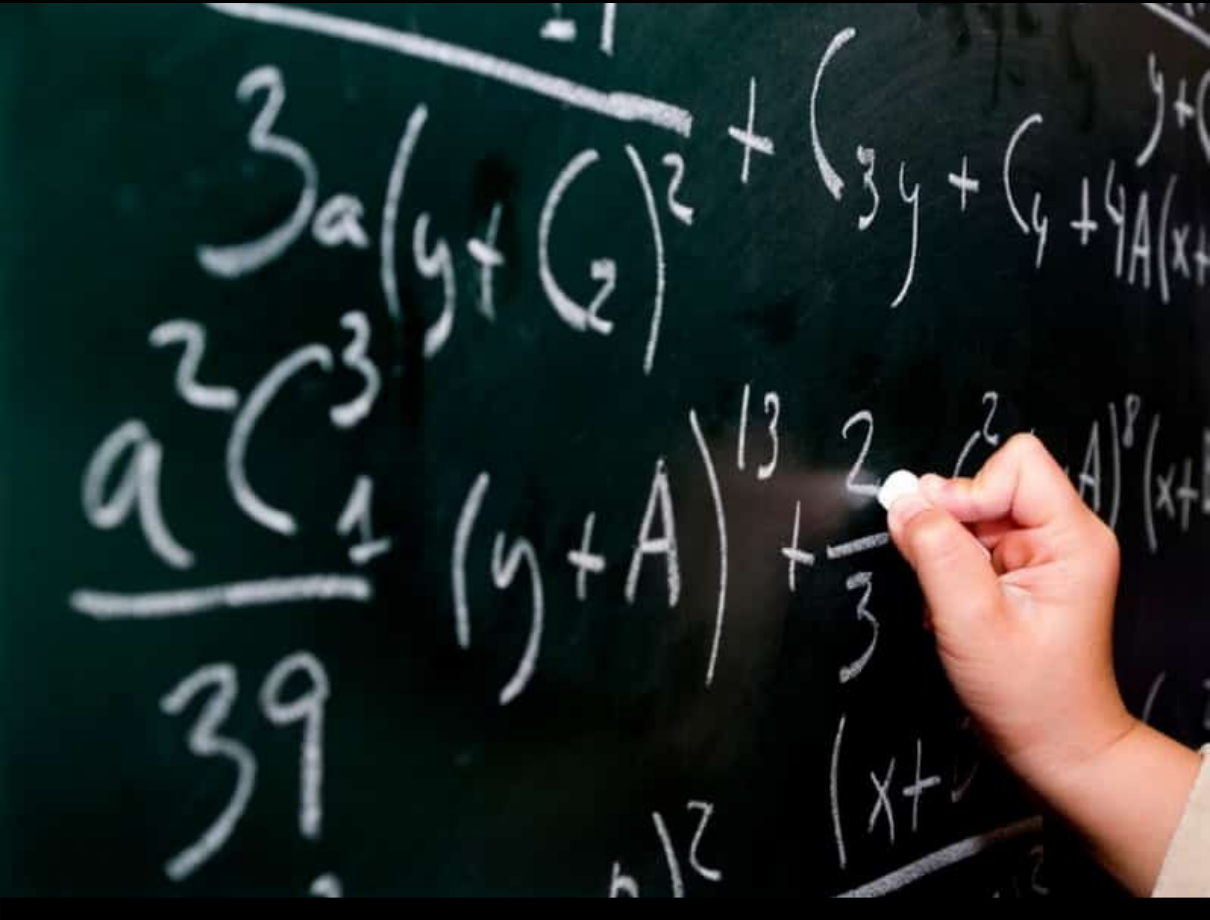


MATEMATİK ALANINDA AKADEMİK ANALİZLER

Editör: Dr. Öğr. Üyesi Elif OTKUN ÇEVİK



MATEMATİK ALANINDA AKADEMİK ANALİZLER

Editör

Dr. Öğr. Üyesi Elif OTKUN ÇEVİK

yaz
yayınları

2024

**MATEMATİK ALANINDA AKADEMİK
ANALİZLER**

Editor: Dr. Öğr. Üyesi Elif OTKUN ÇEVİK

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayımlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-6642-27-0

Mart 2024 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

info@yazyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

- A Different Polar Representation with Jacobsthal
Split Quaternions.....1**
Faik BABADAĞ, Ali ATASOY, Mirwais MANSOOR KAKAR
- On The Continuity Properties of Davis-Wielandt
Radius and Crawford Number Functions16**
Ümmügülsün ÇAĞLAYAN, Zameddin İSMAİLOV
- On The Continuity of Ratio Numerical Radius and
Ratio Crawford Number Functions.....25**
Elif OTKUN ÇEVİK, Zameddin I. ISMAILOV
- Hibrit Sayıların İnvölüsyonları ve
Anti-İnvölüsyonları35**
Derya SAĞLAM, Fatma Nur TEKELİ

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

A DIFFERENT POLAR REPRESENTATION WITH JACOBSTHAL SPLIT QUATERNIONS

Faik BABADAĞ¹

Ali ATASOY²

Mirwais MANSOOR KAKAR³

1. INTRODUCTION

Quaternions, extension of complex numbers was introduced by W. R. Hamilton in 1843 as the following quadruple

$$\gamma = \gamma_0 + \gamma_1 i_1 + \gamma_2 i_2 + \gamma_3 i_3$$

where $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{R}$ and $i_1^2 = i_2^2 = i_3^2 = -1, i_1 i_2 = -i_2 i_1$. Any quaternion can be write as $\gamma = (\gamma_0 + \gamma_1 i_1) + i_2(\gamma_2 + \gamma_3 i_1)$, where $\gamma_0 + \gamma_1 i_1$ and $\gamma_2 + \gamma_3 i_1$ are complex numbers, therefore quaternions are one of the hyper complex numbers, (Hamilton, 1884; Horadam, 1993; Iakin, 1977).

J. Cokle defined the split quaternion as

$$q = \delta_0 + \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3$$

with $\delta_0, \delta_1, \delta_2, \delta_3 \in \mathbb{R}$ and quatenionic units i_1, i_2, i_3 satisfy

$$i_1^2 = -i_2^2 = -i_3^2 = -1, i_1 i_2 = -i_2 i_1 = i_3 \quad (1)$$

¹ Doç. Dr., Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, faik.babadag@kku.edu.tr, ORCID: 0000-0001-9098-838X.

² Dr. Öğr. Üyesi, Kırıkkale Üniversitesi, Keskin MYO, aliatasoy@kku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-1894-7695.

³ YL Öğrencisi, Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, mirwaismansoorkakar-ogr@kku.edu.tr, ORCID: 0000-0001-6505-741X

and can be shown as $q = S_q + V_q$, Split quaternion q with $S_q = 0$ is a pure split quaternion, (Cockle, 1849; Ghadami, 2013; Kula et al. 2007; Ozdemir, 2009).

Let $q_1 = S_{q_1} + V_{q_1}$ and $q_2 = S_{q_2} + V_{q_2}$ be split quaternions, then addition and multiplication are

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 &= (S_{q_1} + S_{q_2}) + (V_{q_1} + V_{q_2}) \\ q_1 q_2 &= S_{q_1} S_{q_2} + \langle V_{q_1}, V_{q_2} \rangle + S_{q_1} V_{q_2} + S_{q_2} V_{q_1} + V_{q_1} \times V_{q_2} \end{aligned}$$

respectively. The conjugate and norm of

$q = \delta_0 + \delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3$ are respectively as

$$q^* = \delta_0 - \delta_1 i_1 - \delta_2 i_2 - \delta_3 i_3$$

and

$$N(q) = \sqrt{|qq^*|} = \sqrt{|\delta_0^2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2|} \quad (2)$$

if $N(q) = 1$, then q is a unit split quaternion, for any split quaternion q with $N(q) \neq 0$, $\frac{q}{N(q)}$ is a unit split quaternion.

Let $I_q = \delta_0^2 + \delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2$, then \hat{q} is space-like, time-like and light-like if $I_q > 0$, $I_q < 0$ and $I_q = 0$ respectively, the multiplicative inverse of q is $q^{-1} = \frac{q^*}{N(q)^2}$ and there is no inverse for light-like split quaternion. The Cayley-Dickson's form of a split quaternion q is

$$q = (\delta_0 + \delta_1 i_1) + (\delta_2 + \delta_3 i_1) i_2$$

which is based on two complex numbers. The polar representation for spacelike split quaternion q is as

$$q = N(q)(\sinh \theta + \mu \cosh \theta) \quad (3)$$

where $\mu = \frac{\delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3}{\sqrt{-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}}$ is pure split quaternion and

$$\sinh \theta = \frac{\delta_0}{N(q)} ; \cosh \theta = \frac{\sqrt{|\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2|}}{N(q)}$$

The polar representation for timelike split quaternion q with spacelike vector part is as

$$q = N(q)(\cosh \theta + \mu \sinh \theta) \quad (4)$$

where $\mu = \frac{\delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3}{\sqrt{-\delta_1^2 + \delta_2^2 + \delta_3^2}}$ is pure split quaternion and

$$\cosh \theta = \frac{\delta_0}{N(q)} ; \sinh \theta = \frac{\sqrt{|\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2|}}{N(q)}$$

The polar representation for timelike split quaternion q with timelike vector part is as

$$q = N(q)(\cos \theta + \mu \sin \theta) \quad (5)$$

where $\mu = \frac{\delta_1 i_1 + \delta_2 i_2 + \delta_3 i_3}{\sqrt{\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2}}$ is pure split quaternion and

$$\cos \theta = \frac{\delta_0}{N(q)} ; \sin \theta = \frac{\sqrt{|\delta_1^2 - \delta_2^2 - \delta_3^2|}}{N(q)}$$

Any split quaternion can be written in the form $q = Ae^{Bi_2}$, where $A = \delta_0 + \delta_1 i_1$ and $B = \delta_2 + \delta_3 i_1$ are complex numbers, (Sangwine, 2010; Atasoy, 2017).

The Jacobsthal J_n and Jacobsthal-Lucas j_n number sequences are defined by

$$J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2} ; J_0 = 0, J_1 = 1$$

$$j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2} ; j_0 = 2, j_1 = 1$$

For $n \geq 2$. The characteristic equation of these number sequences is $x^2 - x - 2 = 0$, with roots $\alpha = 2$, $\beta = -1$ and corresponding Binet's forms are

$$J_n = \frac{2^n - (-1)^n}{3} \quad (6)$$

$$j_n = 2^n + (-1)^n \quad (7)$$

For more details and relations about these number sequences see (Babadağ ,2023; Catarino, 2015; Horadam, 1996, 1997).

2. MAIN RESULTS

In this section we introduce a new polar representation of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions based on Cayley-Dikson's form. Moreover some properties of these split quaternions are discussed.

Definition 1. The Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions are defined as

$$\mathbb{J}_n = J_n + J_{n+1}i_1 + J_{n+2}i_2 + J_{n+3}i_3 \quad (8)$$

$$\tilde{\mathbb{J}}_n = j_n + j_{n+1}i_1 + j_{n+2}i_2 + j_{n+3}i_3 \quad (9)$$

respectively, where J_n is n^{th} Jacobsthal, j_n is n^{th} Jacobsthal-Lucas numbers and i_1, i_2, i_3 follow the rules in Equality (1).

