

MATEMATİK ALANINDA AKADEMİK TARTIŞMALAR

Editör: Prof.Dr. Hafize GÜMÜŞ

yaz
yayınları

Matematik Alanında Akademik Tartışmalar

Editör

Prof.Dr. Hafize GÜMÜŞ

yaz
yayınları

2026

**Matematik Alanında Akademik
Tartışmalar**

Editör: Prof.Dr. Hafize GÜMÜŞ

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-8996-51-7

Haziran 2026 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

İÇİNDEKİLER

- On A Class of Arf Numerical Semigroups.....1**
Sedat İLHAN
- Ritz ve Galerkin Metodları.....18**
Ali DENİZ
- On Cox–Snell Bias-Corrected Estimators for the
Unit–Muth Distribution.....38**
Hasan Hüseyin GÜL, Ahmet KOCATÜRK
- Bağıntılar ve Fonksiyonlar: Kavramsal Yapı,
Öğrenme Güçlükleri ve Öğrenci Yanılgıları61**
Hafize GÜMÜŞ

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

ON A CLASS OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS

Sedat İLHAN¹

1. INTRODUCTION

Numerical semigroups emerged as a natural object of study within number theory and algebra through the investigation of additive structures on the nonnegative integers. Their modern development is closely tied to commutative algebra and algebraic geometry, especially through the study of monomial curves, diophantine equations, and factorization theory. numerical semigroups provide a useful framework for understanding non-unique factorizations and invariants such as the frobenius number, genus, and embedding dimension. Applications appear in coding theory, optimization problems, and combinatorics, as well as in algebraic geometry where they help describe value semigroups of singular points on curves. more recently, they have also been used in computational algebra systems and discrete modeling contexts due to their algorithmic and structural properties ([10,11,12,13]).

Arf and numerical semigroups emerged from the intersection of algebra, number theory, and algebraic geometry, especially through the work of turkish mathematician cahit arf in the mid-20th century ([14]). Arf introduced what are now called arf rings and arf closures while studying singularities of algebraic curves and the behavior of multiplicity sequences, which led to important structural insights connected to numerical semigroups.

¹ Prof. Dr. Dicle Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ORCID: 0000-0002-6608-8848.

Numerical semigroups themselves are additive subsemigroups of the nonnegative integers with finite complement, and they became a useful tool for encoding invariants of curve singularities and value semigroups of local rings. Over time, both arf semigroups and numerical semigroups found applications beyond pure theory, including coding theory, combinatorics, factorization problems, and algebraic geometry, where they help classify singular points and analyze resolution processes. Today, they remain active research topics due to their rich structure and wide range of mathematical applications.

Let \mathbb{N} and \mathbb{Z} be the sets of non negative integers and integers, respectively. If it is satisfied following conditions then the subset V of \mathbb{N} is a numerical semigroup :

- (1) $0 \in V$,
- (2) $\forall h, g \in V, h + g \in V$,
- (3) $Card(\mathbb{N} \setminus V)$ is finite ($\Leftrightarrow \gcd(V) = 1$).

Here, $\gcd(V)$ is greatest common divisor the elements of V .

Let V be a numerical semigroup, then we define following numbers:

$f(V) = \max(\mathbb{Z} \setminus V)$ is called Frobenius number of V ,

$h = h(V) = f(V) + 1$ is called conductor of V ,

$\mu(V) = \min\{v \in V : h > 0\}$ is called multiplicity of V ,

and

$\alpha = \alpha(V) = Card(\{0, 1, 2, \dots, f(V) \cap V\})$ is called determine number of V . ([9])

If V is a numerical semigroup such that $V = \langle h_1, h_2, \dots, h_u \rangle$, then we write

$V = \langle h_1, h_2, \dots, h_u \rangle = \{v_0 = 0, v_1, v_2, \dots, v_{\alpha(V)-1}, v_{\alpha(V)} = f(V) + 1, \rightarrow \dots\}$
 where $v_j < v_{j+1}$ and $j = 1, 2, \dots, \alpha(V)$. Here, the arrow means: if $y > f(V) + 1$ then $y \in V$ ([8]).

If $u \in \mathbb{N}$ but $u \notin V$, then u is called gap of V . We denote the set of all gaps of V , by $T(V)$, i.e, $T(V) = \mathbb{N} \setminus V$, and the $\gamma(V) = \text{Card}(T(V))$ is called genus of V . Also, it is known that $\gamma(V) + \alpha(V) = f(V) + 1$ (for details see [4,5,10]).

Let $V = \langle h_1, h_2, \dots, h_u \rangle = \{v_0 = 0, v_1, v_2, \dots, v_{\alpha(V)-1}, v_{\alpha(V)} = f(V) + 1, \rightarrow \dots\}$
 be a numerical semigroup. Then for $m \geq 0$, we define the following sets:

$$V_m = \{v \in V : v \geq v_m\} \text{ and } V(m) = \{k \in \mathbb{N} : k + V_m \subseteq V\} .$$

It is clear that $V(m)$ is a numerical semigroup, and we obtain the following chain

$$V_\alpha \subset V_{\alpha-1} \subset \dots \subset V_1 \subset V_0 = V = V(0) \subset V(1) \subset \dots \subset V(\alpha - 1) \subset V(\alpha) = \mathbb{N}.$$

In this case, the number $\beta = \beta(V) = \text{Card}(V(1) \setminus V)$ is called type of V . Similarly, we put, for $m \geq 0$,

$\beta_m = \beta_m(V) = \text{Card}(V(m) \setminus V(m-1))$. Clearly, $\beta_1(V) = \beta(V)$, but, generally, $\beta_m(V) \neq \beta(V(m))$. In a numerical semigroup V , the sequence of positive integers $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ obtained in this way is called the type sequence of V ([8]).

Let V be a numerical semigroup, then V is Arf if $v_1 + v_2 - v_3 \in V$, for all $v_1, v_2, v_3 \in V$ such that $v_1 \geq v_2 \geq v_3$ (*). This is the original definition of an Arf numerical semigroup given by Arf in [14]. We will refer to the condition (*) as the Arf condition. Fifteen conditions equivalent to the Arf condition are given in [11], where the definition of an Arf numerical semigroup is based on those equivalent conditions. Inspired by the paper [14] of Arf, Lipman introduced and studied Arf rings in his paper [2]

where characterizations of those rings via their value semigroups yield Arf numerical semigroups. (for details see [1,3,6,7]).

In this study, we will give some results about determine number, genus and type sequences in Arf numerical semigroups with multiplicity five and conductor h , such that $h > 5$, $h \neq 5u + 1$, and $h, u \in \mathbb{N}$.

2. THE DETERMINE NUMBER AND GENUS OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS WITH MULTIPLICITY FIVE.

In this section, we will give formulas about determine number and genus of Arf numerical semigroups with multiplicity five.

Theorem 2.1. ([3]) Let V be a numerical semigroup with multiplicity five and conductor h such that $h > 5$, $h \neq 5u + 1$, and $h, u \in \mathbb{N}$. Then, the Arf numerical semigroup V is one of followings:

- (1) If $h \equiv 0 \pmod{5}$ then
 - (a) $V = \langle 5, h - 2, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ or
 - (b) $V = \langle 5, h + 1, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle$;
- (2) If $h \equiv 2 \pmod{5}$ then $V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$;
- (3) If $h \equiv 3 \pmod{5}$ then $V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle$;
- (4) If $h \equiv 4 \pmod{5}$ then
 - (a) $V = \langle 5, h - 2, h, h + 2, h + 4 \rangle$ or
 - (b) $V = \langle 5, h, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle$.

Proposition 2.2. Let $V = \langle 5, h - 2, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$(a) \quad \alpha(V) = \frac{h}{5} + 1$$

$$(b) \quad \gamma(V) = \frac{4h}{5} - 1 .$$

Proof. Let $V = \langle 5, h - 2, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$V = \langle 5, h - 2, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle = \{0, 5, 10, \dots, h - 5, h - 2, h, \dots\}$. Thus, we obtain

$$(a) \quad \alpha = \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h - 1\} \cap V)$$

$$= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h - 5, h - 2\})$$

$$= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h - 5\}) + \text{Card}(\{h - 2\}) = \frac{h}{5} + 1 .$$

$$(b) \quad \text{We find that } \gamma(V) = f(V) + 1 - \alpha(V) = (h - 1) + 1 - \left(\frac{h}{5} + 1\right) = \frac{4h}{5} - 1 \quad \blacksquare$$

Proposition 2.3. Let $V = \langle 5, h + 1, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$(a) \quad \alpha(V) = \frac{h}{5}$$

$$(b) \quad \gamma(V) = \frac{4h}{5} .$$

Proof. Let $V = \langle 5, h + 1, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$V = \langle 5, h + 1, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle = \{0, 5, 10, 15, \dots, h - 5, h, \rightarrow \dots\}$. Thus, we find

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha &= \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h - 1\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h - 5\}) = \frac{h}{5} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) We obtain } \gamma(V) &= f(V) + 1 - \alpha(V) \\ &= (h - 1) + 1 - \left(\frac{h}{5}\right) = \frac{4h}{5} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 2.4. Let $V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 2 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha(V) &= \frac{h+3}{5} \\ \text{(b) } \gamma(V) &= \frac{4h-3}{5} . \end{aligned}$$

Proof. Let $V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 2 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle = \{0, 5, 10, \dots, h - 7, h - 2, h, \rightarrow \dots\}$. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha &= \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h - 1\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h - 2\}) = \frac{h+3}{5} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(b) We find that } \gamma(V) &= f(V) + 1 - \alpha(V) = (h - 1) + 1 - \\ &\left(\frac{h+3}{5}\right) = \frac{4h-3}{5} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 2.5. Let $V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 3 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$(a) \quad \alpha(V) = \frac{h+2}{5}$$

$$(b) \quad \gamma(V) = \frac{4h-2}{5}.$$

Proof. Let $V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 3 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$$V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle = \{0, 5, 10, \dots, h - 3, h, \rightarrow \dots\}$$

. Thus, we find

$$\begin{aligned} (a) \quad \alpha &= \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h - 1\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h - 3\}) = \frac{h+2}{5}. \end{aligned}$$

$$(b) \quad \text{We obtain } \gamma(V) = f(V) + 1 - \alpha(V) = (h - 1) + 1 - \left(\frac{h+2}{5}\right) = \frac{4h-2}{5} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.6. Let $V = \langle 5, h - 2, h, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$(a) \quad \alpha(V) = \frac{h+6}{5}$$

$$(b) \quad \gamma(V) = \frac{4h-6}{5}.$$

Proof. Let $V = \langle 5, h - 2, h, h + 2, h + 4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$V = \langle 5, h-2, h, h+2, h+4 \rangle = \{0, 5, 10, \dots, h-2, h, \rightarrow \dots\}$$

. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha &= \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h-1\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, \dots, h-4, h-3, h-2\}) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, \dots, h-4\}) + \text{Card}(\{h-3, h-2\}) \\ &= \frac{h-4}{5} + 2 = \frac{h+6}{5} . \end{aligned}$$

$$\text{(b) We find } \quad \gamma(V) = f(V) + 1 - \alpha(V) = (h-1) + 1 - \left(\frac{h+6}{5}\right) = \frac{4h-6}{5} \quad \blacksquare$$

Proposition 2.7. Let $V = \langle 5, h, h+2, h+3, h+4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$\text{(a) } \alpha(V) = \frac{h+1}{5}$$

$$\text{(b) } \gamma(V) = \frac{4h-1}{5} .$$

Proof. Let $V = \langle 5, h, h+2, h+3, h+4 \rangle$ be an Arf numerical semigroup with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$$V = \langle 5, h, h+2, h+3, h+4 \rangle = \{0, 5, 10, \dots, h-4, h, \rightarrow \dots\}$$

. Thus, we obtain

$$\begin{aligned} \text{(a) } \alpha &= \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, f(V)\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, h-1\} \cap V) \\ &= \text{Card}(\{0, 5, 10, 15, \dots, h-4\}) = \frac{h-4}{5} + 1 = \frac{h+1}{5} . \end{aligned}$$

$$\text{(b) We find that } \quad \gamma(V) = f(V) + 1 - \alpha(V) = (h-1) + 1 - \left(\frac{h+1}{5}\right) = \frac{4h-1}{5} \quad \blacksquare$$

3. THE TYPE SEQUENCES OF ARF NUMERICAL SEMIGROUPS WITH MULTIPLICITY FIVE

In this section, we will give formulas about type sequence of Arf numerical semigroups with multiplicity five.

Proposition 3.1. ([8]) Let V be a numerical semigroup and $V \neq \mathbb{N}$. Then,

$$1 \leq \beta_j(V) \leq \beta_1(V) ,$$

for each $j = 1, 2, \dots, \alpha(V)$.

Proposition 3.2 ([8]) Let V be a numerical semigroup. Then,

$$\gamma(V) = \sum_{j=1}^{\alpha(V)} \beta_j(V) .$$

Proposition 3.3 ([8]) Let V be a numerical semigroup and $\alpha = \alpha(V)$. Then,

$$\beta_\alpha = \beta_\alpha(V) = v_\alpha - v_{\alpha-1} - 1$$

Proposition 3.4. ([11]) Let V be a Arf numerical semigroup and $\alpha = \alpha(V)$. Then,

$$\beta_j = \beta_j(V) = v_j - v_{j-1} - 1 ,$$

for every $j = 1, 2, \dots, \alpha = \alpha(V)$.

Proposition 3.5. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h - 2, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$

with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\alpha-2} = 4, \quad \beta_{\alpha-1} = 2 \quad \text{and} \quad \beta_\alpha = 1.$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = \langle 5, h-2, h+1, h+2, h+4 \rangle$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that

$h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we write

$$V = \langle 5, h-2, h+1, h+2, h+4 \rangle$$

$= \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, \dots, v_{\alpha-3} = h-10, v_{\alpha-2} = h-5, v_{\alpha-1} = h-2, v_\alpha = h, \dots\}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\beta_1 = v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4,$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4,$$

⋮

$$\beta_{\alpha-2} = v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h-5) - (h-10) - 1 = 4,$$

$$\beta_{\alpha-1} = v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h-2) - (h-5) - 1 = 2 \quad \text{and}$$

$$\beta_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h-2) - 1 = 1 \quad \blacksquare$$

Proposition 3.6. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h+1, h+2, h+3, h+4 \rangle$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$\beta_k = 4 \quad \text{for } k = 1, 2, \dots, \alpha = \alpha(V).$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = \langle 5, h + 1, h + 2, h + 3, h + 4 \rangle = \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, v_3 = 15, \dots, v_{\alpha-3} = h - 15, v_{\alpha-2} = h - 10, v_{\alpha-1} = h - 5, v_\alpha = h, \rightarrow \dots\}$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 0 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\beta_1 = v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 ,$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4 ,$$

⋮

$$\beta_{\alpha-2} = v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h - 10) - (h - 15) - 1 = 4 ,$$

$$\beta_{\alpha-1} = v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h - 10) - (h - 5) - 1 = 4 \text{ and}$$

$$\beta_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h - 5) - 1 = 4 \quad \blacksquare$$

Proposition 3.7. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 2 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\alpha-2} = \beta_{\alpha-1} = 4 \text{ and } \beta_\alpha = 1 .$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle = \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, \dots, v_{\alpha-3} = h - 12, v_{\alpha-2} = h - 7, v_{\alpha-1} = h - 2, v_\alpha = h, \rightarrow \dots\}$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 2 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\beta_1 = v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 ,$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4 ,$$

