurdu ve bir argümanın taslağını verdi. Geriye dönüp bakıldığında, bu taslağın gerekli olan temel fikirlere değindiği görülebilir, ancak genellikle bir ispatın yeniden yapılandırılmasına izin vermek için yetersiz kabul edildi. Analitik durum için Arnold tarafından 1959'da ve pürüzsüz durum için Moser tarafından 1962'de tam ispatlar elde edildi. İkinci örnek, faz geçişlerinin (relativistik) kuantum alan teorisinde meydana geldiğine dair yaygın olarak tahmin edilen bir sonucu oluşturmaya çalışırken, aramızdan birinin kişisel olarak dahil olduğu bir örnektir. 1973'te saygın matematikçiler Dobrushin ve Minlos bu sonucun duyurusunu yayınladılar. İki yıl sonra Ruslardan bir ispata dair hiçbir belirti gelmeyince, Glimm, Jaffe ve Spencer sorun üzerindeki çalışmalarına devam ettiler ve sonunda iki farklı ispat sundular. Bundan birkaç yıl sonra Dobrushin ve Minlos orijinal duyurularının geri çekilmesini yayınladılar.

7. İSPAT AŞAMASINDA KARŞILAŞILAN PROBLEMLER

Bu aşamada karşılaşılan bazı problemlerde çalışmanın seyrinde kendiliğinden oluşan engelleri kabaca aşağıdaki başlıklar altında toplayabiliriz.

(1) Çok ileri götürülen teorik çalışma, titiz ispatların sağladığı geri bildirim ve düzeltmelerden yoksun olduğu için yoldan çıkar.

(2) Hangi parçaların güvenilir olduğu konusundaki belirsizlik nedeniyle daha fazla çalışma engellenir ve kafalar karışır.

(3) Enerjik teorisyenler tarafından tam itibar talep edildiğinde genellikle ölü bir alan yaratılır, daha fazla ilerlemeyi engelleyen enkazı temizlemek için çok az teşvik vardır.

(4) Öğrenciler ve genç araştırmacılar yanıltılır.

İlk problem, özellikle çalışmalarının belirsiz ve eksik olduğunu kabul etmek istemedikleri zaman, sözde matematiksel teorisyenleri sıklıkla ele geçirir. Bu olasılığın farkında olunan teorik fizikte bile, ne zaman duracağını bilmek incelikli ve zor bir beceridir. Yanlış teori oluşturma, teorisyenin güvenilirliğini zedeler ve ayrıca ikinci problemde tanımlanan mekanizma yoluyla alana zarar verebilir.

İkinci problem, literatürün belirsizliğiyle ilgilidir. Diğer bilimlerle karşılaştırıldığında, birincil matematik literatürü olağanüstü derecede güvenilirdir. Hakemli temel matematik dergilerindeki makaleler neredeyse her zaman sağlamdır ve bu istikrarlı ve verimli bir ilerlemeye izin verir. Sadece ciddi hataların küçük bir kirliliği, matematikçileri şu anda yaptıklarından daha fazla zaman ve enerjiyi yayınlanmış materyali kontrol etme yolunda harcamaya zorlar. Güvenilir bir literatürün avantajları o kadar derindir ki bunun matematiği titizliğe doğru iten birincil güç olduğundan şüphelenilir. Bir literatürün güvenilirliği belirsiz olduğunda, sorun ele alınmalıdır. Genellikle kurallar kullanılır. Örneğin, matematikçiler fizik dergilerindeki makalelerin teorik olduğunu varsayarlar. Bu makalelerin genellikle güvenilir olduğu istisnalar olsa da matematiksel fizik dergilerine yönelik bir şüpheyeye kadar uzanır. Yaygın olarak uygulanan bir diğer ölçüt, fonksiyonel integraller kullanan her şeyin spekülatif olması gerektiğidir. Bu tür kurallar, her makalenin kendi kendine değerlendirilmesine izin verme yaklaşımı gibi tatmin edici değildir. Bu son görüşün savunucuları, Witten'ın makalelerini başarılı örnekler olarak gösterirler. Ancak birkaç örnek ele alınabilir; felaket olan büyük sayılardır. Ayrıca,

Witten'in herhangi bir makalesini teorik olarak kabul etmek artık yaygın bir kuraldır. Bu, Witten'in çalışmalarını küçümser ancak ana akım matematiğin sorular ortaya çıktığında benimsediği daha güvenli, daha üzgün olmaktan iyidir yaklaşımını gösterir. Bu güvenilmezlik, birincil literatürün sıklıkla o kadar alakasız hale geldiği ve toptan terk edildiği teorik fizikte kesinlikle bir sorundur. I. M. Singer fizik literatürünü periyodik olarak silinmesi gereken bir tahtaya benzetmiştir. Fizikçiler geleneksel olarak bir problemin tarihsel geçmişinden çok daha az faydalanırlar ve literatürü araştırmaya daha az eğilimlidirler. Fizik makalelerinin atıf yarı ömrü matematiktekinden çok daha kısadır.

Ölü alan sorunu kredi ve ödüllerle ilgilidir. Matematik araştırmacıları geleneksel olarak aynı sonuçlar için iki kez kredi vermezler. Ancak bu, bir teorisyen kredi talep ettiğinde, titiz çalışanların bunu güvenilir kılmak için gereken emek yatırımını haklı çıkarmasının zor olduğu anlamına gelir. Bir teoremin ayrıntılarını X ile doldurmak ile X 'in bir varsayımını doğrulamak arasında büyük bir fark vardır. Titiz matematikçiler büyük bir iddianın gölgesinden kaçma eğilimindedir. Son olarak, son noktada çoğu başarılı teorisyenin en azından matematikte sezilerinin ve zevklerinin kaynağı olan disiplinli çalışmada sağlam bir geçmişi vardır. Böyle bir geçmişe sahip olmadan doğrudan teoremin baş döndürücü dünyasına dalmaya çalışan çoğu öğrenci başarısızdır. İki tür aktivite arasında ayrım yapamamak, öğrencilerin daha gösterişli ve daha az disiplinli yönleri taklit etmeye çalışmasına ve jargonu manipüle etmekten daha fazlasını yapamamasına yol açabilir. Matematikçiler entelektüel içeriğe odaklanma ve sosyal konuların ve topluluğun önemini ihmal etme eğilimindedir. Ancak biz matematikçiler bir topluluğuz ve genellikle teknik konularda bile doğrudan edebiyattan ziyade sosyal etkileşimlerle fikir oluştururuz. Toplumsal olarak kabul görmüş kurallar, okuduklarımızı anlamamızda hayati önem taşır.

Davranış önemlidir ve matematikçiler topluluğu uygunsuz davranışlardan kaynaklanan hasara karşı savunmasızdır.

8. KURAL KOYMA

Matematik topluluğu, spekülasyonu engelleyen katı ispat ve norm standartları geliştirdi. Bunlar, spekülasyonun daha yıkıcı sonuçlarına karşı koruma sağlayan koruyucu mekanizmalardır; dezavantajların avantajlardan daha ağır bastığı kolektif matematiksel deneyimi temsil ederler. Öte yandan spekülasyon, uygun şekilde yapılırsa son derece yararlı olabileceği deneyimlenmiştir. Belki de faydaları elde etmemizi ancak tehlikelerden kaçınmamızı sağlayacak daha bilinçli ve kontrollü bir yaklaşım ile mümkündür. Teorik fizikten gelen yeni etkilere yapıcı bir cevap bulma ihtiyacı bize hem önemli bir test vakası hem de bir fırsat sunar. Matematikçiler güvenlik önlemleri ve katı bir dürüstlikle teorik materyale daha açık olmalıdır. Önerilen güvenlik önlemleri yeni değildir, esasen varsayımlarla ilişkili geleneksel uygulamalardır. Ancak, işlevlerinin ve önemlerinin daha iyi anlaşılması gerekir ve daha geniş ve daha tekdüze bir şekilde uygulanmalıdır. Toplu olarak, öneriler reklamlarda gerçeği garanti altına almak için önlemler olarak görülebilir.

Teorik çalışma açıkça teorik ve eksik olarak kabul edilmelidir; özellikle, nihai sonucun ortaya çıkmasında pay sahibi olanların büyük bir kısmı, onu doğrulayan titiz çalışmalara ayrılmalıdır. Teorisyenler, uzun vadede çalışmalarının başarısının, sıkı bir topluluğun çalışmasına bağlı olduğunu kabul etmelidir; mümkün olduğunda onu onurlandırmalı ve beslemelidirler. Bir makalede varsayımda bulunmak her zaman kabul edilebilir olmuştur ve ara sıra tamamen teorik olan makaleler yayınlanmıştır. Temel konu, teorik materyali açıkça tanımlamaktır. Bir makalede, standart isimlendirme geçerli olmalıdır. Teorik materyalde, "varsayım" gibi bir kelime

"teorem" in yerini almalıdır, "tahmin" gibi bir kelime "göster" veya "oluştur" un yerini almalıdır ve "motivasyon" veya "destekleyici argüman" gibi ifadeler "ispat" ın yerini almalıdır. İdeal olarak, başlık ve özet "teorik", "spekülatif" veya "varsayımsal" gibi bir kelime içermelidir. Amaç, okuyuculara çalışmanın doğasını seçilen doğru kelimelerle daha doğru şekilde anlaşılır hale getirmektir. Teorik çalışma, önemini haklı çıkarmak veya diğer teorik gelişmelerdeki argümanları desteklemek için yapılır. Sözde titiz bir ispatın yapısal bir bileşeni için teorik bir makaleye atıfta bulunmak dikkatli bir şekilde ele alınmalıdır.

