

MATEMATİK DEĞERLENDİRMELERİ

Editör: Doç.Dr. Meral SÜER

yaz
yayınları

Matematik Değerlendirmeleri

Editör

Doę.Dr. Meral SÜER

yaz
yayınları

2025

Matematik Değerlendirmeleri

Editör: Doç.Dr. Meral SÜER

© YAZ Yayınları

Bu kitabın her türlü yayın hakkı Yaz Yayınları'na aittir, tüm hakları saklıdır. Kitabın tamamı ya da bir kısmı 5846 sayılı Kanun'un hükümlerine göre, kitabı yayınlayan firmanın önceden izni alınmaksızın elektronik, mekanik, fotokopi ya da herhangi bir kayıt sistemiyle çoğaltılamaz, yayınlanamaz, depolanamaz.

E_ISBN 978-625-5838-66-7

Ekim 2025 – Afyonkarahisar

Dizgi/Mizanpaj: YAZ Yayınları

Kapak Tasarım: YAZ Yayınları

YAZ Yayınları. Yayıncı Sertifika No: 73086

M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar/AFYONKARAHİSAR

www.yazyayinlari.com

yazyayinlari@gmail.com

info@yazyayinlari.com

İÇİNDEKİLER

İntegral ve Diferansiyel Denklemler: Kuramsal Temeller ve Çözüm Yaklaşımları	1
<i>Alaattin AKYAR, Oya MERT COŞKUN</i>	
Akı Sınırlayıcı Fonksiyonlar: Temel İlkeler ve Adveksiyon Denklemine Uygulamaları.....	22
<i>Burhan BEZEKÇİ</i>	
3-Parameter Quaternions with Coefficients Derived from Random Fibonacci and Lucas Numbers.....	47
<i>Göksal BİLGİCİ</i>	
Riemann Manifolddlarında Regresyon Analizi.....	57
<i>Emre SANIR, Nurkut Nuray URGAN</i>	
On the special curves in the lightlike cone $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$	78
<i>Fatma ALMAZ</i>	
Algebraic and Combinatorial Invariants Of The Numerical Semigroups $S=\langle a, a+1, \dots, 2a-2 \rangle$	92
<i>Meral SÜER</i>	
Existence of Solutions for A Steklov Problem Involving The $P(X)$-Laplace Operator	109
<i>Zehra YÜCEDAĞ</i>	

"Bu kitapta yer alan bölümlerde kullanılan kaynakların, görüşlerin, bulguların, sonuçların, tablo, şekil, resim ve her türlü içeriğin sorumluluğu yazar veya yazarlarına ait olup ulusal ve uluslararası telif haklarına konu olabilecek mali ve hukuki sorumluluk da yazarlara aittir."

İNTEGRAL VE DİFERANSİYEL DENKLEMLER: KURAMSAL TEMELLER VE ÇÖZÜM YAKLAŞIMLARI

Alaattin AKYAR¹

Oya MERT COŞKUN²

1. GİRİŞ

Bilindiği üzere birçok fiziksel problem ve günlük hayattaki problemler türev kullanılarak matematiksel olarak modellenenir. Bu anlamda diferansiyel denklemlerin ortaya çıkması, kullanımı ve çözümü matematiğin önemli bir alanı haline gelmiştir. Matematiksel olarak kesin tanımı dışında, daha sezgisel bir ifadeyle diferansiyel denklem; bir veya birden fazla türev aracılığıyla tanımlanan fonksiyonlar arasındaki ilişkileri ifade eden bir denklemdir. Tipik olarak bilimsel bir teori, bazı fiziksel süreçleri tanımlayan veya yöneten bir diferansiyel denklem üretir. Uygulamalı bilimlerde, diferansiyel denklemde kullanılan fonksiyonlar genellikle fiziksel nicelikleri, türev/ler ise bu nicelikler arasındaki değişimi temsil ederken ve diferansiyel denklem de bu ikisi arasındaki ilişkiyi temsil eder. Benzer bir durum integral denklemler için de geçerlidir. Dolayısıyla gerek diferansiyel denklemler olsun gerekse de integral denklemler olsun yüzyıllardır günlük hayatta karşılaşılan problemi anlama,

¹ Dr, Düzce Üniversitesi Düzce MYO, alaattinakyar@duzce.edu.tr, 0000-0003-4759-8313.

² Dr, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik, oyamert@nku.edu.tr, 0000-0002-8791-3341.

modelleme ve çözüme imkânı vermeleri açısından oldukça önemlidir.

J. Fourier (1768-1830) integral denklemler teorisinin başlatıcısı olarak kabul edilmektedir. İtalyan matematikçi Abel, 1823 yılında ilk olarak, fiziksel bir problem olan, ünlü Tautochrone problemi ile bağlantılı bir integral denklemi üretmiştir. Tautochrone problemi, herhangi bir yere yerleştirilen bir boncuğun aynı sürede aşağıya düşebileceği eğrisel bir yolun bulunması problemidir. Eğri ilk kez Huygens tarafından Horologium Oscillatorium'da (1673) keşfedilen ve yayınlanan bir sikloiddir. 1837 yılında ise Liouville'nin, ikinci mertebeden bir lineer diferansiyel denklemin özel bir çözümünü belirlemesi, günümüzde ikinci tür integral denklem olarak adlandırılan, farklı bir metot olarak bir integral denklemin çözülmesiyle gerçekleştirilebileceğini ortaya koydu. Daha sonraki dönemlerde Volterra, Fredholm ve Hilbert gibi bilim adamlarının katkılarıyla İntegral Denklem Teorisine olan ilgi artarak devam etmiştir. Bu alandaki, hızla çoğalan araştırmalar ve yapılan sayısız uygulama İntegral denklem teorisinin diğer Matematiksel disiplinler arasında yer almasını sağlamıştır. Bu tür denklemler uygulamalı matematiğin ve bilimlerin birçok uygulamasında doğal olarak ortaya çıkmakta ve ilgili problemlerin çözümlerinde etkili bir matematiksel araç olarak kullanılmaktadır. İntegral denklemler jeofizik, elektrik ve manyetizma, gazların kinetik teorisi, rejenerasyon teorisi, kuantum fiziği, radyasyon yayılımı, optimizasyon, çekme ve basma gerilmesi, matematiksel ekonomi, optimal kontrol sistemleri vb. gibi alanlarda giderek daha fazla kullanılmaktadır.

2. ÖNCÜ KAVRAMLAR VE TANIMLAR

Fonksiyonel denklemler konusu uzun yıllar matematikçilerin dikkatinde önemli bir yer tutmuştur. Belirli bir

dönemden sonra ise, bu dikkat ağırlıklı olarak belirli bir tür fonksiyonel denklemlere yönelmiştir. Fonksiyonel kavramı Aristotle D. Michal (1899-1953) tarafından tanımlanmış olup; sonlu sayıda sayısal değişkenin bir fonksiyon kavramına genelleştirilmesidir. Fonksiyonel denklemler ise, bir veya daha fazla fonksiyonun bilinmeyen olarak içerisinde bulunduğu denklemlerdir. Bu anlamda diferansiyel ve integral denklemler fonksiyonel denklemlerdir.

Tanım 2.1 Bir integral denklem, bilinmeyen fonksiyonun bir veya daha fazla integral işaretinin altında bulunduğu bir fonksiyonel denklemdir (Formal olamayan bir tanım).

En sık kullanılan integral denklemler Fredholm ve Volterra integral denklemler olmak üzere başlıca iki ana sınıfa ayrılır. Ayrıca bunları da diferansiyel denklemlerde olduğu gibi, homojen veya homojen olmayan ve ardından da lineer ve lineer olmayan olarak alt sınıflara ayırmamız gerekir. Ancak pratik uygulamalarda, Singüler (Tekil) ve Integro integral denklemler olmak üzere farklı türlerle de karşılaşilmektedir. Bütün verilenlere göre, integral denklemler özellikle tür olarak Fredholm integral denklemler, Volterra integral denklemler, İntegro integral denklemler ve Singüler integral denklemler olmak üzere dört ana başlık altında incelenebilir (Rahman, 2007; Smithies, 1958).

İntegralin sınırları sabitse, integral denkleme Fredholm integral denklemi denir. Bir sınır değişkense, bu denkeleme de Volterra integral denklemi denir (Volterra, 1932). Bilinmeyen fonksiyon sadece integral işaretinin altındaysa, denklemin "birinci tür" olduğu söylenir. Fonksiyon hem içeride hem dışarıda ise, denklem "ikinci tür" olarak adlandırılır.

En genel anlamda bir integral denklem, $g(x)$ ve $h(x)$ ler integral sınırları, λ sıfır olmayan kompleks bir parametre, $K(x, t)$

çekirdek olarak adlandırılan iki değişkenli bir fonksiyon olmak üzere, bilinmeyen fonksiyonu $u(x)$ e bağlı integral denklem

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (1)$$

şeklindedir. Verilen tanımdan da anlaşılacağı üzere (1) numaralı denklemde integral sınırlarının her ikisi de birer sabit sayı ise, bu denklemlere Fredholm integral denklemler; integral sınırlarından biri değişkense bu denklemlere de Volterra integral denklemi denir. Sırasıyla bu denklemler genel anlamda

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (2)$$

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt \quad (3)$$

şeklindedir. Ayrıca, bilinmeyen fonksiyonu $u(x)$ sadece integral işaretinin altında bulunuyorsa bu tür integral denklemlerine birinci (veya I.) tip integral denklemleri denir. Daha özel olarak, integral denklemin Fredholm veya Volterra olması durumunda da I. tip Fredholm integral denklemi veya I. tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Eğer bilinmeyen fonksiyonu $u(x)$ hem integral işaretinin altında ve hem de dışında bulunuyorsa bu tür integral denklemlerine de ikinci (veya II.) tip integral denklemleri denir. Benzer şekilde integral denklemin Fredholm veya Volterra olması durumuna göre de daha özellikli olarak II. tip Fredholm integral denklemi veya II. tip Volterra integral denklemi olarak adlandırılır. Öte yandan $\phi(x)$, $f(x)$ ve $K(x, t)$ fonksiyonları bilinmeyene bağlı fonksiyonlar olmak üzere

$$\phi(x)u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x, t)u(t)dt \quad (4)$$

şeklindeki integral denklemlere ise III. tip integral denklemler denir. I. ve II. tip integral denklemlerin III. tip integral denklemlerin birer özel hali olduğu açıktır.

(1) ile verilen genel bir integral denklemde, eğer $f(x) = 0$ ise integral denkleme homojen integral denklem denir (Kanwal, 1971). İntegral denklemler $u(x)$ fonksiyonunun homojen olup olmamasına göre de sınıflandırılabilir. Böyle bir sınıflandırma ancak II. tipindeki integral denklemler için geçerlidir. Öte yandan homojen olmayan integral denklemler için $u(x) = 0$ olan ve trivial (açık) çözüm olarak adlandırılan bir çözümü vardır.

Eğer bir integral denklemde, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun hem türevi ve hem de integrali mevcutsa bu integral denkleme İntegro integral denklem denir (Makroglou, 1980). İntegral denklemin Fredholm veya Volterra olması durumuna göre de daha özellikli olarak Fredholm integro integral denklem veya Volterra integro integral denklem olarak isimlendirilir. Bu denklemler sırasıyla aşağıdaki gibi genel olarak verilebilir:

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)u(t)dt \quad (5)$$

$$u^n(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u(t)dt. \quad (6)$$

(3) ile verilen Volterra integral denkleminde $u(x)$ fonksiyonunun lineer olması durumunda integral denklem lineer integral denklemidir. Başka bir ifadeyle

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x, t)u^n(t)dt, n = 1, 2, \dots \quad (7)$$

integral denkleminde $n = 1$ ise integral denklem lineer integral denklem, değil ise (yani $n \geq 2$ ise) lineer olmayan integral denklem olarak adlandırılır (Kanwal, 1971).

İtalyan matematikçi ve fizikçi Vito Volterra (1860-1940), 1887 tarihinde, integral denklem teorisinin gelişmesine öncülük eden bir dizi makale yayınlamıştır. İsveçli matematikçi Erik Ivar Fredholm (1866-1927) ise, 1903 yılında yayınlanan bir makalesinde kendi adıyla anılan Fredholm integral denklemini tanıtan ilk kişi olmuştur.

Eğer I. tip veya II. tip bir Volterra integral denkleminde integral sınırlarından birinin veya ikisinin birden sonsuz olması durumunda integral denkleme Singüler integral denklem denir (Lovitt, 1950). Başka bir ifadeyle, verilen integral denklem, eğer $K(x, t)$ çekirdeği, integrasyon aralığında bir veya daha fazla bölgede sonsuz oluyorsa Singüler denklem olarak adlandırılır. Örneğin,

$$f(x) = \int_0^x \frac{1}{(x-t)^\alpha} u(t) dt, \quad 0 < \alpha < 1$$

integral denklemleri I. tip bir Volterra Singüler integral denklemdir. Bu tür integral denklemler, özellikle akışkanlar mekaniği, biyomekanik ve elektromanyetik teori gibi alanlarda yoğun uygulamaları olan denklemlerdir (Gakhov, 1951; Gakhov, 1963; Junghanns & Silbermann, 1986; Pourgholi, Tahmasebi, & Azimi, 2017; Zarnan, 2017).

Daha önce giriş bölümünde integral denklemlerle diferansiyel denklemler arasında yakın bir ilişki olduğu ifade edilmişti. Başlangıç koşullarıyla verilen, değişken veya sabit katsayılı bir diferansiyel denklem, bir integral denkleme dönüştürülebildiği gibi, bir integral denklem de bir diferansiyel denkleme dönüştürülebilir. Bu durumda, bir integral denklem başlangıç koşulları için sağlanan diferansiyel denklemin bir sınır değer problemi olarak da göz önüne alınabilir. İntegral denklemlerin, bir anlamda bazı bilim adamlarının diferansiyel denklemleri çözemediği on yedinci yüzyılın ortalarından itibaren ortaya çıkmaya başladığı da dikkate alınırsa, integral denklemlerle diferansiyel denklemler arasında doğal olarak var olan ilişki daha kolay olarak anlaşılabilir. Burada bu durumu örneklerle açalım.

Örnek 1.1 $y'' - y = \sin x, y(0) = 0, y'(0) = 0$ başlangıç koşulları ile verilen diferansiyel denklemi Volterra integral denkleme çevirelim.

Çözüm: $y''(x)$ yerine $u(x)$ alınırsa

$$\Rightarrow \int_0^x y''(x)dx = y'(x) - y'(0)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y'(x) - y'(0) &= \int_0^x u(t)dt \quad ; y'(0) = 0 \Rightarrow y'(x) \\ &= \int_0^x u(t)dt \end{aligned}$$

Şimdi her iki tarafın integrali alınırsa;

$$\Rightarrow \int_0^x y'(x)dx = \int_0^x \int_0^x u(t)dt dt$$

elde edilir. Bu aşamada çoklu integralleri tekli integrale indirme operatörü, yani

$$\begin{aligned} \int_0^x \int_0^{x_1} \dots \dots \int_0^{x_{n-1}} u(x_n) dx_n dx_{n-1} \dots dx_1 \\ = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-t)^n u(t)dt \end{aligned}$$

operatörü kullanılırsa yukarıdaki son eşitlikten

$$\Rightarrow y(x) - y(0) = \frac{1}{(2-1)!} \int_0^x (x-t)^1 u(t)dt, \quad y(0) = 0$$

$$\Rightarrow y(x) = \int_0^x (x-1) u(t) dt$$

elde edilir. Buraya kadar sırasıyla

$$y''(x) = u(x)$$

$$y'(x) = \int_0^x u(t) dt$$

$$y(x) = \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

eşitlikleri elde edilmiştir. Elde edilen bu eşitlikler verilen diferansiyel denklemde yerine yazılırsa, diferansiyel denkleme karşılık gelen Volterra integral denklem

$$u(x) = \sin x + \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

olarak bulunmuş olur.

Örnek 1.2

$$u(x) = \sin x - \frac{1}{2} \int_0^x (x-t)^2 u(t) dt$$

Fredholm integral denklemini başlangıç değer problemine dönüştürünüz.

Çözüm: Başlangıç itibariyle verilen denklemin her iki tarafının türevi alınır;

$$u'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \left[\int_0^x (x-t)^2 u(t) dt \right]'$$

elde edilir. Bu aşamada $\int_0^x (x-t)^2 u(t) dt$ integralinin türevi, Leibnitz'in

$$\frac{d}{dx} \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} F(x, y) dy = F[x, \beta(x)]\beta'(x) - F[x, \alpha(x)]\alpha'(x) +$$

$$\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} dy$$

kuralı temel alınarak hesaplanırsa

$$\int_0^x (x-t)^2 u(t) dt = (x)'(x-x)^2 u(x) - 0.(x-0)^2 u(0)$$

$$+ 2 \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

$$\int_0^x (x-t)^2 u(t) dt = 2 \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

olarak bulunur. Buna göre,

$$u'(x) = \cos x - \frac{1}{2} \left[2 \int_0^x (x-t) u(t) dt \right]'$$

$$= \cos x - \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

olur. Bu aşamada integral işareti ortadan kalkana kadar Leibnitz kuralı temel alınarak türev alma işlemine devam edilirse;

$$u''(x) = -\sin x - (x)'(x-x)u(x) - 0.(x-0)u(0)dt - \int_0^x u(t) dt$$

$$u''(x) = -\sin x - \int_0^x u(t)dt$$

elde edilir. Benzer mantıkla

$$u'''(x) = -\cos x - u(x)$$

veya

$$u'''(x) + u(x) = -\cos x$$

dir. Şimdi $x = 0$ için sınırlar bulunmalıdır. Yani,

$$u(0) = \sin 0 - \frac{1}{2} \int_0^0 (0-t)^2 u(t)dt = 0$$

$$u'(0) = \cos 0 - \int_0^0 (0-t)u(t)dt = 1$$

$$u''(0) = -\sin 0 - \int_0^0 u(t)dt = 0$$

olur. Bütün bunlara göre verilen Fredholm integral denklemine karşılık gelen başlangıç değer problemi

$$u'''(x) + u(x) = -\cos x, u(0) = 0, u'(0) = 1, u''(0) = 0$$

dir.

Başlangıç değeri ile verilen bir sıradan diferansiyel denklem, integre edilerek bir “integral denklem” olarak yazılabilir. Bir Volterra integral denklem ise, $x \geq a$ için bir başlangıç değerli sıradan diferansiyel denkleme eşdeğerdir. Bütün bunlara karşılık, sınır değeri ile verilen sıradan diferansiyel denklemler ise Fredholm integral denklemlerine genellenebilir.

Bazı uygulama problemlerinin çözümlerinde, integral denklemler, diferansiyel denklemlere göre daha avantajlı bir matematiksel araç olarak kullanılabilirler. Bunun en önemli

nedeni, yukarıda verilen örneklerden de kolaylıkla görülebileceği gibi, bir diferansiyel denklem için başlangıç veya sınır değer problemlerini belirleyen tüm koşulların genellikle tek bir integral denklemde toplanması olabilir. Bir anlamda, türev ile integralin yer değiştirmesi ile diferansiyel denklemin boyutu küçülür. Örneğin, iki bağımsız değişkenli bir diferansiyel denklem için bir sınır değer problemi, sadece bir değişkenli bir bilinmeyen fonksiyonunu içeren integral denkleme dönüşür. İntegral denklemin, bu bilinmeyen fonksiyonu bulmak için çözüldüğünü bilmek önemlidir. Fiziksel veya pratik hayatla ilgili karmaşık bir problemin tek bir integral denklemle matematiksel olarak modellenebilmesi aslında başka birçok açıdan da oldukça önemli avantajlar sağlayabilir. Bu avantajlardan bazıları, integrasyonun bazı durumlarda, ilgili problemin yaklaşık veya kesin çözümleri aranması durumunda türevlenebilmeye karşılık daha kolay bir matematiksel araç olması olabilir.

Yapılan araştırmalar, ülkemizde olduğu gibi Avrupa ülkeleri de dâhil olmak üzere birçok ülkede gerek diferansiyel gerekse de integral denklemlerin içeriğinin ve ne amaçladığının öğrenciler tarafından anlaşılmasında zorluklar yaşandığını ortaya koymaktadır. Ülkemizde lisans eğitiminde bu dersleri alan öğrenciler gerek kendi alanlarındaki gerekse de günlük hayat problemlerini modelleyen bu denklemleri yorumlamakta ve bu derslerin amaçlarını kavramakta güçlük çekmektedirler. Benzer olarak Avrupa ülkelerinde, öğrenciler tarafından söz konusu bu dersler sadece transkript (not dökümü)'te bulunması gereken dersler olarak görülmektedir. Bunun başlıca nedenleri arasında eğitim sisteminin yetersizliği ile eğitim ortamının ve dersi veren eğitimcilerin nitelik eksiklikleri yer almaktadır. Ayrıca, kariyer hedeflerini net olarak belirleyemeyen veya belirleyemeyen bir öğrenci topluluğu da önemli bir etken olabilir.

Son dönemlerde Bilgi teknolojisi alanındaki gelişmeler, sadece alanın kendisini değil, son derece dinamik bir süreç olarak,

bilginin toplanması, depolanması, işlenmesi, iletilmesi ve nihayetinde de sunulmasının getirdiği yeniliklerle beraber her alanda verilen hizmetleri daha kolay anlaşılabilir hale getirmiştir. Bu yeniliklerin etkileri geniş anlamda eğitimde, özel olarak da matematik eğitiminde olmuştur. Günümüzde bilgisayarların eğitim alanındaki farklı uygulamalarıyla beraber, matematik müfredatı, matematik öğretimi ve öğrenimi üzerindeki etkilerinin inceleyen ve bu anlamda çok farklı öneriler getiren çok sayıda çalışma mevcuttur. Eğitimde bilgisayar kullanımının, yukarıda ifade edilen olumsuzlukları tamamen ortadan kaldıracabilecek sihirli bir etkisinin olmadığı veya olmayacağı açıktır. Matematik eğitim ve öğretiminin, doğası gereği gerek kendi içerisinde gerekse de farklı disiplinlerde karşılaşılan karmaşık problemlere çözüm üretmeyi amaçladığı bilinen bir gerçektir. Bazı alanlarda olduğu gibi, Diferansiyel veya İntegral denklemler gibi alanlarda karşılaşılan denklemleri el yardımıyla çözmek çok emek ve zaman harcanmasına neden olabilmektedir. Bu da sonuç olarak, bir bütünlük içerisinde, denklem ve denklemin uygun çözüm tekniğinin belirlenebilmesi, çözümünün yorumlanması, görsel olarak değerlendirilmesi için yeterli zaman ayırlamaması demektir. Bütün bunlara ilaveten, tek tür denklemlere ve onların çözüm tekniklerinde birine, ağırlıklı olarak da cebirsel olana yoğunlaşmaya sebep olarak, sadece cebirsel öğrenme ile sonuçlanmaktadır. Bu nedenle, öğrenciler için integral veya diferansiyel denklemler ve onların çözümleri Transkript (not dökümü) te görünmesi gereken bir durum olmaktan ileri gitmemektedir. Bilgisayar destekli öğretim yönteminin uygulanmasının, bu olumsuzlukları ortadan kaldıracağı açıktır. Çünkü günümüzde Bilgisayar kullanımı, el mahareti ile cebirsel yöntemlerle açık bir şekilde çözülemeyen birçok uygulamalı alan probleminin saniyeler içerisinde çözmekle beraber; öğrencilerin problemlere kendi yaklaşımlarını geliştirmelerine, grafiksel düşünme yeteneklerini geliştirerek, bilgileri analiz edebilme ve akıl yürütebilme yetilerinin de gelişmesine katkı sağlayacaktır.