The following recurrence relation can be write

$$\mathbb{J}_n = \mathbb{J}_{n-1} + 2\mathbb{J}_{n-2}, \quad n \geq 2$$

and

$$\tilde{\mathbb{J}}_n = \tilde{\mathbb{J}}_{n-1} + 2\tilde{\mathbb{J}}_{n-2}, \quad n \geq 2$$

Theorem 2. The Binet's formulas for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions are

$$\mathbb{J}_n = \frac{1}{3} \left(2^n \underline{\alpha} - (-1)^n \underline{\beta} \right) \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbb{J}}_n = 2^n \underline{\alpha} + (-1)^n \underline{\beta} \quad (11)$$

respectively, where

$$\underline{\alpha} = 1 + 2i_1 + 4i_2 + 8i_3$$

$$\underline{\beta} = 1 - i_1 + i_2 - i_3$$

Proof. The proof can be done directly by using Equalities (6), (7), (8) and (9).

Proposition 3. The norm of dual Jacobsthal and dual Jacobsthal-Lucas split quaternions is

$$N(\mathbb{J}_n) = \sqrt{2^{2n+3} + \frac{1}{3}(j_n^2 - 1)}$$
$$N(\tilde{\mathbb{J}}_n) = 3 \sqrt{2^{2n+3} + 3J_n^2 - \frac{1}{3}}$$

where J_n and j_n are n^{th} Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers, respectively.

Proof. From Equality (2), we have

$$N(\mathbb{J}_n) = \sqrt{|J_n^2 + J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2|}$$

and by using Equality (6), we obtain

$$\begin{aligned}
 J_n^2 + J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2 &= \left(\frac{2^n - (-1)^n}{3}\right)^2 + \left(\frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3}\right)^2 \\
 &\quad - \left(\frac{2^{n+2} - (-1)^{n+2}}{3}\right)^2 - \left(\frac{2^{n+3} - (-1)^{n+3}}{3}\right)^2 \\
 &= -\frac{1}{3}(25 \cdot 2^{2n} + (-1)^n 2^{n+1})
 \end{aligned}$$

Finally by doing basic calculations, we get

$$N(\mathbb{J}_n) = \sqrt{2^{2n+3} + \frac{1}{3}(j_n^2 - 1)}$$

On the other hand for $N(\tilde{\mathbb{J}}_n)$, by using Equality (7) we have

$$\begin{aligned}
 j_n^2 + j_{n+1}^2 - j_{n+2}^2 - j_{n+3}^2 &= (2^n + (-1)^n)^2 + (2^{n+1} + (-1)^{n+1})^2 \\
 &\quad - (2^{n+2} + (-1)^{n+2})^2 - (2^{n+3} + (-1)^{n+3})^2 \\
 &= -3(25 \cdot 2^{2n} + (-1)^{n+1} 2^{n+1})
 \end{aligned}$$

And by doing some necessary calculations, we get

$$N(\tilde{\mathbb{J}}_n) = 3 \sqrt{2^{2n+3} + 3j_n^2 - \frac{1}{3}}$$

Corollary 4. The Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions are spacelike split quaternions with spacelike vector part.

Theorem 5. The classical polar representation of Jacobsthal split quaternion is

$$\mathbb{J}_n = N(\mathbb{J}_n)(\sinh\theta + v\cosh\theta)$$

where

$$v = \frac{2^{n+1}(i_1 + 2i_2 + 4i_3) + (-1)^n(i_1 - i_2 + i_3)}{3\sqrt{J_{n+1}^2 + 2^{2n+3}}}$$

is a pure unit split quaternion and

$$\theta = \tanh^{-1} \left(\frac{J_n}{3\sqrt{J_{n+1}^2 + 2^{2n+3}}} \right)$$

Proof. Since \mathbb{J}_n is a spacelike dual split quaternion, then by using Equality (3), the polar representation is

$$\mathbb{J}_n = N(\mathbb{J}_n)(\sinh\theta + v\cosh\theta)$$

where

$$v = \frac{J_{n+1}i_1 + J_{n+2}i_2 + J_{n+3}i_3}{\sqrt{-J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2}}$$

$$\sinh\theta = \frac{J_n}{N(\mathbb{J}_n)}$$

$$\cosh\theta = \frac{\sqrt{|J_{n+1}^2 - J_{n+2}^2 - J_{n+3}^2|}}{N(\mathbb{J}_n)}$$

therefore

$$\tanh\theta = \frac{J_n}{\sqrt{-J_{n+1}^2 + J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2}}$$

and by using Equality (6) we get

$$v = \frac{2^{n+1}(i_1 + 2i_2 + 4i_3) + (-1)^n(i_1 - i_2 + i_3)}{3\sqrt{J_{n+1}^2 + 2^{2n+3}}}$$

and

$$\tanh\theta = \frac{J_n}{3\sqrt{J_{n+1}^2 + 2^{2n+3}}}$$

Corollary 6. The classical polar representation of Jacobsthal-Lucas split quaternions is

$$\tilde{\mathbb{J}}_n = N(\tilde{\mathbb{J}}_n)(\sinh\tilde{\theta} + \tilde{v}\cosh\tilde{\theta})$$

where

$$\tilde{v} = \frac{2^{n+1}(i_1 + 2i_2 + 4i_3) - (-1)^n(i_1 - i_2 + i_3)}{3\sqrt{2^{2n+3} + \left(\frac{j_{n+1}}{3}\right)^2}}$$

is a pure unit split quaternion and

$$\tilde{\theta} = \tanh^{-1}\left(\frac{j_n}{\sqrt{j_{n+1}^2 + 9 \cdot 2^{2n+3}}}\right)$$

Proof. The Proof is similar to Theorem (5).

Proposition 7. Let $P = Ai_2 + Bi_3 = (A + Bi_1)i_2$ be an arbitrary split quaternion, if P is spacelike then its exponential form is

$$e^P = \sinh|P| + \frac{A}{|P|} \cosh|P|i_2 + \frac{B}{|P|} \cosh|P|i_3 = \alpha_0 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$$

and if P is timelike, then

$$\begin{aligned} e^P &= \cosh|P| + \frac{A}{|P|} \sinh|P|i_2 + \frac{B}{|P|} \sinh|P|i_3 \\ &= \beta_0 + \beta_2 i_2 + \beta_3 i_3 \end{aligned}$$

That is, it is a split quaternions which does not contain i_1 's term.

Proof. Suppose μ is a spacelike unit split quaternion, that is $N(\mu) = 1$, then from Equality (3) we have

$$e^{\mu\theta} = \sinh\theta + \mu\cosh\theta$$

If we rewrite $P = |P|\frac{P}{|P|}$, then by taking $\mu = \frac{P}{|P|}$ and $\theta = |P|$ we get the result, we can prove similarly for timelike P by using Equality (4).

Now we give the new polar representations for Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions by using Cayley-Dikson's form for split quatenions.

Theorem 8. Every Jacobsthal split quaternion $\mathbb{J}_n = J_n + J_{n+1}i_1 + J_{n+2}i_2 + J_{n+3}i_3$ can be given in the form $\mathbb{J}_n = Ae^{Bi_2}$, where A and B are complex numbers, that is

$$A = \frac{2^n(1 + 2i_1) + (-1)^{n+1}(1 - i_1)}{\sqrt{j_n^2 + j_{2n+2}}}$$

$$B = \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{j_n^2 + j_{2n+2}}}{\sqrt{j_{n+2}^2 + j_{2n+6}}} \right) \frac{(2^n j_{n+4} + 9J_{n+1}^2 + 1) + 9(-1)^{n+1}2^n i_1}{\sqrt{(j_n^2 + j_{2n+2})(j_{n+2}^2 + j_{2n+6})}}$$

Proof. Suppose that $A = a + bi_1$ and $e^{Bi_2} = \alpha_0 + \alpha_2 i_2 + \alpha_3 i_3$, then

$$\mathbb{J}_n = Ae^{Bi_2} = a\alpha_0 + b\alpha_0 i_1 + (a\alpha_2 - b\alpha_3)i_2 + (a\alpha_3 + b\alpha_2)i_3$$

if $\alpha_0 = 0$, then we can select $a = 1$ and $b = 0$, we will get $A = 1$. For $\alpha_0 \neq 0$, we construct a complex number

$$\psi = a\alpha_0 + b\alpha_0 i_1 = J_n + J_{n+1}i_1$$

and then $A = \frac{\psi}{|\psi|}$, by using Equality (6) the explicit form of A is

$$A = \frac{2^n(1 + 2i_1) + (-1)^{n+1}(1 - i_1)}{\sqrt{j_n^2 + j_{2n+2}}}$$

Since A is a unit complex number then $A^{-1} = A^* = \frac{J_n - J_{n+1}i_1}{\sqrt{J_n^2 + J_{n+1}^2}}$,

where A^* is conjugate of A and

$$e^{Bi_2} = A^* \mathbb{J}_n$$

$$= \frac{(J_n^2 + J_{n+1}^2) + (J_n J_{n+2} + J_{n+1} J_{n+3})i_2 + (J_n J_{n+3} - J_{n+1} J_{n+2})i_3}{\sqrt{J_n^2 + J_{n+1}^2}}$$

The norm of e^{Bi_2} is

$$|e^{Bi_2}| = \sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 - J_n^2 - J_{n+1}^2}$$

Since $\frac{e^{Bi_2}}{|e^{Bi_2}|}$ is a unit spacelike split quaternion, then its classical polar form is

$$\frac{e^{Bi_2}}{|e^{Bi_2}|} = \sinh\theta + \mu\cosh\theta$$

then we can write

$$\begin{aligned} \sinh\theta &= \frac{\sqrt{J_n^2 + J_{n+1}^2}}{\sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 - J_n^2 - J_{n+1}^2}} \\ \cosh\theta &= \frac{\sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2}}{\sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2 - J_n^2 - J_{n+1}^2}} \\ \mu &= \frac{(J_n J_{n+2} + J_{n+1} J_{n+3})i_2 + (J_n J_{n+3} - J_{n+1} J_{n+2})i_3}{\sqrt{(J_n^2 + J_{n+1}^2)(J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2)}} \end{aligned}$$

which gives

$$\tanh\theta = \frac{\sqrt{J_n^2 + J_{n+1}^2}}{\sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2}}$$

From $Bi_2 = \mu\theta$ we get

$$\begin{aligned} Bi_2 &= \frac{(J_n J_{n+2} + J_{n+1} J_{n+3} + (J_n J_{n+3} - J_{n+1} J_{n+2})i_1)i_2}{\sqrt{(J_n^2 + J_{n+1}^2)(J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2)}} \tanh^{-1} \left(\frac{\sqrt{J_n^2 + J_{n+1}^2}}{\sqrt{J_{n+2}^2 + J_{n+3}^2}} \right) \end{aligned}$$

By using Equality (6) the explicit form of B can be write easily.

Corollary 9. Every Jacobsthal-Lucas split quaternion

$\tilde{J}_n = j_n + j_{n+1}i_1 + j_{n+2}i_2 + j_{n+3}i_3$ can be given in the form

$\tilde{J}_n = Ae^{Bi_2}$, where A and B are complex numbers, that is

$$A = \frac{2^n(1 + 2i_1) + (-1)^n(1 - i_1)}{\sqrt{9J_n^2 + j_{2n+2}}}$$

$$B = \tanh^{-1} \left(\sqrt{\frac{9J_n^2 + j_{2n+2}}{9J_{n+2}^2 + j_{2n+6}}} \right) \frac{(j_{n+1}^2 + 3 \cdot 2^n J_{n+4} + 1) + 9(-1)^n 2^n i_1}{\sqrt{(9J_n^2 + j_{2n+2})(9J_{n+2}^2 + j_{2n+6})}}$$

Proof. The proof can be done similar to Theorem (8).