Araştırma duyuruları belirli sorunlar ortaya çıkarır. Bazı duyurular yazarın tamamlayıp yazdığı çalışmaların özetleridir. Bu tür duyurularda, teorem ve ispat dili uygundur. Diğerleri ayrıntılı olarak işlenmemiş argümanların sonuçlarını açıklar ve bazen köprü kurmak için yıllarca çaba gerektiren inanç sıçramaları içerir. Bu durumlarda geleneksel dil çalışmayı yanlış temsil eder ve uygun değildir; bu tür duyurular gerçekten teorik olarak tanımlanmalıdır. Yukarıdaki analiz, bu nedenle duyuruların yayınlanmasının sağlıksız hatta matematiğin dokusuna zarar verici olabileceğini ima eder. Duyuruların bir öncelik iddiası oluşturmak ve başkalarını yeni sonuçlar ve yararlı teknikler konusunda uyarmak gibi geçerli işlevleri vardır. Bu nedenle, genel olarak teorik çalışmalarda olduğu gibi, faydalı kullanımlara izin verecek ancak olası hasarı sınırlayacak yönergeler arıyoruz. Ana konu, literatüre dahil edilme gibi görünse de aslında çözüm araştırma duyuruları yayınlanmak üzere kabul edilen tam sürümlerin özetleri dışında yayınlanmamalıdır. Yayınlanmamış çalışmaların atıfları, duyurular ile tam ön baskılar arasında net bir ayrım yapmalıdır. Bu kopyalama makineleri ve elektronik ilan panoları çağında, bilgileri resmi olarak yayınlamadan yaygın olarak dağıtmak mümkündür. Geniş ilgi gören kültürler arası ön sonuçlar, Mathematical Intelligencer veya Amerikan Matematik Derneği Duyuruları gibi yayınlarda haber köşesi formatında gayri

resmi olarak tanımlanabilir. Bu nedenle, resmi yayın eksikliği en fazla küçük bir dezavantaj olmalıdır. Bu tartışmanın ayrıca resmi (hakemli) yayın ile ilan panosuna gönderme arasındaki ayrımı sürdürmenin önemini de vurguladığını gözlemliyoruz. Bu ayrımı sürdürmek, ciddi elektronik dergilerin geliştirilmesinin karşı karşıya olduğu en büyük zorluklardan biri olabilir. Bu güvenlik önlemlerine dikkatlice uyulursa, herhangi bir matematik dergisinin teorik makaleleri yayınlamayı düşünmesi makul olacaktır. Eksik ispatları olan teşvik edici makaleler (uygun kelime değişikliklerinden sonra) teorik makaleler olarak yayınlanabilir. Teorik matematik dergileri uygun olabilir. Ancak dikkatli olunması gerekir. Yazarlar, editörler ve hakemler tarafından dürüstlük ve dikkat gösterilmezse bu, yıllar boyunca acı verici ve tekrar tekrar temizlenen sorunların yeniden gündeme getirilmesine yol açarlar.

9. SONUÇ

Bazen spekülasyonlar matematikteki gelişmeyi canlandırmıştır, diğer zamanlarda ise engellemiştir. Bunun nedeni, teori ve ispatın tarafsız bir şekilde sadece farklı olmamasıdır. Özellikle, ikisi arasında dikkatli bir şekilde ayrım yapmamak hem matematik topluluğuna hem de matematik literatürüne zarar verebilir. Kişi, rastgele akıl yürütme ile ispat arasındaki ayrımları sürdürmemenin matematiksel olarak etik olmadığını söyleyebilir. Ancak, dikkatli bir şekilde uygulanırsa matematikteki spekülasyon için olumlu bir bağlam sağlaması gereken uygulamalara değindik.

KAYNAKLAR

- [A] P. W. Anderson, Concepts in solids, W. A. Benjamin, Inc, New York, 1964.
- [D] J. Dieudonn e, A history of algebraic and differential topology 1900–1960, Birkh auser, Basel, 1988.
- [EH] D. Eisenbud and J. Harris, Progress in the theory of complex algebraic curves, Bull. Amer. Math. Soc. 21 (1989), 205.
- [F] R. P. Feynman, Surely you’re joking Mr. Feynman: adventures of a curious character, W. W. Norton, New York, 1985.
- [Fo] J.-M. Fontaine, Valeurs sp eciales des fonctions L des motifs, S eminaire Bourbaki, Expos e 751, F evrier 1992, pp. 1–45.
- [G1] J. Gleick, Chaos : making a new science, Viking Penguin Inc., New York, 1987.
- [G2] , Genius : the life and science of Richard Feynman, Pantheon, New York, 1992.
- [H] G. Holton, private communication.
- [J] A. Jaffe, Mathematics motivated by physics, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 50, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1990, pp. 137–150.
- [K] J. Kollar, The structure of algebraic threefolds : an introduction to Mori’s program, Bull. Amer. Math. Soc. 17 (1987), 211.
- [Kr] S. G. Krantz, Fractal geometry, Math. Intelligencer 11 (1989), 12–16.
- [LL] L. Landau and E. Lifshitz, Statistical physics, Oxford Univ. Press, London, 1938.

- [M] R. McCormmach, ed., Historical studies in the physical sciences, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1975.
- [W] A. Weil, Foundations of algebraic geometry, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1946.
- [Wi] E. H. Witten, Quantum field theory and the Jones polynomial, Comm. Math. Phys. 121 (1989), 351–399.

ON FUZZY PARAMETERIZED FUZZY HYPERSOFT TOPOLOGICAL SPACES

Adem YOLCU¹

Taha Yasin OZTURK²

1. INTRODUCTION

In fields such as sociology, economics, climate science, and engineering, classical mathematical methods cannot be used to solve various problems due to their inherent complexities. Fuzzy Set Theory, first introduced by Zadeh in 1965 (Zadeh,1965), has emerged as a highly useful technique for addressing these issues and offers an effective framework for representing ambiguous concepts through partial membership. Both mathematicians and computer scientists have explored Fuzzy Set Theory, leading to the development of fuzzy control systems, fuzzy logic, fuzzy topology, and more over the years. Numerous implementations of fuzzy set theory have been established. Additionally, alongside this theory, there exists Probability Theory and Rough Set Theory, proposed by Pawlak (Pawlak,1982), which also aim to address these challenges. Molodtsov introduced Soft Set Theory (Molodtsov,1999), presenting a completely new approach to modeling uncertainty, with each of these theories having its own complexities. The fundamental results of Soft Set Theory were established by Molodtsov, who successfully applied it in various fields, including function smoothness, operations analysis, Riemann

¹ Department of Mathematics, Kafkas University, 36100, Kars Turkey. yolcu.adem@gmail.com , ORCID: 0000-0002-4317-652X.

² Department of Mathematics, Kafkas University, 36100, Kars Turkey. taha36100@hotmail.com , ORCID: 0000-0003-2402-6507.

integration, and game theory. Maji et al. identified and examined several key concepts of Soft Set Theory (Maji et.al,2003). Their work was further developed by Pei and Miao (Pei and Miao,2005), Feng et al. (Feng et.al.,2008), Chen et al. (Chen et.al.,2005) and Ozturk and Bayramov (Ozturk and Bayramov,2014). Research that involved both fuzzy sets and soft sets was initiated by Maji et al (Maji et.al.,2001). The fuzzy soft set structure, which combines soft set structure and fuzzy set structure, has been actively utilized by researchers, resulting in numerous contributions to the literature (Ahmad and Kharal,2009;Roy and Maji,2007;Yang et.al.,2009). Pei and Miao (Pei and Miao,2005) pointed out that several scientists from various fields have studied information systems and highlighted the compact connections between soft sets and information systems. Furthermore, Pei demonstrated that soft sets represent a class of special information systems, termed fuzzy information systems, and that research on soft sets and information systems could be unified. This unification could also lead to the prediction of new outcomes and approaches. Kharal and Ahmad (Kharal and Ahmad,2008) defined the concept of mapping fuzzy soft sets to enhance fuzzy soft theory, examining the properties of fuzzy soft images and fuzzy soft inverse images of fuzzy soft sets. Additionally, Çağman et al. (Cagman et.al.,2010) studied Fuzzy Parameterized Fuzzy Soft Set Theory and its applications. Tanay and Kandemir (Tanay and Kandemir,2011) described fuzzy soft topology over a given initial universe, defining certain notions of fuzzy soft topological spaces and investigating various properties. Roy and Samanta (Roy and Samanta,2012) defined a fuzzy soft topology over the initial universe, introducing bases and subbases for this space and providing some characterizations. Smarandache (Smarandache, 2018) implemented new uncertainty management methods by extending the soft set to a hypersoft set through a transformation into a multi-decision method. The hypersoft set structure serves as a more general form

of the soft set structure, consisting of elements selected from different attributes. Due to the utility of this new structure, a considerable amount of research (Gayen et.al,2020;Martin and Smarandache,2020;Rana et.al.,2019;Saeed et.al.,2020;Saqlain et.al.,2020a;Saqlain et.al.,2020b;Yolcu et.al.,2021;Yolcu et.al.,2022) has been conducted in a short time. Also, Yolcu and Ozturk (Yolcu and Ozturk,2021) defined the fuzzy hypersoft set structure by integrating fuzzy and hypersoft set structures. Also Yolcu and Ozturk investigated different hybrid set structure by using hypersoft sets (Yolcu and Ozturk,2022;Ozturk and Yolcu,2021).

In this chapter, we are trying to extend fuzzy hypersoft topological spaces to fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological spaces. Then we define a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology, fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open(closed) sets, fuzzy parameterized fuzzy hypersoft interior, fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closure, fuzzy parameterized fuzzy hypersoft base and fuzzy parameterized fuzzy hypersoft subspace topology and also here we established some important theorems related to this spaces.

2. PRELIMINARIES

Definition 2.1 (Zadeh,1965) Let $\mathcal{L}$ be an initial universe. A fuzzy set Λ in $\mathcal{L}$, $\Lambda = \{(l, \mu_{\Lambda}(l)): l \in \mathcal{L}\}$, where $\mu_{\Lambda}: \mathcal{L} \rightarrow [0,1]$ is the membership function of the fuzzy set Λ ; $\mu_{\Lambda}(l) \in [0,1]$ is the membership $l \in \mathcal{L}$ in Λ . The set of all fuzzy sets over $\mathcal{L}$ will be denoted by $FP(\mathcal{L})$.