Sadece bir bağımsız değişkeni olan bir diferansiyel denkleme Adi Diferansiyel Denklem (ODE) denir ve içindeki tüm türevler o değişkene göre alınır. Çoğu zaman, değişken fiziksel bir nicelik olan zamandır (t ile gösterilir). Bilinmeyen fonksiyonun iki veya daha fazla değişkene bağlı olduğu diferansiyel denklem, Kısmi Diferansiyel Denklemler (PDE) olarak adlandırılır. Adi diferansiyel denklemler, analitik ve sayısal olmak üzere çeşitli yöntemlerle çözülebilir. Diferansiyel denklemlerin çözümünü bulmak için birçok analitik yöntem olmasına rağmen, analitik olarak çözülemeyen çok sayıda diferansiyel denklem vardır. Bu, çözümün sonlu sayıda temel fonksiyonun (polinomlar, üstel, trigonometrik ve hiperbolik fonksiyonlar) toplamı olarak ifade edilemeyeceği anlamına gelir. Basit diferansiyel denklemler için kapalı form çözümleri bulmak mümkündür. Ancak uygulamalarda ortaya çıkan birçok diferansiyel denklem o kadar karmaşıktır ki, bazen çözüm formüllerine sahip olmak pratik değildir veya en azından bir çözüm formülü mevcutsa, yalnızca sayısal bir Gauss kareleme formülü kullanılarak hesaplanabilen integraller içerebilir. Her iki durumda da sayısal yöntemler, öngörülen başlangıç koşulu veya koşulları altında diferansiyel denklemleri çözmek için güçlü bir alternatif araç sağlar.

Matematikte karşılaşılan problemler, analitik veya sayısal yöntemler aracılığıyla çözümlenebilir. Ancak, özellikle uygulamalı alanlarda ortaya çıkan problemlerin önemli bir kısmının analitik çözümü bulunmamaktadır. Analitik çözümün elde edilemediği veya elde edilmesinin güç olduğu durumlarda, sayısal yöntemler etkili bir alternatif olarak kullanılmaktadır. Sayısal çözüm yöntemlerinin başarısı, problemi tanımlayan denklemin özelliklerine ve seçilen yöntemin yapısına bağlı olarak değişkenlik gösterebilir. Bazı sayısal yöntemler, diğerlerine kıyasla daha yüksek doğrulukta veya daha hızlı yakınsama sağlayabilir. Analitik yöntemler, genellikle denklemin

çözümünün cebirsel ifadeler yoluyla elde edilmesine dayanır ve çoğu durumda kesin sonuçlar verir. Buna karşılık, sayısal yöntemler, analitik çözümün mevcut olmadığı veya pratik olarak uygulanamadığı durumlarda, bilgisayar tabanlı hesaplama teknikleriyle yaklaşık çözümler sunar. Dolayısıyla, analitik çözüm mevcut olduğunda, bu çözüm kesinliği nedeniyle tercih edilir.

Fizik, matematik, mühendislik, tıp ve bilim-teknolojinin birçok alanında hem teorik hem de pratik düzeyde kapsamlı olarak incelenen diferansiyel denklemler; analitik yaklaşım, sayısal (nümerik) çözüm ve nitel (grafiksel) yöntem olmak üzere üç farklı yaklaşımla çözülebilir. Analitik yaklaşımın amacı, diferansiyel denklemin genel çözümünü; değişkenlerin herhangi bir değeri için doğru şekilde hesaplanabilen matematiksel fonksiyonlar biçiminde ifade etmektir. Bilindiği üzere genel çözümün en önemli özelliği, sahip oldukları sabitten bağımsız olarak ait oldukları denklemin sağlamaktır. Bununla birlikte, analitik yaklaşımın uygulanabileceği integral tipleri sınırlıdır. Analitik yaklaşımla çözülebilen denklemlerin genel çözümleri, bilinmeyene bağlı açık bir fonksiyon olarak elde edilir. Eğer bir diferansiyel denklemin genel çözümü açık bir fonksiyon olarak elde edilemiyorsa Sayısal (Nümerik) çözüm tatbik edilir (Muftahov, Tynda, & Sidorov, 2017; Prössdorf & Silbermann, 1991; Rahman, 2007; Zhong, Wei, & Long, 2017). Sayısal çözüm, bir diferansiyel denklemin verilen bir noktadan geçen bir özel çözümünü yaklaşık olarak, yani genel çözümün söz konusu noktayı sağlayan özel durumu için hesaplanmasına imkân verir. Analitik çözümün aksine, sayısal yöntem verilen diferansiyel denklemin tipine bağlı değildir. Temelde grafik gösterimi, veri kümelerini net bir şekilde görselleştirmek ve basitleştirmek için ilgili noktaları birleştiren çizelgelerin kullanımını ifade eder. Temsili grafikler, genel eğilimi hızlıca gösterebilir. Böylece, gözden kaçabilecek veri noktaları arasındaki anormallikler ve

ilişkiler belirlenebilir; bu da veriye dayalı daha doğru tahminler ve kararlar alınmasına katkı sağlar. Kullanılan temsili grafik türleri, araştırılan veri türüne bağlı olacaktır. Bu anlamda, diferansiyel denklemler için Nitel (Grafiksel) yaklaşımın amacı, denklemi analitik veya sayısal olarak çözmeden çözüm eğrilerinin genel özellikleri ve nasıl davrandıkları konusunda bilgi sahibi olmaktır. Yukarıda verilen bilgilerden de anlaşılacağı üzere, diferansiyel denklemleri çözebilmek için Diferansiyel denklemlerin özelinde evrensel bir yöntem yoktur. Benzer bir durum, aralarındaki yakın ilişki nedeniyle İntegral denklemler için de geçerlidir.

Bu bölümde yukarıda Diferansiyel denklemlerin çözüm yöntemleri için olduğu gibi, İntegral denklemlerin çözüm yöntemleri için de genel bilgiler verilecektir. İntegral denklemleri anlamak isteyenler için, İntegral denklemlerin çözüm tekniklerinin gelişiminin ardındaki bilgi birikimini açık ve iyi organize edilmiş bir şekilde vermeye çalışmaktır. Bir integral denklemin belirlenecek bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun bir veya daha fazla integral işareti altında bulunduğu denklem olarak ifade edilmişti. Bu anlamda herhangi bir türdeki bir integral denklemin çözümü, denklemi sağlayan bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunu belirlemektir. Herhangi bir türdeki bir integral denklemin çözümünün analitik tekniklerle belirlenmesi mümkün olmayabilir. Bununla beraber, İntegral denklemleri çözmek için kullanılabilecek birçok çözüm metodu vardır. İki önemli geleneksel yöntem Ardışık Yaklaşım Metodu (The Method of Successive Approximation) ve Ardışık İkameleler (Birbirinin yerine yazılabilenler) Metodu (The Method of Successive Substitutions) dir. Yakın zamanda geliştirilen, Adomian Ayırıştırma Metodu (The Method of Adomian Decomposition) (Adomian, 1994) ve Değiştirilmiş ($f(x)$ fonksiyonun uygun koşullarda Modifiye edilmesi) Ayırıştırma Metodu (The method of Modified Decomposition), Lineer (doğrusal) olmaya integral

denklemleri çözmek için bilim adamları ve mühendisler arasında oldukça popülerlik kazanmıştır. Ünlü bilim adamı tanıttığı Singüler (Tekil) integral denklemler ve Konvolüsyon tipi Volterra inegral denklemler, Laplace dönüşüm yöntemi kullanılarak kolayca çözülebilmektedir (Jones, 1961; Ladopoulos, 1987; Mikhlin, 1947). Son olarak, oldukça karmaşık mühendislik problemlerine karşılık gelen, doğrusal olamayan integral denklemler de Sayısal (nümerik) yaklaşım, integral denklemi herhangi bir matris yöntemiyle çözülebilen bir dizi lineer cebirsel denklemle değiştirmektedir (Capobianco & Mastronardi, 1998; Maleknejad, Roodaki, & Almasieh, 2009; Mikhlin, 1947; Muftahov, Tynda, & Sidorov, 2017). Her şeyden önce, verilen bir İntegral denklemin yukarıda verilen klasik yöntemlerden hangisiyle çözülebileceğine karar verebilmek için, öncelikle denklemin iyi kurgulanmış olması gerekir (Wazwaz, 2011). Bu durum aynı zamanda, integral denklemin bir tek çözümü olması açısından da oldukça önemlidir. İyi kurgulanmış bir denklem için çözümün varlığı, benzersizliği ve kararlılığı koşullar geçerlidir. Bu koşulların varlığına dayalı olarak çözüm yöntemlerini integral denklem türlerine göre analiz edebiliriz.

Volterra integral denklemlerini çözmek için bir dizi çözüm metodu vardır. Bunlar sırasıyla;

- (i) Ardışık Yaklaşımlar Metodu (The Method of Successive Approximations)
- (ii) Laplace Dönüşüm Metodu (The Method of Laplace Transform)
- (iii) Ardışık İkameleler Metodu (The Method of Successive Substitutions)
- (iv) The Method of Adomian Decomposition (Adomian Ayırışımı Metodu)
- (v) The Method of Series Solution (Seri Çözüm Metodu)

Ayrıca, birinci tür Volterra İntegral denklemler, her zaman bir tek çözüme sahip olduklarından (ya da daha genel anlamda iyi kurgulanmış olduklarından) ikinci tür Volterra integral denklemlere kolayca dönüştürülebilirler. İkinci türden Volterra İntegral denklemler ise Picard'ın Ardışık Yaklaşımlar Metodu (Picard's Process of Successive Approximations) kullanılarak çözülebilmektedir.

Fredholm İntegral denklemler için ise, var olan bir dizi çözüm metodu şöyledir:

- (i) Ardışık Yaklaşımlar Metodu (The Method of Successive Approximations)
- (ii) Ardışık İkameler Metodu (The Method of Successive Substitutions)
- (iii) Adomian Ayırıştırma Metodu (The Method of Adomian Decomposition)
- (iv) Doğrudan hesaplama yöntemi (The method of direct computational) (Cameron, 1981).

Belirli türdeki Fredholm İntegral denklemleri çözmek için en etkili yöntem, genellikle Doğrudan hesaplama yöntemi olmaktadır.

Bu bölümde, doğrusal olmayan integral denklemlerin çözümlerine odaklanılacaktır. Bu tür denklemlerin çözümünde önemli zorluklar ortaya çıkabilir. Bu zorlukların en önemlilerinden biri, genel olarak bu denklemler için tek bir çözümün bulunmamasıdır. Bununla birlikte, geliştirilen birçok teknik hepsi olmasa da belirli şartları sağlayan lineer olmayan integral denklemlerin çözümleri bulunabilmektedir. Literatürde bu amaç için geliştirilen çok sayıda yöntem olmakla beraber, bunlar içerisinde en iyi bilinenler Adomian Ayırıştırma Metodu ve Değiştirilmiş Ayırıştırma Metodu (The method of Modified Decomposition) olarak verilebilir.

3. SONUÇ

Bu çalışmada, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasındaki doğal ilişki incelenmiş ve çözüm yöntemleri gözden geçirilmiştir. Söz konusu yöntemlerin kendilerine özgü zorlukları ile bu zorlukların, her bir denklem kategorisinde çözümler elde etmedeki etkileri özetlenmiştir. Ayrıca, diferansiyel ve integral denklemlerin birçok durumda analitik yöntemlerle çözülemeyeceği gerçeğinden hareketle, bu tür durumlarda sayısal (nümerik) yaklaşımların kullanılabileceği, çeşitli araştırmacıların bulgularıyla desteklenmiştir.

KAYNAKÇA

- Adomian, G. (1994). Modified decomposition. In *Solving frontier problems of physics: The decomposition method* (pp. 115–153). Dordrecht: Springer.
- Cameron, R. F. (1981). *Direct solution of applicable Volterra integral equations* (Doctoral dissertation). University of Oxford.
- Capobianco, M. R., & Mastronardi, N. (1998). A numerical method for a Volterra-type integral equation with logarithmic kernel. *Serdica Mathematica et Informatica*, 13, 127–138.
- Gakhov, F. D. (1951). NP Vekua, Systems of singular integral equations and some boundary problems. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 6(5), 207–208.
- Gakhov, F. D. (1963). NI Muskhelishvili. Singular integral equations: Boundary problems in the theory of functions and their applications to mathematical physics. *Fizmatgiz. Book Review. Zhurnal Vychislitel'noi Matematiki i Matematicheskoi Fiziki*, 3(1), 206–207.
- Jones, J. G. (1961). On the numerical solution of convolution integral equations and systems of such equations. *Mathematics of Computation*, 131–142.
- Junghanns, P., & Silbermann, B. (1986). *The numerical treatment of singular integral equations by means of polynomial approximations*. Berlin: Akademie der Wissenschaften der DDR, Karl-Weierstraß-Institut für Mathematik.
- Ladopoulos, E. G. (1987). On the numerical solution of the finite-part singular integral equations of the first and the second kind used in fracture mechanics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 65(3), 253–266.

- Makroglou, A. (1980). Convergence of a block-by-block method for nonlinear Volterra integro-differential equations. *Mathematics of Computation*, 35(151), 783–796.
- Maleknejad, K., Roodaki, M., & Almasieh, H. (2009). Numerical solution of Volterra integral equations of first kind by using a recursive scheme. *Journal of Mathematical Extension*.
- Mikhlin, S. G. E. (1947). NI Muskhelishvili, Singular integral equations. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 2(2), 235–237.
- Muftahov, I., Tynda, A., & Sidorov, D. (2017). Numeric solution of Volterra integral equations of the first kind with discontinuous kernels. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 313, 119–128.
- Pourgholi, R., Tahmasebi, A., & Azimi, R. (2017). Tau approximate solution of weakly singular Volterra integral equations with Legendre wavelet basis. *International Journal of Computer Mathematics*, 94(7), 1337–1348.
- Prössdorf, S., & Silbermann, B. (1991). *Numerical analysis for integral and related operators equations* (Vol. 52). Basel: Birkhäuser Verlag.
- Rahman, M. (2007). *Integral equations and their applications*. Southampton: WIT Press.
- Smithies, F. (1958). *Integral equations* (No. 49). Cambridge: Cambridge University Press.
- Volterra, V. (1932). Theory of functionals and of integral and integro-differential equations. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 38(1), 623.
- Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and nonlinear integral equations* (Vol. 639, pp. 35–36). Berlin: Springer.

- Zarnan, J. A. (2017). A novel approach for the solution of Urysohn integral equations using Hermite polynomials. *International Journal of Applied Engineering Research*, 12(24), 14391–14395.
- Zhong, X. C., Wei, H. M., & Long, X. Y. (2017). Numerical solution of a singular integral equation arising in a cruciform crack problem. *Applicable Analysis*, 96(10), 1767–1783.

AKI SINIRLAYICI FONKSİYONLAR: TEMEL İLKELER VE ADVEKSİYON DENKLEMİNE UYGULAMALARI

Burhan BEZEKÇİ¹

1. GİRİŞ

Kısmi diferansiyel denklemler (KDD'ler), mühendislik, fizik, iklim modelleme ve biyomedikal sistemler gibi çok sayıda alanda temel fiziksel süreçlerin matematiksel temsilini sağlar. Ancak bu denklemlerin çoğu için analitik (kapalı formda) çözümler yalnızca sınırlı ve idealize edilmiş durumlarda elde edilebilir. Gerçekçi sınır koşulları, başlangıç değerleri veya karmaşık geometriler söz konusu olduğunda, bu tür çözümler ya mevcut değildir ya da yeterince pratik değildir (Griffiths ve Higham 2010). Bu durum, sayısal çözüm yöntemlerini vazgeçilmez hâle getirir.

Klasik sayısal yöntemler, özellikle sonlu fark ve sonlu eleman yaklaşımları, KDD'lerin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak bu yöntemler, özellikle keskin geçişlerin, şokların veya ani gradyanların bulunduğu problemlerde fiziksel gerçeklikten uzaklaşabilir. Örneğin, merkezi fark şemaları yüksek doğruluk sağlasa da kararsızlık riski taşıırken; yukarıdan fark şemaları daha kararlı olsalar da aşırı nümerik difüzyon nedeniyle çözümdeki keskinliği kaybettirebilir. Bu tür sınırlamalar, çözümün kritik bölgelerindeki davranışının doğru yakalanmasını zorlaştırır. Özellikle şok öncesi veya sonrası

¹ Dr. Öğr. Üyesi, Kilis 7 Aralık Üniversitesi, Mühendislik-Mimarlık Fakültesi, Elektrik-Elektronik Mühendisliği, burhanbezekci@kilis.edu.tr, ORCID: 0000-0001-7460-4091

bölgelerdeki maksimum ve minimumların konumu ve büyüklüğü gibi özelliklerin doğru tahmini, sadece çözümün genel formu değil, fiziksel anlamı açısından da belirleyicidir. Sonlu farklar ve sonlu elemanlar yöntemleri dışında, günümüzde alternatif yöntem olarak derin öğrenme ve fizik bilgili sinir ağları giderek daha fazla ilgi görmektedir (Bezekci, 2025). Bu yaklaşımda, diferansiyel denklemlerin çözüm uzayına ilişkin fiziksel yasalar doğrudan sinir ağının kayıp fonksiyonuna entegre edilerek, hem veri hem de denklem tabanlı bir öğrenme süreci gerçekleştirilir (Raissi ve arkadaşları, 2019).

Genel olarak, hiperbolik KDD'ler için geleneksel yöntemlerin sınırlamalarının olduğunu ve de nümerik difüzyon ve salınım sorunlarına sebebiyet verdiğini söyleyebiliriz (LeVeque, 2002). Bu bağlamda, sayısal çözüm kalitesini artırmak amacıyla geliştirilen çeşitli yüksek çözünürlüklü yöntemler ön plana çıkmaktadır (Toro, 2009). Bu yöntemlerin temelinde, düşük çözünürlüklü kararlı şemalar ile yüksek mertebeden hassas şemalar arasında adaptif geçiş yapabilme yetisi yatar. Bu geçişi kontrol eden yapılar ise “akı sınırlayıcı” fonksiyonlardır. Akı sınırlayıcılar, yerel gradyan bilgisine dayalı olarak çözümün düzgün olduğu bölgelerde yüksek doğruluk sağlar; şok veya keskin geçiş bölgelerinde ise kararlılığı ön planda tutar. Bu yaklaşımlar, özellikle Toplam Varyasyon Azalımı (TVD) ilkesine dayanan yöntemlerle birlikte kullanıldığında, hem fiziksel olarak anlamlı hem de sayısal olarak güvenilir çözümler üretmeyi mümkün kılar.

Bu çalışmada, akı sınırlayıcı yöntemlerin performansları, doğrusal bir adveksiyon problemi üzerinde karşılaştırmalı olarak incelenmiştir. Adveksiyon denklemi, analitik çözümünün biliniyor olması sayesinde, sayısal çözümle doğrudan karşılaştırma yapabilmeye imkân tanır. Ancak burada kullanılan yöntemler, yalnızca bu denkleme özgü değildir; bilakis, analitik çözümün bulunamadığı ya da karmaşık olduğu daha genel KDD

problemlerine de genişletilebilecek potansiyele sahiptir. Bu yönüyle, akı sınırlayıcıların farklı problem türlerinde çözüm davranışını doğru bir şekilde yansıtmaya gücü, onları modern sayısal analizde vazgeçilmez kılmaktadır. Bu bağlamda, çalışmanın temel amacı, farklı akı sınırlayıcı fonksiyonların çözüm doğruluğu, salınım üretimi ve geçiş bölgelerindeki hassasiyeti açısından karşılaştırmalı bir değerlendirmesini sunmaktır. Elde edilen bulgular, yalnızca test problemiyle sınırlı kalmayıp, daha genel problemlerde hangi sınırlayıcıların hangi çözüm davranışları için uygun olduğunu anlamaya yönelik bir temel oluşturmaktadır.

2. DESTEK SAYISAL AKILARIN GEREKLİLİĞİ

Gerçek dünyadaki birçok fiziksel süreç, kütle, momentumun veya enerjinin korunumu ilkelerine dayanır. Bu tür korunum yasalarını ifade eden hiperbolik kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümünde, yalnızca diferansiyel operatörlerin ayrıklaştırılması yeterli değildir. Fiziksel doğruluğu ve kararlılığı koruyabilmek için, özellikle keskin gradyanların ve şokların bulunduğu bölgelerde sayısal akı kavramı temel bir bileşen hâline gelir.

Adveksiyon denklemlerinin çözümünde klasik sonlu fark yöntemlerinin kullanımı, sadelik ve uygulanabilirlik açısından cazip görünse de, bazı temel sınırlamalara sahiptir. Özellikle doğrusal olmayan akışlar veya keskin geçişlerin bulunduğu problemlerde, bu yöntemler genellikle fiziksel olmayan sonuçlar üretir. Örneğin, merkezi fark yaklaşımı yüksek doğruluk sunsa da kararsızlığa açık olup, çözümde şiddetli salınımlara neden olabilir. Buna karşılık yukarıdan fark şemaları daha kararlı olsa da aşırı nümerik yayılma ile çözümün keskinliğini kaybettirir. Lax-Friedrichs ve Lax-Wendroff gibi ikinci mertebeden şemalar ise salınım ve yayılma arasında bir denge kurmaya çalışsa da, ani

gradyanlarda yine yapay dalgalanmalar gözlemlenebilir (Strikwerda, 2004). Klasik sonlu fark yöntemlerinin en temel zayıflıklarından biri, çözümün yerel özelliklerine karşı duyarsız olmalarıdır. Bu nedenle, çözümde bir şok, sınır katmanı ya da düzgün bir yapı olup olmadığını ayırt edemezler ve bu da çeşitli nümerik bozulmalara yol açar. Tam da bu noktada, akı sınırlayıcı fonksiyonlar devreye girer. Bu fonksiyonlar, yerel gradyan bilgisini dikkate alarak sayısal yöntemin çözüme adaptif şekilde tepki vermesini sağlar. Sonuç olarak, düzgün bölgelerde yüksek mertebeden doğruluk korunurken; şok, keskin geçiş gibi bölgelerde kararlılık sağlanır ve fiziksel olarak anlamsız salınımlar engellenir. Klasik sonlu fark yöntemlerinin yanı sıra, sonlu eleman yöntemleri (FEM) de birçok fiziksel problemde yaygın olarak kullanılmaktadır. Ancak FEM'in yapısal esnekliğine rağmen, ani gradyanlar veya şoklar gibi keskin geçişler içeren problemlerde özel tedbirler alınmadıkça benzer nümerik bozulmalarla karşılaşılabilir. Bu yapısal eksiklikler, akı sınırlayıcılı yüksek çözünürlüklü şemaların geliştirilmesini bir gereklilik hâline getirmiştir.