Example 10. Find the new polar representation for Jacobsthal-Lucas split quaternion $\mathbb{J}_1 = 1 + i_1 + 3i_2 + 5i_3$

Proof. We have $\mathbb{J}_1 = Ae^{Bi_2}$, where

$$A = \frac{\sqrt{2}}{2} (1 + i_1)$$

and

$$B = \frac{1}{\sqrt{17}} \tanh^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{17}} \right) (4 + i_1)$$

Theorem 11 (Catalan's identities). For positive integers n and r with $n \geq r \geq 1$, we have

$$\mathbb{J}_{n+r}\mathbb{J}_{n-r} - \mathbb{J}_n^2 = \frac{1}{3} (-1)^{n-r} 2^{n-r} J_r (j_r (1 - 13i_1 + i_2 - 13i_3) + 2(-1)^r (-1 + i_1 + 5i_2 + 7i_3))$$

$$\tilde{\mathbb{J}}_{n+r}\tilde{\mathbb{J}}_{n-r} - \tilde{\mathbb{J}}_n^2 = 3(-1)^{n-r} 2^{n-r} J_r (j_r (-1 + 13i_1 - i_2 + 13i_3) - 2(-1)^r (-1 + i_1 + 5i_2 + 7i_3))$$

where J_n and j_n are n^{th} jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers.

Proof. By using Equality (10), we get

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{n+r}\mathbb{J}_{n-r} - \mathbb{J}_n^2 &= \frac{1}{3}\left(2^{n+r}\underline{\alpha} - (-1)^{n+r}\underline{\beta}\right)\frac{1}{3}\left(2^{n-r}\underline{\alpha} - (-1)^{n-r}\underline{\beta}\right) \\
 &\quad - \frac{1}{3}\left(2^n\underline{\alpha} - (-1)^n\underline{\beta}\right)\frac{1}{3}\left(2^n\underline{\alpha} - (-1)^n\underline{\beta}\right) \\
 &= \frac{1}{9}2^n(-1)^n\left(\underline{\alpha}\underline{\beta}(1 - 2^r(-1)^{-r}) + \underline{\beta}\underline{\alpha}(1 - 2^{-r}(-1)^r)\right) \\
 &= \frac{1}{3}2^n(-1)^n J_r\left((-1)^{r+1}\underline{\alpha}\underline{\beta} + 2^{-r}\underline{\beta}\underline{\alpha}\right) \\
 &= \frac{1}{3}2^{n-r}(-1)^{n-r} J_r\left((-1)^r\underline{\beta}\underline{\alpha} - 2^r\underline{\alpha}\underline{\beta}\right)
 \end{aligned}$$

from using

$$\underline{\alpha}\underline{\beta} = (-1 + 13i_1 - i_2 + 13i_3) \quad (12)$$

$$\underline{\beta}\underline{\alpha} = (-1 - 11i_1 + 11i_2 + i_3) \quad (13)$$

we get the result. The proof for Jacobsthal-Lucas can be done similarly by using Equalities (11), (12) and (13).

Corollary 12 (Cassini's identities). For positive integer n , the following identities hold

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{n+1}\mathbb{J}_{n-1} - \mathbb{J}_n^2 &= (-1)^n 2^{n-1}(-1 + 5i_1 + 3i_2 + 9i_3) \\
 \tilde{\mathbb{J}}_{n+1}\tilde{\mathbb{J}}_{n-1} - \tilde{\mathbb{J}}_n^2 &= 9(-1)^{n-1} 2^{n-1}(-1 + 5i_1 + 3i_2 + 9i_3)
 \end{aligned}$$

Proof. The proof can be done by taking $r = 1$ in Theorem (11).

Theorem 13 (d'Ocagne's identities). For positive integers n and m with $n \geq m$ we have

$$\begin{aligned}
 \mathbb{J}_{m+1}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_m\mathbb{J}_{n+1} &= \frac{1}{3}\left(2^n(-1)^m(-1 - 11i_1 + 11i_2 + i_3)\right. \\
 &\quad \left.- 2^m(-1)^n(-1 + 13i_1 - i_2 + 13i_3)\right) \\
 \tilde{\mathbb{J}}_{m+1}\tilde{\mathbb{J}}_n - \tilde{\mathbb{J}}_m\tilde{\mathbb{J}}_{n+1} &= 3\left(2^m(-1)^n(-1 + 13i_1 - i_2 + 13i_3)\right. \\
 &\quad \left.- 2^n(-1)^m(-1 - 11i_1 + 11i_2 + i_3)\right)
 \end{aligned}$$

Proof. By using Equality (10) we have

$$\begin{aligned} \mathbb{J}_{m+1}\mathbb{J}_n - \mathbb{J}_m\mathbb{J}_{n+1} &= \frac{1}{3} \left(2^{m+1}\underline{\alpha} - (-1)^{m+1}\underline{\beta} \right) \frac{1}{3} \left(2^n\underline{\alpha} - (-1)^n\underline{\beta} \right) \\ &\quad - \frac{1}{3} \left(2^m\underline{\alpha} - (-1)^m\underline{\beta} \right) \frac{1}{3} \left(2^{n+1}\underline{\alpha} - \right. \\ &\quad \left. (-1)^{n+1}\underline{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{9} \left(-\underline{\alpha}\underline{\beta} 2^{m+1}(-1)^n - \underline{\beta}\underline{\alpha} (-1)^{m+1}2^n \right. \\ &\quad \left. + \underline{\alpha}\underline{\beta} (-1)^{n+1}2^m + \underline{\beta}\underline{\alpha} 2^{n+1}(-1)^m \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(\underline{\beta}\underline{\alpha} 2^n(-1)^m - \underline{\alpha}\underline{\beta} 2^m(-1)^n \right) \end{aligned}$$

Finally by using Equalities (12) and (13) the result is clear. The proof for Jacobsthal-Lucas can be done similarly by using Equalities (11), (12) and (13).

3. CONCLUSION

In this paper, we discussed Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas split quaternions. The polar representations of these split quaternions have been obtained similar to the real quaternions. The classical polar representation, new polar representation and some fundamental identities have been obtained.

REFERENCES

- Atasoy A. A New Polar Representation for Split and Dual Split Quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*. 2017; 27:2307–2319.
- Babadag F. A new approach to Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas numbers and dual vectors. *AIMS Mathematics*. 2023; 8(8):18596–18606.
- Catarino P., et al. New families of Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Algebra Discret. Math.*2015;20: 40–54.
- Cockle J. On systems of algebra involving more than one imaginary; and on equations of the fifth degree. *Philosophical Magazine*. 1849; 35(238):434-437.
- Ghadami R., Rahebi J., Yaylı Y. Spline split quaternion interpolation in Minkowski space. *Adv. Appl. Cliff. Algebr.* 2013;23(4):849–862.
- Hamilton W.R. On quaternions or on a new system of imaginaries in algebra. *Philos. Mag.* 1884;25(3):489-495.
- Horadam A.F. Jacobsthal representation numbers, *Fibonacci Quart.* 1996; 34: 40–54.
- Horadam A.F. Jacobsthal representation polynomials, *Fibonacci Quart.* 1997;35: 137–148.
- Horadam, A.F. Quaternion Recurrence Relations. *Ulam Quarterly.* 1993; 2: 23–33.
- Iakin, A. L. Generalized Quaternions of Higher Order. *Fibonacci Quart.* 1977; 15: no. 4, 343–346.
- Kula L., Yaylı Y. Split quaternions and rotations in semi-euclidean space R_2^4 . *J. Korean Math. Soc.* 2007;44(6):1313–1327.

Ozdemir M. Roots of a split quaternion. Appl. Math. Lett. 2009; 22: 258–263.

Sangwine S.J., Bihan N.L. Quaternion polar representation with a complex modulus and complex argument inspired by the Cayley-Dickson form. Adv. Appl. Clifford Alg. 2010;20(1):111–120.

ON THE CONTINUITY PROPERTIES OF DAVIS-WIELANDT RADIUS AND CRAWFORD NUMBER FUNCTIONS

Ümmügülsün ÇAĞLAYAN¹

Zameddin İSMAİLOV²

1. INTRODUCTION

Suppose that H is a complex Hilbert space, where $(.,.)$ is usual inner product and $\|.\|$ is the norm induced from $(.,.)$. Here, $B(H)$ is the C^* -algebra of all bounded linear operators on complex Hilbert space. The operator norm of $T \in B(H)$, denoted by $\|T\|$ are given as

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in H, \|x\| = 1\}. \quad (1)$$

$W(T)$ is given as the numerical range of T , and it is defined as the collection of all scalars (Tx, x) , $\|x\| = 1$, for $T \in B(H)$. So, $W(T) = \{(Tx, x) : x \in H, \|x\| = 1\}$ is written. The numerical radius and the Crawford number of T , represented as $\omega(T)$ and $c(T)$, respectively, are given as

$$\omega(T) = \sup\{(Tx, x) : x \in H, \|x\| = 1\} \quad (2)$$

$$c(T) = \inf\{(Tx, x) : x \in H, \|x\| = 1\}. \quad (3)$$

¹ Dr., Karadeniz Technical University, Faculty of Science, Department of Mathematics, ummugulsun.akbaba@gmail.com, ORCID: 0000-0002-5870-6802.

² Prof., Karadeniz Technical University, Faculty of Science, Department of Mathematics, zameddin.ismailov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5193-5349.

The numerical radius $\omega(\cdot)$ defines a norm on $B(H)$. That norm is equivalent to the operator norm $\|\cdot\|$ which satisfies the following inequality;

$$\frac{\|T\|}{2} \leq \omega(T) \leq \|T\|, \quad (4)$$

where every $T \in B(H)$.

The studying areas of the numerical range and the numerical radius inequalities are very popular for the many mathematicians over the years. For the further information about these areas see [1-4]. An important generalization of the numerical radius is the Davis–Wielandt radius of an operator. The Davis–Wielandt shell $DW(T)$ and the Davis–Wielandt radius $d\omega(T)$ and Davis–Wielandt Crawford number of $T \in B(H)$ are recognized as the followings ([5, 6]):

$$DW(T) = \{((Tx, x), \|Tx\|^2) : x \in H, \|x\| = 1\} \subseteq \mathbb{C} \times \mathbb{R}, \quad (5)$$

$$d\omega(T) = \sup \left\{ \sqrt{|(Tx, x)|^2 + \|Tx\|^4} : x \in H, \|x\| = 1 \right\}, \quad (6)$$

and

$$dc(T) = \inf \left\{ \sqrt{|(Tx, x)|^2 + \|Tx\|^4} : x \in H, \|x\| = 1 \right\}, \quad (7)$$

respectively.

Though Davis-Wielandt radius $d\omega(\cdot)$ satisfies the following inequality, it can not state a norm on $B(H)$;

$$\max\{\omega(T), \|T\|^2\} \leq d\omega(T) \leq \sqrt{\omega^2(T) + \|T\|^4}, \quad (8)$$

$T \in B(H)$.