Definition 2.2 (Molodtsov,1999) Let $\mathcal{L}$ be an initial universe and E be a set of parameters. A pair (F, E) is called a soft set over $\mathcal{L}$, where F is a mapping $F: E \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{L})$. In other words, the soft set is a parameterized family of subsets of the set $\mathcal{L}$.

Definition 2.3 (Maji et.al.,2001) Let $\mathcal{L}$ be a initial universe, E be a set of parameters and $FP(\mathcal{L})$ be the set of all fuzzy sets in $\mathcal{L}$. Then a pair (f, E) is called a fuzzy soft set over $\mathcal{L}$, where $f: E \rightarrow FP(\mathcal{L})$ is a mapping.

Definition 2.4 (Smarandache,2018) Let $\mathcal{L}$ be the universal set and $P(\mathcal{L})$ be the power set of $\mathcal{L}$. Consider $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ for $n \geq 1$, be n well-defined attributes, whose corresponding attribute values are respectively the sets $E_1, E_2, \dots, E_n$ with $E_i \cap E_j = \emptyset$, for $i \neq j$ and $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$, then the pair $(H, E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n)$ is said to be Hypersoft set over $\mathcal{L}$ where $H: E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \rightarrow P(\mathcal{L})$.

Definition 2.5 (Rahman et.al.,2022) Let $\mathcal{L}$ be the universal set and $FP(\mathcal{L})$ be a family of all fuzzy set over $\mathcal{L}$ and $E_1, E_2, \dots, E_n$ the pairwise disjoint sets of parameters. Let A_i be the nonempty subset of E_i for each $i = 1, 2, \dots, n$. A fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set defined as the pair $(H, A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)$ where; $H: A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \rightarrow FP(\mathcal{L})$ and

$$H(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \left\{ \left\langle \frac{\alpha}{\mu(\alpha)}, \frac{1}{H(\alpha)(l)}, > : l \in \mathcal{L}, \right. \right. \\ \left. \left. \alpha \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \right\}$$

For sake of simplicity, we write the symbols $\aleph$ for $E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n$, $\mathfrak{J}$ for $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$ and α for an element of the set $\mathfrak{J}$. The set of all fuzzy hypersoft sets over $\mathcal{L}$ will be denoted by $FHS(\mathcal{L}, \aleph)$. Here after, FHS will be used for short instead of fuzzy hypersoft sets.

Definition 2.6 (Rahman et.al.,2022)

i) A fuzzy hypersoft set $(H, \aleph)$ over the universe $\mathcal{L}$ is said to be null fuzzy hypersoft set and denoted by $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}$ if for all $l \in \mathcal{L}$ and $\alpha \in \aleph$, $\mu(\alpha) = 0, H(\alpha)(l) = 0$.

ii) A fuzzy hypersoft set $(H, \aleph)$ over the universe $\mathcal{L}$ is said to be absolute fuzzy hypersoft set and denoted by $1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}$ if for all $l \in$ and $\alpha \in \aleph$, $\mu(\alpha) = 1, H(\alpha)(l) = 1$.

Definition 2.7 [17] Let $\mathcal{L}$ be an initial universe set $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2)$ be two fuzzy hypersoft sets over the universe $\mathcal{L}$. We say that $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is a fuzzy hypersoft subset of $(H_2, \mathfrak{S}_2)$ and denote $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$ if

i) $\mathfrak{S}_1 \subseteq \mathfrak{S}_2$

ii) For any $\alpha \in \mathfrak{S}_1$, $\mu_1(\alpha) \subset \mu_2(\alpha), H_1(\alpha) \subseteq H_2(\alpha)$.

Definition 2.8 (Rahman et.al.,2022) The complement of fuzzy hypersoft set $(H, \mathfrak{S})$ over the universe $\mathcal{L}$ is denoted by $(H, \mathfrak{S})^c$ and defined as $(H, \mathfrak{S})^c = (H^c, \mathfrak{S})$, where $H^c(n)$ is complement of the set $H(n)$, for $n \in \mathfrak{S}$.

$$H(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)^c = \left\{ \left\langle \frac{\alpha}{1 - \mu(\alpha)}, \frac{l}{1 - H(\alpha)(l)}, \right\rangle : l \in \mathcal{L}, \alpha \in A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq E_1 \times E_2 \times \dots \times E_n \right\}$$

Definition 2.9 (Rahman et.al.,2022) Let $\mathcal{L}$ be an initial universe set and $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2)$ be two fuzzy hypersoft sets over the universe $\mathcal{L}$. The union of $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ and $(H_2, \mathfrak{S}_2)$ is denoted by $(H_1, \mathfrak{S}_1) \cup (H_2, \mathfrak{S}_2) = (H_3, \mathfrak{S}_3)$ where each $n \in \mathfrak{S}_3, H_3(n)(l) = \max\{H_1(n)(l), H_2(n)(l)\}, \mu_3(n) = \max\{\mu_1(n), \mu_2(n)\}$

Definition 2.10 (Rahman et.al.,2022) Let $\mathcal{L}$ be an initial universe set and $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2)$ be fuzzy hypersoft sets over the universe $\mathcal{L}$. The intersection of $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ and $(H_2, \mathfrak{S}_2)$ is denoted by $(H_1, \mathfrak{S}_1) \cap (H_2, \mathfrak{S}_2) = (H_3, \mathfrak{S}_3)$ where $\mathfrak{S}_3 = \mathfrak{S}_1 \cap \mathfrak{S}_2$ and each $n \in \mathfrak{S}_3, H_3(n)(l) = \min\{H_1(n)(l), H_2(n)(l)\}, \mu_3(n) = \min\{\mu_1(n), \mu_2(n)\}$.

3. FUZZY PARAMETERIZED FUZZY HYPERSOFT TOPOLOGICAL SPACES

Definition 3.1 Let $FPFHS(\mathcal{L}, \aleph)$ be the set of all fuzzy parameterized fuzzy hypersoft subsets of $(\mathcal{L}, \aleph)$ over the universe and $\tilde{\tau}$ be a subfamily of $FPFHS(\mathcal{L}, \aleph)$. Then $\tilde{\tau}$ is called a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology on if the following condition are satisfied.

1. $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}$ and $1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}$ belongs to $\tilde{\tau}$,
2. The union of any number of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}$ belongs to $\tilde{\tau}$,
3. The intersection of any two fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}$ belongs to $\tilde{\tau}$.

The triple $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ is called a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$. Every member of $\tilde{\tau}$ is called a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set in $\mathcal{L}$.

Definition 3.2 Let $FPFHS(\mathcal{L}, \aleph)$ be the set of all fuzzy hypersoftsets over the universe . Then,

1. If $\tilde{\tau} = \{0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}\}$, then $\tilde{\tau}$ is called to be fuzzy parameterized fuzzy hypersoft indiscrete topology and $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ is called to be fuzzy parameterized fuzzy hypersoft indiscrete topological space over the universe $\mathcal{L}$.
2. If $\tilde{\tau} = FPFHS(\mathcal{L}, \aleph)$, then $\tilde{\tau}$ is called to be fuzzy parameterized fuzzy hypersoft discrete topology and $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ is called to be fuzzy parameterized fuzzy hypersoft discrete topological space over the universe $\mathcal{L}$.

Example 3.1 Let $= \{l_1, l_2, l_3\}$ be the set of alternatives and also consider the set of attributes E_1, E_2, E_3, E_4 are given as;

$$E_1 = \{\alpha_1, \alpha_2\}$$

$$E_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

$$E_3 = \{\gamma_1, \gamma_2\}$$

$$E_4 = \{\delta_1, \delta_2, \delta_3\}$$

Suppose that

$$A_1 = \{\alpha_1\}, A_2 = \{\beta_1, \beta_2\}, A_3 = \{\gamma_2\}, A_4 = \{\delta_1, \delta_3\}$$

$$B_1 = \{\alpha_2\}, B_2 = \{\beta_2, \beta_3\}, B_3 = \{\gamma_1\}, B_4 = \{\delta_1, \delta_2\}$$

Let

$$\tilde{\tau} = \{0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{\text{fp}}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{\text{fp}}, (H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2), (H_3, \mathfrak{S}_3)\}$$

be a subfamily of FPFHS($\mathcal{L}, \aleph$) where $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2), (H_3, \mathfrak{S}_3)$ for $\forall \mathfrak{S} \subseteq \aleph$, fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets over $\mathcal{L}$ and defined as follows;

$$(H_1, \mathfrak{S}_1)$$

$$= \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,3}, \frac{l_2}{0,6} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3}{0.4} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,4}, \frac{l_2}{0,2}, \frac{l_3}{0,1} \right\} \right\rangle, \right. \\ \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1}{0.4} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,3}, \frac{l_3}{0,5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_2}{0,5}, \frac{l_3}{0,4} \right\} \right\rangle \right\}$$

$$(H_2, \mathfrak{S}_2)$$

$$= \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_1}{0.3} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,4}, \frac{l_2}{0,5}, \frac{l_3}{0,3} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_2}{0.3} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,6}, \frac{l_2}{0,4}, \frac{l_3}{0,2} \right\} \right\rangle, \right. \\ \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_1}{0.2} \right), \left\{ \frac{l_1}{0,2}, \frac{l_2}{0,5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_2}{0.4} \right), \left\{ \frac{l_2}{0,6}, \frac{l_3}{0,7} \right\} \right\rangle \right\}$$

$$(H_3, \mathfrak{T}_3) = \left\{ \begin{array}{l} < (\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1}{0.5}), \{\frac{l_1}{0.3}, \frac{l_2}{0.6}\} >, < (\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3}{0.4}), \{\frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.2}, \frac{l_3}{0.1}\} >, \\ < (\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1}{0.4}), \{\frac{l_1}{0.3}, \frac{l_3}{0.5}\} >, < (\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3}{0.6}), \{\frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.4}\} > \\ < (\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_1}{0.3}), \{\frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.3}\} >, < (\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_2}{0.3}), \{\frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.2}\} >, \\ < (\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_1}{0.2}), \{\frac{l_1}{0.2}, \frac{l_2}{0.5}\} >, < (\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_2}{0.4}), \{\frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.7}\} > \end{array} \right\}$$

Then $\tilde{\tau}$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology on $\mathcal{L}$ and hence $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space.