Sayısal analizde, hiperbolik korunum yasalarını çözerken ortaya çıkan temel problemlerden biri, çözümde fiziksel olmayan salınımların oluşmasıdır. Özellikle şoklar, keskin gradyanlar ve temsili sıçramalar içeren problemlerde bu durum belirginleşir. İşte bu nedenle, çözümün kararlılığını ve fiziksel doğruluğunu aynı anda sağlamak isteyen sayısal şemalar için Toplam Varyasyon Azalımı (TVD) ilkesi büyük önem taşır. TVD özelliği, ilk olarak 1983 yılında Harten tarafından sistematik biçimde tanımlanmış ve sayısal akış problemleri için temel bir güvenlik kriteri haline gelmiştir (Harten, 1983). TVD ilkesi, hiperbolik kısmi diferansiyel denklemin çözümünün zamanla yeni maksimum veya minimumlar üretmesini engelleyerek, fiziksel tutarlılığı güvence altına alır. Bu ilkenin en sık uygulandığı denklemlerden biri, lineer adveksiyon denklemidir:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Bu denklem, bir fiziksel niceliğin sabit hızla taşındığı durumları modelleyen en temel hiperbolik denklemdir. Bu tür sistemlerde, toplam varyasyonun zamanla artmaması beklenir. Sürekli sistemler için toplam varyasyon, aşağıdaki integral ile tanımlanır:

$$TV(u(\cdot, t)) = \int \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| dx.$$

Sayısal çözüm söz konusu olduğunda, sürekli uzay yerine sonlu farklarla tanımlanan düğüm noktaları kullanılır. Bu durumda, toplam varyasyon şu şekilde tanımlanır:

$$TV(u^n) = \sum_i |u_{i+1}^n - u_i^n|,$$

ve TVD koşulu şu eşitsizlikle ifade edilir:

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n).$$

Bu koşul, çözümün ilerleyen adımlarda daha fazla dalgalanma üretmemesini garanti eder. Bu çerçevede, Godunov Teoremi kritik bir sınır koyar: Eğer bir şema tek adımlı, sabit katsayılı ve monotonluk koruyucu ise, ikinci mertebeden doğruluğa ulaşamaz (Godunov, 1959). Yani, bir yöntem hem yüksek doğrulukta hem de TVD olamaz. Bu sınırlama, akı sınırlayıcıların geliştirilmesinin ardındaki temel gerektirir.

Bu çerçevede, akı sınırlayıcı fonksiyonlar, çözümün düzgün olduğu bölgelerde yüksek doğruluk sağlarken, keskin değişimlerin olduğu kısımlarda kararlılığı ön planda tutar. Böylece, fiziksel gerçekliğe uygun ve sayısal olarak güvenilir sonuçlar elde edilir. Bu denge, ilerleyen bölümlerde detaylı biçimde ele alınacaktır. Sonuç olarak, TVD şemalar ve Godunov Teoremi, hiperbolik denklemlerin sayısal çözümünde karşılaşılan temel zorlukları aşmak için geliştirilen önemli araçlardır. Akı sınırlayıcılar, bu iki yaklaşımın avantajlarını birleştirerek, hem

kararlı hem de doğru çözümler üretmeyi mümkün kılar. Bu metodolojik yaklaşım, şok dalgaları ve keskin gradyanlar içeren karmaşık akış problemlerinin simülasyonunda vazgeçilmez bir rol oynar.

3. STANDART AKI SINIRLAYICI FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

Sayısal çözümlerde doğruluk ve kararlılık arasında denge kurmak, özellikle hiperbolik korunum yasalarının çözümünde önemli bir zorluktur. Şok dalgaları, keskin gradyanlar ve ani geçişlerin bulunduğu fiziksel sistemlerde, klasik yüksek mertebeden yöntemler sıklıkla fiziksel olmayan salınımlar üretir. Bu bağlamda geliştirilen akı sınırlayıcı fonksiyonlar, sayısal çözümün yerel yapısına duyarlı davranarak, hem doğruluğu hem de kararlılığı koruma amacı güder.

Akı sınırlayıcı şemaların geliştirilmesinin temelinde, sayısal çözümlerde ortaya çıkabilecek fiziksel olarak gerçek dışı ya da anlamını yitirmiş değerleri engelleme isteği yatmaktadır. Özellikle mühendislik ve bilimsel hesaplamalarda, bu tür fiziksel olmayan sonuçlar modelin güvenilirliğini sorgulatabilir. Bu nedenle, akı sınırlayıcılar, çözümün uzayda değişimini kontrol altında tutarak daha gerçekçi ve tutarlı sonuçlar elde edilmesini sağlar. Kısmi diferansiyel denklemlere dayalı problemler çözülürken, çözümde keskin geçişler veya ani değişimlerin olduğu durumlarda bu sınırlayıcılar devreye girer. Ancak çözümdeki değişim daha yumuşak ve düzenliyse, sınırlayıcılar etkisiz hale gelir ve çözüm, daha yüksek mertebeden sayısal yöntemlerle sorunsuz biçimde temsil edilir. Bu sayede, çözümde yapay salınımlar oluşmadan, hem kararlılık hem de hassasiyet bir arada korunmuş olur. Kısacası, akı sınırlayıcılar, sayısal çözümde denge sağlayarak, gerektiği yerde müdahale eden, gerektiğinde ise geri planda kalan bir kontrol mekanizması gibi çalışır.

Özellikle yüksek çözünürlüklü şemaların kullanıldığı durumlarda bu yapıların önemi daha da belirgin hale gelir.

Akı sınırlayıcı şemaların geliştirilmesinin temelinde, sayısal çözümlerde ortaya çıkabilecek fiziksel olarak gerçek dışı ya da anlamını yitirmiş değerleri engelleme isteği yatmaktadır. Özellikle mühendislik ve bilimsel hesaplamalarda, bu tür fiziksel olmayan sonuçlar modelin güvenilirliğini sorgulatabilir. Bu nedenle, akı sınırlayıcılar, çözümün uzayda değişimini kontrol altında tutarak daha gerçekçi ve tutarlı sonuçlar elde edilmesini sağlar. Kısmi diferansiyel denklemlere dayalı problemler çözülürken, çözümde keskin geçişler veya ani değişimlerin olduğu durumlarda bu sınırlayıcılar devreye girer. Ancak çözümdeki değişim daha yumuşak ve düzenliyse, sınırlayıcılar etkisiz hale gelir ve çözüm, daha yüksek mertebeden sayısal yöntemlerle sorunsuz biçimde temsil edilir. Bu sayede, çözümde yapay salınımlar oluşmadan, hem kararlılık hem de hassasiyet bir arada korunmuş olur. Kısacası, akı sınırlayıcılar, sayısal çözümde denge sağlayarak, gerektiği yerde müdahale eden, gerektiğinde ise geri planda kalan bir kontrol mekanizması gibi çalışır. Özellikle yüksek çözünürlüklü şemaların kullanıldığı durumlarda bu yapıların önemi daha da belirgin hale gelir.

Bu yaklaşımı daha iyi anlamak için bir boyutlu yarı-ayrık bir şema aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\frac{du_j}{dt} + \frac{1}{\Delta x_j} \left[\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}} - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}} \right] = 0,$$

burada $\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}$ ve $\mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}$ sırasıyla j -ninci hücrenin sağ ve sol kenarındaki akı değerleridir. Bu akılar iki farklı şekilde ifade edilebilir: düşük çözünürlüklü akı ($\mathcal{F}^D$) ve yüksek çözünürlüklü akı ($\mathcal{F}^Y$). Akı sınırlayıcı fonksiyon, bu iki yaklaşım arasında geçiş yaparak çözümün yerel davranışına uygun bir şema oluşturur. Bu geçiş aşağıdaki biçimde modellenabilir:

$$\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^D - \Psi(r_j) \left(\mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^D - \mathcal{F}_{j+\frac{1}{2}}^Y \right),$$

$$\mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}} = \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}^D - \Psi(r_{j-1}) \left(\mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}^D - \mathcal{F}_{j-\frac{1}{2}}^Y \right).$$

Burada kullanılan terimler şunlardır:

- $\mathcal{F}^D$ düşük çözünürlüklü akı,
- $\mathcal{F}^Y$ yüksek çözünürlüklü (yüksek mertebeden) akı,
- $\Psi(r)$ akı sınırlayıcı fonksiyon,
- r ardışık hücreler arasındaki gradyan oranı.

Gradyan oranı r_j , çözümün yerel değişim oranını ifade eder ve şu şekilde tanımlanır:

$$r_j = \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_j}.$$

Bu oran, sınırlayıcı fonksiyonun etkisini belirlerken kullanılır. Fonksiyonun biçimi, kullanılan sınırlayıcı tipine bağlı olarak değişir ve aşağıdaki özelliklere sahip olacak şekilde tasarlanır:

- Monotonluğun korunması (yeni aşırı değerler üretmemesi),
- Keskin geçişlerin doğru biçimde temsil edilmesi,
- Düzgün bölgelerde yüksek doğruluk sağlaması.

Akı sınırlayıcı fonksiyonu $\Psi(r)$, matematiksel olarak sıfırdan küçük olmayacak biçimde tanımlanır, yani $\Psi(r) \geq 0$. Bu fonksiyonun değeri, yerel gradyanların yapısına göre değişerek kullanılan akı şemasının türünü belirler. Örneğin, çözümde keskin geçişlerin (ani gradyanlar, ters eğimli ya da sıfıra yakın eğimli bölgeler) bulunduğu durumlarda $\Psi(r)$ sıfıra yakın olur. Bu durumda, akı hesabı daha kararlı ancak düşük doğruluklu olan düşük çözünürlüklü şema ($\mathcal{F}^D$) ile temsil edilir. Diğer yandan,

çözüm düzgün bir biçimde değişiyorsa (gradyanlar benzer ve ani sıçramalar yoksa), $\Psi(r)$ değeri 1'e yakın olur. Bu koşulda daha hassas sonuçlar veren yüksek çözünürlüklü şema ($\mathcal{F}^Y$) ön plana çıkar. Sınırlayıcı fonksiyonlar, bu geçişi kontrol etmek amacıyla tasarlanmış olup farklı problemler için farklı özellikler gösterirler. Her sınırlayıcı aynı başarıyı göstermez; dolayısıyla belirli bir problem için en uygun olan fonksiyon seçimine dikkat edilmelidir. Bu nedenle, sınırlayıcı seçimi kullanıcı deneyimi ve çözüm yapısına dair genellikle gözlemlere dayalı olarak yapılır.

Akı sınırlayıcı fonksiyonlar, literatürde farklı problemlere uygun çözümler sunmak amacıyla çeşitli biçimlerde tanımlanmıştır. Bu bölümde, en yaygın kullanılan 10 akı sınırlayıcı fonksiyon, matematiksel ifadeleri, güçlü ve zayıf yönleri ile birlikte detaylı olarak ele alınacaktır.

Minmod Sınırlayıcı: Roe tarafından 1986 yılında önerilen Minmod sınırlayıcı, en temel ve güvenilir akı sınırlayıcılardan biridir (Roe, 1986). Özellikle şok dalgalarının hesaplanmasında kararlılığı sağlamak amacıyla geliştirilmiştir. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\Psi_{mm}(r) = \max(0, \min(1, r)).$$

Minmod sınırlayıcı, monotonluğu koruma konusunda mükemmel performans gösterir ve istenmeyen salınımları etkili bir şekilde bastırır. Ancak bu güçlü stabilite özelliği, düzgün çözüm bölgelerinde aşırı yayılmaya neden olarak çözüm doğruluğunu azaltma eğilimindedir. Özellikle yüksek çözünürlük gerektiren problemlerde bu durum belirgin bir dezavantaj oluşturur.

Superbee Sınırlayıcı: Yine Roe tarafından geliştirilen Superbee sınırlayıcı, Minmod'un aşırı yayılma eğilimini azaltmak ve keskin geçişleri daha iyi yakalayabilmek amacıyla tasarlanmıştır (Roe, 1986). Matematiksel formu:

$$\Psi_{sb}(r) = \max(0, \min(2r, 1), \min(r, 2)).$$

Superbee sınırlayıcı, keskin çözünürlük sağlama konusunda öne çıkar ve özellikle şok dalgalarının doğru temsilinde oldukça etkilidir. Bununla birlikte, bu yüksek çözünürlük avantajı, bazı durumlarda monotonluğun korunmasında zayıf kalmasına neden olabilir. Aşırı keskinleştirme eğilimi, fiziksel olmayan çözümler üretme riskini beraberinde getirir.

Van Leer Sınırlayıcı: 1974 yılında Van Leer tarafından önerilen bu sınırlayıcı, Minmod ve Superbee'nin avantajlarını birleştirmeyi amaçlayan dengeli bir yaklaşım sunar (van Leer, 1974). Matematiksel formülü:

$$\Psi_{vl}(r) = \frac{r + |r|}{1 + |r|}.$$

Van Leer sınırlayıcı, hem düzgün hem de keskin geçiş bölgelerinde iyi sonuçlar veren dengeli bir performans sergiler. Bu denge özelliği onu geniş bir problem yelpazesinde kullanışlı kılar. Ancak, bazı özel durumlarda küçük salınımlar üretebilme eğilimi, bu sınırlayıcının önemli bir sınırlamasıdır.

MC Sınırlayıcı: Van Leer tarafından önerilen bir başka sınırlayıcı olan MC sınırlayıcısı, akışın yönüne bağlı olarak merkezi farkları kullanan ve monotonluğu koruyan bir yöntemdir (van Leer, 1974). MUSCL (Korunum Yasaları için Monoton Yukarı Merkezli Şema) yaklaşımının önemli bir bileşeni olarak, özellikle şok dalgaları ve keskin gradyanlar içeren problemlerde yüksek çözünürlük sağlamak üzere tasarlanmıştır. Matematiksel olarak şu şekilde ifade edilir:

$$\Psi_{MC}(r) = \max\left(0, \min\left(2r, \frac{1+r}{2}, 2\right)\right).$$

MC sınırlayıcı, Minmod ve Superbee sınırlayıcılar arasında optimal bir denge sunar. Düzgün bölgelerde ikinci

dereceden doğruluk sağlarken, keskin geçişlerde birinci dereceye düşerek kararlılığı korur. Minmod'a kıyasla daha az yapay yayılma (difüzyon) etkisi gösterir. Superbee'ye göre daha kontrollü ve kararlı davranış sergiler. Bu sınırlayıcının avantajları arasında geniş bir problem yelpazesinde güvenilir sonuçlar vermesi, özellikle sıkıştırılabilir akış problemlerinde iyi performans göstermesi ve hesaplama verimliliğinin yüksek olması sayılabilir. Buna karşılık, bazı aşırı karmaşık akış koşullarında küçük salınımlar üretebilmesi, saf birinci derece şemalara kıyasla hesaplama maliyetinin hafifçe yüksek olması ve özellikle çok yüksek gradyanlı bölgelerde aşırı keskinleştirme eğilimi göstermesi dezavantajları arasında yer alır.

Koren Sınırlayıcı: 1993 yılında Koren tarafından önerilen bu sınırlayıcı, özellikle adveksiyon problemlerinde yüksek doğruluk sağlamak amacıyla geliştirilmiştir (Koren, 1993). Düzgün çözüm bölgelerinde etkili olmasıyla bilinir. Matematiksel formülü:

$$\Psi_{kr}(r) = \max\left(0, \min\left(2r, \frac{1+2r}{3}, 2\right)\right).$$

Koren sınırlayıcı, adveksiyon-dominant problemlerde oldukça başarılıdır ve düzgün çözüm bölgelerinde yüksek doğruluk sağlar. Ancak, keskin geçişlerin olduğu durumlarda Superbee kadar etkili değildir ve bazı durumlarda çözümde yapay yumuşamalara neden olabilir.

Sweby Sınırlayıcı: 1984 yılında Sweby tarafından geliştirilen bu sınırlayıcı, sabit olarak tanımlanan bir β parametresi ile ayarlanabilen esnek bir yapı sunar (Sweby, 1984). Genellikle $\beta = 1.5$ alınarak kullanılır ve farklı problemlere uyarlanabilme özelliği ile öne çıkar. Matematiksel formülü:

$$\Psi_{sw}(r) = \max(0, \min(\beta r, 1), \min(r, \beta)).$$

Sweby sınırlayıcı, β parametresi sayesinde farklı problemlere uyum sağlayabilen esnek bir yapı sunar. Bu özelliği, kullanıcıların problemlerine özgü ayarlamalar yapabilmesine olanak tanır. Ancak, parametre seçimi kritik öneme sahiptir ve yanlış seçimler çözümün kalitesini önemli ölçüde düşürebilir.

UMIST Sınırlayıcı: 1984 yılında Lien ve Leschziner tarafından önerilen UMIST sınırlayıcı, kompleks akış problemlerinde yüksek performans sağlamak amacıyla geliştirilmiştir (Lien ve Leschziner, 1984). Özellikle türbülanslı akışların modellenmesinde kullanılır. Matematiksel formülü:

$$\psi_{um}(r) = \max \left(0, \min \left(2r, \frac{1+r}{2}, \frac{3+r}{4}, 2 \right) \right).$$

UMIST sınırlayıcı, karmaşık akış problemlerinde iyi sonuçlar verir ve yüksek çözünürlük sağlar. Bununla birlikte, hesaplama karmaşıklığı diğer sınırlayıcılara göre daha yüksektir ve bu da bazı uygulamalarda kullanımını sınırlayabilir.

HCUS Sınırlayıcı: HCUS sınırlayıcı, merkezi ve yukarı yönlü şemaların avantajlarını birleştirmeyi amaçlar (Waterson ve Deconinck, 1995). Bu özelliği ile geniş bir problem yelpazesinde kullanılabilir. Matematiksel formülü:

$$\psi_{hc}(r) = \frac{3r + r^2}{2 + 2r}.$$

HCUS sınırlayıcı, merkezi ve yukarı yönlü şemaların avantajlarını birleştirerek dengeli bir performans sunar. Ancak, uygulama alanı diğer sınırlayıcılara göre daha sınırlıdır ve bazı özel durumlarda yetersiz kalabilir.

Ospre Sınırlayıcı: Ospre sınırlayıcı, yüksek mertebeden doğruluk sağlamak amacıyla geliştirilmiştir (Waterson ve Deconinck, 1995). Bu yüzden, özellikle yüksek çözünürlük gerektiren problemlerde kullanılır. Matematiksel formülü:

$$\psi_{op}(r) = \frac{1.5(r^2 + r)}{r^2 + r + 1}.$$

Ospre sınırlayıcı, yüksek mertebeden doğruluk sağlama konusunda oldukça başarılıdır. Bununla birlikte, bu yüksek doğruluk, hesaplama maliyetinin artmasına neden olur ve bu da bazı uygulamalarda kullanımını sınırlandırabilir.

Osher Sınırlayıcı: Chakravarthy ve Osher tarafından önerilen bu sınırlayıcı, geniş bir parametre aralığında çalışabilme özelliği ile öne çıkar (Chakravarthy ve Osher, 1983). Bu parametre, β genellikle 1 ile 2 arasında seçilir. Matematiksel ifadesi:

$$\psi_{os}(r) = \max(0, \min(r, \beta))(\beta \in [1, 2]).$$

Osher sınırlayıcı, geniş bir parametre aralığında çalışabilme esnekliği sunar. Bu özellik, kullanıcıların problemlerine özgü ayarlamalar yapabilmesine olanak tanır. Ancak, performansı büyük ölçüde β parametresinin seçimine bağlıdır ve yanlış seçimler çözüm kalitesini düşürebilir.

Yukarıda bahsedilen sınırlayıcılar, akı problemlerinde yaygın olarak tercih edilen ve iyi performans gösteren yöntemlerdir. Bununla birlikte, literatürde çok sayıda farklı akı sınırlayıcı tanımlanmıştır. Ancak, bu çalışmanın kapsamı dahilinde tüm bu sınırlayıcıları ayrıntılı olarak incelemek mümkün değildir. Bu nedenle, burada sadece temel ve yaygın olarak kullanılan ve yukarıda tanımlanan sınırlayıcılar ele alınmıştır.

4. FONKSİYONLARIN TVD KOŞULUNA GÖRE DAVRANIŞLARI

Sayısal çözümlerde doğruluğu artırırken aynı zamanda kararlılığı korumak her zaman kolay değildir. Yüksek mertebeden yöntemler çoğu zaman keskin geçişlerde istenmeyen salınımlara

yol açarken, düşük mertebeden yöntemler bu geçişleri fazla yumuşatarak fiziksel anlamı bozabilir. Bu noktada, akı sınırlayıcı fonksiyonları, çözümün davranışına göre devreye girerek iki yaklaşım arasında dinamik bir denge kurar. Ancak bu sınırlayıcıların da bazı kurallara uyması gerekir. Özellikle ikinci mertebeden doğrulukla kararlılığı birlikte sağlayan yöntemlerin, TVD olarak adlandırılan özel bir bölge içinde kalması zorunludur. TVD, basitçe ifade etmek gerekirse, çözümün toplam varyasyonunun zamanla artmamasını garanti eder. Bu, özellikle şok dalgaları ya da ani değişimlerin olduğu durumlarda yeni aşırı değerlerin oluşmasını önler.

İkinci mertebeden doğrulukta çalışıp aynı zamanda TVD koşulunu sağlayan sınırlayıcıların belirli matematiksel sınırlara uyması gerekir. Bu sınırlayıcılar, gradyan oranı r ile sınırlayıcı fonksiyon Ψ arasındaki ilişkiye göre tanımlanır. TVD özelliğini sürdürebilmek için aşağıdaki eşitsizliklerin sağlanması gerekir:

- Küçük gradyan oranlarında ($0 \leq r \leq 1/2$):

$$r \leq \Psi(r) \leq 2r.$$

- Orta gradyan oranlarında ($1/2 \leq r \leq 1$):

$$r \leq \Psi(r) \leq 1.$$

- Geçiş noktasında düzgünlük için:

$$\Psi(1) = 1.$$

- Daha büyük gradyanlarda ($1 \leq r \leq 2$):

$$1 \leq \Psi(r) \leq r.$$

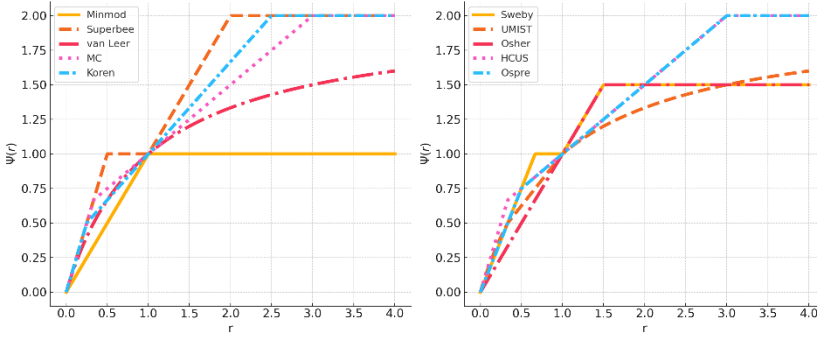
- Çok büyük gradyan oranlarında ($1 \leq r \leq 2$):

$$1 \leq \Psi(r) \leq 2.$$

Bu koşullar, sınırlayıcı fonksiyonun çözüm boyunca yeni aşırı değerler üretmeden çalışmasını garanti eder. Başka bir

ifadeyle, $\Psi(r)$ fonksiyonu çözümün hangi bölgede olduğuna göre davranışını ayarlar: çözüm düzgün ise yüksek doğruluk sağlanır, ancak geçiş bölgesine girildiğinde kararlılık ön plana çıkar. Her durumda TVD koşulunun sağlanması, fiziksel ve sayısal anlamda tutarlı sonuçlar elde etmek için gereklidir.