The upper and lower bounds of Davis Wielandt radius for Hilbert space operator have been researched in [7]. In this study,

the continuity properties of Davis-Wielandt radius and Davis-Wielandt Crawford numbers functions have been investigated.

2. CONVERGENCE OF DAVIS-WIELANDT RADIUS SEQUENCES AND DAVIS-WIELANDT CRAWFORD NUMBER SEQUENCES

Firstly, define the uniformly convergence of operator sequences.

Definition 2.1. Let H be any complex Hilbert space and (A_n) be an operator sequence in $B(H)$. The sequence (A_n) is said uniformly convergence to the operator $A \in B(H)$, if for any $\varepsilon > 0$, there is some $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ such that for all $n > n_0$ is true

$$\|A_n - A\| < \varepsilon.$$

Theorem 2.2. For any two operators $T, S \in B(H)$, it is true

$$|d\omega(T) - d\omega(S)| \leq \alpha \|T - S\|, \quad (9)$$

where, $\alpha = 2(1 + 2c^2)$ and $c = 2\max\{\|T\|, \|S\|\}$.

Proof. For two operators $T, S \in B(H)$, by Theorem 2.6. in [7], we have

$$\begin{aligned} d\omega(T) &= d\omega((T - S) + S) \\ &\leq d\omega(T - S) + d\omega(S) + \omega((T - S)^*S + S^*(T - S)) \\ &= d\omega(T - S) + d\omega(S) + \omega(T^*S + S^*T - 2S^*S) \text{ and} \\ d\omega(S) &= d\omega((S - T) + T) \\ &\leq d\omega(S - T) + d\omega(T) + \omega((S - T)^*T + T^*(S - T)) \\ &= d\omega(S - T) + d\omega(T) + \omega(S^*T + T^*S - 2T^*T). \end{aligned}$$

And from this, it is obtained that

$$|d\omega(T) - d\omega(S)| \leq d\omega(T - S) + 2\|S\|\|T - S\|, \quad (10)$$

$$|d\omega(S) - d\omega(T)| \leq d\omega(T - S) + 2\|T\|\|T - S\|. \quad (11)$$

Therefore,

$$|d\omega(T) - d\omega(S)| \leq d\omega(T - S) + c\|T - S\|, \quad (12)$$

where, $c = 2\max\{\|T\|, \|S\|\}$.

On the other hand, by Theorem 2.5. in [7], for $T, S \in B(H)$, we have

$$\begin{aligned} d\omega(T - S) &\leq \sqrt{\omega^2(T - S) + \|T - S\|^4} \\ &\leq \sqrt{\|T - S\|^2 + \|T - S\|^4} \\ &= \|T - S\|\sqrt{1 + \|T - S\|^2} \\ &\leq \|T - S\|\sqrt{1 + 4\|T\|^2\|S\|^2} \\ &\leq \|T - S\|\sqrt{1 + c^4} \\ &\leq \|T - S\|(1 + c^2). \end{aligned}$$

Consequently, for any $T, S \in B(H)$, it is implied that

$$|d\omega(T) - d\omega(S)| \leq \alpha\|T - S\|,$$

where $\alpha = 2(1 + c^2)$, $c = c = 2\max\{\|T\|, \|S\|\}$.

Theorem 2.3. If the operator sequences $T_n, n \geq 1$ uniformly converges to the operator $T \in B(H)$, then it is true

$$d\omega(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\omega(T_n). \quad (13)$$

Proof. Since (T_n) uniformly converges in $B(H)$, then it is well known that sequence $(\|T_n\|)$ is bounded in \mathbb{R} . In this case,

$$\begin{aligned} c &= 2\max\{\|T_n\|, \|T\|\} \\ &\leq 2\max\left\{\sup_{n \geq 1} \|T_n\|, \|T\|\right\} < \infty. \end{aligned}$$

Consequently, using by Theorem 2.2, it is established that

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d\omega(T_n) = d\omega(T).$$

Theorem 2.4. The following claims are true:

- i. For any two operators $T, S \in B(H)$, it is true

$$|dc(T) - dc(S)| \leq d\omega(T - S) + \alpha(S, T - S), \quad (14)$$

where,

$$\begin{aligned} & \alpha(S, T - S) \\ &= \sqrt{2\|T\|\|S\| + 4\|T\|^3\|S\| + 6\|T\|^2\|S\|^2 + 4\|T\|\|S\|^3} \end{aligned}$$

- ii. If the operator sequences $T_n \in B(H), n \geq 1$, uniformly converges to the operator $T \in B(H)$, then it is true

$$dc(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} dc(T_n). \quad (15)$$

Proof.

- i. In this case for $T, S \in B(H)$, we have

$$\begin{aligned} & \sqrt{|((T + S)x, x)|^2 + \|(T + S)x\|^4} \leq \\ & \leq \sqrt{(|(Tx, x)| + |(Sx, x)|)^2 + (\|Tx\| + \|Sx\|)^4} \\ & \leq |(Tx, x)| + |(Sx, x)| + (\|Tx\| + \|Sx\|)^2 \\ & = \sqrt{(|(Tx, x)|^2 + \|Tx\|^4) + (|(Sx, x)|^2 + \|Sx\|^4) +} \\ & \quad \sqrt{2|(Tx, x)| |(Sx, x)| + 4\|Tx\|^3\|Sx\| + 6\|Tx\|^2\|Sx\|^2 + 4\|Tx\|\|Sx\|^3} \\ & \leq \sqrt{(|(Tx, x)|^2 + \|Tx\|^4)} + \sqrt{(|(Sx, x)|^2 + \|Sx\|^4)} + \\ & \quad + \sqrt{2\|T\|\|S\| + 4\|T\|^3\|S\| + 6\|T\|^2\|S\|^2 + 4\|T\|\|S\|^3} \\ & \leq \sqrt{(|(Tx, x)|^2 + \|Tx\|^4)} + d\omega(S) + \alpha(T, S), \end{aligned}$$

where

$$\alpha(T, S) = \sqrt{2\|T\|\|S\| + 4\|T\|^3\|S\| + 6\|T\|^2\|S\|^2 + 4\|T\|\|S\|^3}$$

is taken. And from this,

$$dc(T + S) \leq dc(T) + d\omega(S) + \alpha(T, S),$$

Therefore, for any $T, S \in B(H)$, it implies that

$$\begin{aligned} dc(T) &= dc(S + (T - S)) \\ &\leq dc(S) + d\omega(T - S) + \alpha(S, T - S) \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} dc(S) &= dc(T + (S - T)) \\ &\leq dc(T) + d\omega(S - T) + \alpha(T, S - T) \end{aligned}$$

Consequently,

$$|dc(T) - dc(S)| \leq d\omega(T - S) + \alpha(S, T - S).$$

- ii.** Now let $T_n \in B(H)$, $n \geq 1$ and (T_n) uniformly converges to $T \in B(H)$. Then $(\|T_n\|)$ is bounded. By Theorem 2.3., it is known that

$$d\omega(T_n - T) \rightarrow 0, \text{ as } n \rightarrow \infty.$$

On the other hand

$$\begin{aligned} \alpha(T, T_n - T) &= \\ &= \sqrt{\frac{2\|T\|\|T - T_n\| + 4\|T\|^3\|T - T_n\| + 6\|T\|^2\|T - T_n\|^2 + 4\|T\|\|T - T_n\|^3}{4\|T\|\|T - T_n\|^3}} \end{aligned}$$

$\rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$.

In this case, since

$$|dc(T_n) - dc(T)| \leq d\omega(T_n - T) + \alpha(T, T_n - T),$$

and $\alpha(T, T_n - T) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, then by Theorem 2.3., we have validity of second claim of this theorem.

Example: Let us $T_n \in M_2(\mathbb{R})$,

$$T_n := \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix}, n \geq 1.$$

In this case, $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, $\|x\| = x_1^2 + x_2^2 = 1$,

$$(T_n x, x) = \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) =$$

$$= 2 \left(1 + \frac{1}{n} \right) x_2 x_1 = \left(1 + \frac{1}{n} \right), n \geq 1$$

and

$$\|T_n x\|^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 + \frac{1}{n} \\ 1 + \frac{1}{n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right\|^2 = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 \|x\|^2.$$

Then for $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} d\omega(T_n) &= \sup_{\|x\|=1} \sqrt{|(T_n x, x)|^2 + \|T_n x\|^4} \\ &= \sup_{\|x\|=1} \sqrt{2^2 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 |x_1 x_2|^2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^4 \|x\|^4} \\ &= \sqrt{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^4} = \left(1 + \frac{1}{n} \right) \sqrt{1 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} dc(T_n) &= \inf_{\|x\|=1} \sqrt{4 \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 |x_1 x_2|^2 + \left(1 + \frac{1}{n} \right)^4 \|x\|^4} \\ &= \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2. \end{aligned}$$

Consequently, by Theorem 2.3. and 2.4., it implies that

$$d\omega(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} d\omega(T_n) = \sqrt{2} \text{ and } dc(T) = \lim_{n \rightarrow \infty} dc(T_n) = 1.$$

Remark. For the recent development research in this area, it can be found in works [8-15].

REFERENCES

- Bhunia, B., Ipek Al, P., & Ismailov Z., (2024). On the convergence of some spectral characteristics of the converging operator sequences. *Proc Math Sci*, 134(4).
- Bhunia, P., Bag, S., & Paul, K. (2019). Numerical radius inequalities and its applications in estimation of zeros of polynomials. *Linear Algebra and its Applications*, 573, 166-177.
- Bhunia, P., Bhanja, A., Bag, S., & Paul, K. (2021). Bounds for the Davis–Wielandt radius of bounded linear operators. *Annals of Functional Analysis*, 12, 1-23.
- Davis, C. (1968). The shell of a Hilbert-space operator. *Acta Sci. Math.(Szeged)*, 29(1-2), 69-86.
- Duncan, J., Bonsal, F.F. (2013). *Numerical Ranges II*. Cambridge University Press
- Gustafson, K. E., Rao, D. K., Gustafson, K. E., & Rao, D. K. (1997). *Numerical range* (pp. 1-26). Springer New York.
- Ipek Al, P., & Ismailov, Z. I. (2021). Gaps Between Operator Norm and Spectral and Numerical Radii of the Tensor Product of Operators. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 9(2), 22-24.
- Ipek Al, P., & Ismailov, Z. I. (2021). On the spectral radius of antidiagonal block operator matrices. *Journal of Mathematical Chemistry*, 59(10), 2206-2217.

- Ismailov, Z. I., & Ipek Al, P., (2022). Some Spectral Characteristic Numbers of Direct Sum of Operators. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 10(1),21-26.
- Ismailov, Z., & Mert, R. (2022). Gaps Between Some Spectral Characteristics of Direct Sum Of Hilbert Space Operators. *Operators And Matrices*, 16(1).
- Otkun Çevik, E., & Ismailov, Z. I. (2021). Radius and Operator Norm of Infinite Upper Triangular Double Band Block Operator Matrices *Journal of Analysis & Number Theory*, 9(2), 19-22.
- Otkun Çevik, E., & Ismailov, Z. I. (2021). Spectral Radius and Operator Norm of Infinite Upper Triangular Double Band Block Operator Matrices. *Journal of Analysis & Number Theory*, 9(2), 19-22.
- Otkun Çevik, E., & Ismailov, Z. I. (2022). Some Gap Relations Between Operator Norm with Spectral and Numerical Radii of Direct Sum Hilbert Space Operators. *Lobachevskii Journal of Mathematics*, 43(2), 366-375.
- Paul, K., & Bag, S. (2012). On numerical radius of a matrix and estimation of bounds for zeros of a polynomial. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 2012.
- Wielandt, H. (1955). On eigenvalues of sums of normal matrices. *Pacific J. Math*, 5(4), 633-638.