⋮

$$\begin{aligned}\beta_{\alpha-2} &= v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h - 7) - (h - 12) - 1 = 4 , \\ \beta_{\alpha-1} &= v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h - 2) - (h - 7) - 1 = 4 \text{ and} \\ \beta_{\alpha} &= v_{\alpha} - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h - 2) - 1 = 1 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposition 3.8. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_{\alpha}\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 3 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\alpha-2} = \beta_{\alpha-1} = 4 \text{ and } \beta_{\alpha} = 2 .$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_{\alpha}\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = \langle 5, h, h + 1, h + 3, h + 4 \rangle = \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, \dots, v_{\alpha-3} = h - 13, v_{\alpha-2} = h - 8, v_{\alpha-1} = h - 3, v_{\alpha} = h, \dots\}$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 3 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\begin{aligned}\beta_1 &= v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 , \\ \beta_2 &= v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4 , \\ &\vdots \\ \beta_{\alpha-2} &= v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h - 8) - (h - 13) - 1 = 4 , \\ \beta_{\alpha-1} &= v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h - 3) - (h - 8) - 1 = 4 \text{ and} \\ \beta_{\alpha} &= v_{\alpha} - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h - 3) - 1 = 2 \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Proposition 3.9. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_{\alpha}\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h - 2, h, h + 2, h + 4 \rangle$ with

multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then, we have

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\alpha-2} = 4 \quad \text{and} \quad \beta_{\alpha-1} = \beta_\alpha = 1 .$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = \langle 5, h-2, h, h+2, h+4 \rangle = \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, \dots, v_{\alpha-3} = h-9, v_{\alpha-2} = h-4, v_{\alpha-1} = h-2, v_\alpha = h, \dots\}$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\beta_1 = v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 ,$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4 ,$$

⋮

$$\beta_{\alpha-2} = v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h-4) - (h-9) - 1 = 4 ,$$

$$\beta_{\alpha-1} = v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h-2) - (h-4) - 1 = 1 \quad \text{and}$$

$$\beta_\alpha = v_\alpha - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h-2) - 1 = 1 \quad \blacksquare$$

Proposition 3.10. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup $V = \langle 5, h, h+2, h+3, h+4 \rangle$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv 4 \pmod{5}$ and $h \in \mathbb{N}$. Then,

$$\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_{\alpha-2} = \beta_{\alpha-1} = 4 \quad \text{and} \quad \beta_\alpha = 3 .$$

Proof. Let $\{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{\alpha-1}, \beta_\alpha\}$ be type sequence of Arf numerical semigroup

$V = \langle 5, h, h+2, h+3, h+4 \rangle = \{v_0 = 0, v_1 = 5, v_2 = 10, \dots, v_{\alpha-3} = h-14, v_{\alpha-2} = h-9, v_{\alpha-1} = h-4, v_\alpha = h, \dots\}$ with multiplicity five and conductor $h > 5$ such that $h \equiv$

$4(mod 5)$ and $h \in \mathbb{N}$. In this case, we obtain following, since V is Arf numerical semigroup:

$$\beta_1 = v_1 - v_0 - 1 = 5 - 0 - 1 = 4 ,$$

$$\beta_2 = v_2 - v_1 - 1 = 10 - 5 - 1 = 4 ,$$

\vdots

$$\beta_{\alpha-2} = v_{\alpha-2} - v_{\alpha-3} - 1 = (h - 9) - (h - 14) - 1 = 4 ,$$

$$\beta_{\alpha-1} = v_{\alpha-1} - v_{\alpha-2} - 1 = (h - 4) - (h - 9) - 1 = 4 \text{ and}$$

$$\beta_{\alpha} = v_{\alpha} - v_{\alpha-1} - 1 = (h) - (h - 4) - 1 = 3 \quad \blacksquare$$

Example 3.11. Let's take $h = 12$ in $V = \langle 5, h, h + 1, h + 2, h + 4 \rangle$ Arf numerical semigroup. Then, we write $V = \langle 5, 12, 13, 14, 16 \rangle = \{0, 5, 10, 12, \rightarrow \dots\}$. Here, $f(V) = 11$, $\mu(V) = 5$, $\alpha = \alpha(V) = \text{Card}(\{0, 1, 2, \dots, 11\} \cap V) = \text{Card}(\{0, 5, 10\}) = 3$, the set of all gaps of V is $T(V) = \mathbb{N} \setminus V = \{1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11\}$, and the genus of V is $\gamma(V) = \text{Card}(T(V)) = 9$. In fact, we obtain $\alpha(V) = \frac{h+3}{5} = 3$ and $\gamma(V) = \frac{4h-3}{5} = 9$ from Proposition 2.4.

We find the set of type sequence of V is $\{\beta_1 = 4, \beta_2 = 4, \beta_3 = 1\}$ from Proposition 3.7. In fact;

$$V_1 = \{v \in V : v \geq v_1 = 5\} = \{5, 10, 12, \rightarrow \dots\} \text{ and}$$

$$V(1) = \{u \in \mathbb{N} : u + V_1 \mid V\} = \{0, 5, 7, 8, \rightarrow \dots\} .$$

Thus, we find

$$\beta_1 = \beta_1(V) = \text{Card}(V(1) \setminus V) = \text{Card}(\{7, 8, 9, 11\}) = 4 .$$

$$V_2 = \{v \in V : v \geq v_2 = 10\} = \{10, 12, \rightarrow \dots\} \text{ and}$$

$$V(2) = \{u \in \mathbb{N} : u + V_2 \mid V\} = \{0, 2, 3, \rightarrow \dots\} .$$

Thus, we find

$B_2 = \beta_2(V) = \text{Card}(V(2) \setminus V(1)) = \text{Card}(\{2,3,4,6\}) = 4$,
and $V_3 = \{v \in V: v \geq v_3 = 12\} = \{12, \rightarrow \dots\}$,

$V(3) = \{u \in \mathbb{N} : u + V_3 \mid V\} = \{0,1,2, \rightarrow \dots\}$. Thus, we find
 $\beta_3 = \beta_3(V) = \text{Card}(V(3) \setminus V(2)) = \text{Card}(\{1\}) = 1$.

REFERENCES

- [1] İlhan S. and Karakaş H.İ. (2017). Arf numerical semigroups, Turkish Journal of Mathematics, 41, 1448-1457.
- [2] Lipman J. (1971). Stable ideals and Arf rings. Am J ath.,93, 649-685.
- [3] Karakaş,H.İ., (2018) . Parametrizing numerical semigroups with multiplicity up to 5 , International Journal of Algebra and Computation, 28 (1), 69–95.
- [4] Froberg, R.,Gotlieb, C., &Haggkvist, R., (1987). On numerical semigroups. Semigroup Forum, 35, 63-68.
- [5] Rosales,J.C. (2005). Fundamental gaps of numerical semigroups generated by two elements, Linear Algebra and its Applications, 405, 200-208.
- [6] Rosales, J.C., Garcia-Sanchez,P.A., Garcia-Garcia, J.I. and Branco, M.B.(2004). Arf numerical semigroups, Journal of Algebra, 276, 3-12.
- [7] İlhan, S. And Çelik, A. (2017). L-Sequences Of Saturated Numerical Semigroups With Multiplicity ≤ 7 , J. Semigroup Theory Appl. 6, 1-6.
- [8] D'anna,M.(1998).Type sequencess of numerical semigroups, Semigroup Forum,56,1-31.
- [9] Rosales, J.C. and Garcia Sanchez, P.A.(2009). Numerical semigroups, Developments in Mathematics, Springer, Newyork.
- [10] Assi, A. , Danna, M. and Garcia Sanchez, P.A.,(2020). Numerical semigroups and Aplications, Springer, Newyork.
- [11] Barucci, V., Dobbs,D. E. and Fontana,,M.(1997). Maximality Properties in Numerical Semigroups and Applications to

One-Dimensional Analytically Irreducible Local Domains. Mem. Amer. Math. Soc., 125,1-77.

- [12] Matsuoka, T., (1971). On the degree of singularity of one dimensional analytically irreducible noetherian local rings, J. Math. Kyoto Univ. 11(3), 485-494.
- [13] Rim,D.S. and Vitulli, M.A. (1977). Weierstrass points and monomial curves, J. of Algebra, 48 , 454-476.
- [14] Arf , C.(1949). Une interpretation algebrique de la suite de multiplicite d'une branche algebrique. Proc London Math Soc ., 20, 256-287 (in French).

RITZ VE GALERKIN METODLARI

Ali DENİZ¹

1. GİRİŞ

Mühendislikte ve uygulamalı bilimlerin birçok alanında ortaya çıkan problemlerin matematiksel modellerinde lineer olmayan diferansiyel denklemler karşımıza çıkmaktadır. Bu nedenle lineer olmayan diferansiyel denklemlerin analitik veya sayısal çözümlerinin elde edilmesi son derece önemlidir. Bu tür denklemlerin büyük bir çoğunluğunun analitik çözümleri bulunamaz. Bu yüzden lineer olmayan denklemlerin çözümleri sayısal yöntemler ya da analitik yaklaşım yöntemleri kullanılarak hesaplanabilmektedir.

Mekanikte ve mühendislikteki problemlerde genellikle varyasyonel metotlar kullanılmaktadır. Bu metotlar ekstremum prensibini içermekte olup gerçeğe en yakın sonuçların bulunmasını sağlayan metotlardır.

Varyasyonel yaklaşım; bir fonksiyonelin (bağımsız değişkeni fonksiyon olan bir fonksiyonun) ekstremum noktalarının yani maksimum ve minimum değerlerinin elde edilmesi demektir. Örneğin;

$$I[y(x)] = \int_0^{\pi} [y(x)]^2 dx$$

¹ Doçent Doktor, Uşak Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, ORCID: 0000-0002-6514-2320.

bir fonksiyondur ve genellikle köşeli parantezle gösterilir. Varyasyonelin çalışma alanlarından bir diğeri de bir fonksiyoneli maksimize ve minimize eden fonksiyonu belirlemektir.

$$y'(x) = \frac{dy}{dx}$$

olmak üzere, varyasyonel analizde genellikle kullanılan fonksiyonel;

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} F(x, y(x), y'(x)) dx$$

biçimindedir. Amaç bu fonksiyoneli

$$y(x_1) = a \quad , \quad y(x_2) = b$$

sınır koşulları altında maksimize (ya da minimize) eden y fonksiyonunu bulmaktır.

Fonksiyonelin birinci türevinin sıfır olduğu noktada fonksiyonun ekstremum değerleri bulunur. İkinci türevinin sıfırdan büyük veya küçük olmasına göre bu değerlerin maksimum veya minimum olduğu tespit edilir. Mühendislik problemlerinin sınır koşulları verilen diferansiyel eşitliklerin çözümünde kullanılır. Gerçekte analitik problemlerin çözümü zorlayıcıdır. Bu durumda sıklıkla yaklaşık çözüme başvurulur.

Ağırlıklı Kalanlar Yaklaşımı; bir fonksiyonun çeşitli değerler karşılığında elde edilen yaklaşık çözümü ile gerçek çözümü arasındaki farkların bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılarak toplamlarını minimize etme işlemine denir. Bu yaklaşım kullanılarak eleman özelliklerinin elde edilmesinin avantajı, fonksiyonellerin elde edilemediği problemlerde uygulanabilir olmasıdır.

Direkt metotlar; sonlu sayıdaki değişken fonksiyonların ekstremum problemleri için varyasyonel problemlerin limit durumları olarak kabul edilir.

Bu metotlar Euler, Ritz, L.Kontorovich ve Galerkin metotlarıdır. Bu çalışmada Ritz Metodu kullanımı Possion Denklemi, Euler-Lagrange Denklemleri için Ritz çözümü incelenmiştir.

Ritz için iki uygulama gerçekleştirilmiş ve Galerkin metodu incelenip yine iki uygulama gerçekleştirilerek (2.3.3) çözümüyle (2.3.1) çözümü karşılaştırılmış ve yaklaşık metotların karşılaştırılması yapılmıştır.

2. RITZ METODU

Genellikle matematiksel fizik problemlerinin kesin ya da yaklaşık çözümleri için kullanılır. Bu metot varyasyonel problemlerin yaklaşık çözümünü verir. Varyasyonel problemler;

$$I[y(x)] = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^n(x)) dx \quad (2.1)$$

biçiminde sınır koşullu integrali verilen, bu sınırlar arasında türevlenebilen ve integrallenebilen fonksiyonlardır.

$I[y(x)]$ Fonksiyonelinin değerleri, varyasyonel problemin keyfi kabul edilebilir eğrileri üzerinde düşünülemez, fakat $w_1(x), w_2(x), w_3(x), \dots, w_n(x)$... fonksiyon dizilerinin ilk n fonksiyonun sabit katsayılarıyla oluşturulmuş

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \quad (2.2)$$

biçimindeki lineer kombinasyonları üzerinde düşünülebilir. (2.2)'deki problem dâhilinde kabul edilebilir olmalıdır. Böyle

lineer kombinasyonlarda (2,1) fonksiyoneli $\varphi(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n)$ fonksiyonunun ekstremize olması için $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ katsayıları seçilir. Bu yüzden $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ katsayıları

$$\frac{d\varphi}{d\alpha_i} = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, n$$

denklem sisteminin çözümü ile bulunur.

$n \rightarrow \infty$ için limit bulunduğu takdirde elimizdeki varyasyonel problemin kesin çözümü olan (2.1) fonksiyoneli ve $w_1(x), w_2(x), w_3(x), \dots, w_n(x) \dots$ dizilerini düzenleyen kesin şartları için (2.2) fonksiyonunu elde ederiz. Eğer sadece (2.2) fonksiyonunun ilk n teriminden sonraki terimler ihmal edilirse varyasyonel problemin yaklaşık çözümü elde edilmiş olur.

(2.1) fonksiyonlarının kabul edilebilir olması için gerekli şart sınır koşullarını sağlanmasıdır. Örneğin; $y_0(x) = y_1(x) = 0$ sınır şartları ya da β_{ij} 'ler katsayı olmak üzere

$$\beta_{1j}y(x_j) + \beta_{2j}y(x_j) = 0 \quad , \quad j = 0, 1$$

şeklindeki sınır şartlarını sağlayan koordinat fonksiyonunu;

$$w_i(x) = (x - x_0)(x - x_1)\varphi(x)$$

olarak seçilebilir. Buradaki $\varphi(x)$ 'ler sürekli fonksiyonlar olup $w_i(x)$;

$$w_i(x) = \sin \frac{i\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0} \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

biçiminde de seçilebilir.

Eğer sınır şartları homojen değil ise $y(x_0) = y_0$, $y(x_1) = y_1$ şeklinde , y_0, y_1 değerlerinden en az biri sıfırdan farklı olmak üzere varyasyon problemin çözümü ;

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) + w_0(x)$$

biçiminde seçilir. Buradaki $w_0(x)$ fonksiyonu

$$w_0(x) = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}(x - x_0) + y_0$$

lineer olarak seçilir.

Sonuç olarak koordinat fonksiyonların seçimi metodun başarısını büyük ölçüde etkiler.

2.1. Ritz İçin Possion Denklemi

Ritz metodunun genellikle matematiksel fizik problemlerinin yaklaşık çözümleri için kullanılacağından bahsetmiştik. D tanım kümesinde

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.1.1)$$

denkleminin bir çözümü z değerleri için fonksiyonel olarak

$$\iint_D \left[\left(\frac{dz}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dy} \right)^2 + 2zf(x, y) \right] dx dy \quad (2.1.2)$$

şeklinde elde edilir. Bu fonksiyonelin, z ekstremum fonksiyonu direkt metotların herhangi biri ile bulunabilir. Matematiksel fizik problemleri, düzenli şekilde bir ekstremum için, bilinmeyen ve onun türevlerinde kuadratik olan fonksiyonellerin araştırılmasına indirgenir ve böylece Ritz metodunun kullanımı kolaylaşır.

Varyasyonel problemin çözümünde istenen sonuçlara yaklaşımları Ritz metoduyla elde edilen yakınsaklığına bakılması ayrıca bu yaklaşımların doğruluk derecesinin saptanması oldukça zordur. Bu yüzden fonksiyonel;

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x)) dx \quad (2.3)$$

biçiminde Ritz için varyasyonel form tanımlanır. Bu fonksiyonelin minimumu ile ilgilenelim. Koordinat fonksiyonlarının (2.2) (n yeterince büyük) lineer kombinasyonu tarafından birinci derece yakınlıkta kabul edilebilir olan $w_1(x), w_2(x), w_3(x), \dots, w_n(x) \dots$ koordinat fonksiyonlarını düşünelim. Minimumlaştırma dizisi olarak adlandırılan y_n dizisinin,

$$y_n = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x)$$

şeklinde olduğu $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$ fonksiyonlarını elde etmek için Ritz metodu kullanılabilir.