TVD koşulunu sağlayan sınırlayıcı fonksiyonların özelliklerini anlamak adına, bu fonksiyonların $\Psi(r) - r$ düzleminde nasıl davrandıklarını görselleştirmek oldukça yararlıdır. Her sınırlayıcı fonksiyon, belirli bir çözüm tipi veya problem sınıfı için farklı avantajlar sunar; dolayısıyla TVD bölgesi içindeki yerleri bu açıdan önemli bir karşılaştırma imkânı sunar. Aşağıda verilen Şekil 1’de, yaygın olarak kullanılan sınırlayıcı fonksiyonların TVD sınırları içindeki konumlarını gösteren şemalar iki sütun halinde sunulmuştur. Bu fonksiyonlar, hem düzgün bölgelerde yüksek doğruluk hem de keskin geçişlerde kararlılık sağlamaya yönelik farklı stratejiler izler. Örneğin, Minmod sınırlayıcı en muhafazakâr olanıdır ve salınımları güçlü biçimde bastırırken çözümün yayılmasına neden olabilir; buna karşılık Superbee, çok daha agresif bir şekilde keskinlik sağlar ancak bazı durumlarda aşırı salınım üretebilir. Figürde verilen bazı sınırlayıcılar, parametre içeren yapıları ya da daha rafine yaklaşımları sayesinde geniş bir problem yelpazesine hitap eder. Örneğin, Osher sınırlayıcısı geniş parametre aralığı sayesinde kullanıcıya esneklik sunarken, HCUS sınırlayıcısı yukarı yönlü ve merkezi yaklaşımların avantajlarını birleştirmeyi amaçlar. Bu görsel karşılaştırma, sınırlayıcı fonksiyonların TVD koşuluna uygunlukları kadar, çözümün yapısına ve beklenen davranışa göre hangi fonksiyonun daha uygun olabileceği konusunda da kullanıcıya önemli bir fikir verir.



Şekil 1. Örnek Şekil TVD bölgesindeki sınırlayıcı fonksiyonların karşılaştırmalı grafiği. Solda Minmod, Superbee, van Leer, MC, Koren; sağda Sweby, UMIST, Osher, HCUS ve Ospre sınırlayıcıları gösterilmektedir.

Sayısal çözüm süreçlerinde kullanılan akı sınırlayıcı fonksiyonlar, yalnızca teorik özelliklerine göre değil, aynı zamanda uygulandıkları fiziksel problem bağlamında değerlendirilmelidir. Her sınırlayıcının çözüm üzerindeki etkisi; gradyan yapısı, şok varlığı, çözüm düzgünlüğü ve fiziksel anlamın korunması gibi faktörlerle doğrudan ilişkilidir. Bu nedenle, sınırlayıcı seçimi, çözümün davranışına uygun biçimde yapılmalıdır. Örneğin; sıkıştırılabilir akışlarda ve şok dalgalarının baskın olduğu senaryolarda, Superbee ve MC gibi daha keskin sınırlayıcılar tercih edilebilir çünkü bu fonksiyonlar şokun konumunu korumada ve çözümde ani geçişleri daha doğru yakalamada oldukça başarılıdır. Buna karşılık, daha yumuşak gradyanlara sahip ısı iletimi ya da yayılma problemleri gibi uygulamalarda, Minmod gibi daha muhafazakâr sınırlayıcılar tercih edilerek yapay salınımların tamamen önüne geçilebilir.

Öte yandan, van Leer ve Koren sınırlayıcıları ise, çözümde hem düzgünlük hem de ani geçişlerin birlikte bulunduğu karmaşık sistemlerde dengeli davranış sergileyerek çok yönlü bir performans sağlar. UMIST ve HCUS gibi fonksiyonlar, özellikle türbülanslı akışlarda veya yüksek çözünürlük gerektiren

mühendislik uygulamalarında öne çıkar. Sonuç olarak, sınırlayıcı fonksiyonun başarısı sadece TVD koşulunu sağlamasıyla değil, aynı zamanda ilgili fiziksel problemin ihtiyaçlarına nasıl yanıt verdiğiyle ölçülmelidir. Doğru fonksiyon seçimi, çözümün fiziksel gerçekliğe uygunluğunu artırırken aynı zamanda kararlılık, hassasiyet ve hesaplama verimliliği açısından da önemli avantajlar sağlar. Bu sebeple, sınırlayıcı seçimi sabit bir kural değil, uygulama bağlamına duyarlı stratejik bir karardır.

5. SAYISAL DENEYLER VE KARŞILAŞTIRMALI DEĞERLENDİRME

Akı sınırlayıcı fonksiyonların sayısal çözüm üzerindeki etkilerini değerlendirebilmek için, davranışı iyi bilinen ve analitik çözümü mevcut olan test problemlerinin kullanılması büyük önem taşır. Bu doğrultuda, taşınım odaklı süreçlerin modellenmesinde temel bir örnek olan doğrusal adveksiyon denklemi tercih edilmiştir. Seçilen test senaryosu, hem düzgün hem de keskin geçiş bölgelerini içerecek şekilde tasarlanarak sınırlayıcıların farklı çözüm karakteristiklerindeki performanslarının kapsamlı biçimde incelenmesine olanak tanımaktadır.

Karşılaştırmalı sayısal deneylerde test problemi olarak, sabit hızla taşınımı modelleyen bir boyutlu doğrusal adveksiyon denklemi seçilmiştir. Bu denklem aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

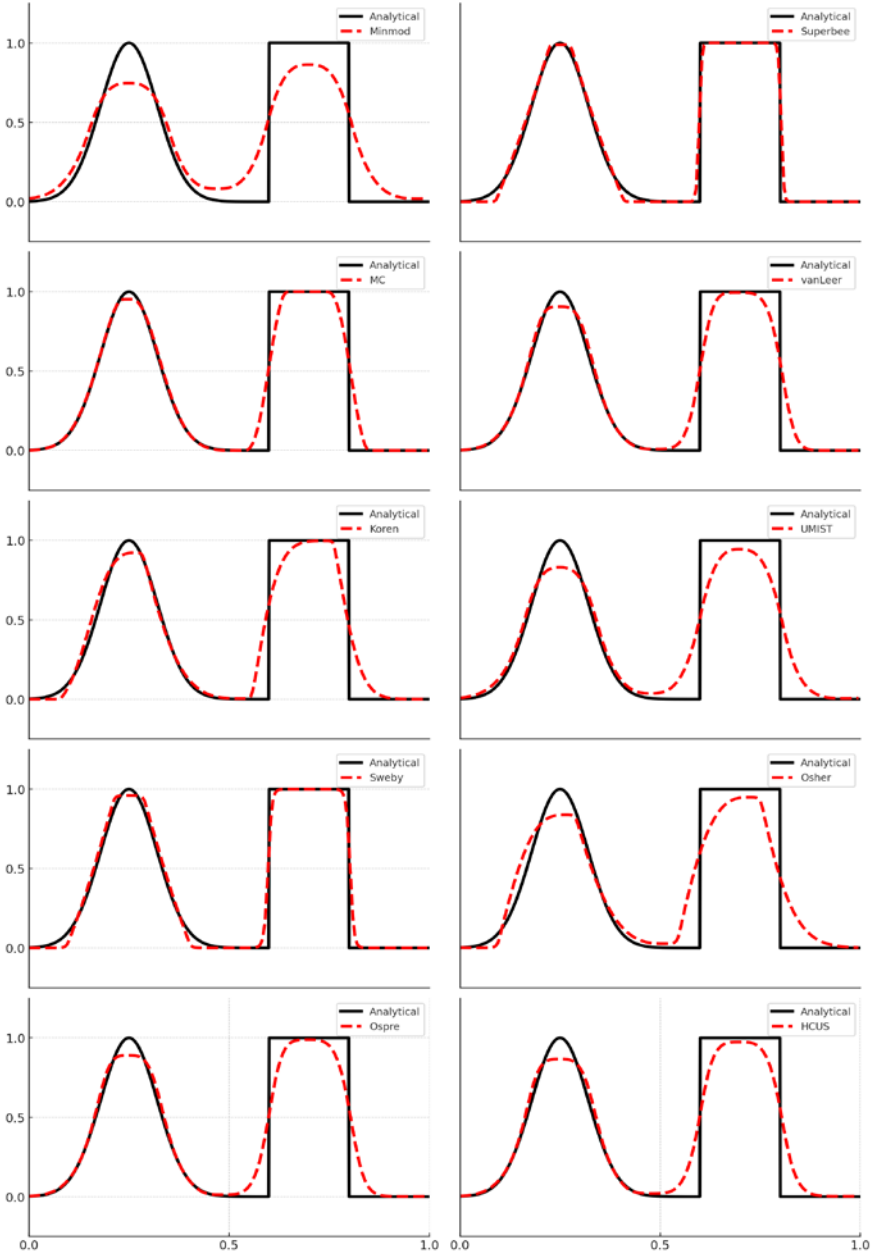
burada $u(x, t)$ zamanla taşınan fiziksel niceliği ifade ederken, a sabit adveksiyon hızıdır. Bu çalışma kapsamında, analizleri sadeleştirmek ve odak noktası olarak akı sınırlayıcı fonksiyonların etkisini değerlendirmek amacıyla $a = 1$ olarak

sabitlenmiştir. Başlangıç koşulu olarak, hem düzgün hem de keskin geçiş bölgelerini içeren bir fonksiyon tercih edilmiştir:

$$u(x, 0) = \exp(-100(x - 0.25)^2) + \theta_{[0.6, 0.8]}(x),$$

burada ilk terim Gauss tipi bir tepeyi, ikinci terim ise 0.6 ile 0.8 arasında bir birim yükseklikli adım fonksiyonunu temsil etmektedir. Bu birleşik yapı sayesinde sınırlayıcıların hem düzgün hem de keskin geçişli çözümler üzerindeki performansı aynı anda test edilmiştir. Uzaysal ayrıklaştırma için $x \in [0, 1)$ aralığı $N = 200$ eşit alt bölgeye ayrılmıştır. Zaman adımı ise CFL (Courant–Friedrichs–Lewy) kararlılık koşuluna uygun olacak şekilde seçilmiştir. Bu kapsamda, uzaydaki adım aralığı $\Delta x = 1/N$ olarak belirlenmiş ve kararlılık koşulu parametresi $\gamma = 0.45$ olmak üzere zamandaki adım büyüklüğü ise $\Delta t = \gamma \Delta x$ olarak seçilmiştir. Bu değer, tüm sınırlayıcı fonksiyonların kararlılık sınırları içinde değerlendirilmesine olanak tanımaktadır. Zamansal entegrasyon, toplam süre $T = 20$ olacak şekilde gerçekleştirilmiş ve periyodik sınır koşulları uygulanmıştır.

Bu ayarlar altında, farklı akı sınırlayıcı fonksiyonlarının doğrusal adveksiyon denklemi üzerindeki etkisi sayısal olarak incelenmiştir. Şekil 2’de, Minmod, Superbee, van Leer, MC, Koren, Sweby, UMIST, Osher, Ospre ve HCUS sınırlayıcıları ile elde edilen çözümler, analitik çözümle karşılaştırmalı olarak gösterilmektedir. Her bir alt grafik, ilgili sınırlayıcının zamana bağlı taşınım sürecindeki performansını hem düzgün bölgelerde hem de keskin geçişlerde görsel olarak ortaya koymaktadır. Siyah çizgiler analitik çözümü, kırmızı kesikli çizgiler ise ilgili sınırlayıcı ile elde edilen sayısal çözümleri temsil etmektedir.



Şekil 2. Farklı akı sınırlayıcılarla elde edilen sayısal çözümlerin, analitik çözümle karşılaştırılması. Sayısal çözümler kırmızı kesikli, analitik çözüm siyah düz çizgiyle gösterilmiştir.

Karşılaştırmalı grafiklerden de görülebileceği üzere, her akı sınırlayıcı farklı derecelerde yayılma, keskinlik ve salınım karakteristiği sergilemektedir.

Minmod sınırlayıcı, çözümde herhangi bir salınım oluşturmaksızın kararlı bir sonuç sunsa da, özellikle adım fonksiyonunun kenarlarında belirgin yayılmaya neden olmuştur. Superbee sınırlayıcı ise keskin geçişlerde oldukça başarılıdır ancak yer yer fiziksel olmayan salınımlar gözlemlenmiştir. MC, van Leer ve Koren sınırlayıcıları, düzgün bölgelerde oldukça iyi doğruluk sağlarken, geçiş bölgelerinde hafif yayılma veya zayıf salınım eğilimindedir. Özellikle MC sınırlayıcı, yayılma ve salınım arasında iyi bir denge kurarak dengeli bir sonuç sunmuştur. UMIST sınırlayıcı, çözümün genel formunu başarılı biçimde korurken, adım fonksiyonunun sağ kenarında hafif bir faz kayması görülmektedir. Sweby sınırlayıcı, özellikle $\beta = 1.5$ parametresi ile keskin geçişleri koruma konusunda dengeli bir performans sunmuştur. Osher sınırlayıcı, benzer şekilde esnek bir yapı sunmakla birlikte, seçilen parametreye bağlı olarak çözümde hafif salınımlar üretmiştir. Ospre sınırlayıcı yüksek doğruluk sağlamasına karşın, adım kenarlarında kısmen faz farkına neden olmuştur. HCUS sınırlayıcı ise genel olarak düzgün çözüm bölgelerinde başarılı sonuçlar üretmiş, ancak geçiş bölgelerinde çözümde yayılma eğilimi sergilemiştir. Bu sonuçlar, her sınırlayıcının belirli çözüm bölgelerinde farklı avantajlar sunduğunu göstermektedir. Düzgün bölgelerde yüksek doğruluk isteniyorsa Koren ve van Leer tercih edilebilirken, keskin geçişlerde Superbee ve Sweby gibi sınırlayıcılar daha keskin çözümler sunmaktadır. Ancak salınım üretmeyen güvenli çözümler için Minmod veya MC gibi daha muhafazakâr seçenekler ön plana çıkmaktadır.

Şekil 2’de görsel olarak karşılaştırılan sınırlayıcılar için hesaplanan L_2 norm hataları Tablo 1’de verilmiştir. Bu sonuçlar doğrultusunda en düşük hata Minmod sınırlayıcıya ait olup, bunu

sırasıyla Superbee ve MC sınırlayıcıları takip etmektedir. HCUS ve Ospre sınırlayıcıları ise görece daha yüksek hata değerleriyle dikkat çekmektedir. Bu durum, bazı sınırlayıcıların çözümde yüksek doğruluk sağlarken kararlılıktan ödün verebildiğini, bazılarının ise güvenli ancak yayılmaya yatkın çözümler ürettiğini ortaya koymaktadır. Elde edilen hata metrikleri, görsel analizle tutarlı biçimde, sınırlayıcıların çözüm üzerindeki etkilerini sayısal olarak da doğrulamaktadır.

Tablo 1. Farklı akı sınırlayıcıları için hesaplanan L_2 norm hataları

Akı Sınırlayıcı	L_2 Norm Hatası
Minmod	0.0098807015230954
Superbee	0.0193651147721524
MC	0.0286647344355311
vanLeer	0.0406395879713591
Koren	0.0499131075088223
UMIST	0.0590260252116766
Osher	0.0706731890014054
Sweby	0.0781791647499266
Ospre	0.0870614565223269
HCUS	0.1011268444149193

6. GENEL DEĞERLENDİRME VE SONUÇ

Akı sınırlayıcı fonksiyonlar, hiperbolik korunum yasalarının sayısal çözümünde hem kararlılığı hem de doğruluğu aynı anda sağlamak amacıyla geliştirilmiş önemli araçlardır. Özellikle şoklar, sınır katmanları ve ani geçiş bölgeleri gibi zorlu çözüm yapılarına sahip fiziksel problemler için, klasik sayısal yöntemlerin yetersiz kaldığı durumlarda akı sınırlayıcılar devreye girerek çözümün güvenilirliğini artırmaktadır. Bu yöntemler,

mühendislik uygulamalarından akışkanlar mekaniğine kadar geniş bir yelpazede etkin biçimde kullanılmaktadır.

Gerçek dünya problemlerinde, örneğin sıkıştırılabilir gaz dinamiği, atmosferik modelleme veya trafik akışı gibi uygulamalarda, çözüm alanı hem düzgün hem de keskin geçişli bölgelerden oluşmaktadır. Bu nedenle, çözümün farklı bölgelerinde farklı sınırlayıcıların öne çıkması doğaldır. Yapılan karşılaştırmalı deneyler göstermektedir ki, Superbee ve Sweby gibi sınırlayıcılar geçiş bölgelerinde yüksek çözünürlük sunarken, Minmod ve MC gibi daha muhafazakâr seçenekler salınım üretmeyen kararlı çözümler sunmaktadır. Bu bağlamda, uygulamaya özel adaptif sınırlayıcı yapılarının geliştirilmesi, gelecek çalışmalar için önemli bir yönelim olacaktır.

Akı sınırlayıcı yöntemlerin uygulanmasında karşılaşılan başlıca zorluklardan biri, sınırlayıcı seçiminin çözüm davranışına doğrudan etki etmesidir. Her sınırlayıcı belirli bir avantaj sunmakla birlikte, tüm çözüm alanlarında tutarlı bir performans sergilemeyebilir. Bazı sınırlayıcılar aşırı yayılmaya neden olurken, bazıları da fiziksel olmayan salınımlar üretebilmektedir. Bu nedenle, yöntemsel dikkat; CFL sayısının uygun seçimi, ağ çözünürlüğünün yeterliliği ve başlangıç-bitiş koşullarının dikkatli tanımlanması gibi faktörleri de kapsayacak şekilde genişletilmelidir.

Bu çalışmanın bulguları, akı sınırlayıcıların sadece teorik analizlerde değil, çok boyutlu ve daha karmaşık sistemlerde de etkili biçimde kullanılabileceğini göstermektedir. Özellikle uzay-zaman adaptif şemalarla birleştirilen sınırlayıcı yapılar, hem hesaplama verimliliğini hem de çözüm kalitesini artırma potansiyeline sahiptir. Ayrıca, veri güdümlü yöntemlerle sınırlayıcı seçiminin otomatikleştirilmesi ve makine öğrenmesi ile hibrit modellerin geliştirilmesi, bu alandaki araştırmaların yeni boyutları olabilir.

Bu çalışma kapsamında, farklı akı sınırlayıcı fonksiyonlar doğrusal adveksiyon problemi üzerinde karşılaştırmalı olarak incelenmiş; hem görsel hem de sayısal metriklerle performansları değerlendirilmiştir. Elde edilen sonuçlar, her sınırlayıcının belirli çözüm bölgelerinde avantaj sunduğunu, ancak genel geçer bir "en iyi" sınırlayıcıdan söz etmenin mümkün olmadığını göstermektedir. Bu nedenle, akı sınırlayıcı seçimi, çözümün yapısına ve fiziksel problemin gereksinimlerine uygun olarak yapılmalıdır. Doğru seçilen sınırlayıcılar, sayısal çözümün doğruluğunu artırırken, kararlılığı da güvence altına alarak fiziksel anlamlılığı korur.

KAYNAKÇA

- Bezekci, B (2025). Deep Learning-Enhanced Regularization of Irregular Traveling Pulses in the FitzHugh-Nagumo Model. SN Computer Science, 6, 206.
- Bezekçi, B. (2025). The Refined Physics-Informed Neural Networks for Nonlinear Convection-Reaction-Diffusion Equations Using Exponential Schemes. Black Sea Journal of Engineering and Science, 8(4), 7-8.
- Chakravarthy, S. R., ve Osher, S. (1983). High resolution applications of the Osher upwind scheme for the Euler equations. Proceedings of the AIAA 6th Computational Fluid Dynamics Conference, 363–373.
- Godunov, S. K. (1959). A difference scheme for numerical solution of discontinuous solution of hydrodynamic equations. Matematicheskii Sbornik, 47, 271–306. (Translated by U.S. Joint Publications Research Service, JPRS 7226, 1969).
- Griffiths, D. F., ve Higham, D. J. (2010). Numerical methods for ordinary differential equations: Initial value problems. London: Springer.
- Harten, A. (1983). High resolution schemes for hyperbolic conservation laws. Journal of Computational Physics, 49(3), 357–393.
- Koren, B. (1993). A robust upwind discretization method for advection, diffusion and source terms. Centrum voor Wiskunde en Informatica, 45, 117–138.
- Sweby, P. K. (1984). High resolution schemes using flux-limiters for hyperbolic conservation laws. SIAM Journal on Numerical Analysis, 21(5), 995–1011.

- Lien, F. S., ve Leschziner, M. A. (1994). Upstream monotonic interpolation for scalar transport with application to complex turbulent flows. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 19(6), 527–548.
- LeVeque, R. J. (2002). *Finite volume methods for hyperbolic problems*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Raissi, M., Perdikaris, P. ve Karniadakis, G. E. (2019). Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations. *Journal of Computational Physics*, 378, 686–707
- Roe, P.L. (1986). Characteristic-based schemes for the Euler equations. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 18(1), 337–365.
- Strikwerda, J. C. (2004). *Finite difference schemes and partial differential equations*. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Toro, E. F. (2009). *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics*. Berlin: Springer.
- van Leer, B. (1974). Towards the ultimate conservative difference scheme II. Monotonicity and conservation combined in a second order scheme. *Journal of Computational Physics*, 14(4), 361–370.
- Waterson, N. P., ve Deconinck, H. (1995). A unified approach to the design and application of bounded higher-order convection schemes.

3-PARAMETER QUATERNIONS WITH COEFFICIENTS DERIVED FROM RANDOM FIBONACCI AND LUCAS NUMBERS

Göksal BİLGİCİ¹

1. INTRODUCTION

Fibonacci numbers are the most renowned integers in sequences. A search in the WoS index with the keyword "Fibonacci" indicates that 11,250 items were produced from 1965 to 2025. The Fibonacci and Lucas sequences are characterized by the recurrence relation.

$$Z_n = Z_{n-1} + Z_{n-2} \quad (1.1)$$

where the sole distinction is in the initial conditions. The initial conditions of the Fibonacci sequence $\{F_r\}$ are $F_0 = 1$ and $F_1 = 1$ while initial conditions of Lucas sequence $\{L_r\}$ are $L_0 = 2$ and $L_1 = 1$. The Lucas sequence additionally be characterized by the relation

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1}. \quad (1.2)$$

The generating function for the sequence that fulfills Eq.(1.1) is

$$\sum_{r=0}^{\infty} Z_r q^r = \frac{Z_0 + (Z_1 - Z_0)q}{1 - q - q^2}. \quad (1.3)$$

Generating functions for the sequences $\{F_r\}$ and $\{L_r\}$ can be readily derived using Eq.(1.3). An additional significant idea

¹ Prof.Dr. Kastamonu University, Faculty of Education, Department of Elementary Mathematics Education, gbilgici@kastamonu.edu.tr, ORCID: 0000-0001-9964-5578.

for an integer sequence is the Binet formula. The Binet formulae for the Fibonacci and Lucas sequences are

$$F_r = \frac{C^r - D^r}{C - D} \text{ and } L_r = C^r + D^r \quad (1.4)$$

respectively. Here $C = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ and $D = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ are roots of the characteristic equation $q^2 - q - 1 = 0$. The root C is referred to as the golden ratio. For comprehensive information on Fibonacci and Lucas numbers, one may see (Koshy, 2019).