ON THE CONTINUITY OF RATIO NUMERICAL RADIUS AND RATIO CRAWFORD NUMBER FUNCTIONS

Elif OTKUN ÇEVİK¹

Zameddin I. ISMAİLOV²

1. INTRODUCTION

Acquiring the spectrum set, the numerical range set of an operator, and computing the numerical and spectral radii, Crawford number, and subspectral radius are the main questions in the spectral theory of linear operators. In general, locating the spectrum set and the numerical range of the linear bounded non-normal operators is pretty difficult in technical and theoretical terms.

Let H and $B(H)$ be a complex Hilbert space with norm $\|\cdot\|$, inner product (\cdot, \cdot) and the algebra of all linear bounded operators on H , respectively; $\|\cdot\|$ also denotes the norm in $B(H)$.

Remember that the numerical radius of the operator $A \in B(H)$ is denoted by

$$w(A) = \sup_{\|x\|=1} |(Ax, x)|.$$

Moreover, it is known that

¹ Asst. Prof., Avrasya University, Faculty of Engineering and Architecture, Department of Computer Engineering, elifotkuncevik@gmail.com, ORCID: 0000-0001-8506-1889.

² Prof., Karadeniz Technical University, Faculty of Science, Department of Mathematics, zameddin.ismailov@gmail.com, ORCID: 0000-0001-5193-5349.

$$w(A) = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\operatorname{Re}(e^{it}A)\| = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|\operatorname{Im}(e^{it}A)\| \quad [11].$$

It is obvious that the function $w(\cdot)$ describes a norm on $B(H)$, that is equivalent to the standard operator norm $\|\cdot\|$. Indeed, for every $A \in B(H)$, the following inequality holds:

$$\frac{\|A\|}{2} \leq w(A) \leq \|A\|.$$

Moreover, for normal operator $A \in B(H)$, the relation $r(A) = w(A) = \|A\|$ is true. Also, it is well known that for every two operators $A, B \in B(H)$,

$$w(A + B) \leq w(A) + w(B)$$

is valid (see, [3]).

Furthermore, remember that the spectral inclusion $\sigma(A) \subset \overline{W(A)}$ holds for the set of spectrum $\sigma(A)$ and numerical range $W(A)$ of any $A \in B(H)$, (see [2, 3] for more information).

For $A \in B(H)$, the Crawford number of A is described by

$$c(A) = \inf\{|\lambda| : \lambda \in W(A)\}.$$

And also, for every $A \in B(H)$, the following inequality is known to be true:

$$0 \leq c(A) \leq w(A) \leq \|A\|.$$

Moreover, it should be noted that recent developments in these topics can be found in the works [4-9].

For $A, B \in B(H), B \neq 0$, the ratio numerical range $W(A/B)$ is defined by

$$\begin{aligned} W(A/B) &= \left\{ \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} : x \in H, (Bx, x) \neq 0 \right\} \\ &= \left\{ \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} : x \in S, (Bx, x) \neq 0 \right\}, \end{aligned}$$

where S is the unit sphere of H (The case of $B \neq 0$ ensures that $W(A/B) \neq \emptyset$) [10]. Obviously, $W(A) = W(A/I)$. In the case where H is finite dimensional and $W(B)$ does not contain zero, the ratio numerical range was presented and worked in [1].

The geometric characteristics of the ratio numerical range $W(A/B)$ in relation to the operator theoretical properties of A and B are studied in [10].

According to ratio numerical range, we give the following generalitions of numerical radius and Crawford number.

Definition 1.1. Let $A, B \in B(H), B \neq 0$. The ratio numerical radius and ratio Crawford number will be defined as follows:

$$w(A/B) = \sup \left\{ \left| \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \right| : x \in H, \|x\| = 1, (Bx, x) \neq 0 \right\},$$

$$c(A/B) = \inf \left\{ \left| \frac{(Ax, x)}{(Bx, x)} \right| : x \in H, \|x\| = 1, (Bx, x) \neq 0 \right\},$$

respectively.

In this study, the continuity properties of ratio numerical radius and ratio Crawford number functions are investigated.

2. CONVERGENCE OF RATIO NUMERICAL RADIUS AND RATIO CRAWFORD NUMBER SEQUENCES

Firstly, the uniformly convergence of the operator sequences will be defined.

Definition 2.1. Let (A_n) be an operator sequence in $B(H)$. The sequence (A_n) is said uniformly convergent to the operator $A \in$

$B(H)$, if for any $\varepsilon > 0$, there is some $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ such that for all $n > n_0$, it is true:

$$\|A_n - A\| < \varepsilon .$$

The following result is true.

Theorem 2.2. For any three operators $T, S, K \in B(H), S \neq 0$, the followings are satisfied:

- (1) $|w(T/S) - w(K/S)| \leq w((T - K)/S)$
 (2) In addition, if for $x \in H, \|x\| = 1, |(Sx, x)| \geq 1$, then

$$|w(T/S) - w(K/S)| \leq w(T - K).$$

Proof. (1) In this case for $x \in H, \|x\| = 1, (Sx, x) \neq 0$, from the following inequality

$$\left| \frac{(Tx, x)}{(Sx, x)} \right| \leq \left| \frac{((T - K)x, x)}{(Sx, x)} \right| + \left| \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right|,$$

it is obtained that

$$w(T/S) \leq w((T - K)/S) + w(K/S),$$

i.e.,

$$w(T/S) - w(K/S) \leq w((T - K)/S). \quad (2.1)$$

Similarly, for $x \in H, \|x\| = 1, (Sx, x) \neq 0$, from the following inequality

$$\left| \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right| \leq \left| \frac{((K - T)x, x)}{(Sx, x)} \right| + \left| \frac{(Tx, x)}{(Sx, x)} \right|,$$

we have

$$w(K/S) \leq w((T - K)/S) + w(T/S),$$

Hence,

$$w(K/S) - w(T/S) \leq w((T - K)/S). \quad (2.2)$$

Therefore, from (2.1) and (2.2), it is established that

$$|w(T/S) - w(K/S)| \leq w((T - K)/S).$$

(2) Indeed, in this case if for each $x \in H$, $\|x\| = 1$, the condition $|(Sx, x)| \geq 1$ is satisfied, then from the following inequality

$$\left| \frac{((T - K)x, x)}{(Sx, x)} \right| \leq |((T - K)x, x)|,$$

it implies that

$$w((T - K)/S) \leq w(T - K).$$

From the last inequality and claim (1), it is established that

$$|w(T/S) - w(K/S)| \leq w(T - K).$$

Theorem 2.3. Assume that $S \in B(H)$ and for each $x \in H$, $\|x\| = 1$, the condition $|(Sx, x)| \geq 1$ is satisfied. If $T_n \in B(H)$, $n \geq 1$ is an uniformly convergent operator sequence to the operator $T \in B(H)$, then

$$w(T/S) = \lim_{n \rightarrow \infty} w(T_n/S).$$

Proof. In this case, from the validity of the second claim of Theorem 2.2, it is obvious that

$$|w(T_n/S) - w(T/S)| \leq w(T_n - T) \leq \|T_n - T\|, n \geq 1.$$

From this and uniform convergency of the operator sequence (A_n) in $B(H)$, it implies the validity of this theorem.

Theorem 2.4. For any three operators $T, S, K \in B(H)$, $S \neq 0$, the followings are satisfied:

(1) $|c(T/S) - c(K/S)| \leq w((T - K)/S)$

(2) In addition, if for $x \in H$, $\|x\| = 1$, $|(Sx, x)| \geq 1$, then

$$|c(T/S) - c(K/S)| \leq w(T - K).$$

Proof. (1) In this case, for $x \in H$, $\|x\| = 1$, $(Sx, x) \neq 0$, we have

$$\begin{aligned} \left| \frac{(Tx, x)}{(Sx, x)} \right| &\geq \left| \frac{((T + K)x, x)}{(Sx, x)} - \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right| \\ &\geq \left| \frac{((T + K)x, x)}{(Sx, x)} \right| - \left| \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right| \\ &\geq c((T + K)/S) - w(K/S). \end{aligned}$$

That is,

$$c(T/S) \geq c((T + K)/S) - w(K/S),$$

From this, it is clear that

$$-w(K/S) \leq c(T/S) - c((T + K)/S). \quad (2.3)$$

Similarly, for $x \in H$, $\|x\| = 1$, $(Sx, x) \neq 0$, from the following inequality,

$$\begin{aligned} \left| \frac{((T + K)x, x)}{(Sx, x)} \right| &= \left| \frac{(Tx, x)}{(Sx, x)} \right| + \left| \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right| \\ &\geq \left| \frac{(Tx, x)}{(Sx, x)} \right| - \left| \frac{(Kx, x)}{(Sx, x)} \right| \\ &\geq c(T/S) - w(K/S), \end{aligned}$$

it implies that

$$c((T + K)/S) \geq c(T/S) - w(K/S).$$

Then,

$$c(T/S) - c((T + K)/S) \leq w(K/S). \quad (2.4)$$

Consequently, from the above estimates (2.3) and (2.4), it is established that

$$|c((T + K)/S) - c(T/S)| \leq w(K/S).$$

Then, the validity of this claim is true.

(2) Indeed, in case when $x \in H$, $\|x\| = 1$, $|(Sx, x)| \geq 1$, we have

$$\left| \frac{((T - K)x, x)}{(Sx, x)} \right| \leq |((T - K)x, x)|.$$

From the last relation, it implies that

$$w((T - K)/S) \leq w(T - K).$$

In this case, from the last relation and first claim of this theorem, it is established that

$$|c(T/S) - c(K/S)| \leq w(T - K).$$

Theorem 2.5. Assume that $S \in B(H)$ and for each $x \in H$, $\|x\| = 1$, the condition $|(Sx, x)| \geq 1$ is satisfied. If $T_n \in B(H)$, $n \geq 1$ is an uniformly convergent operator sequence to the operator $T \in B(H)$, then

$$c(T/S) = \lim_{n \rightarrow \infty} c(T_n/S).$$

Proof. In this case, from the validity of the second claim of Theorem 2.4, it is clear that

$$|c(T_n/S) - c(T/S)| \leq w(T_n - T) \leq \|T_n - T\|, n \geq 1.$$

From this and uniform convergency of the operator sequence (T_n) in $B(H)$, it implies the validity of this theorem.

Example 2.6. Let us $H = \mathbb{C}^2(\mathbb{C})$ with usual Euclidian inner product and norm,

$$T_n = \begin{pmatrix} a_n + \frac{1}{n} & b_n \\ c_n & d_n + \frac{1}{n} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{C}), n \geq 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} d_n = d, a \neq 0, d \neq 0$$

$$\text{and } S = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

In this case, it is clear that the operator sequence (T_n) uniformly converges to $T = S$.