2.2. Ritz için Euler-Lagrange Denklemleri

$$\frac{dF}{dy} - \frac{d}{dx} \left(\frac{dF}{dy'} \right) = 0 \quad y(x_a) = y_a \quad , \quad y(x_b) = y_b \quad (2.2.1)$$

sınır koşullarını sağlayan Euler-Lagrange denklemini göz önüne alalım. Ritz metodu varyasyonel problemi, (2.3) fonksiyoneli ile (1.2.1) eşitliğinin çözümü arayışındadır. Bu metod ile n bilinmeyenli $w_i(x)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonları ile $y(x)$ fonksiyonunun yaklaşık çözümünü bulunacaktır. Yaklaşık $\tilde{y}(x)$ fonksiyonu;

$$\tilde{y}(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) \quad (2.2.2)$$

biçimindedir. (2.3) fonksiyonundaki değerleri elde etmek için yaklaşık fonksiyonun türevini alırsak;

$$\tilde{y}'(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i'(x) \quad (2.2.3)$$

elde edilir. Bulunan (2.2.2) ve (2.2.3) fonksiyonlarını (2.3) lineer kombinasyonunda yerine koyarak α_i katsayılarını bulunabilir.

Fonksiyonları yerine yazarsak;

$$I[y(x)] = \int_{x_a}^{x_b} F\left(x, \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x), \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i'(x)\right) dx \quad (2.2.4)$$

elde edilir.

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x_a) = y_a \quad , \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x_b) = y_b \quad (2.2.5)$$

şeklindeki kısıtlamalar verilsin.

(2.2.4) fonksiyonunun (2.2.5) kısıtlamalarıyla kesin değerine erişmek için indirgenmiş α_i katsayıları bulunur. Yeni düzenlenen (2.2.4) denkleminin α_i değerlerine göre türevleri sıfıra eşittir. $w_i(x)$ Fonksiyonları ve α_i katsayıları fonksiyona şekil verir. Bu fonksiyonlar lineer bağımsız olmalıdır. Yani;

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i w_i(x) = 0 \quad \text{ise} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_n = 0$$

olur.

2.3. Ritz Metodu Uygulamaları

Örnek 2.3.1

$F(x, y, y') = y'^2 - \lambda y^2$ Fonksiyonelinin $y'(0) = 0$, $y(1) = 0$ sınır koşulları altında λ değerini bulalım.

Sınır koşullarını sağlayan y fonksiyonunun;

$$y(x) = c(x-1) \quad (2.3.1)$$

şeklinde olduğunu varsayalım. Fonksiyonelde kullanmak için y 'nin türevini alırsak;

$$y'(x) = c \quad (2.3.2)$$

Varyasyonel ifadesi;

$$I = \int_0^1 (y'^2 - \lambda y^2) dx \quad (2.3.3)$$

biçimindedir. Şimdi bulunan (2.3.1) ve (2.3.2) ifadelerini (2.3.3) integralinde yerine koyalım:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 [c^2 - \lambda c^2 (x-1)^2] dx \\ &= \int_0^1 [c^2 (1 - \lambda (x^2 - 2x + 1))] dx \\ &= c^2 \left(x - \lambda \left(\frac{x^3}{3} - x^2 + x \right) \right) \Big|_0^1 \\ &= c^2 (1 - \lambda (\frac{1}{3} - 1 + 1)) \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

elde edilir. Ritz metodundan;

$$\frac{dI}{dc} = 0$$

olmalıdır. Bulunan (2.3.4) ifadesinin c ye göre türevini alalım:

$$\frac{dI}{dc} = 2c \left(1 - \frac{\lambda}{3} \right) = 0$$

Buradan;

$$\lambda = 3$$

elde edilir.

Örnek 2.3.2

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u + x = 0 \quad , \quad 0 \leq x \leq 1 \quad \text{eşitliği ve} \quad u(0) = u(1) = 0 \quad \text{sınır}$$

şartları verilen sınır değer problemini çözelim.

İlk olarak varyasyon ifadesini bulalım.

$$I(x, u, u') = \int_0^1 \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 - u^2 - 2xu \right] dx \quad (2.3.5)$$

$u(x)$ Fonksiyonunun ikinci dereceden olduğunu varsayalım.

$$u(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

sınır koşullarını fonksiyonda yerine koyarsak;

$$u(0) = a_0$$

$$u(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

$$a_1 = -a_2$$

Buradan

$$u(x) = a_1x + a_1x^2 = a_1(x(x-1))$$

olur. (2.3.5) varyasyonunda $u(x)$ fonksiyonunu yerine yazalım.

$$I = \int_0^1 \left[a_1^2 (1-2x)^2 - a_1^2 x^2 (1-x)^2 - 2xa_1x(1-x) \right] dx$$

İntegralini alırsak;

$$\begin{aligned} I &= a_1^2 (x-x^2) - a_1^2 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5} \right) - 2a_1 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= -\frac{a_1^2}{30} - \frac{2a_1}{12} \end{aligned}$$

olur.

Varyasyon ifadesinin sabite göre türevi sıfır olmalıdır. Türevini alıp sıfıra eşitlersek;

$$\begin{aligned} I(a_1) &= -\frac{a_1^2}{30} - \frac{a_1}{6} \\ \frac{dI}{da_1} &= \frac{3a_1}{10} - \frac{1}{6} = 0 \end{aligned}$$

$$a_1 = \frac{5}{18}$$

olur.

Buradan

$$u(x) = \frac{5}{18} x(1-x)$$

elde edilir.

Örnek 2.3.3

$F(x, y, y') = y'^2 - y^2 - 2xy$ Diferansiyel denkleminin $y(0) = y(1) = 0$ sınır değer koşullarında Ritz metodu ile çözümünü yapalım.

Sınır koşullarını sağlayan fonksiyonun;

$$y(x) = c(x - x^2) \quad (2.3.6)$$

olduğunu varsayalım. Diferansiyel denklemde kullanmak için fonksiyonun türevini alırsak;

$$y'(x) = c(1 - 2x) \quad (2.3.7)$$

olur. Ritz uygulayarak (2.3.6) ve (2.3.7) eşitliklerini varyasyonel ifadede yerine yazalım.

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left[c^2(1 - 2x)^2 - c^2(x - x^2)^2 - 2xc(x - x^2) \right] dx \\ &= c^2 \left(-\frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{2} + x^3 - 2x^2 + x \right) - 2c \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1 \\ &= c^2 \frac{3}{10} - 2c \frac{1}{12} \end{aligned}$$

elde edilir. Varyasyonelin sabite göre türevi alınıp sıfıra eşitlenir.

$$\frac{d}{dc} \left(3 \frac{c^2}{10} - \frac{c}{6} \right) = 0$$

$$\frac{6}{10}c - \frac{1}{6} = 0$$

$$c = \frac{5}{18} = 0,27$$

Buradan $y(x)$ fonksiyonu;

$$y(x) = \frac{5}{18}(x - x^2)$$

elde edilir.

3. GALERKIN METODU

Rus matematikçi Boris Grigoryevich Galerkin tarafından bulunan Galerkin metodu fonksiyonları vektör uzayına dayanmaktadır. Doğrusal sınır değer problemlerin çözümü için kısmen uygun olmasıyla birlikte birçok doğrusal olmayan problemlere de uygulanabilir. Sınır koşulları ve diferansiyel eşitlikleri verilen tahmini u fonksiyonunu bulunacaktır. Metot fonksiyonları vektör uzayına dayandığı için;

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx \quad (3.1)$$

İç çarpımını sağlar. f ve g ortogonal olduğundan $\langle f, g \rangle = 0$, eğer keyfi $w(x)$ için $\langle w, f \rangle = 0$ ise $f(x) = 0$

V : fonksiyon uzayı

V 'nin lineer bağımsız fonksiyonları $S = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^{\infty}$ dır.

$f(x) \in V$ Fonksiyonu lineer kombinasyonlar olarak yazılırsa ifade;

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} c_j \varphi_j(x) \quad \text{olur. Ağırlıklı kalıcı metot için sonlu olan}$$

$S = \{\varphi_i(x)\}_{i=1}^n$ fonksiyonu kullanılır.

L diferansiyel operatör, f verilen fonksiyon olmak üzere; $D(u) = 0$, $B(u) = [a, b]$ sınır şartları için diferansiyel eşitlik problemi

$$D(u) = L(u(x)) + f(x) = 0$$

biçimindedir. U deneme çözümü;

$$U \approx U(x) = \varphi_0(x) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) \quad (3.2)$$

şeklinde olur.

Kalan fonksiyonu;

$$R(x) = D[u, x] = L[u(x)] + f(x)$$

şeklinde tanımlıdır. Keyfi seçilen $w(x)$ ağırlık fonksiyonu ve

$R(x)$ kalan fonksiyonu (3.1)'de yazarsak;

$$\langle w, R(x) \rangle = \langle w, D(u) \rangle = \int_a^b w(x) \{D[u(x)]\} dx = 0$$

elde edilir. (3.2)'yi yerine yazalım.

$$\langle w, R \rangle = \int_a^b \varphi_j \left\{ D \left[\varphi_0(x) + \sum_{j=1}^n c_j \varphi_j(x) \right] \right\} dx = 0$$

n tane lineer eşitlik elde edilir. Çözümde bütün c_j katsayılarını

elde edebiliriz $\varphi_j(x)$ 'ler lineer bağımsız olmakla birlikte

$w_i(x_0) = w_i(x_1) = 0$ sınır şartlarını sağlayacak şekilde

seçilmelidir. Bu koordinat fonksiyonları için genellikle

$$(x - x_0)(x - x_1), (x - x_0)^2(x - x_1), (x - x_0)^3(x - x_1), \dots, (x - x_0)^n(x - x_1)$$

polinomları şeklinde ya da

$$\sin \frac{n\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0}$$

trigonometrik fonksiyonları şeklinde göz önüne alınır. Bu metod sıralı n'lerden oluşan tüm denklemlere, denklem sistemlerine ve kısmi diferansiyel denklemlere uygulanabilir.

3.1. Galerkin Metodu Uygulamaları

Örnek 3.1.1

$$3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 8 = 0 \quad 0 \leq x \leq 1, \quad y(0) = 1 \quad y(1) = 2 \quad \text{sınır}$$

koşullarını sağlayan denklemin çözümünü yapalım.

Varsayalım y fonksiyonu

$$y = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 \quad (3.1.1)$$

olsun.

Sınır koşullarını yerine koyarsak;

$$y(0) = 1 \quad c_0 = 1$$

$$y(1) = 2 \quad 1 + c_1 + c_2 + c_3 = 2$$

$$c_1 = 1 - c_2 - c_3$$

elde edilir. c_1 katsayısını (3.1.1)'de yerine yazarsak;

$$y = 1 + (1 - c_2 - c_3)x + c_2x^2 + c_3x^3$$

$$= 1 + x - c_2x - c_3x + c_2x^2 + c_3x^3$$

$$y = 1 + x + c_2(x^2 - x) + c_3(x^3 - x) \quad (3.1.2)$$

elde edilir. Sorudaki diferansiyel denklemin çözümü için (3.1.2) fonksiyonunun birinci ve ikinci türevlerini alalım:

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= 1 + c_2(2x-1) + c_3(3x^2-1) \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= 2c_2 + 6c_3x\end{aligned}\tag{3.1.3}$$

elde edilir. (3.1.2) ve (3.1.3) eşitliklerini sorudaki diferansiyel denklemde yerine yazarsak;

$$\begin{aligned}3\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} + 8 &= 3(2c_2 + 6c_3x) - (1 + 2c_2x - c_2 + 3c_3x^2 - c_3) + 8 \\ &= 6c_2 + 18c_3x - 1 - 2c_2x + c_2 - 3c_3x^2 + c_3 + 8 \\ &= c_2(7 - 2x) + c_3(18x - 3x^2 + 1) + 7\end{aligned}$$

elde edilir. Kalan fonksiyonu;

$$R = c_2(7 - 2x) + c_3(18x - 3x^2 + 1) + 7$$

şeklini almış olur. Katsayıları bulabilmek için Galerkin metodunu uygularsak;

$$\int_0^1 \varphi_i R dx = 0 \quad \varphi_1 = x^2 - x \quad \varphi_2 = x^3 - x$$

i=1 için;

$$\begin{aligned}\varphi_1 = x^2 - x &\Rightarrow \int_0^1 (x^2 - x)(c_2(7 - 2x) + c_3(18x - 3x^2 + 1) + 7) dx = 0 \\ &\Rightarrow c_2 \left(3x^2 - \frac{x^4}{2} - \frac{7x^2}{2} \right) + c_3 \left(\frac{21x^4}{4} - \frac{17x^3}{3} - \frac{3x^5}{5} - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{7x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} \Big|_0^1 \\ &\Rightarrow -c_2 - \frac{91}{60}c_3 - \frac{7}{6} = 0 \\ &\Rightarrow c_2 + 1,516c_3 = -1,167\end{aligned}\tag{3.1.4}$$

i=2 için;

$$\varphi_2 = x^3 - x$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x^3 - x) \left(c_2 (7 - 2x) + c_3 (18x - 3x^2 + 1) + 7 \right) dx = 0$$

$$\Rightarrow c_2 \left(\frac{7x^4}{4} - \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} - \frac{7x^2}{2} \right) + c_3 \left(\frac{18x^5}{5} - 6x^3 - \frac{x^6}{2} + x^4 - \frac{x^2}{2} \right) + \frac{7x^4}{4} - \frac{7x^2}{2} \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow -\frac{89}{60}c_2 - \frac{12}{5}c_3 - \frac{7}{4} = 0$$

$$\Rightarrow 1,483c_2 + 2,4c_3 = -1,75 \quad (3.1.5)$$

elde edilir. (3.1.4) ve (3.1.5) denklemleri ortak çözüm yapılırsa;

$$c_2 = -0,945 \quad c_3 = -0,146$$

denklemin yaklaşık katsayı değerleri bulunmuş olur. Bulunan katsayıları (3.1.2) ifadesinde yazarsak,

$$y = 1 + x - 0,945(x^2 - x) - 0,146(x^3 - x)$$

sonucuna ulaşılır.

Örnek 3.1.2

$F(x, y, y') = y'^2 - y^2 - 2xy$ diferansiyel denkleminin

$y(0) = y(1) = 0$ sınır değer koşullarında Galerkin metodu ile çözümünü yapalım.

Varsayalım sınır koşullarını sağlayan y fonksiyonu

$$y(x) = c(x - x^2) \quad (3.1.6)$$

olsun. Sorudaki denklemin çözümü için y fonksiyonunun türevini alalım.

$$y'(x) = c(1 - 2x) \quad (3.1.7)$$

Kalan fonksiyonu;

$$\begin{aligned} R &= c^2(1 - 2x)^2 - c^2(x - x^2)^2 - 2xc(x - x^2) \\ &= c^2(1 - 4x + 3x^2 + 2x^3 - x^4) - 2c(x^2 - x^3) \end{aligned}$$

şeklinde olur. Katsayıları bulabilmek için $\int_0^1 \varphi_i R dx = 0$

hesaplanır.

i=1 için;

$$\varphi_1 = x(1 - x) \quad \int_0^1 \varphi_1 R dx = 0$$

$$\Rightarrow \int_0^1 (x - x^2) \left(c^2(1 - 4x + 3x^2 + 2x^3 - x^4) - 2c(x^2 - x^3) \right) dx$$

$$\Rightarrow c^2 \left(\frac{x^7}{7} - \frac{x^6}{2} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{4} - \frac{5x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) - 2c \left(\frac{x^6}{6} - \frac{2x^5}{5} + \frac{x^4}{4} \right) \Big|_0^1$$

$$\Rightarrow c^2 \frac{126}{420} - c \frac{1}{60} = 0$$

$$c_1 = \frac{18}{420} = 0,3 \quad c_2 = 0$$

$$y(x) = \frac{3}{10}(x - x^2)$$

Örnek 2.3.3 ile Örnek 3.1.2 karşılaştırıldığında aynı örneğin Ritz ve Galerkin Metotları ile çözümünde aralarında çok az bir fark olduğu görülebilmektedir.

4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmanın konusu olan Ritz ve Galerkin Metotları ile ilgili literatürde yer alan çalışmalar incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar dikkate değer şekilde karşımıza çıkmıştır.