Quaternions were first developed by Sir William Rowan Hamilton in 1843. He sought to generalize complex numbers to higher dimensions. Additional varieties of quaternions include commutative, split, one-parameter, and two-parameter quaternions. Senturk and Unal (2022) have introduced a novel category of quaternion known as 3-parameter generalized quaternions. Let the set of all 3-parameter generalized quaternion be

$$\mathbb{K} = \{\pi_0 + \pi_1 i + \pi_2 j + \pi_3 k : \pi_0, \pi_1, \pi_2, \pi_3 \in \mathbb{R}\}$$

where the versors i, j and k satisfy the following multiplication rules

Table1. Multiplication of the versors

	i	j	k
i	$-\gamma_1 \gamma_2$	$\gamma_1 k$	$\gamma_2 j$
j	$-\gamma_1 k$	$-\gamma_1 \gamma_3$	$\gamma_3 i$
k	$\gamma_2 j$	$-\gamma_3 i$	$-\gamma_2 \gamma_3$

Here γ_1, γ_2 and γ_3 are arbitrary real numbers. Let $p = c_0 + c_1 i + c_2 j + c_3 k$ be a 3-parameter quaternion, then the conjugate of p , is $\bar{p} = c_0 - c_1 i - c_2 j - c_3 k$ and the norm of p is

$$N(p) = p\bar{p} = c_0^2 + \gamma_1 \gamma_2 c_1^2 + \gamma_1 \gamma_3 c_2^2 + \gamma_2 \gamma_3 c_3^2.$$

Horadam (1963) presented Fibonacci quaternions. He utilized Fibonacci numbers as coefficients for quaternions.

Subsequent to his research, a multitude of studies on Fibonacci quaternions have been undertaken. For instance, Lucas quaternions were introduced by Iyer (1969); Halici (2012) provided Binet-like formulas for Fibonacci and Lucas quaternions; Akyigit, Kosal, and Tosun (2013) defined split Fibonacci quaternions; Nukan and Guven (2015) examined dual Fibonacci quaternions; Tan, Yaman, and Gok (2025) presented Fibonacci elliptic quaternions. Bilgici (2022) presented Fibonacci 3-parameter generalized quaternions.

All the research referenced employed successive Fibonacci and Lucas numbers as coefficients for quaternions. Dasdemir and Bilgici (2021) delineated unbounded Fibonacci and Lucas quaternions. They employed random Fibonacci and Lucas numbers as coefficients for quaternions. The research conducted by Dasdemir and Bilgici (2021) and Bilgici (2022) underpins the current article.

2. DEFINITIONS, GENERALIZED FUNCTIONS AND BINET FORMULAS

Firstly, we provide definitions of unrestricted Fibonacci 3-parameter generalized quaternions (UF3PGQ) and unrestricted Lucas 3-parameter generalized quaternions (UL3PGQ).

Definition 2.1. Let x_0, y_0 and z_0 be arbitrary integers. Then, r th unrestricted Fibonacci 3-parameter generalized quaternions are

$$S_r^{(x_0, y_0, z_0)} = F_r + iF_{r+x_0} + jF_{r+y_0} + kF_{r+z_0} \quad (2.1)$$

and

r th unrestricted Lucas 3-parameter generalized quaternions are

$$T_r^{(x_0, y_0, z_0)} = L_r + iL_{r+x_0} + jL_{r+y_0} + kL_{r+z_0} . \quad (2.2)$$

Definition 2.1 with Eq.(1.1) leads us to the following recurrence relations:

$$S_r^{(x_0, y_0, z_0)} = S_{r-1}^{(x_0, y_0, z_0)} + S_{r-2}^{(x_0, y_0, z_0)} \quad (2.3)$$

and

$$T_r^{(x_0, y_0, z_0)} = T_{r-1}^{(x_0, y_0, z_0)} + T_{r-2}^{(x_0, y_0, z_0)} \quad (2.3)$$

where r is a nonnegative integer. The identities $F_{-n} = (-1)^{n+1}F_n$ and $L_{-n} = (-1)^nL_n$ give

$$S_{-r}^{(x_0, y_0, z_0)} = (-1)^{r+1} [1 + (-1)^{-x_0} F_{r-x_0} + (-1)^{-y_0} F_{r-y_0} + (-1)^{-z_0} F_{r-z_0}]$$

and

$$T_{-r}^{(x_0, y_0, z_0)} = (-1)^r [1 + (-1)^{-x_0} L_{r-x_0} + (-1)^{-y_0} L_{r-y_0} + (-1)^{-z_0} L_{r-z_0}].$$

Theorem 2.2 Generating functions for the sequences $\{S_r^{(x_0, y_0, z_0)}\}$ and $\{T_r^{(x_0, y_0, z_0)}\}$ are

$$\sum_{r=0}^{\infty} S_r^{(x_0, y_0, z_0)} q^r = \frac{S_0^{(x_0, y_0, z_0)} + q(S_1^{(x_0, y_0, z_0)} - S_0^{(x_0, y_0, z_0)})}{1 - q - q^2}$$

and

$$\sum_{r=0}^{\infty} T_r^{(x_0, y_0, z_0)} q^r = \frac{T_0^{(x_0, y_0, z_0)} + q(T_1^{(x_0, y_0, z_0)} - T_0^{(x_0, y_0, z_0)})}{1 - q - q^2}$$

respectively.

The proofs are self-evident and do not require presentation.

Theorem 2.3. [Binet Formulae] For $r \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$, the r th UF3PGQ is

$$S_r^{(x_0, y_0, z_0)} = \frac{\Delta_C C - \Delta_D D}{C - D} \quad (2.4)$$

and the r th UL3PGQ is

$$T_r^{(x_0, y_0, z_0)} = \Delta_C C + \Delta_D D \quad (2.5)$$

where $C^* = 1 + iC^{x_0} + jC^{y_0} + kC^{z_0}$ and $D^* = 1 + iD^{x_0} + jD^{y_0} + kD^{z_0}$.

Proof. From Eqs. (1.4) and (2.1), we have

$$\begin{aligned} S_r^{(x_0, y_0, z_0)} &= F_r + iF_{r+x_0} + jF_{r+y_0} + kF_{r+z_0} \\ &= \frac{1}{C - D} [C^r - D^r + i(C^{r+x_0} - D^{r+x_0}) \\ &\quad + j(C^{r+y_0} - D^{r+y_0}) + k(C^{r+z_0} - D^{r+z_0})] \\ &= \frac{1}{C - D} [(C^r + iC^{r+x_0} + jC^{r+y_0} + kC^{r+z_0}) \\ &\quad - (D^r + iD^{r+x_0} + jD^{r+y_0} + kD^{r+z_0})]. \end{aligned}$$

The last equation yields Eq. (2.4). Equation (2.5) can be demonstrated in a similar manner. ■

The following lemma will be required in next calculations.

Lemma 2.4. Let C^* and D^* be in Theorem 2.3. Then we have

$$\Delta_C \Delta_D = U + V\sqrt{5} \text{ and } \Delta_D \Delta_C = U - V\sqrt{5}$$

where

$$U = T_0^{(x_0, y_0, z_0)} - 1 - \gamma_2 \gamma_1 (-1)^{x_0} - \gamma_3 \gamma_1 (-1)^{y_0} - \gamma_3 \gamma_2 (-1)^{z_0}$$

and

$$V = i\gamma_3 (-1)^{z_0} F_{y_0-z_0} + j\gamma_2 (-1)^{x_0} F_{z_0-x_0} + k\gamma_1 (-1)^{y_0} F_{x_0-y_0}.$$

Proof. By using the definitions C^* and D^* , one can proof the lemma easily. ■

3. RESULTS

This section presents generalizations of established identities, beginning with Vajda's identity for the UF3PGQ and UL3PGQ numbers.

Theorem 3.1. For any integers p , q , and r , the following equations are valid

$$\begin{aligned} S_{p+a}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+r}^{(x_0, y_0, z_0)} - S_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+q+r}^{(x_0, y_0, z_0)} \\ = (-1)^{p+1} F_q(-UF_r + VL_r) \end{aligned} \quad (3.1)$$

and

$$\begin{aligned} T_{p+a}^{(x_0, y_0, z_0)} T_{p+r}^{(x_0, y_0, z_0)} - T_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_{p+q+r}^{(x_0, y_0, z_0)} \\ = (-1)^p 5F_q(-UF_r + VL_r). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Proof. Binet's formula (2.4) gives

$$\begin{aligned} S_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+r}^{(x_0, y_0, z_0)} - S_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+q+r}^{(x_0, y_0, z_0)} \\ = \frac{1}{5} [\Delta_C \Delta_D (C^p D^{p+q+r} - C^{p+q} D^{p+r}) \\ + \Delta_D \Delta_C (C^{p+q+r} D^p - C^{p+r} D^{p+q})] \\ = \frac{(-1)^p}{5} [\Delta_C \Delta_D (D^{q+r} - C^q D^r) + \Delta_D \Delta_C (C^{q+r} - C^r D^q)] \\ = \frac{(-1)^{p+1}}{5} [\Delta_C \Delta_D D^r (C^q - D^q) - \Delta_D \Delta_C C^r (C^q - D^q)] \\ = \frac{(-1)^{p+1} F_q}{\sqrt{5}} [\Delta_C \Delta_D D^r - \Delta_D \Delta_C C^r]. \end{aligned}$$

The last equation yields Eq. (3.1). The second identity can be demonstrated in a similar manner. ■

Substituting $r \rightarrow -q$ into Theorem 3.1 gives Catalan's identities for UF3PGQ and UL3PGQ numbers.

Theorem 3.2. For any integers p and q , the following equations are valid

$$\begin{aligned} S_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p-q}^{(x_0, y_0, z_0)} - \left[S_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 \\ = (-1)^{p+q+1} (UF_q^2 + VF_{2q}) \end{aligned} \quad (3.3)$$

and

$$\begin{aligned} T_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} T_{p-q}^{(x_0, y_0, z_0)} - \left[T_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 \\ = (-1)^{p+q} 5 (UF_q^2 + VF_{2q}). \end{aligned} \quad (3.4)$$

Substituting $q \rightarrow 1$ into Theorem 3.2 gives Cassini's identities for UF3PGQ and UL3PGQ numbers.

Theorem 3.3. For any integer p , the following equations are valid

$$\begin{aligned} S_{p+1}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p-1}^{(x_0, y_0, z_0)} - \left[S_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 \\ = (-1)^p (U + V) \end{aligned} \quad (3.5)$$

and

$$\begin{aligned} T_{p+1}^{(x_0, y_0, z_0)} T_{p-1}^{(x_0, y_0, z_0)} - \left[T_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 \\ = (-1)^{p+1} 5 (U + V). \end{aligned} \quad (3.6)$$

A further generalization of a renowned identification is d'Ocagne's identity. D'Ocagne's identity is articulated in the subsequent theorem.

Theorem 3.4. For any integers p and q , the following equations are valid

$$\begin{aligned} S_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_{q+1}^{(x_0, y_0, z_0)} - S_{p+1}^{(x_0, y_0, z_0)} S_q^{(x_0, y_0, z_0)} \\ = (-1)^q (UF_{p-q} + VL_{p-q}) \end{aligned} \quad (3.7)$$

and

$$\begin{aligned} T_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_{q+1}^{(x_0, y_0, z_0)} - T_{p+1}^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)} \\ = (-1)^{q+1} 5 (UF_{p-q} + VL_{p-q}). \end{aligned} \quad (3.8)$$

Proof. Eq. (2.4) gives

$$\begin{aligned}
 & S_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_{q+1}^{(x_0, y_0, z_0)} - S_{p+1}^{(x_0, y_0, z_0)} S_q^{(x_0, y_0, z_0)} \\
 &= \frac{1}{(C-D)^2} [(\Delta_C C^p - \Delta_D D^p)(\Delta_C C^{q+1} - \Delta_D D^{q+1}) \\
 &\quad - (\Delta_C C^{p+1} - \Delta_D D^{p+1})(\Delta_C C^q - \Delta_D D^q)] \\
 &= \frac{1}{5} [\Delta_C \Delta_D C^p D^q (C-D) - \Delta_D \Delta_C C^q D^p (C-D)] \\
 &= \frac{1}{\sqrt{5}} [\Delta_C \Delta_D C^p D^q - \Delta_D \Delta_C C^q D^p] \\
 &= \frac{(-1)^q}{\sqrt{5}} [\Delta_C \Delta_D C^{p-q} - \Delta_D \Delta_C D^{p-q}] \\
 &= \frac{(-1)^q}{\sqrt{5}} [(U + \sqrt{5}V)C^{p-q} - (U - \sqrt{5}V)D^{p-q}] \\
 &= \frac{(-1)^q}{\sqrt{5}} [U(C^{p-q} - D^{p-q}) + \sqrt{5}V(C^{p-q} + D^{p-q})].
 \end{aligned}$$

The final equation utilizing Binet formulas (1.4) yields Eq. (3.7). Eq. (3.8) can be demonstrated in a comparable manner. ■

Employing analogous techniques, we may ascertain numerous identities for UF3PGQ and UL3PGQ numbers. We present several of them in the subsequent theorem.

Theorem 3.6. For any integers p, q and r , the following equations are valid

$$\begin{aligned}
 T_p^{(x_0, y_0, z_0)} &= S_p^{(x_0, y_0, z_0)} + S_p^{(x_0, y_0, z_0)}, \\
 T_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+r}^{(x_0, y_0, z_0)} - T_{p+r}^{(x_0, y_0, z_0)} S_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} &= 2(-1)^{p+q} UF_{r-q}, \\
 S_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)} - T_q^{(x_0, y_0, z_0)} S_p^{(x_0, y_0, z_0)} &= 2(-1)^p VL_{q-p}, \\
 S_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)} - T_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_q^{(x_0, y_0, z_0)} \\
 &= 2(-1)^q (UF_{p-q} + VL_{p-q}), \\
 S_p^{(x_0, y_0, z_0)} S_q^{(x_0, y_0, z_0)} - S_q^{(x_0, y_0, z_0)} S_p^{(x_0, y_0, z_0)} &= 2(-1)^{q+1} VF_{p-q}, \\
 T_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)} - T_q^{(x_0, y_0, z_0)} T_p^{(x_0, y_0, z_0)} &= 10(-1)^q VF_{p-q},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}5 \left[S_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 - \left[T_p^{(x_0, y_0, z_0)} \right]^2 &= 4(-1)^{p+1} U, \\ S_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} + (-1)^q S_{p-q}^{(x_0, y_0, z_0)} &= S_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)}, \\ T_{p+q}^{(x_0, y_0, z_0)} + (-1)^q T_{p-q}^{(x_0, y_0, z_0)} &= T_p^{(x_0, y_0, z_0)} T_q^{(x_0, y_0, z_0)}, \\ S_{2p}^{(x_0, y_0, z_0)} &= F_{p+1} S_p^{(x_0, y_0, z_0)} + F_p S_{p-1}^{(x_0, y_0, z_0)}.\end{aligned}$$

4. CONCLUSIONS

This study presents and examines unconstrained Fibonacci and Lucas 3-parameter generalized quaternions (UF3PGQ and UL3PGQ) utilizing random Fibonacci and Lucas numbers as coefficients. Utilizing the definitions and Binet formulae, we derived generating functions and constructed various renowned identities, including Vajda's, Catalan's, Cassini's, and d'Ocagne's identities, within the framework of these generalized quaternion structures.

This study's results not only expand the classical features of Fibonacci and Lucas numbers within the context of 3-parameter generalized quaternions but also enhance prior research on Fibonacci and Lucas quaternions by integrating randomness into the coefficients. This illustrates that these algebraic structures maintain numerous essential identities even in extended and unrestricted contexts.

The obtained findings may provide a basis for additional research on the algebraic and analytical characteristics of quaternionic sequences with stochastic coefficients. Future research avenues may encompass a more profound examination of norm and conjugacy relations, the expansion of methodologies to higher-dimensional hypercomplex number systems, and the exploration of potential applications in coding theory, cryptography, and mathematical physics.

REFERENCES

- Akyigit, M., Kosal, H. H., & Tosun, M. (2013). Split Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 23(3), 535-545.
- Bilgici, G. (2022). Fibonacci 3-parameter generalized quaternions. *Avrupa Bilim ve Teknoloji Dergisi*, 41, 357-361.
- Dasdemir, A., & Bilgici, G. (2021). Unrestricted Fibonacci and Lucas quaternions. *Fundamental Journal of Mathematics and Applications*, 4(1), 1-9.
- Halici, S. (2012). On Fibonacci quaternions. *Adv. Appl. Clifford Algebras*, 22(2), 321-327.
- Horadam, A. F. (1963). Complex Fibonacci numbers and Fibonacci quaternions. *The American Mathematical Monthly*, 70(3), 289-291.
- Iyer, M. R. (1969). Some results on Fibonacci quaternions. *The Fibonacci Quarterly*, 7(2), 201-210.
- Koshy, T. (2019). *Fibonacci and Lucas numbers with applications*, Volume 2 (Vol. 2). John Wiley & Sons.
- Nurkan, S. K., & Guven, İ. A. (2015). Dual Fibonacci quaternions. *Advances in Applied Clifford Algebras*, 25(2), 403-414.
- Senturk, T.D., & Unal, Z. (2022). 3-parameter generalized quaternions. *Comput. Methods Funct. Theory*, 22, 575–608.
- Tan, E., Yaman, T., & Gok, İ. (2025). On Fibonacci and Lucas elliptic quaternions. *Journal of Science and Arts*, 25(1), 31-44.

RIEMANN MANİFOLDLARINDA REGRESYON ANALİZİ

Emre SANIR¹

Nurkut Nuray URGAN²

1. GİRİŞ

Riemann Geometrisi, matematikte “devrim niteliğinde” bir teori olarak bilinir. Albert Einstein, Genel Görelelik Teorisini oluştururken uzay ve zaman dokusunun eğriliğini tanımlamak için Riemann’ın matematiksel keşiflerinden yararlanmış ve bu sayede onlara somut bir fiziksel yorum kazandırmıştır.

Aradan geçen bir asırlık süreden sonra, Riemann Geometrisi bu kez de makine öğrenmesi algoritmalarında sahne almaktadır. Bu makalede, doğrusal regresyonun Riemann Geometrisine bir genellemesi olan Jeodezik Regresyon hakkında bilgi verilmesi amaçlanmaktadır.

Jeodezik regresyon, reel-değerli bağımsız değişken ile manifold-değerli rastgele bağımlı değişken arasındaki ilişkiyi modelleyen bir regresyon yöntemidir. Buradaki temel prensip, verilere en iyi şekilde uyan bağımsız parametre ile parametrelendirilmiş bir jeodezik eğri bulmaktır. Modeldeki hata, modelden veriye olan jeodezik mesafelerin kareler toplamıdır. Bu hatanın minimize edilmesiyle, Öklid uzayındaki geleneksel doğrusal regresyon yöntemi Riemann manifoldlarına genelleştirilmiş olur. (Fletcher, 2013)

¹ Öğretmen, MEB, emresanir@gmail.com, ORCID: 0000-0002-8691-4692.

² Dr.Öğr.Üyesi, Tekirdağ Namık Kemal Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, nurgan@nku.edu.tr, ORCID: 0000-0002-8691-4692.

2. RIEMANN MANİFOLDLARI ÜZERİNDE REGRESYON ANALİZİ

Regresyon analizi, bir bağımlı değişken ile bir ya da birden fazla bağımsız değişken arasındaki ilişkiyi modellemek için kullanılan istatistiksel bir yöntemdir. En yaygın kullanılan regresyon modeli ise basitliği, yorumlama kolaylığı ve birçok olguyu modelleme olanağı sağlaması nedeniyle doğrusal regresyondur. Ancak, yanıt (bağımlı) değişken doğrusal olmayan bir manifold üzerinde değerler alıyorsa, doğrusal bir model uygulanabilir değildir. Bu tür manifold-değerli ölçümler; bilgisayarlı görme, sinyal işleme, şekil analizi, hava trafiği ve havacılık kontrolü gibi çok çeşitli uygulama alanlarında ortaya çıkar. Örneğin biyolojide ve tıpta; anatominin şeklini değiştiren süreçleri anlamak genellikle kritik öneme sahiptir. Buradaki zorluk, şekil değişkenliğinin doğası gereği yüksek boyutlu ve doğrusal olmamasıdır. Bu değişkenliği elde etmenin etkili bir yaklaşımı, şekli bir manifold veya şekil uzayı olarak parametrelendirmek olmuştur. (Fletcher, 2013)

Manifoldlar üzerinde regresyon problemini inceleyen birçok çalışma vardır. Jupp ve Kent (1987), şekil uzaylarında bir açma yöntemi önermektedir. Diffeomorfizm grubu üzerinde regresyon analizi; büyüme modelleri olarak Miller (2004) tarafından, parametrik olmayan regresyon yöntemi Davis ve ark. (2007) tarafından, ikinci mertebeden eğriler Trouvé ve Vialard (2010) tarafından önerilmiştir. Son olarak Shi ve ark. (2009), çok sayıda yanıt değişkenleri için birden fazla yardımcı değişken içeren yarı parametrik bir model önermiştir. Ancak bu yöntemlerden hiçbiri, doğrusal regresyonun manifoldlara doğrudan genelleştirilmesini sağlamaz. (Fletcher, 2013)

Bu makalede amaç, bağımsız bir skaler değişken ile bağımlı manifold-değerli rastgele değişken arasındaki ilişkiyi jeodezik bir eğri olarak modelleyen jeodezik regresyon adı

verilen bir genelleme ortaya koymaktır. Doğrusal regresyonda olduğu gibi bu modelin de avantajları, basitliği ve yorumlama kolaylığıdır.

3. RIEMANN GEOMETRİSİNİN TEMEL KAVRAMLARI

Modeli formüle etmeden önce, ilk olarak Riemann geometrisinin birkaç temel kavramını gözden geçirelim.

Tanım 1. *M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı bir g bilineer formu (metriği) varsa, g ye “Riemann metriği” ve (M, g) ikilisine de “Riemann manifoldu” denir. (Şahin, 2012)*

(M, g) Riemann manifoldu üzerinde iki koordinat sistemi $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ olmak üzere Riemann metriğinin bileşenleri

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^n \sum_{s=1}^n \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial y_k} \frac{\partial x_j}{\partial y_s}$$

ile bulunur. Burada δ_{ij} kronocker deltasıdır.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $v_p \in T_p M$ vektörün normu

$$\|v_p\| = \sqrt{g_p(v, v)}$$

ile tanımlanır. Ayrıca $v_p, w_p \in T_p M$ ve v_p ile w_p arasındaki açı θ olmak üzere

$$\cos \theta = \frac{g_p(v, w)}{\|v_p\| \|w_p\|}$$

olarak tanımlanır.