Consequently by Theorems 2.3, 2.5;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(T_n/S) = w(S/S) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(T_n/S) = c(S/S) = 1.$$

Example 2.7. Let us $H = L^2(0,1)$, $f \in L^2(0,1)$,

$$T_n f(x) = \int_0^{x-\frac{1}{n}} f(t) dt, \quad T_n: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1), \quad n \geq 1 \text{ and}$$

$$Sf(x) = \int_0^x f(t) dt, \quad S: L^2(0,1) \rightarrow L^2(0,1).$$

In this situation, the operator sequence (T_n) uniformly converges to S .

Consequently by Theorems 2.3, 2.5;

$$\lim_{n \rightarrow \infty} w(T_n/S) = w(S/S) = 1,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c(T_n/S) = c(S/S) = 1.$$

REFERENCES

- [1] Einstein, E., Johnson, C. R., Lins B., and Spitkovsky, I. M. (2011). The ratio field of values, *Linear Algebra and its Applications*, 434, 1119-1136.
- [2] Gustafson K. E., and Rao, D. K. M. (1997). *Numerical Range: The Field of Values of Linear Operators And Matrices*, New York: Springer.
- [3] Halmos, P. R. (1982). *A Hilbert Space Problem Book*, New York: Springer-Verlag.
- [4] Ismailov Z. I. and Ipek Al, P. (2021). Gaps between operator norm and spectral and numerical radii of the tensor product of operators, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 9 (2), 22-24.
- [5] Ismailov Z. I. and Ipek Al, P. (2022). Some spectral characteristic numbers direct sum of operators, *Turkish Journal of Analysis and Number Theory*, 10 (1), 21-26.
- [6] Ismailov Z. I. and Otkun Çevik E., (2022). On the one spectral relation for analytic function of operator, *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 15, 301-307.
- [7] Ismailov Z. I. and Mert, R. Ö. (2022). Gaps between some spectral characteristics of direct sum of Hilbert space operators, *Operators and Matrices*, 16 (1), 337-347.
- [8] Otkun Çevik E. and Ismailov, Z. I. (2021). Spectral radius and operator norm of $n \times n$ triangular block operator matrices, *Journal of Analysis and Number Theory*, 9 (1), 7-12.
- [9] Otkun Çevik E. and Ismailov, Z. I. (2021). Spectral radius and operator norm of infinite upper triangular double band block operator matrices, *Journal of Analysis and Number Theory*, 9 (2), 19-22.

- [10] Rodman L. and Spitkovsky, I. M. (2011). Ratio numerical ranges of operators, *Integral Equations and Operator Theory*, 71, 245-257.
- [11] Yamazaki, T. (2007). On upper and lower bounds of the numerical radius and equality condition, *Studia Mathematica*, 178, 83-89.

HİBRİT SAYILARIN İNVLÜSYONLARI VE ANTI-İNVLÜSYONLARI

Derya SAĞLAM¹

Fatma Nur TEKELİ²

1. GİRİŞ

Bir involüsyon veya anti-involüsyon tersi kendisine eşit olan lineer dönüşümlerdir. Bu bölümde hibrit sayıların involüsyonları ve anti-involüsyonları verilecektir. Geometrik olarak hibrit sayıların bir involüsyonu bir düzleme göre simetri ve anti-involüsyonu bir doğruya göre simetri olacaktır.

Ell ve Sangwine, 2007 yılında kuaterniyonların involüsyon ve anti- involüsyonlarını elde ettiler [1]. Daha sonra, Yaylı ve Bekar dual, complex, split, dual split, semi ve split semi kuaterniyonların involüsyon ve anti-involüsyonlarını incelediler [5-9].

2. TEMEL KAVRAMLAR

Hibrit sayılar ilk kez Özdemir tarafından 2018 yılında tanımlanmıştır [2]. $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$, $ih = -hi = \varepsilon + i$ eşitliklerini sağlayan bir $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı kompleks, hiperbolik ve dual sayıların bir genelleştirilmiştir. Hibrit sayılarına karşılık gelen geometri Öklid, Minkowski, Galile düzlem geometrileri ve

¹ Prof. Dr., Kırıkkale Üniversitesi, Mühendislik ve Doğa Bilimleri Fakültesi, Matematik Bölümü, deryasaglamyilmaz@gmail.com, ORCID: 0000-0003-4323-1901.

² Kırıkkale Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, fntekeli631@gmail.com, ORCID: 0000-0002-4349-2207.

bunların kombinasyonlarını içeren en genel geometridir. Hibrit sayılara karşılık gelen geometriye Hibridyen düzlem geometrisi diyeceğiz. Bu düzlem, \mathbb{R}^4 ün iki boyutlu bir alt uzayıdır. Hibridyen düzlem geometrisi eliptik, hiperbolik veya parabolik olarak sınıflandırılır [2].

Tanım 2.1. Hibrit sayılar kümesi

$$\mathbb{K} = \{a + bi + c\varepsilon + dh : a, b, c, d \in \mathbb{R}; i^2 = -1, \varepsilon^2 = 0, h^2 = 1, ih = -hi = \varepsilon + i\}$$

biçiminde dörtlülerin kümesi olarak düşünülebilir. Reel, kompleks, dual ve hiperbolik birimler sırasıyla

$$1 = (1, 0, 0, 0), i = (0, 1, 0, 0), \varepsilon = (0, 0, 1, 0), h = (0, 0, 0, 1)$$

olarak tanımlanır ve bu birimler hibrit birimler olarak adlandırılır. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı için, a ya skaler kısım denir ve $S(Z)$ ile gösterilir. Ayrıca $bi + c\varepsilon + dh$ ye vektörel kısım denir ve $V(Z)$ ile gösterilir. Böylece Z hibrit sayısı,

$$Z = S(Z) + V(Z)$$

biçiminde yazılır. [2].

Tanım 2.2. $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ hibrit sayılarının karşılıklı bileşenleri eşitse $Z_1 = Z_2$ dir [2].

Tanım 2.3. $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ hibrit sayılarının toplamı $Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)\varepsilon + (d_1 + d_2)h$ eşitliğiyle tanımlanır [2].

Hibrit sayılarda toplama işlemi hem değişmeli hem de birleşmelidir. Bütün bileşenleri sıfır olan hibrit sayıyı 0 ile gösterelim. 0, hibrit sayılarda toplama işlemine göre etkisiz elemandır. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının toplama

işlemine göre tersi $Z = a - bi - c\varepsilon - dh$ dir. Buna göre, $(\mathbb{K}, +)$ ikilisi değişmeli gruptur [2].

Tanım 2.4. Hibrit çarpımı $i^2 = -1$, $\varepsilon^2 = 0$, $h^2 = 1$, $ih = -hi = \varepsilon + i$ olmak üzere

$Z_1Z_2 = (a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h)(a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h)$ eşitliğiyle tanımlanır [2].

Hibrit çarpımı, değişmeli değildir. Fakat hibrit çarpımının birleşme özelliği vardır [2].

Tanım 2.5. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının eşleniği $\bar{Z} = S(Z)-V(Z) = a-bi-c\varepsilon-dh$ olarak tanımlanır [2].

Hibrit sayıların toplamının eşleniği, eşleniklerin toplamına eşittir. Buna göre

$$\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$$

dir. Ayrıca, hibrit çarpımı değişmeli olmamasına rağmen bir hibrit sayının eşleniğiyle çarpımı değişmelidir. Gerçekten

$$Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2$$

reel sayısı $C(Z)$ ile gösterilir. Buna göre

$$C(Z) = Z\bar{Z} = \bar{Z}Z = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2$$

dir. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı için

$$\mathcal{V}_Z = (a, (b - c), c, d)$$

vektörüne Z nin vektör gösterimi denir. \mathbb{E}_2^4 deki $(-, -, +, +)$ işaretleri kullanılarak

$$C(Z) = a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2 = -\langle \mathcal{V}_Z, \mathcal{V}_Z \rangle_{\mathbb{E}_2^4}$$

biçiminde yazılabilir. Ayrıca, $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı, $C(Z) < 0$, $C(Z) > 0$, $C(Z) = 0$ ise sırasıyla spacelike, timelike ve lightlike olarak adlandırılır. Hibrit sayıların çarpımı tanımından $C(Z_1Z_2) = C(Z_1)C(Z_2)$ dir [2].

Tanım 2.6. $\sqrt{|C(Z)|} = \sqrt{(a^2 + (b - c)^2 - c^2 - d^2)}$ reel sayısına, Z hibrit sayısının normu denir ve $\|Z\|$ ile gösterilir. Bir hibrit sayısının normu kompleks, hiperbolik ve dual sayıların norm tanımıyla örtüşen genelleştirilmiş bir normdur [2].

Tanım 2.7. $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısı için $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d)$ vektörüne Z nin hibrit vektörü denir. $\varepsilon_Z = ((b - c), c, d)$ hibrit vektörü \mathbb{E}_1^3 Minkowski uzayının bir vektörü olarak alınır

$$C_\varepsilon(Z) = -(b - c)^2 + c^2 + d^2 = \langle \varepsilon_Z, \varepsilon_Z \rangle_{\mathbb{E}_1^3}$$

eşitliğiyle tanımlanan $C_\varepsilon(Z)$ reel sayısına bağlı olarak Z hibrit sayısının tipleri tanımlanır. $C_\varepsilon(Z) < 0$, $C_\varepsilon(Z) > 0$, $C_\varepsilon(Z) = 0$ ise Z hibrit sayısına sırasıyla eliptik(komplike), hiperbolik(hiperlike) ve parabolik(duallike) denir. $\sqrt{|C_\varepsilon(Z)|}$ reel sayısına Z nin hibrit vektörünün normu denir $\mathcal{N}(Z)$ ile gösterilir. Split kuaterniyonlarda olduğu gibi, hibrit sayının hibrit vektörü timelike, spacelike ve null olabilir.

Tanım 2.8. $\|Z\| \neq 0$ olmak üzere $Z = a + bi + c\varepsilon + dh$ hibrit sayısının tersi $Z^{-1} = \left(\frac{\bar{Z}}{C(Z)}\right)$ eşitliğiyle tanımlanır [2].

Bu tanıma göre lightlike hibrit sayıların tersi yoktur. Hibrit sayılar kümesi, toplama ve çarpma işlemlerine değişmeli olmayan bir halkadır [2].

Tanım 2.9. Hibrit sayıların skaler çarpımı, $Z_1 = a_1 + b_1i + c_1\varepsilon + d_1h$ ve $Z_2 = a_2 + b_2i + c_2\varepsilon + d_2h$ olmak üzere $g: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$g(Z_1, Z_2) = \frac{Z_1\bar{Z}_2 + Z_2\bar{Z}_1}{2} = a_1a_2 + b_1b_2 - b_1c_2 - b_2c_1 - d_1d_2$$

eşitliğiyle tanımlanır [2].

Teorem 2.10. Yukarıdaki eşitlikle tanımlanan skaler çarpım non-dejenere, simetrik bilineer formdur [2].

Hibrit sayıların skaler çarpımı kompleks, hiperbolik ve dual sayılar için genelleştirilmiş skaler çarpımdır.

Tanım 2.11. Z_1 ve Z_2 hibrit sayılarının vektörel çarpımı

$$\times: \mathbb{K} \times \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, \quad Z_1 \times Z_2 = \frac{Z_1 \overline{Z_2} - Z_2 \overline{Z_1}}{2}$$

biçiminde tanımlanır [2,3]. Bu tanıma göre

$$\begin{aligned} Z_1 \times Z_2 = & (a_2 b_1 - b_2 a_1 + b_2 d_1 - d_2 b_1) i \\ & + (a_2 c_1 - c_2 a_1 + b_2 d_1 - d_2 b_1 - c_2 d_1 + d_2 c_1) \varepsilon \\ & + (a_2 d_1 - b_2 c_1 + c_2 b_1 - d_2 a_1) h \end{aligned}$$

dir [3].