- Metodların fiziksel davranışları değiştirecek herhangi bir kısıtlayıcı varsayım ya da dönüşüm uygulamadığı tespit edilmiştir.
- Linear olmama özelliği kuvvetli olan problemlerin yaklaşık çözümleri için daha fazla sayıda iterasyon gerektiği belirlenmiştir.
- Bu metotlar linear olmayan problemlerin basitleştirilmesiyle sadece homojen diferansiyel denklemler ve buna ait varyasyon problemlerinin çözümü halini aldırır.
- Sınır şartlarına uygun fonksiyoneller tanımlanarak sabitlerin yaklaşık değerlerine ulaşılması sağlanmıştır.
- Aslında sonsuz tane çözüme sahip bu denklemler sınırlandırılarak n çözüm için incelenmiş ve gerçek sonuçlara en yakın cevapları getiren metotlar olmuşlardır.
- Ne kadar çok çözüm alınırsa gerçek değere yaklaşım o kadar fazla olmaktadır.

Ritz metodu sadece varyasyonel problemlerinin yaklaşık çözümüne dayandığı için varyasyon sırasında kabul edilebilir. Daha çok mühendislik alanında kullanılan bu metotlarda suni sınır şartları elastik eğrinin geometrik şekli için, tabiiler ise kuvvet durumu için koşullardır. Sonuçta dış kuvvetlerin potansiyelliğinde bahsedildiği için bu metot ortogonallık şartını da sağlar.

Galerkin metodunu da sınır şartları değişken şeklinde olan problemlerin yaklaşım metodu olarak düşünebiliriz. Ritz metodu

kullandığımızda elde ettiğimiz deneme fonksiyonlarının doğal sınır şartlarını sağlamak zorunda olmaması bir sorun olarak karşımıza çıkmakla birlikte Galerkin metodu uyguladığımızda bu sorun ortadan kalkarak bütün sınır şartlarını sağladığı görülmektedir.

KAYNAKÇA

- Acar, O. 2003, "Varyasyonel Problemlerde Direkt Metotlar ", Matematik Araştırma Projesi, *Gazi Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi*, Ankara, 5-20.
- Atkins,H.L and Chi-Wang SHU.Quadrature-free Implementation of Discontinuous Galerkin Method for Hyperbolic Equations. *AIAA Journal*. 1998, Vol.36, No.5,pp.22-29.
- Aytin, M. 2011, "Poisson Denklemi ve Çözümleri", Yüksek Lisans Tezi, *Trakya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Edirne, 41-44.
- Dettman, J.W., 1962, "Mathematical Methods in Physics and Engineering", *Mc Graw Hill*, New York, 68-89.
- Dagorogna, B. *Introduction to the Calculus of Variations: 2nd Edition*, Imperial Collage Press, London, 2004.
- Efekan, G. 2007, "Varyasyonel Metot", Yüksek Lisans Tezi, *Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü*, Ankara, 10-35.
- Van Brunt, B. *The Calculus of Variations*, Springer-Verlag, New York, 2004.
- Zienkiwicz ,O.C. And Taylor, R.L, 1989, " Finite Element Metot", *Mc Graw Hill*, London, Voll.

ON COX–SNELL BIAS-CORRECTED ESTIMATORS FOR THE UNIT–MUTH DISTRIBUTION

Hasan Hüseyin GÜL¹

Ahmet KOCATÜRK²

1. INTRODUCTION

First proposed by Teissier (1934), the Muth distribution (MD) was developed to describe mortality trends in domestic animal species resulting solely from aging. Subsequently, a location-adjusted version of this distribution was examined by Laurent (1975). Subsequently, Muth (1977) demonstrated that this distribution has a heavier tail than many classical lifespan models. The model's practical applicability was demonstrated by Rinne (1981) through the analysis of used car lifespan data. After being overlooked for years, the distribution began to attract renewed interest when Leemis and McQueston (2008) revisited it and adopted the name "Muth distribution." More recently, Pedro et al. (2015) examined the statistical properties of this distribution in detail, and various extensions, including the power Muth (Jodra et al., 2017) and the unit Muth (UM) (Maya et al., 2024) distributions, have since been proposed.

The UM distribution is obtained by exponential transformation, $\tau = \exp(-Z)$, of the MD distribution. The

¹ Doç. Dr., Giresun Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Veri Bilimi ve Analitiği Bölümü, ORCID: 0000-0001-9905-8605.

² Dr. Öğr. Üyesi, Erzurum Teknik Üniversitesi, Fen Fakültesi, Matematik Bölümü, ORCID: 0000-0003-2542-3264.

cumulative distribution function (cdf) and the probability density function (pdf) of UM distribution are given by

$$F(\tau) = e^{1/\alpha} \tau^{-\alpha/\beta} \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \tau^{-\alpha/\beta}\right), \quad 0 < \tau < 1,$$

$$f(\tau) = \frac{1}{\beta} e^{1/\alpha} (\tau^{-\alpha/\beta} - \alpha) \tau^{-\left(\frac{\alpha}{\beta}+1\right)} \exp\left(-\frac{1}{\alpha} \tau^{-\alpha/\beta}\right), \quad 0 < \tau < 1.$$

The selection of an appropriate estimation method is one of the fundamental issues in statistical inference. Among existing estimation techniques, the maximum likelihood estimator (MLE) is the most commonly used method due to its desirable asymptotic properties, such as consistency, asymptotic normality, and asymptotic unbiasedness. However, these asymptotic properties are generally achieved under large-sample conditions. When the sample size is small or moderate, these properties may not be sufficiently met. In such cases, ML estimators may have significant deviations, which can consequently negatively affect the accuracy of statistical inferences. To overcome this limitation, researchers have focused on obtaining nearly unbiased estimators for the parameters of various probability distributions. Bias-reduction methodologies have been investigated for a wide range of models, including the half-logistic distribution (Giles, 2012), the Nakagami distribution (Schwartz et al., 2013), the two-parameter Lomax distribution (Giles et al., 2013), the unit-Gamma distribution (Mazucheli et al., 2018), the inverse Weibull distribution (Mazucheli et al., 2019), the Johnson S_B distribution (Menezes et al., 2020), the unit-Weibull distribution (Mazucheli et al., 2021), the inverse Lindley distribution (Gedik Balay, 2021), the unit-Burr III distribution (Sanku and Liang, 2022), the generalized normal distribution (Gul and Doğru, 2024), the two-parameter Lindley distribution (Gul, 2025) and the extended Rama distribution (Sungboonchoo, 2025).

This study examines two different methods for reducing bias. The first is the analytical bias correction methodology proposed by Cox and Snell (1968). This method produces estimators corrected for second-order bias by eliminating the first-order bias estimated from the original MLEs. The second approach is the parametric bootstrap method introduced by Efron (1982). Here, the bias is estimated numerically through repeated resampling from the fitted model, without requiring an analytical expression for the bias function.

The primary objective of this article is to obtain nearly unbiased estimators for the unknown parameters of the UM distribution. To evaluate the effectiveness of the proposed methods, a comprehensive Monte Carlo simulation study was conducted under various parameter combinations and sample sizes. The resulting estimators were compared based on the bias and MSE criteria.

2. MAXIMUM LIKELIHOOD ESTIMATION

Let $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ be a random sample of size n drawn from the UM distribution with parameters $\alpha \in (0, 1]$ and $\beta > 0$. The probability density function of the UM distribution is given by

$$f(t; \alpha, \beta) = \frac{1}{\beta} t^{-1-\alpha/\beta} (\alpha t^{-\alpha/\beta} - \alpha + 1) \exp\left(\frac{1}{\alpha}(1 - t^{-\alpha/\beta})\right),$$
$$0 < t < 1 \tag{1}$$

The corresponding log-likelihood function based on the observed sample $t = (t_1, t_2, \dots, t_n)$ is obtained as

$$l(\alpha, \beta) = \sum_{i=1}^n \log f(t_i; \alpha, \beta)$$

$$= -n \log(\beta) - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \log\left(\alpha t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha + 1\right) + \frac{n}{\alpha} + \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}}. \quad (2)$$

Differentiating $l(\alpha, \beta)$ wit respect to α , the first component of the score vector is given by

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} &= -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \frac{t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} \log(t_i)\right) - 1}{\alpha t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha + 1} - \frac{n}{\alpha^2} + \\ &\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} - \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} \log(t_i). \end{aligned} \quad (3)$$

Similarly, differentiating $l(\alpha, \beta)$ wit respect to β , we obtain

$$\begin{aligned} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} &= -\frac{n}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \log(t_i) + \sum_{i=1}^n \frac{\alpha^2 t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} \log(t_i)}{\beta^2 \left(\alpha t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} - \alpha + 1\right)} - \\ &\frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} \frac{\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n \log(t_i). \end{aligned} \quad (4)$$

The ML estimators $\hat{\alpha}$ and $\hat{\beta}$, respectively, are obtained by simultaneously solving the nonlinear likelihood equations,

$$\frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} = 0, \quad \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} = 0.$$

Since the score equations are highly nonlinear and cannot be solved in closed form, numerical optimization techniques are required to obtain the maximum likelihood estimates.

3. BIAS-CORRECTED MLE

3.1. A Corrective Approach

Although ML estimators are consistent and asymptotically unbiased, it is well established that they may exhibit non-negligible bias in finite samples. This bias is typically of order $O(n^{-1})$ and can be substantial for complex distributions or moderate sample sizes. In order to reduce this finite-sample bias for the UM distribution, the Cox–Snell bias correction method is employed in this subsection.

Let $\theta = (\alpha, \beta)^T$ denote the two-dimensional parameter vector of the UM distribution. The Cox–Snell approach provides an explicit approximation to the bias of the ML estimator $\hat{\theta}$ up to order $O(n^{-1})$, based on higher-order derivatives of the log-likelihood function.

Let $l(\alpha, \beta)$ denote the log-likelihood function defined in Section 2. The score vector is given by

$$U(\theta) = \begin{pmatrix} U_\alpha(\theta) \\ U_\beta(\theta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial l(\alpha, \beta)}{\partial \beta} \end{pmatrix}.$$

The Fisher information matrix is defined as,

$$I(\theta) = - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha^2} & \frac{\partial^2 l}{\partial \alpha \partial \beta} \\ \frac{\partial^2 l}{\partial \beta \partial \alpha} & \frac{\partial^2 l}{\partial \beta^2} \end{pmatrix}.$$

In the Cox–Snell framework, the bias approximation is formulated in terms of the expected Fisher information matrix, while in practice it is evaluated at the maximum likelihood estimates. The Cox–Snell bias approximation involves third-order cumulants of the log-likelihood function. For $i, j, k \in \{\alpha, \beta\}$, these quantities are defined as

$$\kappa_{ij,k} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^3 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k} \right], \quad \kappa_{ij,k} = \mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \frac{\partial l(\theta)}{\partial \theta_k} \right],$$

where all expectations are taken with respect to the UM distribution evaluated at the true parameter value θ . These cumulants capture the curvature and asymmetry of the log-likelihood surface and play a central role in determining the finite-sample bias of the maximum likelihood estimator.

Cox and Snell (1968) showed that the bias of the s -th component of the MLE can be approximated by

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_s) = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \kappa^{si} \kappa^{jk} \left(\frac{1}{2} \kappa_{ijk} + \kappa_{ij,k} \right) + O(n^{-2}), \quad s = 1, \dots, p,$$

where K^{ij} denotes the (i, j) -th element of the inverse of the expected Fisher information matrix

$$K = (\kappa_{ij}), \quad \kappa_{ij} = -\mathbb{E} \left[\frac{\partial^2 l(\theta)}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right].$$

In the present case, $p = 2$ and $\theta = (\alpha, \beta)^T$. Accordingly, the bias vector of the MLE $\hat{\theta} = (\hat{\alpha}, \hat{\beta})^T$ can be written explicitly as

$$\text{Bias}(\hat{\theta}) = \begin{pmatrix} \text{Bias}(\hat{\alpha}) \\ \text{Bias}(\hat{\beta}) \end{pmatrix},$$

with

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_s) = \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=1}^2 \kappa^{si} \kappa^{jk} \left(\frac{1}{2} \kappa_{ijk} + \kappa_{ij,k} \right), \quad s = 1, 2.$$

Define

$$a_{ij}^{(k)} = \kappa_{ij,k} - \frac{1}{2} \kappa_{ijk}, \quad i, j, k = 1, 2,$$

and construct the matrices

$$A^{(k)} = \begin{pmatrix} a_{ij}^{(k)} \end{pmatrix}, \quad k = 1, 2. \text{ Let}$$

$$A = [A^{(1)} A^{(2)}]$$

be the 2×4 block matrix obtained by concatenating $A^{(1)}$ and $A^{(2)}$ and let $vec(\cdot)$ denote the vectorization operator. The $O(n^{-1})$ bias of the MLE $Bias(\hat{\theta}) = K^{-1}Avec(K^{-1}) + O(n^{-2})$. Using this approximation, the Cox–Snell bias-corrected MLE of θ is defined as

$$\tilde{\theta} = \hat{\theta} - \widehat{Bias}(\hat{\theta}).$$

This correction reduces the bias of the estimator from order $O(n^{-1})$ to order $O(n^{-2})$, thereby yielding estimators with improved finite-sample performance. The explicit expressions of the score functions and higher-order derivatives required for constructing K and $A^{(k)}$ for the UM distribution are provided in Appendix A.

3.2. Parametric Bootstrap Bias Correction

As an alternative to the analytical bias correction procedure, a parametric bootstrap approach can be employed to obtain modified estimators with reduced finite-sample bias. This resampling-based technique, originally introduced by Efron (1982), provides a numerical approximation to the bias of the maximum likelihood estimators without requiring explicit derivation of the bias function. The method utilizes the fitted Unit Muth distribution as a generating mechanism and repeatedly produces bootstrap samples from the estimated model.

Let $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ denote a random sample of size n from the Unit Muth distribution, and let

$$\hat{\theta} = \begin{pmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{pmatrix}.$$

Using $\hat{\theta}$ as the true parameter value, B independent bootstrap samples are generated from the Unit Muth distribution. Let

$$\widehat{\Theta}_j^* = \begin{pmatrix} \widehat{\alpha}_j^* \\ \widehat{\beta}_j^* \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, \dots, B,$$

denote the MLE obtained from the j -th bootstrap sample. The bootstrap estimate of the bias of $\widehat{\Theta}$ is defined as

$$\widehat{Bias}(\widehat{\Theta}) = \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B (\widehat{\Theta}_j^* - \widehat{\Theta}).$$

The parametric bootstrap bias-corrected estimator is then obtained by subtracting the estimated bias from the original MLE. Hence, the bootstrap bias-corrected estimator (PBE) is given by

$$\widetilde{\Theta}_{PBE} = \widehat{\Theta} - \widehat{Bias}(\widehat{\Theta}), \text{ or equivalently,}$$

$$\widetilde{\Theta}_{PBE} = 2\widehat{\Theta} - \frac{1}{B} \sum_{j=1}^B \widehat{\Theta}_j^*.$$

4. SIMULATION STUDY

The comparative performance of the MLE, BCE, and PBE was assessed through extensive Monte Carlo simulations conducted under various parameter configurations and sample sizes. The estimators examined included MLE, BCE and PBE. Random samples are generated from the UM distribution under several parameter configurations selected to represent different distributional shapes. In particular, the values of parameter $\alpha = 0.1, 0.5, 0.9$ whereas the values of β are chosen as 0.5, 1.0, 1.5, 2.0. Furthermore, four different sample sizes, namely $n = 20, 40, 60, 80$ are considered to assess the impact of sample size on the performance of the estimators. For each combination of parameter values and sample sizes, $M = 10.000$ independent Monte Carlo samples are generated from the UM distribution. In the case of the parametric bootstrap estimator, $B = 1.000$ bootstrap resamples are produced from the fitted model at each replication. The accuracy of the estimators is

evaluated using the bias and MSE criteria. These measures are computed as

$$Bias(\hat{\Theta}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\Theta}_i - \Theta), \quad MSE(\hat{\Theta}) = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M (\hat{\Theta}_i - \Theta)^2.$$

where $\Theta = (\alpha, \beta)^T$ denotes the parameter vector, and $\hat{\Theta}_i$ is the estimate obtained from the i -th Monte Carlo replication. The simulation results are reported in Tables 1-3.