(M, g) bir Riemann manifoldu ve $\alpha: I \rightarrow M$ bir diferansiyellenebilir eğri olsun. $\alpha'(t) = T(t)$ olmak üzere α eğrisinin $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t_1)$ arasında kalan yay uzunluğu

$$|\alpha|_a^b = \ell_a^b = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g(T(t), T(t))} dt$$

olarak tanımlanır. (Şahin, 2012)

Tanım 2. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer her $p \in M$ ve her $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için

$$\begin{aligned} v_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) &\rightarrow \mathbb{R} \\ f &\rightarrow v_p[f] \end{aligned}$$

operatörü her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve λ, μ için

$$\begin{aligned} \text{i.} \quad & v_p[\lambda f + \mu g] = \lambda v_p[f] + \mu v_p[g] \\ \text{ii.} \quad & v_p[f \cdot g] = g(p)v_p[f] + f(p)v_p[g] \end{aligned}$$

aksiyomlarını sağlıyorsa, bu operatöre M manifoldunun $p \in M$ noktasında bir "tanjant vektörü" denir. (Hacısalihoglu, 1980)

M manifoldunun bir $p \in M$ noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi

$$T_p(M) = \{v_p | v_p: C^\infty(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 16. M diferansiyellenebilir bir manifold ve M üzerinde bir afin konneksiyon ∇ olsun. Bir $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi boyunca bir V vektör alanı, her bir $t \in I$ için $\frac{DV}{dt} = 0$ şartını sağlıyorsa V ye α eğrisi boyunca "paralel vektör alanı" denir. (do Carmo, 1992)

Tanım 17. $\alpha: I \rightarrow M$ eğrisi üzerinde $\alpha(t_0)$ ve $\alpha(t_1)$ noktaları verilsin. $\alpha(t_0)$ noktasında bir V vektör alanının $\alpha(t_1)$ noktasındaki karşılığına V vektör alanının $\alpha(t_1)$ noktasına "ötelenmişi" denir. (do Carmo, 1992)

$\alpha(t_0) = a$ ve $\alpha(t_1) = b$ olsun. Yukarıdaki tanıma göre $T_{\alpha(t_0)}M$ uzayından $T_{\alpha(t_1)}M$ uzayına bir Γ_a^b fonksiyonu tanımlanmış olur. Γ_a^b fonksiyonuna, $\alpha(t_0) = a$ noktasından $\alpha(t_1) = b$ noktasına "paralel kayma fonksiyonu (paralel transport)" denir .

$$\Gamma_a^b = T_{\alpha(t_0)}M \rightarrow T_{\alpha(t_1)}M$$

ile tanımlı olup, bu dönüşüm lineer ve iç çarpımı koruyan bir dönüşümdür (Sabuncuoğlu, 2004).

Tanım 18. (M, g) bir Riemann manifoldu, $\alpha: I \rightarrow M$ diferansiyellenebilir bir eğri, $t \in I$ için $\alpha'(t) = T$ olmak üzere $\nabla_T T = 0$ ise α eğrisine M nin "jeodeziği" denir (do Carmo, 1992).

Tanım 19. M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ başlangıç koşulları verildiğinde, ikinci mertebeden kısmi diferansiyel denklemler teorisi bize $\gamma(2)$ için tanımlayıcı denklemin en azından yerel olarak tek bir çözümün varlığını garanti eder. Böylece $(-\varepsilon, \varepsilon)$ aralığında $\gamma(0) = p$, $\gamma'(0) = v$ ile tanımlı tek bir γ jeodezik eğrisi vardır. Eğer bu jeodezik $[0, 1]$ aralığında var ise

$$\begin{aligned} \text{Exp}_p: T_p M &\rightarrow M \\ v &\rightarrow \text{Exp}_p v = \gamma(1) \end{aligned}$$

funksiyonuna "Riemann üstel dönüşüm (Riemannian exponansiyel dönüşüm)" adı verilir. (Fletcher, 2010).

Teorem 1. M bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ olsun. Exp_p fonksiyonu 0 noktasını içeren bir $U \subset T_p M$ komşuluğunda difeomorfizmdir .

Yukarıdaki teorem, Exp_p nin en azından p nin bir $\text{Exp}_p(U)$ komşuluğunda ters fonksiyonu olduğunu ima eder. Bu da bizi aşağıdaki tanıma götürür.

Tanım 21. $Log_p: Exp_p(U) \rightarrow T_p M$
 $Exp_p v = \gamma(1) \rightarrow v$

şeklinde tanımlanan üstel dönüşüm fonksiyonunun tersine "Riemann log dönüşüm" denir (Fletcher, 2010).

4. ÇOKLU DOĞRUSAL REGRESYON

Genel manifoldlar üzerinde jeodezik regresyonu formüle etmeden önce, $\mathbb{R}^n$ deki çoklu doğrusal regresyonu inceleyerek başlayalım. Burada rastgele olmayan bağımsız değişken $X \in \mathbb{R}$ ile $\mathbb{R}^n$ cinsinden değer alan rastgele bağımlı değişken Y arasındaki ilişkiyle ilgileniyoruz. Bu ilişkinin çoklu doğrusal modeli şu şekilde verilmektedir:

$$Y = \alpha + X\beta + \epsilon \quad (1)$$

Burada $\alpha \in \mathbb{R}^n$ gözlemlenemeyen bir kesim (intercept) parametresi, $\beta \in \mathbb{R}^n$ gözlemlenemeyen bir eğim (slope) parametresi ve ϵ de hatayı temsil eden $\mathbb{R}^n$ değerli gözlemlenemeyen rastgele değişkendir. Geometrik olarak bu, X skaler değişkeniyle parametrelendirilmiş, $\mathbb{R}^n$ den (artı gürültü) geçen tek boyutlu bir doğrunun denklemidir. Manifold durumuna genelleme yapmak amacıyla, α yı başlangıç noktası olarak düşünmek ve β yı da hız vektörü olarak düşünmek faydalı olacaktır.

Yukarıdaki model göz önüne alındığında, yani $i = 1, \dots, N$ için veriler $(x_i, y_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ alındığında, en küçük kareler tahminleri olan $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ parametreleri için minimizasyon problemi:

$$(\hat{\alpha}, \hat{\beta}) = \underset{(\hat{\alpha}, \hat{\beta})}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^N \|y_i - \alpha - x_i \beta\|^2 \quad (2)$$

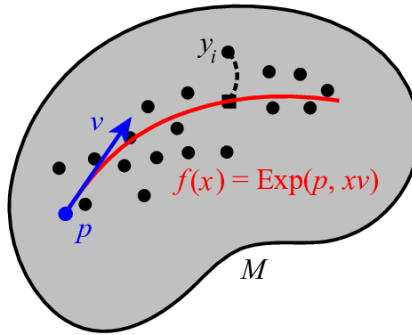
olarak hesaplanır ve bu denklem analitik olarak çözüldüğünde

$$\hat{\beta} = \frac{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i y_i - \bar{x}\bar{y}}{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2 - \bar{x}^2}, \quad \hat{\alpha} = \bar{y} - \bar{x}\hat{\beta}$$

olarak hesaplanır. Burada $\bar{x}$ ve $\bar{y}$ sırasıyla x_i ve y_i nin ortalamalarıdır ve modeldeki hataların dağılımı sıfır ortalamalı ve sabit varyanslı ise bu tahminciler yansız (unbiased) ve tutarlıdır (Fletcher, 2013).

5. JEODEZİK REGRESYON

Düzgün bir Riemann manifoldu M üzerinde $y_1, y_2, \dots, y_N$ noktaları ve bunlarla ilişkili $x_1, x_2, \dots, x_N \in \mathbb{R}$ skaler değerleri verilsin. Buradaki temel amaç x_i ile y_i noktaları arasındaki ilişkiyi en iyi modelleyen M manifoldu üzerinde bir γ jeodezik eğrisi bulmaktır. Doğrusal regresyonda olduğu gibi jeodeziğin hız vektörü, x_i 'ye karşılık gelen bağımsız parametreyle orantılı olacaktır. Parametrelerin tahminleri, model ile veriler arasındaki Riemann mesafelerinin karelerinin toplamını minimize etmek istediğimiz en küçük kareler problemi olarak kurulacaktır. Jeodezik regresyon modelinin şematik gösterimi Şekil 1 de verilmiştir.



Şekil 1. Jeodezik Regresyon Modelinin Gösterimi (Fletcher, 2013).

M bir Riemann manifoldu olsun. $p \in M$ ve p noktasında bir $v \in T_p M$ vektörü alalım. Herhangi bir $p \in M$ için $\gamma(0) = p$ ve $\gamma'(0) = v$ olan tek bir γ jeodezik eğrisi vardır. γ eğrisi $[0,1]$ arasında tanımlandığında, p noktasındaki Riemann üstel dönüşüm $Exp_p v = \gamma(1)$ olarak tanımlanır. Başka bir deyişle, üstel dönüşüm girdi olarak bir konum ve hız alır ve bu başlangıç koşullarıyla jeodezik boyunca 1 zamanındaki noktayı döndürür. Riemann üstel dönüşüm, p nin bir komşuluğu üzerinde yerel olarak difeomorfiktir. Bu tür en büyük komşuluk $U(p)$ olsun. Daha sonra $U(p)$ yi içeren üstel dönüşümün Riemann log dönüşümü, $Log_p: U(p) \rightarrow T_p M$ şeklinde tersi vardır. Herhangi bir $q \in U(p)$ noktası için Riemann mesafe fonksiyonu $d(p, q) = ||Log_p q||$ ile verilir. Riemann Üstel ve log dönüşümlerine p noktasını bir parametre olarak dahil etmek, yani $Exp_p v = Exp(p, v)$ ve $Log_p q = Log(p, q)$ olarak tanımlamak uygun olacaktır (Fletcher, 2013).

Bir (p, v) ikilisi, çoklu doğrusal regresyon modelindeki α ve β parametrelerine benzer şekilde, bir p kesim (intercept) noktası ve bir v eğim (slope) sağlar. Şimdi M değerli rastgele değişken Y ve rastgele olmayan bir $X \in \mathbb{R}$ değişkenlerini düşünelim. Çoklu doğrusal regresyon modelinin manifold durumuna genelleştirilmesi

$$Y = Exp(Exp(p, Xv), \epsilon) \quad (3)$$

şeklindedir. Bu ifadeye "jeodezik regresyon modeli" denir. Burada ϵ , $Exp(p, Xv)$ deki tanjant uzayda değerler alan rastgele bir değişkendir. Öklid uzayı için üstel dönüşümün basitçe vektör toplamı olduğuna dikkat edin. Yani, $M = \mathbb{R}^n$ için $E(p, v) = p + v$. Dolayısıyla $M = \mathbb{R}^n$ olduğunda jeodezik model, klasik çoklu doğrusal regresyon denklemi ile eşleşir (Fletcher, 2013).

6. EN KÜÇÜK KARELER TAHMİNİ

$i = 1, \dots, N$ için $(x_i, y_i) \in (\mathbb{R} \times M)$ noktalarını ve (3) denklemini düşünelim. Verilen bu bilgilerle (p, v) parametrelerini tahmin etmek istiyoruz. İlk olarak jeodezik verilerin hata kareler toplamını tanımlayalım ve bunu $E(p, v)$ ile gösterelim.

$$E(p, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d(\text{Exp}(p, x_i v), y_i)^2 \quad (4)$$

(2) denklemi ile verilen klasik en küçük kareler minimizasyon probleminde olduğu gibi, jeodezik modelin en küçük kareler tahmincisini yukarıdaki kareler toplamının minimizasyonu olarak formüle edebiliriz, yani

$$(\hat{p}, \hat{v}) = \underset{(p, v)}{\operatorname{argmin}} E(p, v) \quad (5)$$

Tekrardan bu problemin, $M = \mathbb{R}^n$ olduğunda klasik en küçük kareler yöntemi ile eşleştiğine dikkat ediniz.

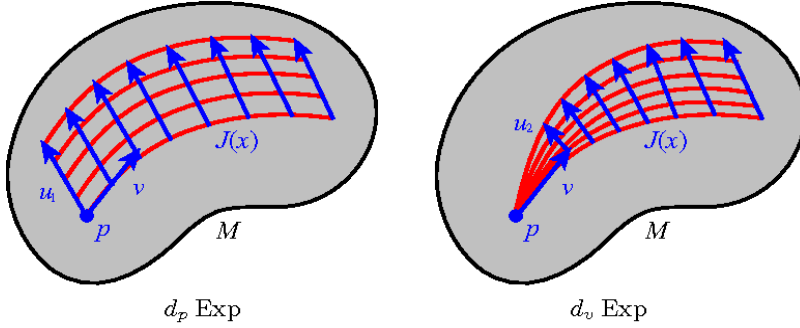
Doğrusal regresyon yönteminin aksine, genel bir M manifoldu için (5) denklemindeki en küçük kareler problemi tipik bir analitik çözüm vermeyecektir. Bunun yerine bir gradyen iniş algoritması türetmek uygun olacaktır. (4) denklemindeki gradyanın hesaplanması iki türlü olacaktır: Riemann uzaklık fonksiyonunun gradyeni ve üstel haritanın gradyeni. Bir $p \in M$ noktasını sabitleyerek, Riemann uzaklık fonksiyonunun gradyeni, $x \in U(p)$ için

$$\nabla_x d(p, x)^2 = -2 \operatorname{Log}_x(p)$$

olarak hesaplanabilir (Fletcher, 2013).

$\text{Exp}(p, v)$ üstel dönüşümün türevi, p başlangıç noktasına göre bir türev ve v başlangıç hızına göre bir türev olarak iki ayrı biçimde düşünülebilir. Bunu yapmak için önce şu şekilde verilen jeodeziklerin bir varyasyonunu düşünelim: $c_1(s, t) =$

$Exp(Exp(p, su_1), tv(s))$. Burada $u_1 \in T_p M$ ifadesi, $\eta(s) = Exp(p, su_1)$ jeodeziği boyunca başlangıç noktasının bir varyasyonunu tanımlar. Ayrıca burada, $v \in T_p M$ vektörünü paralel taşıma yardımıyla η boyunca bir $v(s)$ vektör alanına genişlettik. Bu varyasyon Şekil 2 nin sol tarafında gösterilmektedir. Daha sonra $c_2(s, t) = Exp(p, su_2 + tv)$, $u_2 \in T_p M$ jeodeziklerinin bir varyasyonunu düşünelim. (Teknik olarak u_2 vektörü tanjant uzaya teğettir, yani $u_2 \in T_v(T_p M)$ dir, fakat burada $T_v(T_p M) \cong T_p M$ olacak şekilde doğal bir izomorfizmi vardır. c_2 varyasyonu Şekil 2. nin sağ tarafında görüldüğü gibi jeodeziklerin bir “yelpazesini” üretir.



Şekil 2. Üstel Dönüşümün Türevleri Olarak Jacobi Alanları (Fletcher, 2013).

Şimdi $Exp(p, v)$ fonksiyonunun p ve v ye göre türevleri şu şekilde verilmektedir:

$$d_p Exp(p, v). u_1 = \frac{d}{ds} c_1(s, t)|_{s=0} = J_1(1)$$

$$d_v Exp(p, v). u_2 = \frac{d}{ds} c_2(s, t)|_{s=0} = J_2(1)$$

Burada $J_i(t)$ ler $\gamma(t) = Exp(p, tv)$ jeodeziği boyunca "Jacobi alanları" üretir. Jacobi alanları

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) + R(J(t), \gamma'(t)) \gamma'(t) = 0$$

ikinci mertebeden denkleminin çözümleridir. Buradaki R , Riemann eğrilik tensörüdür .

Yukarıdaki iki Jacobi alanı için başlangıç koşulları, sırasıyla $J_1(0) = u_1$, $J_1'(0) = 0$ ve $J_2(0) = 0$, $J_2'(0) = u_2$ dir. Jacobi alanını teğet bir bileşene ve bir dik bileşene ayırırsak, yani $J = J^T + J^\perp$, teğet bileşenler lineer olur: $J^T(t) = u_1^T + tu_2^T$. Böylece geriye kalan tek zorluk ortogonal bileşeni çözmek olur.

Son olarak (4) denklemindeki $E(p, v)$ fonksiyonunun gradyeni şu şekilde verilir:

$$\begin{aligned}\nabla_p E(p, v) &= - \sum_{i=1}^N d_p \text{Exp}(p, x_i v)^\dagger \text{Log}(\text{Exp}(p, x_i v), y_i) \\ \nabla_v E(p, v) &= - \sum_{i=1}^N x_i d_v \text{Exp}(p, x_i v)^\dagger \text{Log}(\text{Exp}(p, x_i v), y_i)\end{aligned}$$

Burada üstel dönüşümün türevinin ekini (adjoint) aldık, örneğin $\langle d_p \text{Exp}(p, v)u, w \rangle = \langle u, d_p \text{Exp}(p, v)^\dagger w \rangle$ şeklinde tanımlandığı gibi. Bir sonraki bölümde görüleceği gibi, Jacobi alanları ve bunların ilgili ek operatörleri için formüller, çoğu zaman birçok kullanışlı manifold türleri için analitik olarak hesaplanabilir (Fletcher, 2013).

7. KÜRESEL BİR MANİFOLD ÜZERİNE UYGULAMA

Şimdiye kadar verilen bilgilere dayanarak bu bölümde, merkezi $(0,0,0)$ ve yarıçapı bir birim olan bir S^2 küresi (manifoldu) üzerinde bir uygulama yapılacaktır. Ortaya çıkacak sonuç, jeodezik regresyon modelinin parametre tahminleri olacaktır.

Öncelikle S^2 küresi için jeodezik mesafe, üstel dönüşüm, riemann log dönüşüm ve paralel transport ifadeleri tanımlansın:

Jeodezik Mesafe Fonksiyonu:

$$d(p, q) = \arccos(\langle p, q \rangle)$$

Üstel Dönüşüm Fonksiyonu:

$$\text{Exp}(p, v) = p \cos(\|v\|) + \frac{v}{\|v\|} \sin(\|v\|)$$

Riemann Log Dönüşüm Fonksiyonu:

$$\text{Log}(p, q) = d(p, q) \frac{q - \langle p, q \rangle p}{\|q - \langle p, q \rangle p\|}$$

Paralel Transport:

$$\Gamma_{p \rightarrow q}(v) = v - \frac{\langle \text{Log}(p, q), v \rangle}{d(p, q)} (\text{Log}(p, q) + \text{Log}(q, p))$$

Daha önce de belirtildiği üzere, jeodezik regresyon modeli

$$Y = \text{Exp}(\text{Exp}(p, Xv), \epsilon)$$

ve hata fonksiyonu

$$E(p, v) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N d(\text{Exp}(p, x_i v), y_i)^2$$

olarak tanımlanmıştı. Gradyenin hesaplanması, bir küre için Jakobi alanlarının hesaplanmasını içerir ve aşağıdaki denklemler ile yaklaşık olarak

$$\begin{aligned} \nabla_p E(p, x_i v) &\approx - \sum_{i=1}^N \Gamma_{\hat{y}_i \rightarrow p} (\text{Log}(\hat{y}_i, y_i)) \\ \nabla_v E(p, x_i v) &\approx - \sum_{i=1}^N x_i \Gamma_{\hat{y}_i \rightarrow p} (\text{Log}(\hat{y}_i, y_i)) \\ \hat{y}_i &= \text{Exp}(p, x_i v) \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir (Shin ve Oh, 2022).

Son adımda ise p ve v parametrelerini güncelleyecek. Elde edilen gradyen bir vektördür. Lineer regresyonda gradyen vektörü, λ öğrenme oranına (learning rate) göre ölçeklendirebilir ve mevcut parametre değerinden çıkarılabilir. Ancak burada, p manifold üzerinde bir noktadır ve böyle bir vektör işlemimiz yoktur. Bu nedenle p parametresini güncellemek için üstel dönüşüm uygulanması gerekir. Bu güncel parametreye p_{new} diyelim:

$$p_{new} = \text{Exp}(p, -\lambda \nabla_p)$$

v parametresini güncellemek için ise $v \in T_p M$ olduğundan basit bir çıkarma işlemiyle gerçekleştirebilir. Bu güncel parametre v' olsun:

$$v' = v - \lambda \nabla_v$$

Ancak dikkat edilirse, v vektörü p nin bulunduğu noktada tanımlıdır, dolayısıyla p noktasını p_{new} olarak güncellediğinde, yeni v_{new} vektörü p_{new} noktasında yer almalıdır. Ancak güncellenmiş v' vektörü hala aynı eski p noktasında bulunduğundan, v' vektörünü p_{new} olarak tanımlamanın bir yolunu bulmak gerekir. Bu ise güncellenmiş v' vektörünü p noktasında p_{new} noktasına paralel taşıma ile yapılabilir:

$$v_{new} = \Gamma_{p \rightarrow p_{new}}(v')$$

Bunu S^2 küresinde uygulamak için, kürenin yüzeyinde sentetik veriler üreterek verilere jeodezik regresyon uygulayalım. Bunun için gerekli Python kodları EK-1 bölümünde verilmiştir (Paribeshh, 2020).

P

array([0.99779191, -0.01094604, -0.0062808])

V

array([0.01009145, 0.75591576, 0.0086111])

Python kodunda da görüldüğü üzere, elde edilen tahminler, başlangıçta seçilen

$$p = (1,0,0)$$

$$v = (0, \pi/4, 0)$$

değerlerine oldukça yakındır.

8. SONUÇ

Bu makalede, regresyon yöntemini Öklid uzayından Riemann manifoldlarına genellendi ve böylelikle makine öğrenimi problemine farklı bir bakış açısıyla yaklaşıldı. Birim küre üzerinde bir jeodezik regresyon örneği tartışıldı, ancak daha pratik örnekler, özellikle tıbbi görüntüleme ve biyometri olmak üzere şekil analizi ve bilgisayarlı görme görevlerinde yatmaktadır. Bu uygulamalar için Riemann manifoldlarında bulunan verilere yönelik makine öğrenimi algoritmaları araştırılmakta ve geliştirilmektedir.

KAYNAKÇA

- A. Sabuncuoglu, Diferansiyel Geometri, 2nd ed. Basel: Nobel Akademi Yayıncılık, 2004, ISBN: 978-605-320-007-9.
- A. Trouve and F. Vialard, “A second-order model for time-dependent data interpolation: Splines on shape spaces,” In: MICCAI STIA Workshop, 2010.
- B. Davis, P. Fletcher, E. Bullitt, and S. Joshi, “Population shape regression from random design data,” In: Proceedings of IEEE International Conference on Computer Vision, 2007.
- B. Şahin, Manifoldların Diferansiyel Geometrisi, Ankara: Nobel Yayınları, 2012.
- H. Hacısalihoğlu, Diferansiyel Geometri, 3rd ed. Ankara: İnönü Üniversitesi Yayınları, 1983, ISBN: 9789755070049.
- H. Hacısalihoğlu, Yüksek Diferansiyel Geometriye Giriş, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi yayınları Mat No:2, 1980.
- H. Shin and H. Oh, “Robust geodesic regression,” International Journal of Computer Vision, vol. 130, pp. 1–26, 2022. DOI: 10.1007/s11263-021-01561-w.
- M. do Carmo, Riemannian Geometry. Basel: Birkhauser, 1992.
- M. Miller, “Computational anatomy: Shape, growth, and atrophy comparison via diffeomorphisms”, NeuroImage, vol. 23, S19–S33, 2004.
- P. Jupp and J. Kent, “Fitting smooth paths to spherical data,” Applied Statistics, vol. 36, pp. 34–46, 1987.
- R. Paribeshh, “Geodesic regression,” Erişim: 19 Ara. 2024. [Online]. Available: <https://towardsdatascience.com/geodesic-regression-d0334de2d9d8>.