Remark 3.1 It is clear that each fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology is also fuzzy soft topology. We consider that Example-3.1. If we select the parameters from a single attribute set such as E_2 while creating fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology, then the resulting topology becomes fuzzy soft topology. Therefore fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology is also fuzzy soft topology. But the reverse is not true since there are no different attributes in the fuzzy soft set structure, such as the fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set structure. From here, it is seen that the fuzzy parameterized fuzzy hypersoft structure is a more general structure than the fuzzy soft structure.

Proposition 3.1 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}_1, \aleph)$ and $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}_2, \aleph)$ be two fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$. Then $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2, \aleph)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over the universe $\mathcal{L}$.

Proof. 1. Since $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp} \in \tilde{\tau}_1$ and $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp} \in \tilde{\tau}_2$, then $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp} \in \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$.

2. Suppose that $\{(H_i, \mathfrak{S}_i): i \in I\}$ be a family of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$. Then $(H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1$ and $(H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_2$ for all $i \in I$, so $\bigcup_{i \in I} (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1$ and $\bigcup_{i \in I} (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_2$. Thus $\bigcup_{i \in I} (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$.

3. Suppose that $\{(H_i, \mathfrak{S}_i): i = \overline{1, n}\}$ be a family of the finite number of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$. Then $(H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1$ and $(H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_2$ for all $i = \overline{1, n}$, so $\bigcap_{i=1}^n (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1$ and $\bigcap_{i=1}^n (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_2$. Thus $\bigcap_{i=1}^n (H_i, \mathfrak{S}_i) \in \tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$.

Remark 3.2 The union of two fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topologies over may not be a fuzzy soft topology on . This condition showed the following example.

Example 3.2 We consider the Example 3.1. Let

$$\begin{aligned}\tilde{\tau}_1 &= \\ \{0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, (H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2), (H_3, \mathfrak{S}_3)\} \\ \tilde{\tau}_2 &= \{0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, (H_2, \mathfrak{S}_2), (H_4, \mathfrak{S}_4)\}\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}(H_4, \mathfrak{S}_4) \\ = \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_1}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.5}, \frac{l_2}{0.7}, \frac{l_3}{0.3} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_2}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.4} \right\} \right\rangle, \right. \\ \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_1}{0.8} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.6} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_2}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_2}{0.8}, \frac{l_3}{0.8} \right\} \right\rangle \right\}\end{aligned}$$

It is clear that $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cap} \tilde{\tau}_2$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology. But $(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cup} (H_4, \mathfrak{S}_4) \notin \tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2$ and hence $\tilde{\tau}_1 \tilde{\cup} \tilde{\tau}_2$ is not fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology.

Proposition 3.2 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$. Then the collection $\tilde{\tau} =$

$\{(H, \mathfrak{F}): (H, \mathfrak{F}) \in \tilde{\tau}\}$ defines a fuzzy soft topology and $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ is a fuzzy soft topological space over $\mathcal{L}$.

Proof. Suppose that $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$. Let us show that the collection $\tilde{\tau} = \{(H, \mathfrak{F}): (H, \mathfrak{F}) \in \tilde{\tau}\}$ provides the conditions of fuzzy soft topological spaces.

1. $0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp} \in \tilde{\tau}$,
2. Suppose that $\{(H_i, \mathfrak{F}_i): i \in I\}$ be a family of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}$. Since $\tilde{\tau} = \{(H, \mathfrak{F}): (H, \mathfrak{F}) \in \tilde{\tau}\}$, $\{(H_i, \mathfrak{F}_i): i \in I\}$ is also a family of fuzzy soft sets in $\tilde{\tau}$. Then $\bigcup_{i \in I} (H_i, \mathfrak{F}_i) \in \tilde{\tau}$ and hence $\bigcup_{i \in I} (H_i, \mathfrak{F}_i) \in \tilde{\tau}$.
3. Suppose that $\{(H_i, \mathfrak{F}_i): i = \overline{1, n}\}$ be a family of the finite number of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft sets in $\tilde{\tau}$. Then $\{(H_i, \mathfrak{F}_i): i = \overline{1, n}\}$ is a family of fuzzy soft sets in $\tilde{\tau}$. Then $\bigcap_{i=1}^n (H_i, \mathfrak{F}_i) \in \tilde{\tau}$ so $\bigcap_{i=1}^n (H_i, \mathfrak{F}_i) \in \tilde{\tau}$.

Definition 3.3 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H, \mathfrak{F})$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set over $\mathcal{L}$. Then $(H, \mathfrak{F})$ is said to be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set if its complement $(H, \mathfrak{F})^c$ belongs to $\tilde{\tau}$.

Example 3.3 We consider the Example 3.1. It is clear that $(0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp})^c, (1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp})^c, ((H_1, \mathfrak{F}_1))^c, ((H_2, \mathfrak{F}_2))^c, ((H_3, \mathfrak{F}_3))^c$ are fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed sets.

$$(0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp})^c = 1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}, (1_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp})^c = 0_{(\mathcal{L}_{FH}, \aleph)}^{fp}$$

$$\begin{aligned}
 & ((H_1, \mathfrak{F}_1))^c \\
 &= \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_2}{0.4} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.8}, \frac{l_3}{0.9} \right\} \right\rangle, \right. \\
 & \quad \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_3}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3}{0.4} \right), \left\{ \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.6} \right\} \right\rangle \right\}, \\
 & ((H_2, \mathfrak{F}_2))^c \\
 &= \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_1}{0.7} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.7} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_2}{0.7} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.8} \right\} \right\rangle, \right. \\
 & \quad \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_1}{0.8} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.8}, \frac{l_2}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_2}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.3} \right\} \right\rangle \right\} \\
 & ((H_3, \mathfrak{F}_3))^c \\
 &= \left\{ \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1}{0.5} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_2}{0.4} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.8}, \frac{l_3}{0.9} \right\} \right\rangle, \right. \\
 & \quad \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_3}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.6} \right\} \right\rangle > \\
 & \quad \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_1}{0.7} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.7} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_2, \gamma_1, \delta_2}{0.7} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.8} \right\} \right\rangle, \right. \\
 & \quad \left. \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_1}{0.8} \right), \left\{ \frac{l_1}{0.8}, \frac{l_2}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \left(\frac{\alpha_2, \beta_3, \gamma_1, \delta_2}{0.6} \right), \left\{ \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.3} \right\} \right\rangle \right\}
 \end{aligned}$$

Proposition 3.3 Let $(, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{U}$. Then the following properties are provide.

1. $0_{(FH, \aleph)}^{fp}, 1_{(FH, \aleph)}^{fp}$ are fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed sets over $\mathcal{U}$.
2. The intersection of any number of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set over $\mathcal{U}$.
3. The union of any two fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set over $\mathcal{U}$.

Proof. Straightforward.

Definition 3.4 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H, \mathfrak{S})$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set over $\mathcal{L}$. The fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closure of $(H, \mathfrak{S})$ denoted by $\text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{S})$ is the intersection of all fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed super sets of $(H, \mathfrak{S})$.

It is clear that $\text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{S})$ is the smallest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set over $\mathcal{L}$ which contain $(H, \mathfrak{S})$.

Theorem 3.1 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2) \in \text{FPFHS}(\mathcal{L}, \aleph)$. Then,

1. $\text{cl}_{\text{FH}}(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}) = 0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}$ and $\text{cl}_{\text{FH}}(1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}) = 1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}$,
2. $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$,
3. $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set if and only if $(H_1, \mathfrak{S}_1) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$,
4. $\text{cl}_{\text{FH}}(\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$,
5. If $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$, then $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$,
6. $\text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{S}_1) \cup (H_2, \mathfrak{S}_2)] = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$.

Proof. 1 and 2 are clear from the definition of closure.

3. Let $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set. By (2), we have $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$. Since $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is the smallest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set over $\mathcal{L}$ which contain $(H_1, \mathfrak{S}_1)$, then $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_1, \mathfrak{S}_1)$. Hence $(H_1, \mathfrak{S}_1) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$. Conversely, suppose that $(H_1, \mathfrak{S}_1) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$. Since $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set, then $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is closed.

4. Let $(H_2, \mathfrak{F}_2) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1)$. Then, $(H_2, \mathfrak{F}_2)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set, $(H_2, \mathfrak{F}_2) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$. So, we have $\text{cl}_{\text{FH}}(\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1)) = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1)$.

5. If $(H_1, \mathfrak{F}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{F}_2)$, then $(H_2, \mathfrak{F}_2) = (H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2) \Rightarrow \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2) = \text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)] = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2) \Rightarrow \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$.

6. Since $(H_1, \mathfrak{F}_1) \subseteq (H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)$ and $(H_2, \mathfrak{F}_2) \subseteq (H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)$, from the (5), $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)]$ and $(H_2, \mathfrak{F}_2) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)]$. Therefore $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)]$.

Conversely, since $(H_1, \mathfrak{F}_1) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{F})$ and $(H_2, \mathfrak{F}_2) \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$ are fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed sets, from the proposition 3.3, $\text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed set over $\mathcal{L}$ being the union of two fuzzy parameterized fuzzy hypersoft fuzzy soft closed sets. Then, $\text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)] \subseteq \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$. Hence $\text{cl}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup (H_2, \mathfrak{F}_2)] = \text{cl}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{F}_1) \cup \text{cl}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{F}_2)$ is obtained.