Skaler kısmı sıfır olan hibrit sayıya pure hibrit sayı denir. Hibridyen 3-uzayı,

$$\langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathbb{H}} = -(b_1 - c_1)(b_2 - c_2) + c_1 c_2 + d_1 d_2$$

indefinit, simetrik bilineer form ile birlikte \mathbb{R}^3 vektör uzayıdır ve \mathbb{H} ile gösterilir. Burada $Z_1 = b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ ve $Z_2 = b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ pure hibrit sayılardır. Bundan böyle pure hibrit sayılar bir vektör olarak ele alınacaktır. $\langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathbb{H}} = 0$ ise Z_1 ile Z_2 ye hibrit ortogonal denir. Hibridyen 3-uzayda, $Z_1 = b_1 i + c_1 \varepsilon + d_1 h$ ve $Z_2 = b_2 i + c_2 \varepsilon + d_2 h$ vektörlerinin vektörel çarpımı

$$Z_1 \times_{\mathbb{H}} Z_2 = \begin{vmatrix} i & -\varepsilon & -h \\ b_1 - c_1 & b_1 & d_1 \\ b_2 - c_2 & b_2 & d_2 \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle tanımlanır. Skaler çarpım ve vektörel çarpım tanımları kullanılarak Z_1, Z_2, Z_3 vektörleri için

$$Z_1 \times_{\mathbb{H}} (Z_2 \times_{\mathbb{H}} Z_3) = \langle Z_1, Z_2 \rangle_{\mathbb{H}} Z_3 - \langle Z_1, Z_3 \rangle_{\mathbb{H}} Z_2$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca, $Z_1 = S(Z_1) + V(Z_1)$ ve $Z_2 = S(Z_2) + V(Z_2)$ hibrit sayıları için hibrit çarpımı

$$Z_1 Z_2 = S(Z_1)S(Z_2) + S(Z_1)V(Z_2) + S(Z_2)V(Z_1) \\ + \langle V(Z_1), V(Z_2) \rangle_{\mathbb{H}} + V(Z_1) \times_{\mathbb{H}} V(Z_2)$$

eşitliği ile hesaplanır [3].

3. HİBRİT SAYILARIN İNVOLÜSYON VE ANTI-İNVOLÜSYONLARI

Bir involüsyon ve anti-involüsyon, tersi kendisine eşit olan lineer dönüşümlerdir.

Tanım 3.1. $x \rightarrow f(x)$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa f ye involüsyon denir.

A1. Bir involüsyon kendisinin tersidir. Yani tanım kümesinden alınan her x elemanı için

$$f(f(x)) = x$$

dir.

A2. Bir involüsyon lineerdir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları ve λ reel sayısı için

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ve

$$\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

dir.

A3. Bir çarpımın involüsyonu ters sırada involüsyonların çarpımına eşittir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları için

$$f(x_1 x_2) = f(x_2) f(x_1)$$

dir [1].

Tanım 3.2. $x \rightarrow f(x)$ dönüşümü aşağıdaki aksiyomları sağlarsa f ye anti-involüsyon denir.

A1. Bir anti-involüsyon kendisinin tersidir. Yani tanım kümesinden alınan her x elemanı için

$$f(f(x)) = x$$

dir.

A2. Bir anti-involüsyon lineerdir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları ve λ reel sayısı için

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

ve

$$\lambda f(x) = f(\lambda x)$$

dir.

A3. Bir çarpımın anti-involüsyonu aynı sırada anti-involüsyonların çarpımına eşittir. Yani tanım kümesinden alınan her x_1, x_2 elemanları için

$$f(x_1 x_2) = f(x_1) f(x_2)$$

dir [1].

İnvolüsyon ve anti-involüsyonun farkı **A3.** olduğu kolayca görülebilir.

Teorem 3.3. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -V\bar{Z}V$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(-V\bar{Z}V) \\ &= -V\overline{(-V\bar{Z}V)}V \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -V(\bar{V}Z(-\bar{V}))V \\ &= -V((-V)ZV)V \\ &= V^2ZV^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= -V(\overline{Z_1 + Z_2})V \\ &= -V(\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2)V \\ &= (-V\bar{Z}_1V) + (-V\bar{Z}_2V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= -V(\overline{\lambda Z})V \\ &= -V(\lambda \bar{Z})V \\ &= \lambda(-V\bar{Z}V) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1Z_2) &= -V(\overline{Z_1Z_2})V \\ &= -V(\bar{Z}_2\bar{Z}_1)V \\ &= -V(\bar{Z}_2(V(-V))\bar{Z}_1)V \\ &= (-V\bar{Z}_2V)(-V\bar{Z}_1V) \\ &= f(Z_2)f(Z_1) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.4. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = V\bar{Z}V$ dönüşümü bir involüsyondur.

İspat. Teorem 3.3 ün ispatına benzer biçimde yapılır.

Teorem 3.5. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -VZV$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat.

A1. Her Z hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(f(Z)) &= f(-VZV) \\ &= -V(-VZV)V \\ &= V(VZV)V \\ &= V^2ZV^2 \\ &= Z \end{aligned}$$

dir.

A2. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 + Z_2) &= -V(Z_1 + Z_2)V \\ &= (-VZ_1V) + (-VZ_2V) \\ &= f(Z_1) + f(Z_2) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f(\lambda Z) &= -V(\lambda Z)V \\ &= -V(\lambda Z)V \\ &= \lambda(-VZV) \\ &= \lambda f(Z) \end{aligned}$$

dir.

A3. Her $Z_1, Z_2 \in \mathbb{K}$ için

$$\begin{aligned} f(Z_1 Z_2) &= -V(Z_1 Z_2)V \\ &= -V(Z_1(V(-V))Z_2)V \\ &= (-VZ_1V)(-VZ_2V) \\ &= f(Z_1)f(Z_2) \end{aligned}$$

dir.

Teorem 3.6. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olmak üzere $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = VZV$ dönüşümü bir anti-involüsyondur.

İspat. Teorem 3.5 ün ispatına benzer biçimde yapılır.

Şimdi yukarıda bulduğumuz involüsyonların ve anti-involüsyonların geometrik yorumlarını vereceğiz.

Teorem 3.7. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat: $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(Z) &= -V\bar{Z}V \\ &= -V\overline{(a + \omega)}V \\ &= -V(a - \omega)V \\ &= -VaV + V\omega V \\ &= -V^2a + V\omega V \\ &= a + V\omega V \end{aligned} \tag{1}$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $V\omega V$ nin de ω nın V

involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned} V\omega V &= (V\omega)V \\ &= (\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} + V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + (V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V \times_{\mathbb{H}} \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} + (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \times_{\mathbb{H}} V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - V \times_{\mathbb{H}} (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega + \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - V^2 \omega \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \omega \end{aligned} \quad (2)$$

bulunur. ω nın düzleme olan izdüşümü

$$\omega_{izd} = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}}}{\langle V, V \rangle_{\mathbb{H}}} V = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}}}{V^2} V = \omega + \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V$$

olduğundan ω nın düzleme göre yansımaları

$$2\omega_{izd} - \omega = 2(\omega + \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V) - \omega = \omega + 2 \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V \quad (3)$$

eşitliğiyle elde edilir. (2) ve (3) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansımaları olur.

Sonuç 3.8. (1) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = -V\bar{Z}V = a + V\omega V = \bar{Z}$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = -V\bar{Z}V = a + V\omega V = Z$$

dir.

Teorem 3.9. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansıtır.

İspat: $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(Z) &= V\bar{Z}V \\ &= V\overline{(a + \omega)}V \\ &= V(a - \omega)V \\ &= VaV - V\omega V \\ &= V^2a - V\omega V \\ &= a - V\omega V \end{aligned} \quad (4)$$

dir. Bu eşitliğe göre f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-V\omega V$ nin de ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned} V\omega V &= -(V\omega)V \\ &= -(\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} + V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - (V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V \times_{\mathbb{H}} \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} - (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \times_{\mathbb{H}} V \\ &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + V \times_{\mathbb{H}} (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \\ &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega - \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V \\ &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega \\ &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + V^2 \omega \\ &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \omega \end{aligned} \quad (5)$$

bulunur. ω nın düzleme olan izdüşümü

$$\omega_{izd} = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}}}{\langle V, V \rangle_{\mathbb{H}}} V = \omega - \frac{\langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}}}{V^2} V = \omega - \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V$$

olduğundan ω nın düzleme göre yansımısı

$$2\omega_{izd} - \omega = 2(\omega - \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V) - \omega = \omega - 2 \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V \quad (6)$$

eşitliğiyle elde edilir. (5) ve (6) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V involüsyon eksenine hibrit ortogonal olan düzleme göre yansımısı olur.

Sonuç 3.10. (4) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = V\bar{Z}V = a - V\omega V = \bar{Z}$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = V\bar{Z}V = a - V\omega V = Z$$

dir.

Teorem 3.11. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat: $Z = a + \omega$ hibrit sayısı

$$\begin{aligned} f(Z) &= -VZV \\ &= -V(a + \omega)V \\ &= -VaV - V\omega V \\ &= -V^2a - V\omega V \\ &= a - V\omega V \end{aligned} \quad (7)$$

dir. (1) ve (7) eşitliklerine göre $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir. (7) eşitliğine göre f

involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $-V\omega V$ nin de ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned}
 V\omega V &= -(V\omega)V \\
 &= -(\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} + V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - (V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V \times_{\mathbb{H}} \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} - (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \times_{\mathbb{H}} V \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + V \times_{\mathbb{H}} (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \\
 &= -\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega - \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V \\
 &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega \\
 &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + V^2 \omega \\
 &= -2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \omega
 \end{aligned} \tag{8}$$

bulunur. ω nın V ye olan izdüşümü

$$\text{İzd}_V \omega = \frac{\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}}}{\langle V, V \rangle_{\mathbb{H}}} V = \frac{\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}}}{V^2} V = -\langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V$$

olduğundan ω nın V nin tanımladığı doğruya göre yansımaları

$$2\text{İzd}_V \omega - \omega = -2 \langle \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} V - \omega \tag{9}$$

eşitliğiyle elde edilir. (8) ve (9) eşitliklerine göre $-V\omega V$, ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansımaları olur.

Sonuç 3.12. (7) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = -VZV = a - V\omega V = Z$$

ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = -VZV = a - V\omega V = \bar{Z}$$

dir.

Teorem 3.13. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için $f: \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}, f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu, Z nin skaler kısmı a yı invaryant bırakır ve Z nin vektörel kısmı ω yı da V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıtır. $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir.