- T. Fletcher, “Geodesic regression and the theory of least squares on riemannian manifolds,” *International Journal of Computer Vision*, vol. 105, pp. 171–185, 2013.
- T. Fletcher, “Terse notes on riemannian geometry,” Erişim: 18 Ara. 2024. [Online]. Available: <https://www.sci.utah.edu/~fletcher/RiemannianGeometryNotes.pdf>.
- X. Shi, M. Styner, J. Lieberman, J. Ibrahim, W. Lin, and H. Zhu, “Intrinsic regression models for manifold-valued data,” *J Am Stat Assoc*, vol. 5762, pp. 192–199, 2009.

EK-1: Birim kürede Jeodezik Regresyon yönteminin uygulanması için gerekli olan python yazılımı aşağıda verilmiştir:

```
## Load Dependencies:
```

```
import numpy as np
```

```
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
## Define Function
```

```
def geodesic_distance(x,y):
```

```
    dot_product = np.sum(x*y)
```

```
    mag_x = np.linalg.norm(x)
```

```
    mag_y = np.linalg.norm(y)
```

```
    cosine = dot_product/(mag_x*mag_y)
```

```
    if cosine>1: cosine = 1
```

```
    if cosine<-1: cosine = -1
```

```
    return np.arccos(cosine)
```

```
def log_map(x,y):
```

```
    d = geodesic_distance(x,y)
```

```
    temp = y - np.sum(x*y) * x
```

```
    if np.linalg.norm(temp) != 0:
```

```
        mapped_value = d * (temp/np.linalg.norm(temp))
```

```
    else:
```

```
        mapped_value = np.array([0.0,0.0,0.0])
```

```
    return mapped_value
```

```
def exp_map(p,v):
```

```
    mag_v = np.linalg.norm(v)
```

```
if mag_v == 0:
    return p
v_normalized = v/mag_v
mapped_value = p * np.cos(mag_v) + v_normalized *
np.sin(mag_v)
return mapped_value
def parallel_transport(v,p,q):
    logmap1 = log_map(p,q)
    logmap2 = log_map(q,p)
    if np.linalg.norm(logmap1)!=0 and
np.linalg.norm(logmap2)!=0:
        transported_value = v - (np.dot(logmap1 ,
v)/geodesic_distance(p,q)) * (logmap1+logmap2)
    else:
        transported_value = v
    return transported_value
## Generate data
#initialize dimension, pi and number of data points N
dim = 3
pi = 3.14
N = 20
# mean and covariance for noise generation
cov = np.eye(dim)
mean = np.zeros((dim))
noise = np.random.multivariate_normal(mean,cov*0.001,N)
```

```
#set the parameters p and v
p = np.array([1,0,0])
v = np.array([0,pi/4,0])
#define the independent variable x and create array of xiv
x = np.arange(-1,1,0.1)
v_array = np.dot(x.reshape(-1,1),v.reshape(1,-1))
#generate noise free data points y_temp and add noise to get noisy
data y.
y_temp = np.array([exp_map(p,v_array[i]) for i in range(N)])
y = y_temp+noise
## Implement Geodesic Regression for Prediction
#compute gradients
def grad_p(p,v,y):
    grad = 0
    for i in range(N):
        mapped_value = exp_map(p,v*x[i])
        error_vec = log_map(mapped_value,y[i])
        error_vec_transported =
parallel_transport(error_vec,mapped_value,p)
        grad += error_vec_transported
    return -1*grad/N
def grad_v(p,v,y):
    grad = 0
    for i in range(N):
        mapped_value = exp_map(p,v*x[i])
```

```
error_vec = log_map(mapped_value,y[i])
error_vec_transported =
parallel_transport(error_vec,mapped_value,p)
grad += error_vec_transported * x[i]
return -1*grad/N
def compute_cost(X,Y):
    err = 0
    for i in range(N):
        err += geodesic_distance(X[i],Y[i])
    return err/N
#initializing parametres P and V
P = np.array([0.8,0.6,0])
V = np.array([0,0,0.3])
#define hyperparametres iteration and learning rate
iterations = 100 #number of iterations
lr = 0.1 #learning rate
#calculate approximate parametres p and v
for i in range(iterations):
    #parameter P update
    P_new = exp_map(P,-1*lr*grad_p(P,V,y))
    #parameter V update
    V_new = V - lr*grad_v(P,V,y)
    V = parallel_transport(V_new,P,P_new)
    P = P_new
## Display Predictions
```

```
# Generate predicted data points using the optimized parameters
P and V

model_output = np.array([exp_map(P, V * x[i]) for i in
range(N)])

print("Actual data values (y):")

print(y)

print("\nPredicted data values (model_output):")

print(model_output)

## Asses performance of geodesic regression:

#calculate error/accuracy:

v_array=np.dot(x.reshape(-1,1),V.reshape(1,-1))

model_output=np.array([exp_map(P,v_array[i]) for i in
range(N)])

costs=0

costs=np.append(costs,compute_cost(y,model_output))

GR_err=compute_cost(y,model_output)

GR_acc=1-GR_err

print("Error:\t",GR_err*100,"%")

print("Accuracy:\t",GR_acc*100,"%")
```

ON THE SPECIAL CURVES IN THE LIGHTLIKE CONE $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$

Fatma ALMAZ¹

1. INTRODUCTION

The lightlike cone is a fundamental structure of Minkowski spacetime or, more generally, pseudo- Riemannian manifolds. In the context of four-dimensional spacetime, the lightcone of an event represents the set of all light signals emitted from or arriving at that event and consists of vectors for which the metric tensor is degenerate. This concept can be extended to any n –dimensional Lorentzian space.

Curve theory on 5D pseudo-Riemannian manifolds presents special challenges and interesting mathematical structures when the metric is degenerate. Curves on lightlike cones provide testing grounds for better understanding the geometric properties of these manifolds. Curves studied on or associated with a light-like cone in five-dimensional space represent trajectories in a specific region of this higher-dimensional spacetime. The geometry of these curves is determined by the 5D Lorentz metric and the degenerate structure of the cone. If these curves lie entirely on the light-like cone itself, they are a light-like curve. The spacing along these curves is zero, and they can represent the trajectories of massless particles (such as photons) in 5D spacetime.

¹ Asst. Prof. Dr., Batman University, Faculty of Arts and Sciences, Department of Mathematics, fatma.almaz@batman.edu.tr, ORCID: 0000-0002-1060-7813.

The study of curves on lightlike cones in five-dimensional space is particularly important in theoretical physics and differential geometry: For example, in theories involving five or more dimensions, such as string theory or the Kaluza-Klein theory, the geometry of the trajectories of particles or fields in this higher-dimensional spacetime is critical. Lightlike cones can play a role in studying massless modes or certain boundaries in these theories. Furthermore, when investigating the behavior of quantum fields in higher-dimensional spacetimes, lightlike surfaces and the curves on them are important for understanding the propagation and interactions of fields.

A rectifying curve in lightlike cone 5-space is a vector drawn from the origin to a point on the curve that follows a trajectory confined within a special "rectifying plane" derived from the intrinsic geometry of the curve at that point and the metric structure of spacetime. This geometric constraint determines the shape and orientation of the curve within the 5D lightlike cone. The importance of studying such curves is that they contribute to the geometric classification of curves on lightlike cones, represent specific trajectories that massless particles or light can follow, and offer new insights into higher-dimensional/pseudo-Riemannian geometry and theoretical physics. These curves can serve as a bridge to understanding geometric constraints and potential physical implications in degenerate spacetime structures.

A lot of mathematicians have worked on curves in different spaces. Many works have been done related to different curves in null cone, ((Almaz F. , 2025)-(Almaz & Kulahci, 2022), -(Almaz & Kulahci, 2016)). Rectifying curves in Euclidean space are studied ((Chen, 2003), (Ilarslan & Nesovic, 2008)). (Choi, 2012) The authors introduce the notion of the principal-direction curve and principal-donor curve of a Frenet curve and give the relationship of curvature and torsion of its mates. Also, they

characterize some special curves. In references ((Liu, 2004), (Liu & Mong, 2011)), the cone curves and cone curvature function etc are studied by the authors. Also, their representations and some examples of cone curves are given in Minkowski space.

2. PRELIMINARIES

The pseudo-Euclidean 5-space E_1^5 is given with the metric

$$d(x, y) = \sum_{i=1}^4 x_i y_i - x_5 y_5, \quad (2.1)$$

where $x = (x_1, x_2, \dots, x_5), y = (y_1, y_2, \dots, y_5) \in E_1^5$. E_1^5 is a flat pseudo-Riemannian manifold of signature (4,1). Let M be a submanifold of E_1^5 . If the pseudo-Riemannian metric d of E_1^5 induces a pseudo-Riemannian metric d (respectively, a Riemannian metric, a degenerate quadratic form) on M . Let c be a fixed point in E_1^5 and $r > 0$ be a constant. The pseudo-Riemannian null cone is given by

$$\mathbb{Q}_1^4(c, r) = \{\beta \in E_1^5 : d(\beta - c, \beta - c) = 0\}$$

and $\mathbb{Q}_1^4(c, r)$ is a degenerate hypersurface in E_1^5 . The point c is called the center of $\mathbb{Q}_1^4(c, r)$. When $c = 0$ and $q = 1$, one simply denote $\mathbb{Q}_1^4(0)$ by $\mathbb{Q}^4$ and call it the lightlike cone (or simply the light cone), (Liu & Mong, 2011). Let us recall from (Liu & Mong, 2011) the definition of the Frenet frame and curvatures, and let E_1^5 be the lightlike cone 5-space $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$. A vector $\beta \neq 0$ in E_1^5 is called spacelike, timelike or null, if $\langle \beta, \beta \rangle > 0$, $\langle \beta, \beta \rangle < 0$ or $\langle \beta, \beta \rangle = 0$, respectively. A frame field $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ on E_1^5 is called as asymptotic orthonormal frame field, if

$$\begin{aligned} \langle n_4, n_4 \rangle &= \langle n_5, n_5 \rangle = 0, \langle n_4, n_5 \rangle = 1, \\ \langle n_4, n_i \rangle &= \langle n_5, n_i \rangle = 0, \quad \langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

and a frame field $\{n_1, n_2, n_3, n_4, n_5\}$ on E_1^5 is called a pseudo orthonormal frame field, if

$$\langle n_4, n_4 \rangle = -\langle n_5, n_5 \rangle = 1, \langle n_4, n_5 \rangle = 0,$$

$$\langle n_4, n_1 \rangle = \langle n_5, n_i \rangle = 0, \quad \langle n_i, n_j \rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3$$

and let the curve $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$, $t \rightarrow \beta(t) \in \mathbb{Q}^4$ be a regular curve in $\mathbb{Q}^4$ and $\beta'(t) = \frac{d\beta(t)}{dt}$, for $\forall t \in I \subset \mathbb{R}$ since $\langle \beta, \beta \rangle = 0$ and $\langle \beta, d\beta \rangle = 0$, $d\beta(t)$ is spacelike. Then, the induced arclength (or simply the arclength) s of the curve $\beta(t)$ can be defined by $ds^2 = \langle d\beta(t), d\beta(t) \rangle$, ((O'Neill, 1983), (Ludvigsen, 1999), (Tsampanlis, 2010). For the arc length s of the curve $\beta(s) = \beta(t(s))$ as the parameter, and $\beta'(s) = v_1(s)$ is a spacelike unit tangent vector field of the curve $\beta(s)$. Then, for the vector field $y(s)$ the spacelike normal space V^2 of the curve $\beta(s)$ such that they satisfy the following conditions:

$$\langle \beta(s), y(s) \rangle = 1,$$

$$\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \langle y(s), y(s) \rangle = \langle v_1(s), y(s) \rangle = 0,$$

$$\langle v_2(s), \beta(s) \rangle = \langle v_2(s), y(s) \rangle = \langle v_1(s), v_2(s) \rangle = 0$$

$$\langle v_3(s), \beta(s) \rangle = \langle v_3(s), y(s) \rangle = \langle v_1(s), v_3(s) \rangle = 0$$

$$\langle v_i(s), v_j(s) \rangle = \delta_{ij}, i, j = 1, 2, 3.$$

$$V^2 = \{\text{span}\{\beta, y, v_1\}\}^\perp, \text{span}_R\{\beta, y, v_1, V^2\} = E_1^5.$$

Therefore, we have the following Frenet formulas

$$\beta'(s) = v_1(s)$$

$$\nabla_{v_1} v_1 = v_1'(s) = \kappa_1(s)\beta(s) - y(s) + \tau_1(s)v_2(s)$$

$$\nabla_{v_1} v_2 = v_2'(s) = \kappa_2(s)\beta(s) - \tau_1(s)v_1(s) + \tau_2(s)v_3(s) \quad (2.1)$$

$$\nabla_{v_1} v_3 = v_3'(s) = \kappa_3(s)\beta(s) - \tau_2(s)v_2(s)$$

$$y'(s) = -\kappa_1(s)v_1(s) - \kappa_2(s)v_2(s) - \kappa_3(s)v_3(s),$$

where $v_2(s), v_3(s) \in V^2$, $\langle v_i, v_j \rangle = \delta_{ij}$, $i, j = 2, 3$. The functions $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$, $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$ are called cone curvature functions of the curve $\beta(s)$. The frame

$$\{\beta(s), v_1(s), v_2(s), v_3(s), y(s)\} \quad (2.3)$$

is called the asymptotic orthonormal frame on E_1^5 along the curve $\beta(s)$ in $\mathbb{Q}^4$, ((O'Neill, 1983), (Ludvigsen, 1999), (Tsamparlis, 2010).

3. REPRESENTATION OF THE RECTIFYING CURVE IN THE LIGHTLIKE CONE $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$

In this section, some characterizations of the rectifying curves are expressed according to the asymptotic orthonormal frame in lightlike Cone $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$.

Definition 1 Let $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ be a unit speed non-null curve with non-zero cone curvature functions $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$; $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$ and the asymptotic orthonormal frame of the curve β is $\{\beta(s), v_1(s), v_2(s), v_3(s), y(s)\}$ in $\mathbb{Q}^4$. Then, the curve β is said to be rectifying curve in $\mathbb{Q}^4$ the position vector β satisfies

$$\beta(s) = \lambda(s)v_1(s) + \mu(s)v_3(s) + \gamma(s)y(s). \quad (3.1)$$

If the derivative is taken with respect to s in the equation (3.1) in the definition and the equations (2.1) are used, one gets

$$\begin{aligned} \beta'(s) &= (\lambda'(s) - \gamma(s)\kappa_1(s))v_1(s) \\ &\quad + (\lambda(s)\tau_1(s) - \mu(s)\tau_2(s) - \kappa_2(s)\gamma(s))v_2(s) \\ &\quad + (\mu'(s) - \kappa_3(s)\gamma(s))v_3(s) \\ &\quad + (-\lambda(s) + \gamma'(s))y(s) + (\kappa_1(s)\lambda(s) + \kappa_3(s)\mu(s))x(s) \end{aligned}$$

Here, when the necessary operations are performed, that is, if both sides of the equality are subjected to inner

multiplication with $v_1(s)$, $v_2(s)$, $v_3(s)$, $\beta(s)$, $y(s)$ respectively, one gets

$$\begin{aligned}\lambda'(s) - \gamma(s)\kappa_1(s) &= 1 \\ \lambda(s)\tau_1(s) - \mu(s)\tau_2(s) - \kappa_2(s)\gamma(s) &= 0 \\ \mu'(s) - \kappa_3(s)\gamma(s) &= 0 \\ -\lambda(s) + \gamma'(s) &= 0 \\ \kappa_1(s)\lambda(s) + \kappa_3(s)\mu(s) &= 0.\end{aligned}\tag{3.2}$$

When the necessary calculations are made, one has

$$\lambda = \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}\gamma; \mu = \frac{-\kappa_2\kappa_1}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}\gamma; \gamma = \int \lambda(s)ds + a; a \in \mathbb{R}.\tag{3.3}$$

Finally, considering their equality together

$$\lambda(s) = \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}\gamma(s); \lambda(s) = \gamma'(s),$$

one gets

$$\gamma(s) = Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds}.\tag{3.4}$$

Therefore, the following equality is found

$$\begin{aligned}\lambda(s) &= \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds}; \\ \mu(s) &= \frac{-\kappa_2\kappa_1}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds}.\end{aligned}\tag{3.5}$$

In this case, considering the equations (3.4) and (3.5) in (3.1), one gets

$$\beta(s) = Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds} \left(\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}v_1 + \frac{-\kappa_2\kappa_1}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}v_3 + y \right).\tag{3.6}$$

Also, considering (3.5) and (3.4) in the equation $\lambda'(s) - \gamma(s)\kappa_1(s) = 1$, one has

$$\left(\frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds} \right)' - \kappa_1(s)e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}ds} = \frac{1}{A}.\tag{3.7}$$

Let's continue the analysis in the light of the information given above, let the β curve be a curve satisfying the equation (3.6) with $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ and having the cone curvature functions $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s); \tau_1(s), \tau_2(s)$. In this case, consider the vector $X(s) \in \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ given by

$$X(s) = \beta(s) - \lambda(s)v_1(s) - \mu(s)v_3(s) - \gamma(s)y(s). \quad (3.8)$$

Then, using relations (2.1) and (3.7), we find $X'(s) = 0$. This shows that X is a constant vector. This shows that X is equivalent to a rectifying curve. In this case, the following result is given.

Corollary 1 Let $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ be a unit speed non-null curve with non-zero cone curvature functions $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s); \tau_1(s), \tau_2(s)$ and let $\{\beta, v_1, v_2, v_3, y\}$ be the asymptotic orthonormal frame of the curve β in $\mathbb{Q}^4$. Then the β curve is equivalent to a rectifying curve. It is necessary and sufficient that the equation given in the form

$$\left(\frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_3 \tau_1 + \kappa_1 \tau_2} e^{\int \frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_3 \tau_1 + \kappa_1 \tau_2} ds} \right)' - \kappa_1(s) e^{\int \frac{\kappa_2 \kappa_3}{\kappa_3 \tau_1 + \kappa_1 \tau_2} ds} = B; B \in \mathbb{R}$$

is satisfied.

Theorem 1 There is no curve lying completely in $\mathbb{Q}^4$ with non-zero curvatures $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s); \tau_1(s), \tau_2(s)$. However, if four of the curvature functions are constant, the following cases hold.

1) If $\kappa_1(s) \neq 0, \kappa_2(s), \kappa_3(s), \tau_1(s), \tau_2(s) = \text{constant}$,

$$\kappa_1' + \frac{\tau_2^2}{\kappa_2 \tau_1} \kappa_1^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_1} + \frac{2\kappa_3 \tau_2}{\kappa_2} \right) \kappa_1 + \frac{\kappa_3^2 \tau_1}{\kappa_2} = 0, \quad (3.9)$$

where

$$\kappa_1 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\kappa_2^2 + 2\kappa_3 \tau_1 \tau_2}{\tau_2^2} \right) \pm \frac{\kappa_2 \sqrt{\kappa_2^2 + 2\kappa_3 \tau_1 \tau_2}}{2\tau_2^2 \tau_1}$$

$$+ (\pm \frac{\kappa_2^2 + 2\kappa_3\tau_1\tau_2}{\kappa_2\sqrt{\kappa_2^2 + 4\kappa_3\tau_1\tau_2}} + Ce^{\pm \frac{\sqrt{\kappa_2^2 + 4\kappa_3\tau_1\tau_2}}{\tau_1}s})^{-1}.$$

2) If $\kappa_2(s) \neq 0$, $\kappa_1(s)$, $\kappa_3(s)$; $\tau_1(s)$, $\tau_2(s) = \text{constant}$,

$$\kappa_2' + \frac{\kappa_3}{\tau_2\kappa_1 + \tau_1\kappa_3}\kappa_2^2 + \frac{\kappa_3(\tau_2\kappa_1 + \tau_1\kappa_3)}{\kappa_1} = 0, \quad (3.10)$$

where

$$\kappa_2 = \left(\sqrt{\frac{\kappa_1}{\kappa_3(\tau_2\kappa_1 + \tau_1\kappa_3)}} \frac{1}{\cos(\frac{-\kappa_3}{\sqrt{\kappa_1}}s + D)} - \frac{(\tau_2\kappa_1 + \tau_1\kappa_3)^2}{\kappa_1} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

3) If $\kappa_3(s) \neq 0$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_1(s)$; $\tau_1(s)$, $\tau_2(s) = \text{constant}$,

$$-\kappa_3' + \frac{\tau_1}{\kappa_1\kappa_2}\kappa_3^3 + \frac{2\tau_2}{\kappa_2}\kappa_3^2 + \left(\frac{\kappa_2}{\tau_1} + \frac{\tau_1\kappa_1}{\kappa_2} \right) \kappa_3 = 0 \quad (3.11)$$

4) If $\tau_1(s) \neq 0$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$; $\kappa_1(s)$, $\tau_2(s) = \text{constant}$,

$$-\tau_1' + \frac{\kappa_3^2}{\kappa_1\kappa_2}\tau_1^2 + \frac{2\kappa_3\tau_2}{\kappa_2}\tau_1 + \left(\kappa_2 + \frac{\tau_2^2\kappa_1}{\kappa_2} \right) = 0, \quad (3.12)$$

where

$$\tau_1 = -\frac{\kappa_1\tau_2}{\kappa_3} \pm \sqrt{\kappa_1\kappa_2}i + \left(\frac{\pm\kappa_3\sqrt{\kappa_2}}{2\kappa_1}i + E\left(\cos\left(\frac{2\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2}}s\right) \pm i\sin\left(\frac{2\kappa_3}{\sqrt{\kappa_2}}s\right)\right) \right)^{-1}.$$

5) If $\tau_2(s) \neq 0$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$; $\tau_1(s)$, $\kappa_1(s) = \text{constant}$,

$$-\tau_2' + \frac{\kappa_3}{\kappa_2}\tau_2^2 + \frac{2\kappa_3^2\tau_1}{\kappa_1\kappa_2}\tau_2 + \frac{\kappa_3\kappa_2}{\kappa_1} + \frac{\kappa_3^3\tau_1^2}{\kappa_1^2\kappa_2} = 0, \quad (3.13)$$

where

$$\tau_2 = -\frac{\kappa_3\tau_1}{\kappa_1} \pm \frac{\kappa_2}{2\kappa_3}\sqrt{\Delta} + \left(\pm \frac{\kappa_3}{\kappa_2\sqrt{\Delta}} + \varepsilon e^{\pm\sqrt{\Delta}s} \right)^{-1},$$

where $\Delta = \frac{2\kappa_3i}{\sqrt{\kappa_1}}$ and $C, D, \varepsilon \in \mathbb{R}$.