Definition 3.5 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H, \mathfrak{F})$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set over $\mathcal{L}$. The fuzzy parameterized fuzzy hypersoft interior of $(H, \mathfrak{F})$ denoted by $\text{int}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{F})$ is the union of all fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open subsets of $(H, \mathfrak{F})$.

It is clear that $\text{int}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{F})$ is the largest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set contained in $(H, \mathfrak{F})$.

Theorem 3.2 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \aleph)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2) \in \text{FPFHS}(\mathcal{L}, \aleph)$. Then,

1. $\text{int}_{\text{FH}}(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}) = 0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}$ and $\text{int}_{\text{FH}}(1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}) = 1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}$,
2. $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_1, \mathfrak{S}_1)$,
3. $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set if and only if $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) = (H_1, \mathfrak{S}_1)$,
4. $\text{int}_{\text{FH}}(\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)) = \text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$,
5. If $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$, then $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$,
6. $\text{int}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{S}_1) \cap (H_2, \mathfrak{S}_2)] = \text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \cap \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$.

Proof. 1 and 2 are clear from the definition of interior.

3. Let $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set. Since $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is the largest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set contained in $(H_1, \mathfrak{S}_1)$, $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) = (H_1, \mathfrak{S}_1)$. Conversely, suppose that $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) = (H_1, \mathfrak{S}_1)$. Since $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set, $(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is also fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set.

4. Let $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) = (H_2, \mathfrak{S}_2)$. Since $(H_2, \mathfrak{S}_2)$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set $\text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) = (H_2, \mathfrak{S}_2)$, so $\text{int}_{\text{FH}}(\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)) = \text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ is obtained.

5. Let $(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$. $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_1, \mathfrak{S}_1)$ and hence $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$ also $\text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$ is the largest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set contained in $(H_2, \mathfrak{S}_2)$ and $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$.

6. $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \subseteq (H_1, \mathfrak{S}_1)$ and $\text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq (H_2, \mathfrak{S}_2)$. Hence $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \cap \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq (H_1, \mathfrak{S}_1) \cap (H_2, \mathfrak{S}_2)$.

Since the largest fuzzy parameterized fuzzy hypersoft open set contained in $(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} (H_2, \mathfrak{S}_2)$ is $\text{int}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} (H_2, \mathfrak{S}_2)]$, $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq \text{int}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} (H_2, \mathfrak{S}_2)]$. Conversely $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq \text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1)$ and $\text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$. Hence $\text{int}_{\text{FH}}[(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} (H_2, \mathfrak{S}_2)] \subseteq \text{int}_{\text{FH}}(H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cap} \text{int}_{\text{FH}}(H_2, \mathfrak{S}_2)$.

Example 3.4 We consider only the attributes in Example 3.1.

Let

$$(H_1, \mathfrak{S}_1) = \left\{ \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.3}, \left\{ \frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.3} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.5}, \left\{ \frac{l_1}{0.4}, \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.3} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.4}, \left\{ \frac{l_1}{0.7}, \frac{l_3}{0.3} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.2}, \left\{ \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.6} \right\} \right\rangle \right\},$$

$$(H_2, \mathfrak{S}_2) = \left\{ \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.4}, \left\{ \frac{l_1}{0.5}, \frac{l_2}{0.7}, \frac{l_3}{0.4} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.7}, \left\{ \frac{l_1}{0.5}, \frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.4} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.5}, \left\{ \frac{l_1}{0.8}, \frac{l_3}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.3}, \left\{ \frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.7} \right\} \right\rangle \right\},$$

Obviously, $\tilde{\tau} = \{0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}, 1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}, (H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2)\}$ is a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology on $\mathcal{L}$.

1. Suppose that any $(H_3, \mathfrak{S}_3) \in \text{FPFHS}(\mathcal{L}, \aleph)$ be defined as follow;

$$(H_3, \mathfrak{S}_3) = \left\{ \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.6}, \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.7}, \frac{l_3}{0.5} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.8}, \left\{ \frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.7}, \frac{l_3}{0.6} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.7}, \left\{ \frac{l_1}{0.8}, \frac{l_3}{0.7} \right\} \right\rangle, \left\langle \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.5}, \left\{ \frac{l_2}{0.8}, \frac{l_3}{0.9} \right\} \right\rangle \right\}$$

Then $0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}}, (H_1, \mathfrak{S}_1), (H_2, \mathfrak{S}_2) \subseteq (H_3, \mathfrak{S}_3)$. Therefore

$$\text{int}_{\text{FH}}(H_3, \mathfrak{S}_3) = 0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \aleph)}^{\text{fp}} \tilde{\cup} (H_1, \mathfrak{S}_1) \tilde{\cup} (H_2, \mathfrak{S}_2) = (H_2, \mathfrak{S}_2).$$

2. Suppose that any $(H_4, \mathfrak{F}_4) \in \text{FPFHS}(\mathcal{L}, \mathfrak{N})$ be defined as follow;

$$(H_4, \mathfrak{F}_4) = \left\{ \begin{aligned} &< \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.4}, \{\frac{l_1}{0.3}, \frac{l_2}{0.2}, \frac{l_3}{0.4}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.2}, \{\frac{l_1}{0.3}, \frac{l_2}{0.3}, \frac{l_3}{0.2}\} >, \\ &< \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.3}, \{\frac{l_1}{0.2}, \frac{l_3}{0.2}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.6}, \{\frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.2}\} > \end{aligned} \right\}$$

Now we find the complement of $(H_1, \mathfrak{F}_1), (H_2, \mathfrak{F}_2)$,

$$(H_1, \mathfrak{F}_1)^c = \left\{ \begin{aligned} &< \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.7}, \{\frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.7}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.5}, \{\frac{l_1}{0.6}, \frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.7}\} >, \\ &< \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.6}, \{\frac{l_1}{0.3}, \frac{l_3}{0.7}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.8}, \{\frac{l_2}{0.6}, \frac{l_3}{0.4}\} > \end{aligned} \right\},$$

$$(H_2, \mathfrak{F}_2)^c = \left\{ \begin{aligned} &< \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_1)}{0.6}, \{\frac{l_1}{0.5}, \frac{l_2}{0.3}, \frac{l_3}{0.6}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_1, \gamma_2, \delta_3)}{0.3}, \{\frac{l_1}{0.5}, \frac{l_2}{0.4}, \frac{l_3}{0.6}\} >, \\ &< \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_1)}{0.5}, \{\frac{l_1}{0.2}, \frac{l_3}{0.5}\} >, < \frac{(\alpha_1, \beta_2, \gamma_2, \delta_3)}{0.7}, \{\frac{l_2}{0.5}, \frac{l_3}{0.3}\} > \end{aligned} \right\},$$

$$\left(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c = 1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}, \left(1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c = 0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}$$

Obviously, $\left(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c, \left(1_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c, (H_1, \mathfrak{F}_1)^c, (H_2, \mathfrak{F}_2)^c$ are all fuzzy parameterized fuzzy hypersoft closed sets over $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \mathfrak{N})$.

Then $(H_4, \mathfrak{F}_4) \cong \left(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c, (H_1, \mathfrak{F}_1)^c, (H_2, \mathfrak{F}_2)^c$. Therefore $\text{cl}_{\text{FH}}(H_4, \mathfrak{F}_4) = \left(0_{(\mathcal{L}_{\text{FH}}, \mathfrak{N})}^{\text{fp}}\right)^c \tilde{\cap} (H_1, \mathfrak{F}_1)^c \tilde{\cap} (H_2, \mathfrak{F}_2)^c = (H_2, \mathfrak{F}_2)^c$.

Theorem 3.3 Let $(\mathcal{L}, \tilde{\tau}, \mathfrak{N})$ be a fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topological space over $\mathcal{L}$ and $(H, \mathfrak{F}) \in \text{FPFHS}(\mathcal{L}, \mathfrak{N})$. Then,

1. $(\text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{F}))^c = \text{int}_{\text{FH}}((H, \mathfrak{F})^c)$,
2. $(\text{int}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{F}))^c = \text{cl}_{\text{FH}}((H, \mathfrak{F})^c)$.

Proof. 1.

$$\begin{aligned}
 \text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{I}) &= \tilde{\cap} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \tilde{\tau}^c: (H_2, \mathfrak{I}_2) \tilde{\subseteq} (H, \mathfrak{I}) \} \\
 &\Rightarrow (\text{cl}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{I}))^c = \left(\tilde{\cap} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \right. \\
 &\tilde{\tau}^c: (H_2, \mathfrak{I}_2) \tilde{\subseteq} (H, \mathfrak{I}) \} \Big)^c \\
 &= \tilde{\cup} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \tilde{\tau}: (H, \mathfrak{I})^c \tilde{\subseteq} (H_2, \mathfrak{I}_2)^c \} = \\
 &\text{int}_{\text{FH}}((H, \mathfrak{I})^c)
 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
 \text{int}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{I}) &= \tilde{\cup} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \tilde{\tau}: (H, \mathfrak{I}) \tilde{\subseteq} (H_2, \mathfrak{I}_2) \} \\
 &\Rightarrow (\text{int}_{\text{FH}}(H, \mathfrak{I}))^c = \left(\tilde{\cup} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \right. \\
 &\tilde{\tau}: (H, \mathfrak{I}) \tilde{\subseteq} (H_2, \mathfrak{I}_2) \} \Big)^c \\
 &= \tilde{\cap} \{ (H, \mathfrak{I}) \in \tilde{\tau}^c: (H_2, \mathfrak{I}_2)^c \tilde{\subseteq} (H, \mathfrak{I})^c \} = \\
 &\text{cl}_{\text{FH}}((H, \mathfrak{I})^c).
 \end{aligned}$$

4. CONCLUSION

Topology is an intriguing and significant area in mathematics, with numerous connections to other fields of science and mathematical models. Molodtsov's [12] soft set theory, which can be used to many social life uncertainties, has lately been investigated and developed by several scholars. In this research, we introduced the notion of fuzzy parameterized fuzzy hypersoft topology and demonstrated its essential features using certain key instances. This paper can also be the initial step for studies on fuzzy parameterized fuzzy hypersoft (FPFH) topological spaces ; for example, by using FPFH functions, one can study on FPFH continuity, FPFH separation axioms, FPFH compact spaces, FPFH connected spaces, and because there are compact ties between hypersoft sets and information systems.