İspat. $Z = a + \omega$ hibrit sayısı için

$$\begin{aligned} f(Z) &= VZV \\ &= V(a + \omega)V \\ &= VaV + V\omega V \\ &= V^2a + V\omega V \\ &= a + V\omega V \end{aligned} \tag{10}$$

dir. (4) ve (10) eşitliklerine göre $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonu $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonunun eşleniğidir. (10) eşitliğinden f involüsyonunun Z nin skaler kısmı a yı invaryant bıraktığı açıktır. Diğer yandan $V\omega V$ nin de ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansımaları olduğunu göstermeliyiz. V, ω vektör olduğundan

$$\begin{aligned} V\omega V &= (V\omega)V \\ &= (\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} + V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + (V \times_{\mathbb{H}} \omega)V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V + \langle V \times_{\mathbb{H}} \omega, V \rangle_{\mathbb{H}} + (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \times_{\mathbb{H}} V \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - V \times_{\mathbb{H}} (V \times_{\mathbb{H}} \omega) \\ &= \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega + \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \langle V, V \rangle_{\mathbb{H}} \omega \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - V^2 \omega \\ &= 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \omega \end{aligned} \tag{11}$$

bulunur. ω nın V ye olan izdüşümü

$$\text{İzd}_V \omega = \frac{\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}}}{\langle V, V \rangle_{\mathbb{H}}} V = \frac{\langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}}}{V^2} V = \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V$$

olduğundan ω nın V nin tanımladığı doğruya göre yansıması

$$2\text{İzd}_V \omega - \omega = 2 \langle V, \omega \rangle_{\mathbb{H}} V - \omega \quad (12)$$

eşitliğiyle elde edilir. (11) ve (12) eşitliklerine göre $V\omega V$, ω nın V anti-involüsyon ekseninin tanımladığı doğruya göre yansıması olur.

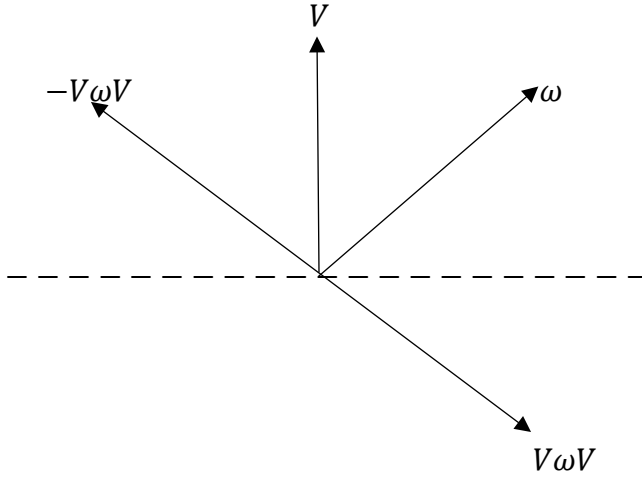
Sonuç 3.14. (10) eşitliğine göre $V \parallel \omega$ ise

$$f(Z) = VZV = a + V\omega V = Z$$

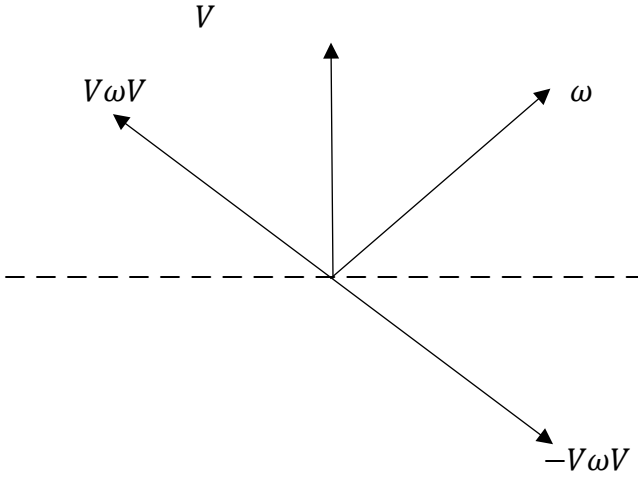
ve $V \perp \omega$ ise

$$f(Z) = VZV = a + V\omega V = \bar{Z}$$

dir.



Şekil 1. $V^2 = -1$ için $f(Z) = -V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f(Z) = -VZV$ anti-involüsyonunun geometrisi (Noktalı doğru V ye ortogonal olan düzlemi göstermektedir. V nin skalar kısmı invariant olduğundan gösterilmemiştir.)



Şekil 2. $V^2 = 1$ için $f(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f(Z) = VZV$ anti-involüsyonunun geometrisi (Noktalı doğru V ye ortogonal olan düzlemi göstermektedir. V nin skalar kısmı invaryant olduğundan şekilde gösterilmemiştir.)

Sonuç 3.8 ve Sonuç 3.10 a göre involüsyonun V eksenini ile Z nin vektörel kısmı paralel olduğunda involüsyon hibrit sayının eşleniğini ve hibrit ortogonal olduğunda involüsyon hibrit sayının kendisini verir. Sonuç 3.12 ve Sonuç 3.14 a göre anti-involüsyonun V eksenini ile Z nin vektörel kısmı hibrit ortogonal olduğunda anti-involüsyon hibrit sayının eşleniğini ve paralel olduğunda hibrit sayının kendisini verir. Aşağıda Lemma 3.15 ve Lemma 3.16 böyle durumların genel formüllerini vermektedir.

Lemma 3.15. Eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörler olan involüsyonların toplamını herhangi bir ω vektörüne uygulanırsa yine ω elde edilir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri V_1, V_2, V_3 olan involüsyonlar ise

$$f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) = \omega \quad (13)$$

olur.

İspat. $i = 1,2,3$ için $\omega_i \parallel V_i$ olmak üzere $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ olsun. ω , (13) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ = f_1(\omega_1) + f_1(\omega_2) + f_1(\omega_3) + f_2(\omega_1) \\ + f_2(\omega_2) + f_2(\omega_3) + f_3(\omega_1) + f_3(\omega_2) \\ + f_3(\omega_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.8 ve Sonuç 3.10 a göre bir ω vektörü involüsyonun eksenine paralel ise involüsyon ω nın işaretini değiştirir, hibrit ortogonal ise involüsyon birim dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 + \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 = \omega$$

elde edilir.

Lemma 3.16. Eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörler olan anti-involüsyonların toplamını herhangi bir ω vektörüne uygulanırsa ω yön değiştirir. Yani f_1, f_2, f_3 sırasıyla eksenleri V_1, V_2, V_3 olan anti-involüsyonlar ise

$$f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) = -\omega \quad (14)$$

olur.

İspat. $i = 1,2,3$ için $\omega_i \parallel V_i$ olmak üzere $\omega = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3$ olsun. ω , (14) eşitliğinin sol tarafında yerine yazılırsa, anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre

$$\begin{aligned} f_1(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_2(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) + f_3(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \\ = f_1(\omega_1) + f_1(\omega_2) + f_1(\omega_3) + f_2(\omega_1) \\ + f_2(\omega_2) + f_2(\omega_3) + f_3(\omega_1) + f_3(\omega_2) \\ + f_3(\omega_3) \end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç 3.12 ve Sonuç 3.14 e göre bir ω vektörünün anti-involüsyonun eksenine hibrit ortogonal ise anti-involüsyon ω nın işaretini değiştirir, paralel ise anti-involüsyon birim

dönüşüm olur. Buna göre yukarıdaki eşitliğin sağ tarafı düzenlenirse

$$\omega_1 - \omega_2 - \omega_3 - \omega_1 + \omega_2 - \omega_3 - \omega_1 - \omega_2 + \omega_3 = -\omega$$

elde edilir.

Teorem 3.17. $Z \in \mathbb{K}$ ve eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan anti-involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$\bar{Z} = \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - Z) \quad (15)$$

dir.

İspat. $Z = a + \omega$ olsun. Anti-involüsyonun A2. aksiyomuna göre (15) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanır ve anti-involüsyonların a skaler kısmını invaryant bıraktığından yararlanarak (14) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - Z) \\ &= \frac{1}{2}(a + f_1(\omega) + a + f_2(\omega) + a + f_3(\omega) - a - \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) - \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(-\omega - \omega) \\ &= a - \omega \\ &= \bar{Z} \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.18. $Z \in \mathbb{K}$ ve eksenleri birbirine hibrit ortogonal V_1, V_2, V_3 birim vektörleri olan involüsyonlar f_1, f_2, f_3 ise

$$Z = \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - \bar{Z}) \quad (16)$$

dir.

İspat. $Z = a + \omega$ olsun. İnvölüsyonun A2. aksiyomuna göre (16) eşitliğinin sağ tarafı hesaplanır ve anti-İnvölüsyonların a skaler kısmını invaryant bıraktığından yararlanarak (13) eşitliğine göre

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(f_1(Z) + f_2(Z) + f_3(Z) - \bar{Z}) \\ &= \frac{1}{2}(a + f_1(\omega) + a + f_2(\omega) + a + f_3(\omega) - a + \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(f_1(\omega) + f_2(\omega) + f_3(\omega) + \omega) \\ &= a + \frac{1}{2}(\omega + \omega) \\ &= a + \omega \\ &= Z \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.19. $V^2 = -1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir ω vektörünün V ye paralel ve hibrit ortogonal bileşenleri sırasıyla ω_1, ω_2 ise

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{1}{2}(\omega - f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega + f_2(\omega)), \\ \omega_2 &= \frac{1}{2}(\omega + f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega - f_2(\omega)) \end{aligned}$$

dir ve $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dir. Burada $f_1(Z) = -V\bar{Z}V$ İnvölüsyonu ve $f_2(Z) = -VZV$ anti-İnvölüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 1. den kolayca görülmektedir.

Teorem 3.20. $V^2 = 1$ eşitliğini sağlayan birim vektör V olsun. Herhangi bir ω vektörünün V ye paralel ve hibrit ortogonal bileşenleri sırasıyla ω_1, ω_2 ise

$$\omega_1 = \frac{1}{2}(\omega - f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega + f_2(\omega)),$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2}(\omega + f_1(\omega)) = \frac{1}{2}(\omega - f_2(\omega))$$

dir ve $\omega = \omega_1 + \omega_2$ dir. Burada $f_1(Z) = V\bar{Z}V$ involüsyonu ve $f_2(Z) = VZV$ anti-involüsyonu alınmıştır.

İspat. Şekil 2. den kolayca görülmektedir.

KAYNAKÇA

- [1] T. A. Ell, S. J. Sangwine, Quaternion involutions and anti-involutions, Computers and Mathematics with Applications, 2007.
- [2] M. Özdemir, Introduction to Hybrid Numbers, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2018.
- [3] İ. Öztürk, M. Özdemir, Elliptical rotations with hybrid numbers, Indian J Pure Appl Math, 2022.
- [4] H. Çakır, M. Özdemir, Hybrid Number Matrices, Preprint, 2021.
- [5] M. Bekar, Y. Yaylı, Dual Quaternion Involution and Anti-Involutions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2013.
- [6] M. Bekar, Y. Yusuf, Involutions of Complexified Quaternions and Split Quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2013.
- [7] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in Dual Split-Quaternions, Adv. Appl. Clifford Algebras, 2016.
- [8] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in Split semi-Quaternions, Math. Meth. Appl. Sci., 2018.
- [9] M. Bekar, Y. Yaylı, Involutions in semi-Quaternions, Geometry and Symmetry in Physics, 2016.
- [10] İ. Öztürk, M. Özdemir, Similarity of hybrid numbers, Math Meth Appl Sci., 2020.

MATEMATİK ALANINDA AKADEMİK ANALİZLER



YAZ Yayınları

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3

İscehisar / AFYONKARAHİSAR

Tel : (0 531) 880 92 99

yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com

ISBN: 978-625-6642-27-0



9 786256 642270