Table 1. Estimated bias (MSEs) for α and β , ($\alpha = 0.1$).

β	n	α			β		
		MLE	BCE	PBE	MLE	BCE	PBE
0.5	20	0.0920	0.0503	0.0321	0.0883	0.0483	0.0308
		(0.0217)	(0.0118)	(0.0073)	(0.0200)	(0.0108)	(0.0067)
	40	0.0690	0.0353	0.0235	0.0662	0.0339	0.0225
		(0.0082)	(0.0044)	(0.0027)	(0.0076)	(0.0041)	(0.0025)
	60	0.0533	0.0279	0.0164	0.0512	0.0267	0.0158
		(0.0044)	(0.0024)	(0.0015)	(0.0041)	(0.0022)	(0.0014)
	80	0.0456	0.0258	0.0132	0.0438	0.0247	0.0127
		(0.0030)	(0.0016)	(0.0010)	(0.0028)	(0.0015)	(0.0009)
1.0	20	0.1014	0.0536	0.0353	0.1068	0.0564	0.0372
		(0.0248)	(0.0138)	(0.0080)	(0.0274)	(0.0152)	(0.0089)
	40	0.0671	0.0343	0.0228	0.0707	0.0361	0.0240
		(0.0083)	(0.0046)	(0.0027)	(0.0092)	(0.0051)	(0.0030)
	60	0.0559	0.0302	0.0172	0.0589	0.0318	0.0181
		(0.0049)	(0.0027)	(0.0016)	(0.0054)	(0.0030)	(0.0017)
	80	0.0509	0.0296	0.0148	0.0536	0.0311	0.0155
		(0.0036)	(0.0020)	(0.0012)	(0.0040)	(0.0022)	(0.0013)
1.5	20	0.0980	0.0505	0.0342	0.1117	0.0575	0.0389
		(0.0255)	(0.0143)	(0.0079)	(0.0328)	(0.0184)	(0.0101)
	40	0.0728	0.0377	0.0248	0.0830	0.0430	0.0282
		(0.0095)	(0.0053)	(0.0029)	(0.0122)	(0.0068)	(0.0038)
	60	0.0608	0.0340	0.0187	0.0692	0.0387	0.0213
		(0.0056)	(0.0032)	(0.0017)	(0.0072)	(0.0041)	(0.0022)
	80	0.0492	0.0290	0.0143	0.0561	0.0330	0.0163
		(0.0036)	(0.0020)	(0.0011)	(0.0046)	(0.0026)	(0.0014)
2.0	20	0.1090	0.0556	0.0380	0.1328	0.0677	0.0463
		(0.0292)	(0.0162)	(0.0086)	(0.0428)	(0.0237)	(0.0126)
	40	0.0763	0.0407	0.0259	0.0929	0.0496	0.0316
		(0.0104)	(0.0058)	(0.0031)	(0.0152)	(0.0084)	(0.0045)
	60	0.0588	0.0339	0.0181	0.0717	0.0414	0.0221
		(0.0056)	(0.0031)	(0.0017)	(0.0082)	(0.0045)	(0.0024)
	80	0.0540	0.0318	0.0157	0.0658	0.0387	0.0191
		(0.0042)	(0.0023)	(0.0012)	(0.0061)	(0.0034)	(0.0018)

Table 2. Estimated bias (MSEs) for α and β , ($\alpha = 0.5$).

β	n	α			β		
		MLE	BCE	PBE	MLE	BCE	PBE
0.5	20	0.0752	0.0411	0.0263	0.0936	0.0512	0.0328
		(0.0150)	(0.0083)	(0.0049)	(0.0230)	(0.0127)	(0.0075)
	40	0.0564	0.0289	0.0186	0.0701	0.0359	0.0231
		(0.0056)	(0.0031)	(0.0018)	(0.0086)	(0.0048)	(0.0028)
	60	0.0464	0.0243	0.0138	0.0578	0.0302	0.0172
		(0.0033)	(0.0018)	(0.0011)	(0.0050)	(0.0028)	(0.0016)
	80	0.0377	0.0213	0.0110	0.0469	0.0265	0.0137
		(0.0021)	(0.0012)	(0.0007)	(0.0032)	(0.0018)	(0.0010)
1.0	20	0.0852	0.0450	0.0298	0.1142	0.0603	0.0400
		(0.0178)	(0.0099)	(0.0055)	(0.0314)	(0.0176)	(0.0098)
	40	0.0588	0.0300	0.0194	0.0789	0.0403	0.0260
		(0.0063)	(0.0035)	(0.0020)	(0.0110)	(0.0061)	(0.0034)
	60	0.0458	0.0247	0.0137	0.0614	0.0331	0.0183
		(0.0034)	(0.0019)	(0.0011)	(0.0060)	(0.0033)	(0.0019)
	80	0.0422	0.0245	0.0123	0.0567	0.0329	0.0166
		(0.0026)	(0.0014)	(0.0008)	(0.0045)	(0.0025)	(0.0014)
1.5	20	0.0856	0.0441	0.0300	0.1223	0.0630	0.0428
		(0.0190)	(0.0106)	(0.0057)	(0.0379)	(0.0211)	(0.0113)
	40	0.0594	0.0308	0.0196	0.0849	0.0440	0.0280
		(0.0067)	(0.0037)	(0.0020)	(0.0132)	(0.0073)	(0.0039)
	60	0.0518	0.0290	0.0155	0.0741	0.0414	0.0221
		(0.0042)	(0.0023)	(0.0012)	(0.0082)	(0.0046)	(0.0024)
	80	0.0433	0.0255	0.0127	0.0619	0.0365	0.0181
		(0.0028)	(0.0015)	(0.0008)	(0.0054)	(0.0030)	(0.0016)
2.0	20	0.0895	0.0456	0.0313	0.1350	0.0689	0.0472
		(0.0209)	(0.0114)	(0.0060)	(0.0463)	(0.0252)	(0.0132)
	40	0.0667	0.0356	0.0220	0.1006	0.0537	0.0332
		(0.0079)	(0.0043)	(0.0023)	(0.0174)	(0.0095)	(0.0050)
	60	0.0514	0.0296	0.0153	0.0775	0.0447	0.0231
		(0.0043)	(0.0023)	(0.0012)	(0.0094)	(0.0051)	(0.0027)
	80	0.0443	0.0260	0.0129	0.0668	0.0393	0.0195
		(0.0030)	(0.0016)	(0.0008)	(0.0064)	(0.0035)	(0.0018)

Table 3. Estimated bias (MSEs) for α and β , ($\alpha = 0.9$).

β	n	α			β		
		MLE	BCE	PBE	MLE	BCE	PBE
0.5	20	0.0618 (0.0101)	0.0338 (0.0056)	0.0214 (0.0032)	0.1030 (0.0270)	0.0563 (0.0151)	0.0357 (0.0085)
	40	0.0435 (0.0036)	0.0223 (0.0020)	0.0138 (0.0011)	0.0724 (0.0095)	0.0371 (0.0053)	0.0231 (0.0030)
	60	0.0378 (0.0022)	0.0197 (0.0013)	0.0110 (0.0007)	0.0630 (0.0059)	0.0329 (0.0033)	0.0184 (0.0019)
	80	0.0312 (0.0015)	0.0176 (0.0008)	0.0093 (0.0005)	0.0521 (0.0038)	0.0294 (0.0021)	0.0156 (0.0012)
1.0	20	0.0667 (0.0116)	0.0352 (0.0065)	0.0231 (0.0035)	0.1174 (0.0346)	0.0620 (0.0193)	0.0407 (0.0104)
	40	0.0493 (0.0044)	0.0252 (0.0025)	0.0157 (0.0013)	0.0867 (0.0129)	0.0443 (0.0072)	0.0276 (0.0039)
	60	0.0377 (0.0024)	0.0204 (0.0013)	0.0110 (0.0007)	0.0664 (0.0069)	0.0358 (0.0038)	0.0194 (0.0021)
	80	0.0330 (0.0017)	0.0192 (0.0009)	0.0099 (0.0005)	0.0581 (0.0048)	0.0337 (0.0027)	0.0174 (0.0014)
1.5	20	0.0733 (0.0135)	0.0377 (0.0074)	0.0254 (0.0039)	0.1350 (0.0439)	0.0695 (0.0240)	0.0468 (0.0126)
	40	0.0485 (0.0046)	0.0251 (0.0025)	0.0154 (0.0013)	0.0893 (0.0146)	0.0463 (0.0080)	0.0284 (0.0042)
	60	0.0412 (0.0028)	0.0231 (0.0015)	0.0120 (0.0008)	0.0760 (0.0088)	0.0425 (0.0048)	0.0222 (0.0025)
	80	0.0369 (0.0020)	0.0217 (0.0011)	0.0110 (0.0006)	0.0679 (0.0064)	0.0400 (0.0035)	0.0203 (0.0018)
2.0	20	0.0724 (0.0145)	0.0369 (0.0077)	0.0251 (0.0041)	0.1387 (0.0503)	0.0707 (0.0266)	0.0481 (0.0141)
	40	0.0544 (0.0055)	0.0291 (0.0029)	0.0173 (0.0016)	0.1043 (0.0189)	0.0557 (0.0100)	0.0332 (0.0053)
	60	0.0444 (0.0032)	0.0256 (0.0017)	0.0130 (0.0009)	0.0852 (0.0109)	0.0491 (0.0058)	0.0249 (0.0031)
	80	0.0362 (0.0021)	0.0213 (0.0011)	0.0108 (0.0006)	0.0693 (0.0069)	0.0408 (0.0037)	0.0207 (0.0020)

The numerical results summarized in Tables 1–3 indicate that both bias and mean squared error tend to decrease as the sample size increases, reflecting the improved accuracy of the estimation procedures. For each parameter configuration considered in the study, both the bias and the MSE values decrease as the sample size increases, demonstrating the consistency of the estimators. A general review of the tables reveals that the MLE typically has the largest bias and MSE values. Additionally, the BCE is observed to yield more

reasonable bias and MSE values compared to the MLE. Among all estimators, PBE consistently yields the smallest bias and MSE values for nearly all parameter combinations and sample sizes. This indicates that the bootstrap-based correction is more successful than MLE in reducing finite-sample bias and improving estimation accuracy, particularly in small sample sizes.

5. CONCLUSION

In this study, bias-corrected estimation methods are examined with the aim of reducing the bias problem that arises when estimating the parameters of the UM distribution. Despite the asymptotic advantages of the MLE method, it is known that estimates can be significantly biased, particularly in small and medium-sized samples. Therefore, in addition to classical MLE, the BCE and PBE methods were examined. The BCE approach was implemented by obtaining the first, second, and third-order derivatives of the log-likelihood function and constructing the corresponding cumulative structures. Additionally, a parametric bootstrap method was employed, which allows for the direct numerical estimation of bias. Thus, the aim was to obtain more accurate parameter estimates without the need to derive a closed-form expression for the bias function.

To investigate the behavior of the competing estimators under different sampling conditions, a series of Monte Carlo experiments was conducted using various combinations of parameter values and sample sizes. The simulation results showed that the bias and HKO values of all estimators decreased as the sample size increased. Furthermore, both bias-corrected estimators generally performed better than the classical MLE in terms of bias and HKO. However, the PBE estimator was found to have the lowest bias and HKO values in most scenarios. Overall, the numerical results indicate that the proposed bias

correction methods significantly improve the estimation accuracy of the parameters of the UM distribution. Therefore, the BCE and PBE estimators can be recommended as good alternatives to the standard MLE estimator, particularly when the sample size is small or moderate.

REFERENCES

- Balay, I. G. (2021). Comparison of different estimation methods for the inverse weighted Lindley distribution. *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics*, 70(2), 1085–1098.
- Cox, D. R., & Snell, E. J. (1968). A general definition of residuals. *Journal of the Royal Statistical Society: Series B (Methodological)*, 30(2), 248–265.
- Dey, S., & Wang, L. (2022). Methods of estimation and bias corrected maximum likelihood estimators of unit Burr III distribution. *American Journal of Mathematical and Management Sciences*, 41(4), 316–333.
- Efron, B. (1982). *The jackknife, the bootstrap and other resampling plans*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Giles, D. E. (2012). Bias reduction for the maximum likelihood estimators of the parameters in the half-logistic distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 41(2), 212–222.
- Giles, D. E., Feng, H., & Godwin, R. T. (2013). On the bias of the maximum likelihood estimator for the two-parameter Lomax distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 42(11), 1934–1950.
- Gül, H. H. (2025). Improved maximum likelihood estimators for the parameters of the two parameter Lindley distribution. *Sigma Journal of Engineering and Natural Sciences*, 43(1), 290–300.
- Gül, H. H., & Doğru, F. V. (2024). Bias corrected maximum likelihood estimators for the parameters of the generalized normal distribution. *Communications Faculty of Sciences*

University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics, 73(4), 1050–1071.

- Jodra, P., Gómez, H. W., Jiménez-Gamero, M. D., & Alba-Fernández, M. V. (2017). The power Muth distribution. *Mathematical Modelling and Analysis*, 22(2), 186–201.
- Laurent, A. G. (1975). Failure and mortality from wear and ageing: The Teissier model. In G. P. Patil, S. Kotz, & J. K. Ord (Eds.), *A modern course on statistical distributions in scientific work: Vol. 2. Model building and model selection* (pp. 301–320). Dordrecht, The Netherlands: Springer.
- Leemis, L. M., & McQueston, J. T. (2008). Univariate distribution relationships. *The American Statistician*, 62(1), 45–53.
- Maya, R., Jodra, P., Irshad, M. R., & Krishna, A. (2024). The unit Muth distribution: Statistical properties and applications. *Ricerche di Matematica*, 73(4), 1843–1866.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., & Dey, S. (2018). Improved maximum-likelihood estimators for the parameters of the unit-gamma distribution. *Communications in Statistics—Theory and Methods*, 47(15), 3767–3778.
- Mazucheli, J., Menezes, A. F. B., & Dey, S. (2019). Bias-corrected maximum likelihood estimators of the parameters of the inverse Weibull distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 48(7), 2046–2055.
- Menezes, A. F. B., & Mazucheli, J. (2020). Improved maximum likelihood estimators for the parameters of the Johnson SB distribution. *Communications in Statistics—Simulation and Computation*, 49(6), 1511–1526.

- Menezes, A., Mazucheli, J., Alqallaf, F., & Ghitany, M. E. (2021). Bias-corrected maximum likelihood estimators of the parameters of the unit-Weibull distribution. *Austrian Journal of Statistics*, 50(3), 41–53.
- Muth, E. J. (1977). Reliability models with positive memory derived from the mean residual life function. In *The theory and applications of reliability* (Vol. 2, pp. 401–435). New York, NY: Academic Press.
- Pedro, J., Jiménez-Gamero, M. D., & Alba-Fernández, M. V. (2015). On the Muth distribution. *Mathematical Modelling and Analysis*, 20(3), 291–310.
- Rinne, H. (1981). Estimating the lifetime distribution of private motor-cars using prices of used cars: The Teissier model. *Statistik Zwischen Theorie und Praxis*, 172–184.
- Schwartz, J., Godwin, R. T., & Giles, D. E. (2013). Improved maximum-likelihood estimation of the shape parameter in the Nakagami distribution. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 83(3), 434–445.
- Sungbonchoo, C. (2025). Improved maximum likelihood estimator of the extended Rama distribution with application to lifetime data. *Science and Technology Indonesia*, 10(1), 80–87.
- Teissier, G. (1934). Recherches sur le vieillissement et sur les lois de la mortalité. II. Essai d'interprétation générale des courbes de survie. *Annales de Physiologie et de Physicochimie Biologique*, 10, 260–284.

Appendix A

Let $T = (T_1, T_2, \dots, T_n)$ be a random sample from the UM distribution with parameters $\alpha \in (0, 1]$ and $\beta > 0$ whose pdf is given in Eq. (1). For notational convenience, define for each observation $t_i \in (0, 1]$:

$$p_i = \log(t_i), \quad v_i = t_i^{-\frac{\alpha}{\beta}} = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} p_i\right), \quad D_i = \alpha v_i - \alpha + 1 = 1 + \alpha(v_i - 1).$$

Note that $p_i < 0, v_i > 1$ and $D_i > 0$.