REFERENCES

- Ahmad, B., & Kharal, A. (2009). On fuzzy soft sets. *Advances in Fuzzy Systems*, 2009.
- Ali, M. I., Feng, F., Liu, X. Y., Min, W. K., & Shabir, M. (2009). On some new operations in soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 57, 1547–1553.
- Çağman, N., Çitak, F., & Enginoglu, S. (2010). Fuzzy parameterized fuzzy soft set theory and its applications. *Turkish Journal of Fuzzy Systems*, 1, 21–35.
- Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., & Wong, X. (2005). The parametrization reduction of soft sets and its applications. *Computers and Mathematics with Applications*, 49, 757–763.
- Feng, F., Jun, Y. B., & Zhao, X. (2008). Soft semirings. *Computers and Mathematics with Applications*, 56(10), 2621–2628.
- Gayen, S., Smarandache, F., Jha, S., Singh, M. K., Broumi, S., & Kumar, R. (2020). Introduction to plithogenic hypersoft subgroup. *Neutrosophic Sets and Systems*, 33(1), 14.
- Kharal, A., & Ahmad, B. (2009). Mappings on fuzzy soft classes. *Advances in Fuzzy Systems*, 2009.
- Martin, N., & Smarandache, F. (2020). Concentric plithogenic hypergraph based on plithogenic hypersoft sets: A novel outlook. *Neutrosophic Sets*.
- Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2003). Soft set theory. *Computers and Mathematics with Applications*, 45, 555–562.
- Maji, P. K., Biswas, R., & Roy, A. R. (2001). Fuzzy soft sets. *Journal of Fuzzy Mathematics*, 9, 589–602.

- Molodtsov, D. (1999). Soft set theory—first results. *Computers and Mathematics with Applications*, 37(4-5), 19–31.
- Ozturk, T. Y., & Bayramov, S. (2014). Soft mappings space. *The Scientific World Journal*, 2014, <http://dx.doi.org/10.1155/2014/307292>.
- Pei, D., & Miao, D. (2005). From soft sets to information systems. In *Proceedings of the IEEE International Conference on Granular Computing* (Vol. 2, pp. 617–621).
- Pawlak, Z. (1982). Rough sets. *International Journal of Computer and Information Sciences*, 11(5), 341–356.
- Rana, S., Qayyum, M., Saeed, M., Smarandache, F., & Khan, B. (2019). Plithogenic fuzzy whole hypersoft set: Construction of operators and their application in frequency matrix multi-attribute decision-making technique. *Neutrosophic Sets and Systems*, 28(1).
- Rahman, A. U., Saeed, M., Mohammed, M. A., Jaber, M. M., & Garcia-Zapirain, B. (2022). A novel fuzzy parameterized fuzzy hypersoft set and Riesz summability approach based decision support system for diagnosis of heart diseases. *Diagnostics*, 12(7), 1546.
- Roy, A. R., & Maji, P. K. (2007). A fuzzy soft set theoretic approach to decision making problems. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 203(2), 412–418.
- Roy, S., & Samanta, T. K. (2012). A note on fuzzy soft topological spaces. *Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics*, 3, 305–311.
- Saeed, M., Ahsan, M., Siddique, M. K., & Ahmad, M. R. (2020). A study of the fundamentals of hypersoft set theory. *International Journal of Scientific & Engineering Research*, 11(1).

- Saqlain, M., Jafar, N., Moin, S., Saeed, M., & Broumi, S. (2020a). Single and multi-valued neutrosophic hypersoft set and tangent similarity measure of single valued neutrosophic hypersoft sets. *Neutrosophic Sets and Systems*, 32(1), 20.
- Saqlain, M., Moin, S., Jafar, M. N., Saeed, M., & Smarandache, F. (2020b). Aggregate operators of neutrosophic hypersoft set. *Neutrosophic Sets and Systems*, 32(1), 18.
- Smarandache, F. (2018). Extension of soft set to hypersoft set, and then to plithogenic hypersoft set. *Neutrosophic Sets and Systems*, 22, 168–170.
- Tanay, B., & Kandemir, M. B. (2011). Topological structure of fuzzy soft sets. *Computers and Mathematics with Applications*, 61, 2952–2957.
- Yang, X., Lin, T. Y., Yang, J., Li, Y., & Yu, D. (2009). Combination of interval-valued fuzzy set and soft set. *Computers and Mathematics with Applications*, 58(3), 521–527.
- Yolcu, A., Karataş, E., & Öztürk, T. Y. (2022). Intuitionistic fuzzy hypersoft separation axioms. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science*, 14(1), 66-73.
- Yolcu, A., & Ozturk, T. Y. (2021). Fuzzy hypersoft sets and it's application to decision-making. *Theory and application of hypersoft set*, 50.
- Yolcu, A., Smarandache, F., & Öztürk, T. Y. (2021). Intuitionistic fuzzy hypersoft sets. *Communications faculty of sciences University of Ankara Series A1 mathematics and Statistics*, 70(1), 443-455.
- Ozturk, T. Y., & Yolcu, A. (2021). On neutrosophic hypersoft topological spaces. *Theory and Application of Hypersoft Set*, 215.

- Yolcu, A., & Öztürk, T. Y. (2022). On fuzzy hypersoft topological spaces. *Caucasian Journal of Science*, 9(1), 1-19.
- Zadeh, L. A. (1965). Fuzzy sets. *Information and Control*, 8(3), 338–353.

THE COMPLEX-TYPE k -PADOVAN LENGTHS OF THE DIHEDRAL GROUP D_m

Ömür DEVECİ¹

1. INTRODUCTION

The k -Padovan sequence $\{P_n^{(k)}\}$ for any given $k(k = 3, 4, \dots)$ is defined by a recurrence relation of order k :

$$P_n^{(k)} = P_{n-2}^{(k)} + P_{n-3}^{(k)} + \dots + P_{n-k}^{(k)} \quad (1.1)$$

for $n \geq 3$, where $P_{3-k}^{(k)} = P_{4-k}^{(k)} = \dots = P_0^{(k)} = 0$ and $P_1^{(k)} = P_2^{(k)} = 1$.

When $k = 3$, the sequence $\{P_n^{(k)}\}$, is reduced to the ordinary Padovan sequence $\{P_n\}$, see (Bravo & Herrera, 2022; Iliopoulos, 2015) for more information.

Let G be a j -generator group and

$$X = \left\{ (x_1, x_2, \dots, x_j) \in \underbrace{G \times G \times \dots \times G}_j \mid \langle \{x_1, x_2, \dots, x_j\} \rangle = G \right\}.$$

The notation $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ is called a generating j -tuple for G . If G is a j -generator group and $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ is a generating j -tuple of G , then every element of G can be written as

$$(x_1)^{\alpha_1} (x_2)^{\alpha_2} \dots (x_j)^{\alpha_j} (x_1)^{\alpha_{j+1}} (x_2)^{\alpha_{j+2}} \dots (x_j)^{\alpha_{2j}}$$

¹ Prof. Dr., Kafkas University, Faculty of Science and Letters, Department of Mathematics, odeveci36@hotmail.com, ORCID: 0000-0001-5870-5298.

$$\dots (x_1)^{\alpha_{nj+1}} (x_2)^{\alpha_{nj+2}} \dots (x_j)^{\alpha_{nj+j}},$$

where $\alpha_i \in \mathbb{Z}$, $1 \leq i \leq nj + j$.

The terms of a complex-type sequence which is defined by means of group elements are determined by the following rules (Deveci & Shannon, 2021):

For each elements x, y of the group G ,

(i) Let e be the identity of G and consider $z = a + ib$, where a and b are integers, then

$$\begin{aligned} * x^z &\equiv x^{a(\text{mod}|x|)+ib(\text{mod}|x|)} = x^{a(\text{mod}|x|)} x^{ib(\text{mod}|x|)} = \\ &x^{ib(\text{mod}|x|)} x^{a(\text{mod}|x|)} = x^{ib(\text{mod}|x|)+a(\text{mod}|x|)}, \end{aligned}$$

$$* x^{ia} = (x^i)^a = (x^a)^i,$$

$$* e^u = e,$$

$$* x^{0+ib} = e.$$

(ii) Given $z_1 = a_1 + ib_1$ and $z_2 = a_2 + ib_2$, where a_1, b_1, a_2 and b_2 are integers, $(x^{z_1} y^{z_2})^{-1} = y^{-z_2} x^{-z_1}$.

(iii) If $xy \neq yx$, then $x^i y^i \neq y^i x^i$.

(iv) $(xy)^i = y^i x^i$ and $(x^i y^i)^i = x^{-1} y^{-1}$.

(v) $xy^i = y^i x$ and so $(xy^i)^i = x^i y^{-1}$ and $(x^i y)^i = x^{-1} y^i$.