The log-likelihood function is

$$p(\alpha, \beta) = -n \log(\beta) - \left(1 + \frac{\alpha}{\beta}\right) \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \log(D_i) + \frac{n}{\alpha} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n v_i.$$

First-order derivatives

We first compute the derivatives of v_i and D_i . Since $v_i = \exp\left(-\frac{\alpha}{\beta} p_i\right)$, we obtain

$$\frac{\partial v}{\partial \alpha} = -\frac{p_i}{\beta} v, \quad \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = -\frac{\alpha p_i}{\beta^2} v_i.$$

Moreover, as $D_i = 1 + \alpha(v_i - 1)$,

$$\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} = (v_i - 1) + \alpha \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = (v_i - 1) - \frac{\alpha p_i}{\beta} v_i, \quad \frac{\partial D_i}{\partial \beta} = \alpha \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = \frac{\alpha^2 p_i}{\beta^2} v_i.$$

Now differentiate $p(\alpha, \beta)$. The score components are:

Derivative with respect to α :

$$U_\alpha(\alpha, \beta) = \frac{\partial p}{\partial \alpha} = -\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\partial D_i}{D_i} - \frac{n}{\alpha^2} + \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n v_i - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \alpha}.$$

Derivative with respect to β :

$$U_{\beta}(\alpha, \beta) = \frac{\partial p}{\partial \beta} = -\frac{n}{\beta} + \frac{\alpha}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial D_i}{\partial \beta}}{D_i} - \frac{1}{\alpha} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \beta}.$$

Second-order derivatives

We next compute the second derivatives $U_{\alpha\alpha}, U_{\alpha\beta}, U_{\beta\beta}$. First compute second derivatives of v_i :

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha^2} = -\frac{p_i^2}{\beta^2} v_i, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial \beta^2} = \left(-\frac{2\alpha p_i}{\beta^3} + \frac{\alpha^2 p_i^2}{\beta^4} \right) v_i, \quad \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha \partial \beta} = \left(\frac{p_i}{\beta^2} - \frac{\alpha p_i^2}{\beta^3} \right) v_i.$$

Second derivatives of D_i follow from $D_i = 1 + \alpha(v_i - 1)$:

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha^2} = 2 \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} + \alpha \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha^2} = -\frac{2p_i}{\beta} v_i + \frac{\alpha p_i^2}{\beta^2} v_i,$$

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} = \alpha \frac{\partial^2 v_i}{\partial \beta^2} = \alpha \left(-\frac{2\alpha p_i}{\beta^3} + \frac{\alpha^2 p_i^2}{\beta^4} \right) v_i,$$

$$\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\partial v_i}{\partial \beta} + \alpha \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha \partial \beta} = \frac{\alpha p_i}{\beta^2} v_i + \alpha \left(-\frac{p_i}{\beta^2} + \frac{\alpha p_i^2}{\beta^3} \right) v_i = \left(\frac{2\alpha p_i}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 p_i^2}{\beta^3} \right) v_i.$$

Now, using the identity

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D'}{D} \right) = \frac{D''D - (D')^2}{D^2},$$

we compute the Hessian elements.

(i) $U_{\alpha\alpha}$:

$$U_{\alpha\alpha} = \frac{\partial U_{\alpha}}{\partial \alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha^2} D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right)^2}{(D_i)^2} + \frac{2n}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n v_i + \frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} + \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\alpha\beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right).$$

Insert $\frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = -\left(\frac{p_i}{\beta} \right) v_i$ and compute the last derivative:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right) = -\frac{1}{\alpha^2 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i + \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} =$$

$$-\frac{1}{\alpha^2 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i. \text{ Also}$$

$$\frac{2}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} = -\frac{2}{\alpha^2 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i. \text{ Therefore,}$$

$$U_{\alpha\alpha} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha^2} D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha}\right)^2}{(D_i)^2} + \frac{2n}{\alpha^3} - \frac{2}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n v_i - \frac{3}{\alpha^2 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i -$$

$$\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i.$$

(ii) $U_{\alpha\beta}$: Differentiate U_α with respect to β :

$$U_{\alpha\beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n p_i \right) + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha \partial \beta}\right) D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta}\right)}{(D_i)^2} +$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n v_i \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right).$$

Compute each remaining derivate:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{\beta} \sum_{i=1}^n p_i \right) = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i, \quad \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n v_i \right) = \frac{1}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \beta} =$$

$$\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right) = -\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i + \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \beta} =$$

$$-\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i + \frac{1}{\alpha \beta} \sum_{i=1}^n p_i \left(\frac{\alpha p_i}{\beta^2} v_i \right)$$

$$= -\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i + \frac{1}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i.$$

The $\mp(1/\alpha\beta^2) \sum_{i=1}^n p_i v_i$ terms cancel, hence

$$U_{\alpha\beta} = \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha \partial \beta}\right) D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha}\right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta}\right)}{(D_i)^2} + \frac{1}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i.$$

(iii) $U_{\beta\beta}$: Differentiate U_β with respect to β :

$$U_{\beta\beta} = \frac{n}{\beta^2} - \frac{2\alpha}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta}\right)^2}{(D_i)^2} + \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right).$$

For the last derivate:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left(-\frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right) &= \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = \\ &= \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{1}{\beta^2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \beta} \left(\frac{\alpha p_i}{\beta^2} v_i \right) \\ &= \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{\alpha}{\beta^4} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i. \end{aligned}$$

Thus,

$$U_{\beta\beta} = \frac{n}{\beta^2} - \frac{2\alpha}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i + \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} D_i - \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta}\right)^2}{(D_i)^2} + \frac{2}{\beta^3} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{\alpha}{\beta^4} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i.$$

Third-order derivatives

The Cox-Snell bias approximation requires the third-order derivatives

$$U_{ijk} = \frac{\partial^3 p}{\partial \theta_i \partial \theta_j \partial \theta_k}, \quad \theta_1 = \alpha, \theta_2 = \beta.$$

To compute these quantities explicitly, we differentiate the second-order expressions derived above. First, we list the third derivatives of v_i

$$\frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha^3} = -\frac{p_i^3}{\beta^3} v_i,$$

$$\frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{p_i^2}{\beta^2} v_i \right) = -\frac{2p_i^2}{\beta^3} v_i + \frac{p_i^2}{\beta^2} \frac{\partial v_i}{\partial \beta} = -\frac{2p_i^2}{\beta^3} v_i + \frac{\alpha p_i^3}{\beta^4} v_i,$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha \partial \beta^2} &= \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha \partial \beta} \right) = \frac{\partial}{\partial \beta} \left(\left(\frac{p_i}{\beta^2} - \frac{\alpha p_i^2}{\beta^3} \right) v_i \right) = \left(-\frac{2p_i}{\beta^3} + \frac{3p_i^2}{\beta^4} - \right. \\ &\left. \frac{\alpha^2 p_i^3}{\beta^5} \right) v_i, \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^3 v_i}{\partial \beta^3} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left[\left(-\frac{2\alpha p_i}{\beta^3} + \frac{\alpha^2 p_i^2}{\beta^4} \right) v_i \right] = \left(\frac{6\alpha p_i}{\beta^4} - \frac{6\alpha^2 p_i^2}{\beta^5} + \frac{\alpha^3 p_i^3}{\beta^6} \right) v_i.$$

Since $D_i = 1 + \alpha(v_i - 1)$, the third derivatives of D_i are obtained by repeated differentiation; explicitly:

$$\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha^3} = 3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha^2} + \alpha \frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha^3} = 3 \frac{p_i^2}{\beta^2} v_i - \alpha \frac{p_i^3}{\beta^3} v_i,$$

$$\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 2 \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha \partial \beta} + \alpha \frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha^2 \partial \beta} = 2 \left(\frac{p_i}{\beta^2} - \frac{\alpha p_i^2}{\beta^3} \right) v_i + \alpha \left(-\frac{2p_i^2}{\beta^3} z_i + \frac{\alpha p_i^3}{\beta^4} v_i \right),$$

$$\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha \partial \beta^2} = \frac{\partial^2 v_i}{\partial \beta^2} + \alpha \frac{\partial^3 v_i}{\partial \alpha \partial \beta^2} = \left(-\frac{2\alpha p_i}{\beta^3} + \frac{\alpha^2 p_i^2}{\beta^4} \right) v_i + \alpha \left(-\frac{2p_i}{\beta^3} + \frac{3\alpha p_i^2}{\beta^4} - \frac{\alpha^2 p_i^3}{\beta^5} \right) v_i,$$

$$\frac{\partial^3 D_i}{\partial \beta^3} = \alpha \frac{\partial^3 v_i}{\partial \beta^3} = \alpha \left(\frac{6\alpha p_i}{\beta^4} - \frac{6\alpha^2 p_i^2}{\beta^5} + \frac{\alpha^3 p_i^3}{\beta^6} \right) v_i.$$

Now we differentiate the terms of the form D'/D and $(D''D - (D')^2)/D^2$. The required identity is:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{D''D - (D')^2}{D^2} \right) = \frac{D'''D^2 - 3D''D'D + 2(D')^3}{D^3},$$

where D', D'', D''' denote the first, second and third derivatives of D with respect to the same parameter θ . For mixed derivatives, the corresponding expression follows from applying the product and quotient rules to $\frac{D_{\theta\alpha\theta\beta} D - D_{\theta\alpha} D_{\theta\beta}}{D^2}$. Using these rules, we obtain the third-order derivatives of the log-likelihood.

(i) $U_{\alpha\alpha\alpha}$:

$$\begin{aligned} U_{\alpha\alpha\alpha} &= \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha^3} D_i^2 - 3 \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) D_i + 2 \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right)^3}{D_i^3} - \frac{6n}{\alpha^4} + \frac{6}{\alpha^4} \sum_{i=1}^n v_i - \\ &\frac{6}{\alpha^3} \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} + \frac{3}{\alpha^2} \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_i}{\partial \alpha^2} \\ &+ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i - \frac{3}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right). \end{aligned}$$

The remaining derivative is computed explicitly:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{3}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i v_i \right) = \frac{6}{\alpha^3 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i - \frac{3}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{6}{\alpha^3 \beta} \sum_{i=1}^n p_i v_i + \frac{3}{\alpha^2 \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i,$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left(-\frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i \right) = \frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i - \frac{1}{\alpha \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 \frac{\partial v_i}{\partial \alpha} =$$

$$\frac{1}{\alpha^2 \beta^2} \sum_{i=1}^n p_i^2 v_i + \frac{1}{\alpha \beta^3} \sum_{i=1}^n p_i^3 v_i.$$

(ii) $U_{\alpha\alpha\beta}$:

$$U_{\alpha\alpha\beta} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha^2 \partial \beta} D_i^2 - \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha^2} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right) D_i - 2 \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) D_i + 2 \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right)^2}{D_i^3} + \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

(iii) $U_{\alpha\beta\beta}$:

$$U_{\alpha\beta\beta} =$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^3 D_i}{\partial \alpha \partial \beta^2} D_i^2 - \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \alpha \partial \beta} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right) D_i - \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) D_i + 2 \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right)^2}{D_i^3} + \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

(iv) $U_{\beta\beta\beta}$:

$$U_{\beta\beta\beta} = \sum_{i=1}^n \frac{\frac{\partial^3 D_i}{\partial \beta^3} D_i^2 - 3 \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right) D_i - \left(\frac{\partial^2 D_i}{\partial \beta^2} \right) \left(\frac{\partial D_i}{\partial \alpha} \right) D_i + 2 \left(\frac{\partial D_i}{\partial \beta} \right)^3}{D_i^3} + \frac{\partial}{\partial \beta}.$$

Hence the estimated information matrix is:

$$\hat{K} = \begin{pmatrix} \hat{\kappa}_{11} & \hat{\kappa}_{12} \\ \hat{\kappa}_{21} & \hat{\kappa}_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{\alpha\alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & -U_{\alpha\beta}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \\ -U_{\beta\alpha}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) & -U_{\beta\beta}(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) \end{pmatrix}.$$

The Elements of $A^{(1)}$

$$a_{11}^{(1)} = \kappa_{11,1} - \frac{1}{2} \kappa_{111}, \quad a_{12}^{(1)} = \kappa_{12,1} - \frac{1}{2} \kappa_{121}, \quad a_{21}^{(1)} = \kappa_{21,1} -$$

$$\frac{1}{2} \kappa_{211}, \quad a_{22}^{(1)} = \kappa_{22,1} - \frac{1}{2} \kappa_{221}.$$

Using the observed cumulants:

$$\hat{a}_{11}^{(1)} = U_{\alpha\alpha}(\hat{\Theta}) U_{\alpha}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2} U_{\alpha\alpha\alpha}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{12}^{(1)} = U_{\alpha\beta}(\hat{\Theta})U_{\alpha}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\alpha\beta\alpha}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{21}^{(1)} = U_{\beta\alpha}(\hat{\Theta})U_{\alpha}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\beta\alpha\alpha}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{22}^{(1)} = U_{\beta\beta}(\hat{\Theta})U_{\alpha}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\beta\beta\alpha}(\hat{\Theta}).$$

Therefore,

$$\hat{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11}^{(1)} & \hat{a}_{12}^{(1)} \\ \hat{a}_{21}^{(1)} & \hat{a}_{22}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

The Elements of $A^{(2)}$

$$a_{11}^{(2)} = \kappa_{11,2} - \frac{1}{2}\kappa_{112}, \quad a_{12}^{(2)} = \kappa_{12,2} - \frac{1}{2}\kappa_{122}, \quad a_{21}^{(2)} = \kappa_{21,2} - \frac{1}{2}\kappa_{212}, \quad a_{22}^{(2)} = \kappa_{22,2} - \frac{1}{2}\kappa_{222}.$$

Using the observed cumulants:

$$\hat{a}_{11}^{(2)} = U_{\alpha\alpha}(\hat{\Theta})U_{\beta}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\alpha\alpha\beta}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{12}^{(2)} = U_{\alpha\beta}(\hat{\Theta})U_{\beta}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\alpha\beta\beta}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{21}^{(2)} = U_{\beta\alpha}(\hat{\Theta})U_{\beta}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\beta\alpha\beta}(\hat{\Theta}),$$

$$\hat{a}_{22}^{(2)} = U_{\beta\beta}(\hat{\Theta})U_{\beta}(\hat{\Theta}) - \frac{1}{2}U_{\beta\beta\beta}(\hat{\Theta}).$$

Therefore,

$$\hat{A}^{(2)} = \begin{pmatrix} \hat{a}_{11}^{(2)} & \hat{a}_{12}^{(2)} \\ \hat{a}_{21}^{(2)} & \hat{a}_{22}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

BAĞINTILAR VE FONKSİYONLAR: KAVRAMSAL YAPI, ÖĞRENME GÜÇLÜKLERİ VE ÖĞRENCİ YANILGILARI

Hafize GÜMÜŞ¹

1. GİRİŞ

Matematik, doğası gereği problem çözme temelli yapısı sayesinde, bireylerin akıl yürütme, eleştirel düşünme ve ilişkilendirme becerilerini geliştirmede diğer derslere kıyasla daha belirgin bir role sahiptir (Baki, 2008). Bilim ve teknolojiadaki gelişmelerin temelinde matematiksel düşünme yer almakta; mühendislikten ekonomiye, fen bilimlerinden sosyal bilimlere kadar pek çok alanda matematiksel bilgi ve becerilerden yararlanılmaktadır. Bu nedenle matematik eğitimi, bireylerin akademik başarılarının yanı sıra günlük yaşamda karşılaştıkları durumları analiz edebilen, çözüm üretebilen ve olaylar arasında ilişki kurabilen bireyler olarak yetiştirilmelerinde oldukça önemlidir.

Matematiksel öğrenmede, kavramların ezberlenmesinden çok anlamlandırılması önem taşımaktadır. Çünkü bir kavramın yalnızca tanımını bilmek, onu farklı matematiksel durumlarda kullanabilmek için yeterli değildir. Matematiksel tanımların doğru anlaşılabilmesi, tanım içerisinde yer alan kavram ve ifadelerin anlamlarının da kavranmasına bağlıdır. Matematiksel bilgilerin hiyerarşik ve ilişkisel yapısı göz önüne alındığında, bir kavramın öğrenilmesi çoğu zaman onun dayandığı öncül

¹ Profesör, Necmettin Erbakan Üniversitesi, Ereğli Eğitim Fakültesi, Matematik ve Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü, ORCID: 0000-0001-8972-5961.

kavramların anlaşılmasını zorunlu kılmaktadır (Kandemir, 2004).