The study of the linear recurrence sequences in groups began with the earlier work of Wall (Wall, 1960) where the ordinary Fibonacci sequences in cyclic groups were investigated. Other work on the Fibonacci sequences in cyclic groups is discussed in, for example, (Chang, 1986; Lu & Wang, 2006; Renault, 2013; Shah, 1968; Vinson, 1963). In the mid-eighties, Wilcox studied the Fibonacci sequences in abelian groups in (Wilcox, 1986). In next process, some special linear recurrence sequences defined by the aid of group elements have been studied

by many authors; for example, (Akuzum & Deveci, 2020; Campbell & Campbell, 2004; Campbell, Doostie, & Robertson, 1990; Deveci et al., 2018; Deveci et al., 2018; Deveci, Artun, & Akuzum, 2017; Deveci & Karaduman, 2017; Doostie & Campbell, 2006; Erdag & Deveci, 2018; Hashemi & Pirzadeh, 2018; Karaduman & Aydın, 2003; Knox, 1992; Mehraban et al., 2023; Mehraban & Hashemi, 2023; Özkan, 2014; Tas & Karaduman, 2014). In (Akuzum, 2023; Deveci, Erdag, & Güngözü, 2022; Deveci, Hulk, & Shannon, 2021; Deveci & Shannon, 2021; Deveci & Shannon, 2018; Erdag & Deveci, 2022; Erdag, Deveci, & Karaduman, 2022; Hulk, Erdag, & Deveci, 2023), the theory was expanded to the quaternions and the complex numbers. In (Deveci, Shannon, Erdag, & Ceco, submitted), Deveci et al. contributed to theory via the complex-type k -Padovan orbit of a j -generator group. In their paper they defined this sequence by considering procedure first described in (Deveci & Shannon, 2018) and the recurrence relation (1.1):

Definition 1.1 (Deveci, Shannon, Erdag, & Ceco, submitted) Let G be a j -generator group and let $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ be a generating j -tuple of. For $k > j$ we define the complex-type k -Padovan sequence by means of the elements of G with respect to the generating j -tuple $(x_1, x_2, \dots, x_j)$ as follows:

$$a_{n+k} = (a_n)^{i^k} (a_{n+1})^{i^{k-1}} \dots (a_{n+k-3})^{i^3} (a_{n+k-2})^{i^2}$$

for any given $k(k = 4, 5, \dots)$ and $n \geq 0$, where

$$\begin{cases} a_0 = x_1, a_1 = x_2, a_2 = x_3, \dots, a_{k-2} = x_j, a_{k-1} = a_1 & \text{if } j+1 = k; \\ a_0 = x_1, a_1 = \dots = a_{k-j-1} = e, a_{k-j} = x_2, \dots, a_{k-3} = x_{j-1}, a_{k-2} = x_j, a_{k-1} = x_1 & \text{if } j+1 < k. \end{cases}$$

The complex-type k -Padovan orbit is denoted by $P_{(x_1, x_2, \dots, x_j)}^{(i, k)}(G)$.

Theorem 1.1 (Deveci, Shannon, Erdag, & Ceco, submitted) Let G be a k -generator group. If G is finite, then the complex-type k -Padovan orbit of G is periodic.

The length of the period of the sequence $P_{(x_1, x_2, \dots, x_j)}^{(i, k)}(G)$ is denoted by $L_{(x_1, x_2, \dots, x_k)}^{(i, k)}(G)$.

The dihedral group D_m of order $2m$ is defined by the presentation

$$D_m = \langle x, y | x^m = y^2 = e, \quad yx = x^{-1}y \rangle.$$

Note that in the group D_m generated x and y , $(xy)^2 = xyxy = \underline{xx}^{-1}\underline{yy} = y^2 = e$ and $(yx)^2 = yx\underline{yx} = yxx^{-1}y = y^2 = e$.

In this work, we obtain the periods of the complex type k -Padovan sequences in the dihedral group D_m for $k = 4, 5$ and $m \geq 3$. We note here that we will obtain the terms of the sequence defined by group elements considering the above rules.

2. MAIN RESULTS

A sequence is periodic if, after a certain point, it consists only of repetitions of a fixed subsequence. The number of terms in the shortest repeating subsequence is called the period of the sequence. In addition, if the first k terms in the sequence form a repeating subsequence then the sequence is simply periodic with period k . For example, the sequence $\{a, b, c, d, b, c, d, b, c, d, \dots\}$ is periodic after the initial term a and has period 3 and also the sequence $\{a, b, c, d, a, b, c, d, a, b, c, d, \dots\}$ is simply periodic with period 4.

We shall now address the complex type 4-Padovan lengths and the complex type 5-Padovan lengths of the dihedral group D_m for $m \geq 3$.

Theorem 2.1 Consider the dihedral group D_m for some $m \geq 3$ with generators x, y . Then the sequences $P_{(x,y)}^{(i,4)}(D_m)$ and $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ are simply periodic and

$$L_{(x,y)}^{(i,4)}(D_m) = L_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m) = \begin{cases} 7m & \text{if } m \equiv 0 \pmod{4}, \\ 14m & \text{if } m \equiv 0 \pmod{2}, \\ 28m & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Proof. The sequences $P_{(x,y)}^{(i,4)}(D_m)$ and $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ are as follows, respectively:

$$\begin{aligned} & \{y, e, x, y, xy, x^{-i}y, x^2y^{i+1}, (x^2y)^i, \\ & e, x^{-i}, y^i, (x^3y)^i, x^{-1}y^i, (x^4y)^iy, \\ & x^2y, e, x, x^{-2i}y, x^3y, yx^i, x^2y^{i+1}, \\ & (x^4y)^i, e, x^{3i}, x^{-2}y^i, (xy)^i, x^5y^i, (yx^4)^iy, \\ & x^4y, e, x^{-3}, x^{8i}y, xy, x^{-5i}y, (x^6y)y^i, \\ & (yx^2)^i, e, x^{-13i}, x^8y^i, (yx^{-11})^i, x^{-21}y^i, (x^{32}y)^iy, \\ & yx^2, e, x^{13}, x^{-34i}y, x^{11}y, x^{21i}y, y^i(x^{-10}y), \\ & (x^{24}y)^i, e, x^{55i}, y^ix^{-34}, (x^{-31}y)^i, x^{89}y^i, x^{120i}y^{i+1}, \\ & x^{24}y, e, x^{-55}, x^{144i}y, \dots, \}, \\ & \{x, e, y, x, xy, y^ix^{-1}, x^{-i-1}, x^{-i+2}, x^{2i+2}, y^ix^{2i-4}, x^{-5i-4}, \\ & x^{-5i+8}y^i, x^{11i}y, x^{-i-17}, x^{-24i+1}, x^{-4i+36}, yx^{52i-2}, x^{2i-77}, \\ & x^{-112i-1}y, x^{-4i+165}y^i, x^{241i+1}, x^{7i-354}, x^{-518i-6}, y^ix^{-4i+760}, \\ & x^{1113i+14}, x^{17i-1632}y^i, x^{-2391i+4}y, x^{i+3505}, x^{-7+5136i}, x^{20i-7528}, \\ & yx^{4-11032i}, x^{-12i+16169}, x^{9+23696i}, x^{12i-34729}y^i, x^{-50897i-1}, \\ & x^{-33i+74594}, x^{22+109322i}, x^{-22i-160220}y^i, x^{-56-234813i}, y^ix^{77i+344136}, \end{aligned}$$

$$yx^{12+504355i}, x^{-i-739169}, x^{33-1083304i}, x^{-88i+1587660}, yx^{-22+2326828i}, \\ x^{54i-3410133}, x^{-33-4997792i}y, y^i x^{56i+7324621}, x^{1+10734753i}, \\ x^{143i-15732546}, x^{-23057166i-90}, y^i x^{-88i+33791920}, x^{234+49524465i}, \dots, \}.$$

Now we concentrate on finding the complex type 4-Padovan lengths of D_m with respect to the generating pair (x, y) . Clearly, the complex type 4-Padovan sequence $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ can be said to form layers of length twenty eight. Using the above, the sequence $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ becomes:

$$a_0 = y, a_1 = e, a_2 = x, a_3 = y, \dots, \\ a_{28} = x^4y, a_{29} = e, a_{30} = x^{-3}, a_{31} = x^{8i}y, \dots, \\ a_{56} = x^{24}y, a_{57} = e, a_{58} = x^{-55}, a_{59} = x^{144i}y, \dots, \\ a_{28i} = x^{4i\lambda_1}y, a_{28i+1} = e, a_{28i+2} = x^{-4i\lambda_2+1}, a_{28i+3} \\ = x^{44i\lambda_3}y, \dots,$$

where $\gcd(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = 1$ and λ_1, λ_2 and λ_3 are the positive integers. Then we need the smallest $i \in \mathbb{N}$ such that $4i = m \cdot k$ for $k \in \mathbb{N}$.

If $m \equiv 0 \pmod{4}$, then the smallest positive value for i is $\frac{m}{4}$ giving the period of the sequence $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ of $7m$.

If $m \equiv 2 \pmod{4}$, then the smallest positive value for i is $\frac{m}{2}$ giving the period of the sequence $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ of $14m$.

If m is odd, then the smallest positive value for i is m giving the period of the sequence $P_{(y,x)}^{(i,4)}(D_m)$ of $28m$.

The proof for the sequence $P_{(x,y)}^{(i,4)}(D_m)$ is similar to the above and so is omitted.

Conjecture 2.1 For every positive integer $m \geq 3$, $L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_m) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_m)$.

Conjecture 2.2 Let p be a prime. If t is the smallest positive integer such that $L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{p^{t+1}}) \neq L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{p^t})$, then

$$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{p^{t+1}}) = p \cdot L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{p^t}).$$

Conjecture 2.3 Let m_1 and m_2 be positive integers with $m_1, m_2 \geq 2$, then

$$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{lcm[m_1, m_2]}) = lcm[L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{m_1}), L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{m_2})].$$

Table list some integers for which Conjectures 1.1, 1.2 and 1.3 are true.

Table: The periods of the complex-type 5-Padovan orbits of D_m

m	lengths	results	
3	620	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_3) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_3)$	
4	124	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_4) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_4)$	
5	744	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_5) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_5)$	
6	620	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_6) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_6)$	
7	148428	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_7) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_7)$	
8	124	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_8) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_8)$	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_8) = L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_4)$
9	1860	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_9) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_9)$	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_9) = 3 \cdot L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_3)$
12	620	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{12}) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_{12})$	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{12}) = lcm[L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_6), L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_4)]$
16	248	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{16}) = L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_{16})$	$L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_{16}) = 2 \cdot L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_8) = 2 \cdot L_{(x,y)}^{(i,5)}(D_4)$

Example 2.1 The complex-type 5-Padovan orbit, $P_{(y,x)}^{(i,5)}(D_4)$ is as follows:

$$\begin{aligned} \{a_0 = y, a_1 = e, a_2 = e, a_3 = x, a_4 = y, a_5 = y^i x^3, \\ a_6 = x^{3i} y, a_7 = x^2, a_8 = x^{3i} y, a_9 = y^i, a_{10} = x^i y, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{11} &= y^i x^2, a_{12} = y, a_{13} = e, a_{14} = x^{3i}, a_{15} = y^i x, \\a_{16} &= x^{3i}, a_{17} = x^2, a_{18} = x^{3i} y, a_{19} = y^i x^3, a_{20} = x^{3i}, \\a_{21} &= x^3, a_{22} = x^{3i}, a_{23} = e, a_{24} = y, a_{25} = x^3, \\a_{26} &= x^{2i} y, a_{27} = y^i x^2, a_{28} = x^{3i}, a_{29} = y^i x^3, a_{30} = e, \\a_{31} &= y^i, a_{32} = x^{2i}, a_{33} = e, a_{34} = x^i, a_{35} = y^i x^2, \\a_{36} &= y x^i, a_{37} = x y^i, a_{38} = x^{2i}, a_{39} = y^i x, a_{40} = y, \\a_{41} &= y^i x, a_{42} = y x^{2i}, a_{43} = x^2 y^i, a_{44} = x^{2i}, a_{45} = x, \\a_{46} &= x^{3i} y, a_{47} = x, a_{48} = e, a_{49} = y^i x, a_{50} = y x^{3i}, \\a_{51} &= x, a_{52} = x^i, a_{53} = x^3, a_{54} = x^{2i}, a_{55} = y^i, \\a_{56} &= x^i, a_{57} = y^i, a_{58} = y, a_{59} = x^3, a_{60} = y x^i, \\a_{61} &= e, a_{62} = y, a_{63} = e, a_{64} = e, a_{65} = x^3, \\a_{66} &= y, a_{67} = y^i x, a_{68} = x^i y, a_{69} = x^2, a_{70} = x^i y, \\a_{71} &= y^i, a_{72} = y x^{3i}, a_{73} = y^i x^2, a_{74} = y, a_{75} = e, \\a_{76} &= x^i, a_{77} = x^3 y^i, a_{78} = x^i, a_{79} = x^2, a_{80} = y x^i, \\a_{81} &= x y^i, a_{82} = x^i, a_{83} = x, a_{84} = x^i, a_{85} = e, \\a_{86} &= y, a_{87} = x, a_{88} = x^{2i} y, a_{89} = x^2 y^i, a_{90} = x^i, \\a_{91} &= x y^i, a_{92} = e, a_{93} = y^i, a_{94} = x^{2i}, a_{95} = e, \\a_{96} &= x^{3i}, a_{97} = x^2 y^i, a_{98} = x^{3i} y, a_{99} = x^3 y^i, \\a_{100} &= x^{2i}, a_{101} = x^3 y^i, a_{102} = y, a_{103} = x^3 y^i, a_{104} = x^{2i} y, \\a_{105} &= x^2 y^i, a_{106} = x^{2i}, a_{107} = x^3, \\a_{108} &= x^i y, a_{109} = x^3, a_{110} = e, a_{111} = x^3 y^i, \\a_{112} &= x^i y, a_{113} = x^3, a_{114} = x^{3i}, a_{115} = x, \\a_{116} &= x^{2i}, a_{117} = y^i, a_{118} = x^{3i}, \\a_{119} &= y^i, a_{120} = y, a_{121} = x, a_{122} = y x^{3i},\end{aligned}$$

$$a_{123} = e, a_{124} = y, a_{125} = e, a_{126} = e, a_{127} = x, a_{128} = y, \dots \}.$$

It follows that the sequence $P_{(y,x)}^{(i,5)}(D_4)$ simply periodic and $L_{(y,x)}^{(i,5)}(D_4) = 124$.

REFERENCES

- Akuzum, Y. (2023). The complex-type k -Pell numbers and their applications. *Journal of Mathematics*, 2023(1), 6631659.
- Akuzum, Y., & Deveci, O. (2020). The Hadamard-type k -step Fibonacci sequences in groups. *Communications in Algebra*, 48(7), 2844-2856.
- Bravo, J. J., & Herrera, J. L. (2022). Generalized Padovan sequences. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 37(4), 977-988.
- Campbell, C. M., & Campbell, P. P. (2004). On the Fibonacci length of powers of dihedral groups. In F. T. Howard (Ed.), *Applications of Fibonacci numbers* (Vol. 9, pp. 69-85). Kluwer Academic Publisher.
- Campbell, C. M., Doostie, H., & Robertson, E. F. (1990). Fibonacci length of generating pairs in groups. In G. E. Bergum (Ed.), *Applications of Fibonacci numbers* (Vol. 3, pp. 27-35). Springer.
- Chang, D. K. (1986). Higher-order Fibonacci sequences modulo m . *Fibonacci Quarterly*, 24(2), 138-139.
- Deveci, O., Akuzum, Y., & Colin, M. C. (2018). The recurrence sequences via polyhedral groups. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 67(2), 99-115.
- Deveci, O., Akuzum, Y., & Uğurlu, G. (2018). The k -step Fibonacci sequences via Hurwitz matrices. *Analele Stiintifice ale Universitatii Al. I. Cuza din Iasi Matematica*, 64(f.1), 121-134.
- Deveci, O., Artun, G., & Akuzum, Y. (2017). The Fibonacci p -sequences and the Padovan p -sequences in the extended triangle groups. *Romai Journal*, 13, 19-25.

- Deveci, O., Erdag, O., & Güngöz, U. (2022). The complex-type cyclic-Fibonacci sequence and its applications. *Journal of Mahani Mathematical Research*, 12(2), 235-246.
- Deveci, Ö., & Karaduman, E. (2017). On the Padovan p -numbers. *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics*, 46(4), 579-592.
- Deveci, Ö., Hulku, S., & Shannon, A. G. (2021). On the co-complex-type k -Fibonacci numbers. *Chaos Solitons Fractals*, 153, 111522.
- Deveci, Ö., & Shannon, A. G. (2021). The complex-type k -Fibonacci sequences and their applications. *Communications in Algebra*, 49(3), 1352-1367.
- Deveci, Ö., & Shannon, A. G. (2018). The quaternion-Pell sequence. *Communications in Algebra*, 46(12), 5403-5409.
- Deveci, O., Shannon, A. G., Erdag, O., & Ceko, G. (submitted). The complex-type k -Padovan sequences and their applications.
- Doostie, H., & Campbell, P. P. (2006). On the commutator lengths of certain classes of finitely presented groups. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2006(1), 074981.
- Erdag, O., & Deveci, O. (2022). The complex-type cyclic-Jacobsthal sequence and its applications. In E. Orhan & E. Seven (Eds.), *Teoriden Uygulamaya Fizik ve Matematik Alanında Akademik Çalışmalar II* (pp. 197-212). Iksad Publications House.
- Erdag, O., & Deveci, O. (2018). The arrowhead-Pell-random-type sequences in finite groups. *AIP Conference Proceedings*, 1991(1). AIP Publishing LLC.

- Erdag, O., Deveci, O., & Karaduman, E. (2022). The complex-type cyclic-Pell sequence and its applications. *Turkish Journal of Science*, 7(3), 202-210.
- Hashemi, M., & Pirzadeh, M. (2018). t -nacci sequences in some special groups of order m^3 . *Mathematical Reports*, 20(4), 389-399.
- Hulk, S., Erdag, O., & Deveci, O. (2023). Complex-type Narayana sequence and its application. *Maejo International Journal of Science and Technology*, 17(2), 163-176.
- Karaduman, E., & Aydın, H. (2003). On Fibonacci sequences in nilpotent groups. *Mathematica Balkanica*, 17(3-4), 207-214.
- Karaduman, E., & Aydın, H. (2003). General 2-step Fibonacci sequences in nilpotent groups of exponent p and nilpotency class 4. *Applied Mathematics and Computation*, 141(2-3), 491-497.
- Knox, S. W. (1992). Fibonacci sequences in finite groups. *Fibonacci Quarterly*, 30(2), 116-120.
- Iliopoulos, V. (2015). The plastic number and its generalized polynomial. *Cogent Mathematics*, 2(1), Art. ID:1023123.
- Lu, K., & Wang, J. (2006). k -step Fibonacci sequence modulo m . *Utilitas Mathematica*, 71, 169-177.
- Mehraban, E., Deveci, O., & Hincal, E. (2023). The t -Fibonacci sequences in the 2-generator p -groups of nilpotency class 2. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 29(4), 827-841.
- Mehraban, E., & Hashemi, M. (2023). Fibonacci length and the generalized order k -Pell sequences of the 2-generator p -

- groups of nilpotency class 2. *Journal of Algebra and Its Applications*, 22(3), 2350061.
- Renault, M. (2013). The period, rank, and order of the (a,b) -Fibonacci sequence mod m . *Mathematics Magazine*, 86(5), 372-380.
- Shah, A. P. (1968). Fibonacci sequence modulo m . *Fibonacci Quarterly*, 6(2), 139-141.
- Vinson, J. (1963). The relations of the period modulo m to the rank of application of m in the Fibonacci sequence. *Fibonacci Quarterly*, 1(2), 37-45.
- Özkan, E. (2014). Truncated Lucas sequences and its period. *Applied Mathematics and Computation*, 232, 285-291.
- Tas, S., & Karaduman, E. (2014). The Padovan sequences in finite groups. *Chiang Mai Journal of Science*, 41(2), 456-462.
- Wall, D. D. (1960). Fibonacci series modulo m . *American Mathematical Monthly*, 67(6), 525-532.
- Wilcox, H. J. (1986). Fibonacci sequences of period n in groups. *Fibonacci Quarterly*, 24(4), 356-361.

MATEMATİK

yaz
yayınları

YAZ Yayınları
M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar / AFYONKARAHİSAR
Tel : (0 531) 880 92 99
yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com