Matematik eğitimi literatüründe bilgi genellikle kavramsal ve işlemsel bilgi olmak üzere iki boyutta ele alınmaktadır. Kavramsal bilgi, matematiksel fikirler arasındaki ilişkilerin ve bu ilişkileri oluşturan temel ilkelerin anlaşılmasını içerirken, işlemsel bilgi belirli matematiksel görevlerin yerine getirilmesinde kullanılan kurallar, algoritmalar ve işlem basamaklarından oluşmaktadır (Hiebert ve Lefevre, 1986'dan Akt. Baroody, 2003).

Kavramsal bilginin oluşması için, birey var olan bilgilerini kullanarak yeni bilgiyi zihninde yapılandırır, eski bilgileriyle yeni bilgiyi bütünleştirilerek içselleştirir (Ülgen, 2001).

Bu çerçevede kavramsal öğrenme, öğrencilerin matematiksel kavramları birbirleriyle ilişkilendirerek anlamlandırmalarını, matematiksel yapıların altında yatan mantığı kavramalarını ve formüllerin yalnızca kullanımını değil, ortaya çıkış nedenlerini de açıklayabilmelerini ifade etmektedir.

Bu bağlamda matematik eğitiminde kavramlar arasındaki ilişkilerin anlaşılması ayrı bir önem taşımaktadır. Öğrencilerin matematiksel yapıları yalnızca işlem düzeyinde değil, kavramsal düzeyde de anlamlandırabilmeleri; kavramlar arasındaki bağlantıları kurabilmelerine bağlıdır. Özellikle bağlantı, fonksiyon, denklik ve sıralama gibi kavramlar, matematiksel düşünmenin ilişkisel yönünü ortaya koymakta ve öğrencilerin matematiksel yapıları bütüncül olarak kavramalarına olanak sağlamaktadır.

1.1. Soyut Matematikte Bağıntı ve Fonksiyon Kavramı

Matematikte kullanılan kavramlar genellikle soyut, karmaşık ve hiyerarşiktir (Nesbit, 1996). Sayılar, kümeler, bağıntılar, fonksiyonlar ve cebirsel yapılar gibi birçok matematiksel kavram, doğrudan gözlemlenebilen nesnelere olmaktan ziyade zihinsel olarak oluşturulan soyut yapılardır. Bu nedenle soyut matematik, matematiksel bilgilerin yalnızca uygulanmasına değil, aynı zamanda altında yatan mantığın, ilişkilerin ve yapıların anlaşılmasına odaklanmaktadır. Soyut matematik sayesinde bireyler, matematiksel kavramları ezberlemek yerine bu kavramların neden ve nasıl ortaya çıktığını kavrayabilmekte, farklı matematiksel yapılar arasındaki ilişkileri görebilmektedir.

Soyut matematiğin temel amaçlarından birisinin, matematiksel nesnelere arasındaki ilişkileri ortaya koymak ve bu ilişkileri sistematik bir biçimde incelemek olduğu düşünüldüğünde, matematiksel düşünmenin merkezinde yer alan kavramlardan birisi de bağıntılardır. Bağıntılar, iki ya da daha fazla matematiksel nesne arasındaki ilişkiyi tanımlayan yapılar olarak matematiğin birçok alanında önemli bir yere sahiptir. Özellikle fonksiyon, denklik bağıntısı ve sıralama bağıntısı gibi temel matematiksel kavramların anlaşılabilmesi, bağıntı kavramının doğru ve kapsamlı bir şekilde kavranmasına bağlıdır. Bu nedenle bağıntı, yalnızca soyut matematiğin temel konularından biri değil, aynı zamanda öğrencilerin ileri düzey matematiksel yapıları anlamlandırmalarında önemli bir araç olarak değerlendirilmektedir.

Bir kümenin elemanları ile başka bir kümenin elemanları arasında kurulan tüm eşleştirmeler bağıntı olarak tanımlanır. Bu açıdan bakıldığında bağıntı, oldukça geniş ve esnek bir çerçeve sunar. Buna rağmen matematik eğitimi literatürü incelendiğinde,

bağıntı kavramının öğretimine yönelik çalışmaların sınırlı olduğu ve bu kavramın çoğunlukla dolaylı olarak ele alındığı görülmektedir.

Matematik eğitimi literatüründe bağıntı kavramı, çoğunlukla doğrudan ele alınmaktan ziyade, eşitlik, denklik ve ilişkisel düşünme bağlamında incelenmektedir. Bu durum, bağıntı kavramının matematiksel yapılar içerisindeki temel rolüne rağmen, öğretim sürecinde çoğu zaman arka planda kalmasına neden olmaktadır. Oysa bağıntılar, matematikte kümeler arasındaki ilişkileri tanımlayan en temel yapılardan biri olup, fonksiyon, sıralama ve denklik gibi kavramların anlaşılmasında kritik bir öneme sahiptir.

Bağıntılar, denklik bağıntıları ve sıralama bağıntıları olmak üzere iki başlık altında incelenir. Denklik bağıntıları, bir kümenin elemanlarını belirli ortak özelliklerine göre sınıflandırmaya olanak sağlayan matematiksel yapılar iken sıralama bağıntıları bir kümenin elemanlarının karşılaştırılması ve düzenlenmesinin yanı sıra maksimum, minimum, supremum, infimum, maksimal ve minimal eleman gibi kavramların tanımlanmasına da temel oluşturmaktadır.

Bir bağıntının denklik bağıntısı olabilmesi için yansıma, simetri ve geçişkenlik özelliklerini sağlaması gerekmektedir. Bu özellikler sayesinde kümenin elemanları denklik sınıfları adı verilen ayrık alt kümelere ayrılabilmekte ve karmaşık matematiksel yapılar daha düzenli bir biçimde incelenebilmektedir. Özellikle modüler aritmetik, geometri ve cebir gibi matematiğin birçok alanında denklik bağıntılarından yararlanılmaktadır. Bunun yanı sıra günlük yaşamda bireylerin belirli özelliklerine göre gruplandırılması, nesnelere benzerliklerine göre sınıflandırılması ve çeşitli kategorilerin oluşturulması da denklik bağıntılarının temel mantığıyla ilişkilendirilebilir. Bireylerin aynı doğum ayında doğmuş

olmaları, aynı kan grubuna sahip olmaları veya aynı ayakkabı numarasını kullanmaları birer denklik bağıntısı olarak değerlendirilebilir. Bu tür ilişkiler, belirli ortak özelliklere sahip bireylerin veya nesnelerin aynı grupta toplanmasına olanak sağlamaktadır. Dolayısıyla denklik bağıntıları, matematiksel nesnelerin sistematik biçimde sınıflandırılmasının yanı sıra günlük yaşamda karşılaşılan birçok kategorilendirme işleminin de matematiksel temelini oluşturmaktadır.

Sıralama bağıntıları, bir kümenin elemanlarının karşılaştırılması ve düzenlenmesinin yanı sıra maksimum, minimum, supremum, infimum, maksimal ve minimal eleman gibi kavramların tanımlanmasına da temel oluşturmaktadır. Bu nedenle matematikte ve günlük yaşamda gerçekleştirilen birçok sıralama işlemi, açıkça ifade edilmese bile bir sıralama bağıntısına dayanmaktadır. Buna karşın öğrenciler, günlük yaşamda kullandıkları sıralama kavramı ile matematiksel sıralama bağıntıları arasındaki ilişkiyi çoğunlukla fark edememekte ve sıralama bağıntılarını yalnızca belirli aksiyomları sağlayan teorik yapılar olarak değerlendirmektedirler (Akdemir ve Akdemir, 2025).

Sıralama bağıntısına farklı bir örnek olarak günlük hayatta “başarı sıralaması” verilebilir. Bir sınıfta öğrencilerin sınav puanlarına göre “daha yüksek puan alma” ilişkisi kurulduğunda bir sıralama bağıntısı oluşur. Örneğin Ahmet’in puanı Ayşe’den yüksekse $Ahmet > Ayşe$ şeklinde bir ilişki tanımlanabilir. Bu ilişki sayesinde öğrenciler arasında bir düzen kurulur ve kimlerin daha başarılı olduğu karşılaştırılabilir. Aynı şekilde bir alışveriş sitesinde ürünlerin fiyatlarına göre sıralanması da sıralama bağıntısına örnektir. Burada ürünler “daha ucuz olma” veya “daha pahalı olma” ilişkisine göre düzenlenir ve böylece bir sıralama elde edilir. Bu tür ilişkiler, elemanlar arasında karşılaştırma yapmaya imkân verdiği için matematikte sıralama bağıntısı olarak adlandırılır.

Sıralama teorisi, sıralama hakkındaki sezgisel inançlarımızı araştırmak için ikili ilişkiler kullanan bir matematik dalı olarak tanımlanabilir. Bu noktada, sıralama teorisi, "bu, şundan daha küçüktür" veya "bu, şundan önce gelir" gibi ifadeler açısından sıralama kavramını tanımlamak için biçimsel bir çerçeve sağlayabilir (Vishwanath, 2011).

Sıralama bağıntılarına dayalı sıralama kavramı, günlük hayatta alışık olunan doğrusal sıralama anlayışından farklı yapılar içerebilmektedir. Özellikle elemanların birbirleriyle karşılaştırılabilir ya da karşılaştırılmaz olması, kümelerin sonlu veya sonsuz özellik göstermesi, elemanlar arasındaki büyüklük-küçüklük ilişkilerinin çeşitliliği ve ilk bakışta ilişkisiz görünen nesnelerin belirli ölçütlere göre sıralanabilmesi gibi durumlar, soyut matematik öğreniminde öğrenciler tarafından kavranması güç konular arasında yer almaktadır. Ayrıca maksimum, minimum, maksimal eleman, minimal eleman, supremum ve infimum gibi sıralama teorisinin ileri düzey kavramları da öğrencilerin zihninde somut bir şekilde yapılandırılması zor olan matematiksel kavramlar olarak öne çıkmaktadır. (Akdemir, 2016)

Bağıntı ve fonksiyonlar her ne kadar ilköğretim müfredatının ilk kademesinde kendi adlarıyla yer almasalar da matematik dersinin içinde başka başlıklar altında sıklıkla karşımıza çıkmaktadırlar. Özellikle örüntü ve ilişkiler konusu pek çok fonksiyon kavramını bünyesinde taşır (Polat ve Şahiner, 2007)

Fonksiyonlar sadece bir matematik konusu gibi görünmesine rağmen günlük hayatta bir çok alanda farkında olmadan kullanılır. Vinner 'e göre (1983), öğrenci fonksiyon konusunu matematik dersinin dışına çıkaramıyorsa, bu onun konu üzerinde hakim olmadığını gösterir. Öğrencilerin diğer matematiksel konuları anlamaları ve konular arası ilişkileri

kurmaları için fonksiyon oldukça önemlidir. Fonksiyon konusu, tanım kümesi, görüntü kümesi, bağıntı gibi birçok kavramı tanımlama, dönüşüm yapma, modelleme gibi birçok beceriyi içerir. (Polat ve Şahiner, 2007)

Fonksiyonlarda temel şart, tanım kümesindeki her elemanın görüntü kümesinde yalnızca bir tek elemana karşılık gelmesidir. Buna karşılık bağıntılarda böyle bir zorunluluk yoktur. Bir eleman birden fazla elemana karşılık gelebileceği gibi, hiçbir elemana da karşılık gelmeyebilir. Bu durum bağıntılara daha esnek bir yapı kazandırırken, fonksiyonları daha düzenli ve kesin hale getirir.

Davidenko (1999), ortaöğretim ve yükseköğretim düzeylerinde fonksiyon kavramının öğretimine genellikle fonksiyon tanımının verilmesiyle başladığını ve ardından tanım kümesindeki her elemanın yalnızca bir görüntüye sahip olduğu özelliğinin vurgulandığını belirtmektedir. Ancak araştırmacı, fonksiyon kavramının öğrenciler tarafından daha anlamlı biçimde öğrenilebilmesi için öğretim sürecinde günlük yaşamdan örneklerin kullanılmasının gerekli olduğunu savunmaktadır.

Fonksiyon kavramına yönelik araştırmalar uzun bir geçmişe sahip olmasına rağmen, bu kavram öğrenciler için hâlen önemli bir öğrenme güçlüğü alanı olarak varlığını sürdürmektedir. Fonksiyonel ilişkinin fonksiyon kavramının öncülü niteliğinde olması, fonksiyon düşüncesinin gelişiminin ortaöğretimde başlayan bir süreç olarak değil, okul öncesi dönemden itibaren desteklenmesi gereken uzun vadeli bir öğrenme süreci olarak ele alınmasını gerekli kılmaktadır. Erken basamaklarda örüntü kavramı ile kazandırılan ilişki bilgisi, değişken kavramının da kazanımından sonra fonksiyon konusu ile soyut kimlik bulur.

Willoughby'ye (1999) göre, öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamada zorlanmalarının önemli nedenlerinden biri, kavramın ani bir şekilde ve yüksek düzeyde soyut içerikle öğretilmesidir. Buna karşılık, kavramın somut temeller üzerine inşa edilerek zamanla soyutlaştırılması, öğrencilerin erken yaşlardan itibaren fonksiyonel düşünme becerilerini geliştirmelerine katkı sağlayabilir.

1.2. Bağntı ve Fonksiyonlara Dair Öğrenci Yanılgıları

Öğrencilerin bağntı kavramını anlamakta zorlanmalarının temel nedenleri arasında, kavramın soyut yapısı, önceki öğrenmelerin etkisi ve öğretim sürecinde kullanılan yöntemler yer almaktadır. Özellikle işlemsel öğrenmenin baskın olması, öğrencilerin matematiksel ilişkileri anlamlandırmasını zorlaştırmaktadır. Ayrıca bağntı kavramının genellikle sembolik düzeyde sunulması ve günlük yaşamla yeterince ilişkilendirilmemesi de öğrenme sürecini olumsuz etkilemektedir. Bağntılar ile ilgili sık görülen bazı öğrenci yanılgıları şu şekilde sıralanabilir:

1.2.1. Eşitlik Kavramının İşlemsel Algılanması

Öğrencilerin eşitlik ifadesini çoğunlukla bir işlem sonucu olarak algıladığı, iki matematiksel ifade arasındaki ilişkiyi temsil ettiğini göz ardı ettiği belirlenmiştir. Bu durum, bağntı kavramının temelinde yer alan ilişkiyel yapının anlaşılmasını güçleştirmektedir.

1.2.2. Denklik Bağntılarının Yüzeysel Öğrenilmesi

Denklik bağntılarının özellikleri olan yansıma, simetri ve geçişkenlik, öğrenciler tarafından çoğunlukla ezberlenmekte; ancak bu özelliklerin farklı matematiksel durumlara uygulanmasında güçlük yaşanmaktadır. Bu durum, kavramsal öğrenmenin yeterince gerçekleşmediğini göstermektedir.

1.2.3. Bağntı ve Fonksiyon Kavramlarının Karıştırılması

Öğrencilerin önemli bir kısmı, bağntı ve fonksiyon kavramlarını birbirinden ayırt etmekte zorlanmaktadır. Özellikle her fonksiyonun bir bağntı olduğu bilgisine sahip olan öğrenciler, her bağntının fonksiyon olmadığı gerçeğini kavramakta güçlük çekmektedir. Öğrencilerin fonksiyon kavramını daha baskın ve tanıdık bir yapı olarak görmesi, bağntı kavramının daha genel olan yapısını göz ardı etmelerine neden olmaktadır.

1.2.4. Temsiller Arası Geçiş Problemleri

Bağntıların farklı temsilleri (tablo, grafik, sembolik ifade) arasında geçiş yapma konusunda öğrencilerin zorlandığı görülmektedir. Bu durum, kavramın bütüncül bir şekilde öğrenilmesini engellemektedir.

Matematik eğitimi alanındaki araştırmalar, öğrencilerin çoğunun fonksiyon kavramını işlemsel düzeyde ele aldığını göstermektedir. Dubinsky ve Harel'e (1992) göre öğrenciler, verilen bir fonksiyon için görüntü bulma işlemlerini gerçekleştirebilseler de fonksiyonu, her girdiyi belirli bir kurala bağlı olarak tek bir çıktıyla ilişkilendiren matematiksel bir nesne olarak anlamlandırmakta güçlük çekmektedirler.

Bağntı ve fonksiyon kavramlarının karıştırılması da literatürde sıkça vurgulanan bir diğer önemli sorundur. Bu karışıklık, öğrencilerin matematiksel kavramlar arasındaki hiyerarşik ilişkileri yeterince kavrayamadığını göstermektedir. Özellikle fonksiyon kavramının daha sık kullanılması, bağntı kavramının geri planda kalmasına ve daha genel bir yapı olarak yeterince anlaşılmasına yol açmaktadır. Her fonksiyon bir bağntıdır; ancak her bağntı bir fonksiyon değildir. Fonksiyonlar, bağntıların belirli kurallara bağlanmış ve sınırlandırılmış halidir. Bu nedenle fonksiyon kavramı, bağntı

kavramının bir alt kümesi olarak ele alınır. Bağıntı ile fonksiyon arasındaki en temel farklardan biri de bu tek değerli olma şartıdır. Bağıntılar çoklu ve belirsiz eşleşmelere izin verirken, fonksiyonlar her girdiyi yalnızca bir çıktıya indirger. Ayrıca bağıntılarda tanım kümesindeki bazı elemanlar ilişki dışında kalabilirken, fonksiyonlarda her elemanın mutlaka bir karşılığı bulunmak zorundadır.

Fonksiyonlar bu düzenli yapıları sayesinde matematikte güçlü bir araç olmasına rağmen, bazı durumlarda yetersiz kalmaktadır. Özellikle gerçek hayatta karşılaşılan çoklu sonuçların bulunduğu ilişkiler fonksiyonlarla tam olarak ifade edilemez. Örneğin bir öğrencinin birden fazla ders alabilmesi, bir kişinin birçok kişiyi takip edebilmesi veya bir olayın birden fazla sonucu doğurabilmesi gibi durumlar fonksiyon tanımına uymaz.

Bunun yanı sıra belirsizlik içeren sistemlerde de fonksiyonlar sınırlı kalır. Hava olaylarının bölgeden bölgeye değişmesi, bir ilacın etkisinin kişiden kişiye farklılık göstermesi veya bir problemin birden fazla çözümünün bulunması gibi durumlar tek değerli bir yapıyla açıklanamaz. Fonksiyonlar bu çeşitliliği tek bir değere indirgediği için gerçek hayatın bazı karmaşık ilişkilerini modellemede yetersiz kalır.

Sonuç olarak bağıntılar, matematikte en genel ilişki yapısını oluştururken; fonksiyonlar bu yapının düzenlenmiş ve sınırlandırılmış özel bir türünü temsil eder. Fonksiyonlar kesinlik ve düzen sağlarken, bağıntılar daha esnek ve çok yönlü ilişkilerin modellenmesine olanak tanır.

2. TARTIŞMA

Fonksiyon kavramı ve öğrenci algıları ile ilgili fazlaca çalışma yapılıyor olmasına rağmen, bağıntılar ile ilgili çalışmaların literatürde oldukça az olduğu görülmektedir.

Bağıntı ve fonksiyon konularındaki öğrenme güçlüklerinin öğrencilerin matematiğe yönelik tutumları, benlik duyguları ve kullanılan öğretim yöntemleriyle ilişkisini araştıran Dikici ve İşleyen (2003), 9. sınıf öğrencileriyle gerçekleştirdikleri çalışmada bu değişkenler arasında anlamlı bir ilişki tespit etmişlerdir. Çalışma bulguları, özellikle öğretmenin kullandığı öğretim yaklaşımı ile iletişim becerilerinin, öğrencilerin yaşadığı öğrenme güçlüklerini etkileyen önemli faktörler arasında yer aldığını göstermektedir.

Polat ve Şahiner (2007), bir üniversitenin sınıf öğretmenliği bölümündeki birinci sınıf öğrencileri ile yaptıkları çalışmada, öğrencilerin bağıntı ve fonksiyon kavramları ile ilgili yaptıkları yaygın hataları ortaya çıkarmaya çalışmışlar, bu hatalar giderilebilir mi?" sorusuna cevap aramışlardır. Bu amaçla, öncelikle bağıntı, özellikleri, bağıntı-fonksiyon ilişkisi, fonksiyon tanımı ve çeşitleri ile ilgili hatalar tesbit edilmiş; sonraki aşamada bu kavram yanlışları dikkate alınarak hazırlanan dersin ve uygulanan metodun ne kadar etkili olduğu araştırılmıştır. İlk aşamada öğrencilerin çoğunlukla fonksiyonun tanımını kullanmak yerine şemayla gösterme eğiliminde olduklarını gözlemlemişlerdir. İkinci çalışma sonunda ise öğrencilerin sahip oldukları kavram yanlışlarının büyük ölçüde azaldığı görülmüştür.

Aydın ve Köğce (2008), matematik öğretmen adaylarının denklem ve fonksiyon kavramları arasında nasıl bir ilişkinin olduğuna dair görüşlerini belirlemek amacıyla son sınıf öğretmen adaylarına uyguladıkları formun analizinde, öğretmen adaylarının fonksiyon ve denklem kavramları arasında ilişki

kuramadıkları, ilişkilendiremedikleri, hatta çoğunlukla fonksiyonları denklemlerin bir alt kümesi olarak görüldüğünü tespit etmişlerdir.

Kabael ve Tanışlı (2010), literatüre dayanarak, cebirsel düşünme sürecinde örüntü ve fonksiyon kavramları arasındaki ilişki ve bunların öğretim stratejileri araştırılmış ve bu araştırmadan elde edilen sonuçlar araştırmacıların önerileriyle desteklenerek sunulmuştur.

Bağıntı konusunun öğretiminde farklı öğretim yaklaşımlarının etkililiğini inceleyen Yavuz ve Kepçeoğlu (2011), 9. sınıf düzeyindeki 80 öğrenciyle gerçekleştirdikleri çalışmada bağlam temelli öğretim ile geleneksel öğretim yöntemlerini karşılaştırmışlardır. Deney grubunda bağlam temelli, kontrol grubunda ise geleneksel öğretim uygulanmış; süreç sonunda öğrencilere “Bağıntı Öğrenme Testi” uygulanmıştır. Araştırma sonuçları, bağlam temelli öğretim yaklaşımının öğrencilerin bağıntı konusundaki başarılarını artırmada geleneksel öğretime göre daha etkili olduğunu göstermiştir.

Kar, Çiltaş ve Işık (2011), öğrencilerin matematikte sıklıkla karşılaştıkları “fonksiyon”, “bire-bir fonksiyon”, “örten fonksiyon”, “bağıntı”, “denklik sınıfı”, “kartezyen çarpım kümesi” ve “alt cisim” kavramlarına ilişkin öğrenme güçlüklerini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Araştırmanın örneklemini, Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Programı’nın ikinci sınıfında öğrenim gören 166 öğrenci oluşturmuştur. Elde edilen verilerin analizi sonucunda öğrencilerin söz konusu kavramları tanımlama, bu kavramlara ilişkin açıklamalarını matematiksel dil kullanarak ifade etme ve kavramlar arasındaki farklılıkları ayırt etme konusunda çeşitli güçlükler yaşadıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin işlemsel

bilgi düzeylerinin, kavramsal bilgi düzeylerine kıyasla daha gelişmiş olduğu tespit edilmiştir.

Akdemir (2016), ilköğretim matematik öğretmeni adaylarının sıralama kavramına yönelik sezgisel (informal) bilgilerinin formal matematiksel bilgiye dönüşüm sürecinde yaşadıkları zorlukları araştırmıştır. Çalışmada ayrıca adayların sıralama kavramını sıralama bağıntılarıyla ilişkilendirme düzeyleri ile sıralama bağıntıları kapsamında yer alan ileri düzey kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri incelenmiştir.

Matematik öğretmeni adaylarının fonksiyon, bağıntı ve işlem kavramlarına yönelik bilişsel yapılarını araştıran Gökbaş (2016), bu kavramlar arasındaki karşılıklı ilişkilendirme düzeylerinin düşük olduğunu ortaya koymuştur. Araştırmada en yüksek ilişkilendirme frekansı “bağıntı-fonksiyon”, en düşük ilişkilendirme frekansı ise “işlem-bağıntı” kavramları arasında belirlenmiştir. Bulgular, fonksiyon ve işlem kavramlarının bağıntı kavramıyla olan teorik bağlantılarının öğretmen adayları tarafından yeterince kurulamadığını göstermiştir. Bunun yerine adaylar, temel kavramları birbirleriyle ilişkilendirmekten çok, her bir kavramı kendi alt kategorileri çerçevesinde değerlendirmişlerdir.

Akdemir ve Akdemir (2025)’in çalışmasında, matematik Öğretmenliği 1. sınıflarda öğrenim gören öğretmen adaylarının sıralama kavramını sıralama bağıntısıyla ilişkilendirme düzeyleri Tall ve Vinner (1981) ‘in kavram imgesi ve kavram tanımı teorik perspektifi göz önüne alınarak yorumsal ve açıklayıcı tarzda sunulmaya çalışılmıştır. Elde edilen veriler, öğretmen adaylarının sıralama kavramına matematiksel açıdan sağlam ve çok yönlü bir perspektif ile bakabilmeleri için dikkat edilmesi gereken hususları ortaya çıkarmıştır.

3. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatürde elde edilen bulgular, bağıntı kavramının matematiksel düşünmenin gelişiminde önemli bir rol oynadığını, ancak öğretim sürecinde yeterince vurgulanmadığını göstermektedir. Öğrencilerin kavramı çoğunlukla işlemsel düzeyde ele alması, ilişkisel yapının göz ardı edilmesine neden olmaktadır.

Bağıntı kavramının öğrenciler tarafından anlaşılmasının, matematiksel düşünmenin gelişimi açısından kritik bir öneme sahip olduğu görülmektedir. Ancak mevcut bulgular, öğrencilerin bu kavramı çoğunlukla yüzeysel düzeyde öğrendiğini ve kavramsal derinliğe ulaşmakta zorlandığını ortaya koymaktadır. Özellikle eşitlik kavramının işlemsel bir bakış açısıyla ele alınması, bağıntı kavramının ilişkisel doğasının göz ardı edilmesine neden olmaktadır.

Ayrıca, bağıntı kavramına yönelik doğrudan çalışmaların sınırlı olması, bu alanın matematik eğitimi araştırmaları açısından gelişime açık olduğunu göstermektedir. Mevcut çalışmaların büyük bir kısmı, bağıntı kavramını dolaylı olarak ele almakta ve daha çok eşitlik ya da cebirsel düşünme bağlamında incelemektedir. Elde edilen bulgular ışığında, ilköğretim ve ortaöğretim matematik dersi öğretim programlarında yer alan örüntü ve fonksiyon kazanımlarının, çağdaş öğretim yaklaşımları doğrultusunda yeniden yapılandırılması gerekmektedir. Bunun yanında, öğretmenlerin bu yaklaşımları öğretim süreçlerine etkili bir şekilde yansıtılabilmeleri için hizmet içi mesleki gelişim çalışmalarının desteklenmesi büyük önem taşımaktadır.

Bu kapsamda şu öneriler sunulabilir: Bağıntı kavramı öğretim programlarında daha açık bir şekilde ele alınmalıdır. Öğrencilerin kavramı farklı bağlamlarda kullanabilmelerine olanak tanınmalıdır. Çoklu temsil ve ilişkisel düşünmeye dayalı

etkinlikler artırılmalıdır. Kavram yanlışlarını ortaya çıkaran öğretim yöntemleri kullanılmalıdır. Soyut kavramların öğretiminde somut örnekler ve günlük yaşam bağlantıları artırılmalıdır.

Gelecek çalışmalarda, bağıntı kavramının öğretimine yönelik uygulamalı araştırmalara daha fazla yer verilmesi, literatürdeki önemli bir boşluğun doldurulmasına katkı sağlayacaktır.

KAYNAKÇA

- Akdemir, M. (2016). Sıralama bağıntısı ile ilişkilendirme bağlamında ilköğretim matematik öğretmen adaylarının sıralama kavramına yönelik öğrenme güçlüklerinin incelenmesi. (Yüksek lisans tezi). Dokuz Eylül Üniversitesi, İzmir, Türkiye.
- Akdemir, M., Şengül Akdemir, T. (2025). İnfomal Bilgiden Formal Bilgiye Geçiş: Sıralama Kavramını Sıralama Bağıntısı ile İlişkilendirme. *International QMX Journal*, <https://doi.org/10.5281/zenodo.17250464>
- Aydın, M., Köğce, d. (2008), Öğretmen adaylarının denklem ve fonksiyon kavramlarına ilişkin algıları. *Yüzüncü Yıl Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 5(1), 46-58.
- Baki, A. (2008). Kuramdan uygulamaya matematik eğitimi (Genişletilmiş 4. Basım). Ankara: Harf Eğitim Yayıncılığı.
- Davidenko, S. (1999). Building the concept of function from students' everyday activities. In B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking Grade K-12* (140-145). National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.
- Dikici, R., İşleyen, T. (2003). Bağıntı ve fonksiyon konusundaki öğrenme güçlüklerinin bazı değişkenler açısından incelenmesi. *Kastamonu Eğitim Dergisi*, 11(2), 105-116.
- Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The nature of the process conception of function. In G. Harel & E. Dubinsky (Eds.), *The concept of function* (pp. 85–106). Mathematical Association of America.
- Gökbaş, H. (2016). Matematik öğretmen adaylarının fonksiyon, bağıntı ve işlem ile ilgili kavramsal yapılarının incelenmesi. (Yüksek lisans tezi). Necmettin Erbakan Üniversitesi, Konya, Türkiye.

- Hiebert, J., & Lefevre, P. (1986). Matematikte Kavramsal ve İşlemsel Bilgi: Giriş Niteliğinde Bir Analiz. J. Hiebert (Ed.), Kavramsal ve İşlemsel Bilgi: Matematik Örneği (s. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kabael, T, Tanışlı, D. (2010). Teaching from patterns to functions in algebraic thinking process, Elementary Education Online, 9(1), 2013-228.
- Kandemir, M., (2004), Matematikte Kavram Kalıcılığı, Kastamonu Eğitim Fakültesi Dergisi, 12(2), 397-416.
- Kar, T., Çiltaş, A & Işık, A. (2011). Cebirdeki kavramlara yönelik öğrenme güçlükleri üzerine bir çalışma. Kastamonu Eğitim Dergisi, 19(3), 939-952.
- Nesbit, T. (1996). What counts? Mathematics education for adults. Adult Basic 88 Education 6 (2), 68-83.
- Polat, Z. S., Şahiner, Y. (2007). Bağıntı ve fonksiyonlar konusunda yapılan yaygın hataların belirlenmesi ve giderilmesi üzerine boylamsal bir çalışma. Eğitim ve Bilim, 32(146), 89-95.
- Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. Educational Studies in Mathematics, 12(2), 151-169.
- Ülgen, G. (2001). Kavram Geliştirme Kuramlar ve Uygulamalar. Ankara: Pegem A Yayıncılık.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the Notion of function. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14(3), 293-305.
- Vishwanath, S. (2011). The Schröder-Bernstein Theorem.

- Willoughby, S. S. (1999). Function from kindergarten through sixth grade. In B. Moses (Ed.), Algebraic Thinking Grade K-12 (140-145). National Council of Teachers of Mathematics Reston, Virginia.
- Yavuz, İ., & Kepceođlu, İ. (2011). Bağıntı konusunda bağlam temelli ile geleneksel oğretimin oğrencilerin başarıları üzerinde etkilerinin incelenmesi. İstanbul Aydın Üniversitesi Dergisi, 3(11), 127-148.
<https://izlik.org/JA26FJ73KY>

MATEMATİK ALANINDA
AKADEMİK TARTIŞMALAR

yaz
yayınlari

YAZ Yayınları
M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar / AFYONKARAHİSAR
Tel : (0 531) 880 92 99
yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com