Proof. If the curvature conditions given in the theorem are taken into account in equation (3.7), the differential equations are found according to the condition that the curvatures are constant. The solutions of the resulting differential equations can be found explicitly.

Theorem 2 Let $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ be a unit speed non-null curve with non-zero cone curvature functions $\kappa_1(s)$, $\kappa_2(s)$, $\kappa_3(s)$; $\tau_1(s)$, $\tau_2(s)$ of the curve β in $\mathbb{Q}^4$. If β is a rectifying curve, the following statements holds

1) The distance function d is given as follows

$$d(s) = 2\gamma(s).$$

2) The normal component β^N of β

$$d_N^2(s) = \gamma'(s).$$

3) The components of the β curve in the directions α_1, y and v_3 are given as follows, respectively.

$$\begin{aligned}\langle \beta, v_1 \rangle &= \frac{A\kappa_2\kappa_3 e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds}}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}; \\ \langle \beta, v_3 \rangle &= \frac{-A\kappa_2\kappa_1 e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds}}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2}; \\ \langle \beta, y \rangle &= A e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds},\end{aligned}$$

where $\gamma(s) = A e^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds}$; $A \in \mathbb{R}$.

Proof. For a unit speed non-null curve β with non-zero cone curvature functions κ_1 , κ_2 , κ_3 , τ_1 , τ_2 and the asymptotic orthonormal frame $\{\beta, v_1, v_2, v_3, y\}$ in $\mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$. Thus, considering the position vector equation given in (3.1), one has

$$d^2(s) = \langle \beta(s), \beta(s) \rangle = \lambda^2 + \mu^2 \quad (3.14)$$

and from the equations in (3.2), the equations $\lambda' - \gamma\kappa_1 = 1$ and $\mu' - \gamma\kappa_3 = 0$ are multiplied by λ, μ , respectively, one has

$$\lambda\lambda' - \lambda\gamma\kappa_1 = \lambda \quad (3.15)$$

$$\mu\mu' - \mu\gamma\kappa_3 = 0. \quad (3.16)$$

If the necessary calculations are made and the integral is taken in the equations obtained

$$\lambda\lambda' + \mu\mu' = \lambda + \gamma(\lambda\kappa_1 + \mu\kappa_3) = \lambda = \gamma' \Rightarrow \lambda^2 + \mu^2 = \gamma \quad (3.17)$$

and

$$d(s) = 2\gamma(s) = 2Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds}; A \in \mathbb{R}. \quad (3.18)$$

Secondly, the normal space elements of the curve given in (3.1) are of the form $\beta^N = \lambda v_1 + \gamma y$, one has

$$d_N^2(s) = \langle \beta^N(s), \beta^N(s) \rangle = \lambda = \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} Ae^{\int \frac{\kappa_2\kappa_3}{\kappa_3\tau_1 + \kappa_1\tau_2} ds}. \quad (3.19)$$

Finally, from equations (3.1), (3.4) and (3.5) elements of the curve are easily found.

Theorem 3 Let $\beta: I \rightarrow \mathbb{Q}^4 \subset E_1^5$ be a non-null rectifying curve with non-zero cone curvature functions $\kappa_1(s), \kappa_2(s), \kappa_3(s); \tau_1(s), \tau_2(s)$ given by $\beta(t) = \psi(t)\omega(t)$, where $\psi(t)$ is an arbitrary positive function and let $\omega(t)$ be a unit speed curve in $H_1^4(1)$. Then, $\omega(t)$ is a rectifying curve if and only if

$$\psi(t) = \frac{-1}{\cos(t + t_0)}, t_0 \in \mathbb{R}.$$

Proof. Let Ψ be a curve in $\mathbb{Q}^4$ given by $\beta(t) = \psi(t)\omega(t)$ and $\psi(t)$ be a positive arbitrary function. Let $\omega(t)$ be a unit speed curve on the space $H_1^4(1)$. In this case, when the derivative of the curve is taken with respect to t , one has

$$\beta'(t) = \psi'(t)\omega(t) + \psi(t)\omega'(t), \quad (3.20)$$

and the tangent vector field of the curve is $v = \sqrt{\psi'^2 + \psi^2}$, and one has

$$v_1 = \frac{\psi'}{v} \omega + \frac{\psi}{v} \omega', \quad (3.21)$$

if we take the derivative again in (3.21), one gets

$$v'_1 = \left(\frac{\psi'}{v}\right)' \omega + \left(\frac{\psi'}{v} + \left(\frac{\psi}{v}\right)'\right) \omega' + \frac{\psi}{v} \omega''. \quad (3.22)$$

Also, let the asymptotic orthonormal frame given for ω be $\{\omega, \omega' = n_1, n_2, n_3, m\}$. By using the frame, the following equation is written as

$$\begin{aligned} \omega'' = & \langle \omega'', m \rangle \omega + \langle \omega'', \omega \rangle m + \langle \omega'', n_1 \rangle n_1 \\ & + \langle \omega'', n_2 \rangle n_2 + \langle \omega'', n_3 \rangle n_3 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Considering that the component functions and $\beta(t) = \psi(t)\omega(t)$, one obtains

$$\omega'' = \kappa_1^\omega \omega - t + \tau_1^\omega \beta_2. \quad (3.24)$$

Finally, if the asymptotic frame $\{\omega, n_1, n_2, n_3, m\}$ defined on the curve $\psi(t)$ given in $\mathbb{Q}^4$ is considered in (3.22) and by using the equation (3.24) one gets

$$\begin{aligned} v'_1 = & \left(\left(\frac{\psi'}{v}\right)' + \kappa_1^\omega \frac{\psi}{v}\right) \omega - \frac{\psi}{v} m + \left(\frac{\psi'}{v} + \left(\frac{\psi}{v}\right)'\right) n_1 \\ & + \frac{\psi}{v} \tau_1^\omega \beta_2. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Furthermore, since β is a rectifying curve, multiplying both sides of equation (3.25) by β yields, one obtains

$$-1 = -\frac{\psi}{v} \langle m, \beta \rangle \Rightarrow 1 = \frac{\psi^2}{v} \langle m, \omega \rangle \quad (3.26)$$

and due to the asymptotic orthonormal frame $\langle m, \omega \rangle = 1$, and the equation can be written as

$$v = \psi^2 \Rightarrow \psi^2 = \sqrt{\psi'^2 + \psi^2}.$$

When the necessary calculations are made, the equation is obtained as

$$\psi(t) = \frac{-1}{\cos(t+t_0)}; t_0 \in \mathbb{R}. \quad (3.27)$$

4. CONCLUSION

In this study, the spacelike rectifying curves lying fully in the 5-dimensional null cone are characterized and some classifications of spacelike curves are given in the null cone $\mathbb{Q}^4$. Also, necessary and sufficient conditions are expressed.

In summary, the light-like cone in five-dimensional space is the set of vectors whose metric norm is zero. The curves on or associated with this cone represent specific trajectories of higher-dimensional spacetime and are an important topic of research in higher-dimensional physical theories and advanced differential geometry.

REFERENCES

- Almaz, F. (2025). A research on space-like Bertrand curve pair in 3D lightlike cone. *Punjab University Journal of Mathematics*, 56(7), 357-368.
- Almaz, F., & K ulahcı, M. (2019). A survey on magnetic curves in 2-dimensional lightlike. *Malaya Journal of Matematik*, 7(3), 477-485.
- Almaz, F., & Kulahci, M. (2021). Involute-evolute D-curves in Minkowski 3-space E_1^3 . *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 39(1), 147-156.
- Almaz, F., & Kulahci, M. (2021). The helix and slant helices generated by non-degenerate curves in $M^3(\delta_0) \subset E_2^4$. *Turkish Journal of Science and Technology*, 16(1), 113-117.
- Almaz, F., & Kulahci, M. (2016). Some characterizations of osculating curves in the light cone. *Boletim da Sociedade Paranaense de Matematica*, 35.
- Almaz, F., & Kulahci, M. (2022). The notes on energy and electromagnetic fields vectors in the null cone Q^2 . *Journal of Science and Arts*, 3, 521-534.
- Chen, B. (2003). When does the position vector of a space curve always lie in its rectifying plane? *Amer. Math. Monthly*, 110, 147-152.
- Choi, JH. (2012). Associated curves of a Frenet curve and their applications. *Appl. Math. Comput.*, 218, 9116-9124.
- Duggal, K., & Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds semi-Riemannian Mani*. Dordrecht: Kluwer Academic, Dordrecht.
- Ilarslan, K., & Nesovic, E. (2008). Some characterizations of rectifying curves in the E^4 . *Turk J Math.*, 32, 21-30.

- Kulahci, M., & Almaz, F. (2016). New Classifications for space-like curves in the null cone. *Prespacetime Journal*, 7(15), 2002-2014.
- Liu, H., & Mong, M. (2011). Representation formulas of curves in two-and-three dimensional lightlike cone. *Results Math.*, 59, 437-451.
- Liu, H. (2004). Curves in the Lightlike Cone. *Beitrage zur Algebra and Geometrie Contributions to Algebra and Geometry*, 25(1), 291-303.
- Ludvigsen, M. (1999). *General Relativity, A Geometric Approach*. Cambridge : Cambridge University Press.
- O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*. New York,: Academic Press, New York.
- Tsamparlis, M. (2010). *Special Relativity, An Introduction with 200 Problems and Solutions*. Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, Berlin Heidelberg.

ALGEBRAIC AND COMBINATORIAL INVARIANTS OF THE NUMERICAL SEMIGROUPS $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$

Meral SÜER¹

1. INTRODUCTION

Numerical semigroups are algebraic structures exhibiting rich arithmetic and combinatorial properties. Their fundamental invariants such as multiplicity, embedding dimension, Frobenius number, and genus serve as key descriptors of their internal organization. In recent years, increasing attention has been devoted to representing these invariants through combinatorial and visual frameworks. Among these, Young diagrams associated with the gap sets of numerical semigroups, together with their corresponding rook polynomials, have emerged as powerful tools for capturing the structural and enumerative characteristics of such semigroups (Süer, 2025; Süer, in press).

The main motivation of this chapter is to demonstrate that the rook polynomial of a numerical semigroup can be expressed in terms of its algebraic invariants. This approach bridges the gap between algebraic structures and combinatorial enumeration, providing new insights into how visual representations encode algebraic information.

Based on this framework, this chapter studies a wider class of interval-generated numerical semigroups by considering

¹ Assoc. Prof. Department of Mathematics, Faculty of Arts and Science, Batman University, e-mail: meral.suer@batman.edu.tr, ORCID: 0000-0002-5512-4305.

$$S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle \text{ with } a \geq 3, \quad (1)$$

derive its fundamental invariants, construct its associated Young diagram, and compute the corresponding rook polynomial in closed form.

Subsequently, we characterize the quotient semigroup $\frac{S}{2}$ and determine its fundamental invariants.

Using the algorithm introduced in Section 3, we then construct the Young diagram corresponding to $\frac{S}{2}$ and compute its rook polynomial explicitly.

This enables a direct comparison between the combinatorial representations of S and $\frac{S}{2}$, revealing how the algebraic invariants transform under halving.

2. PRELIMINARIES ON NUMERICAL SEMIGROUPS

To develop the algebraic framework required for the forthcoming analysis, we recall the fundamental definitions and invariants associated with numerical semigroups.

Let $\mathbb{N}$ denote the set of non-negative integers. A subset $S \subseteq \mathbb{N}$ is called a numerical set if it contains 0 and has only finitely many missing elements in $\mathbb{N}$. Among these, a numerical set that is closed under addition that is, $x + y \in S$ for all $x, y \in S$ is known as a numerical semigroup.

The integers not belonging to S are called its gaps, forming the gap set $G(S) = \mathbb{N} \setminus S$. The genus, denoted $g(S)$, equals the number of gaps: $g(S) = |G(S)|$. When $S = \mathbb{N}$, the gap set is empty, and such S is the trivial numerical set. A proper numerical set is one for which $G(S) \neq \emptyset$.

In that case, the largest gap, i.e. $\max G(S)$, is called the Frobenius number and is written $F(S)$; by convention, $F(\mathbb{N}) = -1$.

The value $C(S) = F(S) + 1$ is termed the conductor of S . Elements of S smaller than $C(S)$ are called its small elements, and the collection of these is denoted by $N(S)$. Their count, $n(S) = |N(S)|$, serves as another numerical invariant of the semigroup. If $N(S) = \{0 = s_0 < s_1 < \dots < s_{n-1}\}$, then

$$S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \rightarrow\}, \quad (2)$$

where the arrow indicates that all integers greater than or equal to the conductor belong to S .

Every numerical semigroup admits a unique finite subset $M(S) \subseteq S$ called its minimal generating set, whose elements called minimal generators generate S additively and no proper subset does.

Two fundamental invariants arise from this set: the embedding dimension, $e(S) = |M(S)|$, representing the size of the generating system, and the multiplicity, $m(S) = \min M(S)$, the smallest positive element of S .

For more comprehensive information and additional definitions concerning numerical semigroups, see Rosales and García-Sánchez (2009).

A numerical semigroup generated by an interval of consecutive nonnegative integers is a semigroup of the form

$$S = \langle a, a + 1, \dots, a + x \rangle = \{\sum_{i=0}^x n_i(a + i) : n_i \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}. \quad (3)$$

Note that if $x \geq a$, then $S = \{a, a + 1, \dots\} = a + \mathbb{N} = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 1 \rangle$ (García-Sánchez & Rosales, 1999).

3. YOUNG DIAGRAM AND ROOK POLYNOMIAL REPRESENTATION

Having introduced the algebraic framework of numerical semigroups, we now turn to a geometric and combinatorial perspective that facilitates a deeper understanding of their structure.

A Young diagram is a finite collection of boxes (also called cells) arranged in left-justified rows or top-aligned columns, following a weakly decreasing order in their lengths or heights.

Formally, a Young diagram may be defined in one of the following equivalent ways:

Column-based definition: A Young diagram consists of columns of boxes aligned at the top, such that the number of boxes in each column is not smaller than the number in the column immediately to its right.

Row-based definition: Alternatively, it can be viewed as rows of boxes aligned on the left, where the number of boxes in each row is not smaller than the number in the row immediately below it.

Example 3.1. As shown in Figure 1, the Young diagram consists of 4 columns and 5 rows.

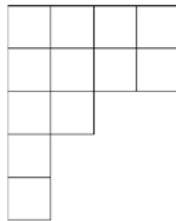


Figure 1. The Young diagram consists of 4 columns and 5 rows.

These two representations are equivalent up to reflection across the main diagonal and are commonly used in combinatorics, representation theory, and algebraic geometry.

Each proper numerical set S can be represented by a Young diagram Y_S constructed on the integer lattice $\mathbb{Z}^2$. Starting at the origin, a lattice path is traced using unit steps as follows: a rightward step is taken whenever an integer $s \in S$, and an upward step is taken whenever $s \notin S$, i.e., when $s \in G(S)$. This process continues sequentially for all nonnegative integers up to the Frobenius number $F(S)$.

The region enclosed by this path, the vertical axis, and the horizontal line $y = g(S)$ defines the Young diagram Y_S . If $S = \{0 = s_0, s_1, \dots, s_{n-1}, s_n, \rightarrow\}$, then Y_S has exactly $n(S) = n$ columns and $g(S)$ rows.

This geometric procedure establishes a bijection between proper numerical sets and Young diagrams.

Example 3.2. Let $S = \{0, 3, 5, 6, 9 \rightarrow\}$, be a numerical set. The Young diagram corresponding to this numerical set is as Figure 2.

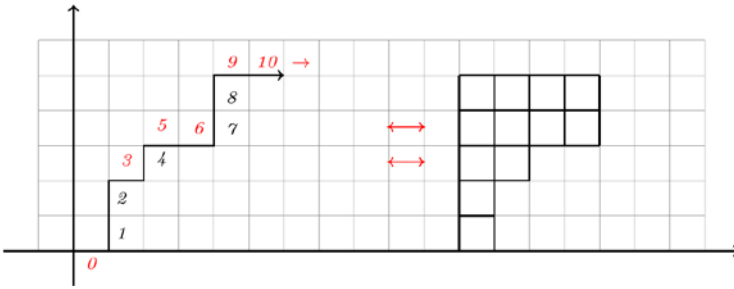


Figure 2. The Young diagram corresponding to $S = \{0, 3, 5, 6, 9, \rightarrow\}$.

For further information on the connection between numerical sets and their associated Young diagrams, see Keith and Nath (2010) and Tutaş et al. (2019).

For a nonnegative integer m , we define

$$[m] = \{1, 2, \dots, m\}. \quad (4)$$

The Cartesian product $[m] \times [n]$ represents an $m \times n$ rectangular grid.

A subset $B \subseteq [m] \times [n]$ is called a board, and its elements, that is, the ordered pairs $(i, j) \in B$, are referred to as cells of the board.

If m and n are chosen as the smallest positive integers for which $B \subseteq [m] \times [n]$, then B is said to be an $m \times n$ board in the strict sense; in other words, the board dimensions are not unnecessarily enlarged.

The complete grid $[m] \times [n]$ is called the full $m \times n$ board.

Example 3.3. As illustrated in Figure 3, let the given set of cells be $B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)\}$.

	1	2	3
1	(1,1)	(1,2)	(1,3)
2	(2,1)	(2,2)	(2,3)
3	(3,1)	(3,2)	(3,3)

Figure 3. A partial 3×3 board corresponding to the set B

This set forms a subset of the Cartesian product $[3] \times [3]$.

Accordingly, the maximum row index is $m = 3$ and the maximum column index is $n = 3$. Thus, the set B is defined on a 3×3 board.

Each cell in the diagram corresponds to an ordered pair (i, j) , where i indicates the row number and j the column number. The set B therefore represents a partial board, since only a selection of cells within the 3×3 grid is included.

If all elements of $[3] \times [3]$ were present, the resulting configuration would constitute a full board.

Rook polynomials constitute a fundamental combinatorial tool for studying the structural properties of such boards.

They enumerate configurations of nonattacking rooks placed on the cells of a board and encode rich geometric and algebraic information.

Formally, if $r_k(B)$ denotes the number of distinct ways to place k nonattacking rooks on a board B , then the rook polynomial associated with B is defined as

$$R_B(x) = \sum_{k=0}^{\infty} r_k(B)x^k. \quad (5)$$

When the board B is rectangular of size $m \times n$, the maximum number of nonattacking rooks that can be placed on it is $\min(m, n)$.

Consequently, the degree of the rook polynomial $R_B(x)$ is at most $\min(m, n)$.

An essential property of rook polynomials is invariance under permutations of the rows or columns of the board.

Such transformations do not alter the set of admissible nonattacking configurations, and hence the rook polynomial remains unchanged.

This invariance reflects an intrinsic structural symmetry of the model and emphasizes the combinatorial harmony underlying rook placements.

Example 3.4. As illustrated in Figure 3, let $B = \{(1,1), (1,2), (2,1), (3,3)\}$ be the given board. The corresponding rook polynomial $R_B(x)$ represents the number of ways to place non-attacking rooks on B .

We obtain $r_0(B) = 1, r_1(B) = 4, r_2(B) = 2$ and $r_k(B) = 0$ for $k \geq 3$. Therefore, the rook polynomial is

$$R_H(x) = 1 + 4x + 2x^2. \quad (6)$$

For classical definitions and properties of rook polynomials, see Riordan (1958).

4. STRUCTURAL PROPERTIES OF NUMERICAL SEMIGROUPS $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ WITH $a \geq 3$.

In this chapter, we focus on the special case $x = a - 2$ of numerical semigroups generated by consecutive integers. We first determine the main invariants of these semigroups, including the Frobenius number, genus, and multiplicity. Then, we construct the associated Young diagram corresponding to the set of gaps and compute its rook polynomial. Finally, we express the coefficients of the rook polynomial in terms of the invariants of the semigroup, establishing a direct link between algebraic and combinatorial structures.

Lemma 4.1. The Frobenius number of $S = \langle a, a + 1, \dots, a + x \rangle$ is $\left\lceil \frac{a-1}{x} \right\rceil a - 1$, where $[q]$ denotes the least integer greater than or equal to $q \in \mathbb{Q}^+$.

Proposition 4.2. Let $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ with $a \geq 3$.

Then the semigroup S can be expressed as

$$S = \{0, a, a + 1, \dots, 2a - 2, 2a, \rightarrow\}. \quad (7)$$

The fundamental invariants of S are as follows:

$$\begin{aligned} m(S) &= a, & G(S) &= \{1, 2, \dots, a - 1, 2a - 1\}, \\ g(S) &= a, & e(S) &= a - 1, \\ n(S) &= a, & F(S) &= 2a - 1. \end{aligned} \quad (8)$$

Proof. Apply Lemma 1 to the general interval-generated semigroup $\langle a, a + 1, \dots, a + x \rangle$. In the present case we have

$x = 2a - 2 - a = a - 2$. For $a \geq 3$ we compute

$$\frac{a-1}{a-2} = 1 + \frac{1}{a-2}, \quad (9)$$

so $\left\lceil \frac{a-1}{a-2} \right\rceil = 2$. Hence Lemma 1 yields

$$F(S) = 2a - 1. \quad (10)$$

Since the minimal positive element of S is a , we obtain immediately $m(S) = a$. The minimal system of generators of S is $\{a, a + 1, \dots, 2a - 2\}$; its cardinality is $(2a - 2) - a + 1 = a - 1$, therefore the embedding dimension is $e(S) = a - 1$. Next we determine the set of gaps $G(S)$. Clearly the integers $1, 2, \dots, a - 1$ cannot be expressed as nonnegative combinations $a, a + 1, \dots, 2a - 2$, so they belong to $G(S)$. From the computation of the Frobenius number we know $2a - 1 \notin S$ and $2a - 1$ is the largest integer not in S ; therefore $2a - 1 \in G(S)$. Any integer n with $n \geq 2a$ lies in S (indeed $2a = a + a \in S$) $a \leq n \leq 2a - 2$ we have $n \in S$ by the choice of generators. Thus no other gaps occur, so

$$G(S) = \{1, 2, \dots, a - 1, 2a - 1\}. \quad (11)$$

Counting gaps gives the genus $g(S) = |G(S)| = (a - 1) + 1 = a$. The quantity $n(S)$, i.e. the

number of elements of S not exceeding the Frobenius number $F(S)$, equals the number of elements in the list $\{0, a, a + 1, \dots, 2a - 2\}$, which is $1 + (a - 1) = a$; hence $n(S) = a$.

Collecting these results yields the claimed list of invariants.

Theorem 4.3. Let $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ with $a \geq 3$, and let Y_S denote the Young diagram associated to S in the manner used above. Denote by $F(S)$ the Frobenius number of S and by $e(S)$ its embedding dimension. Then the rook polynomial of the Young diagram

$$R_{Y_S}(x) = 1 + F(S)x + [e(S)]^2 x^2. \quad (12)$$

Proof. By Proposition 4.2, we have already determined the fundamental invariants of the semigroup $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$. In particular, the semigroup can be expressed as $S = \{0, a, a + 1, \dots, 2a - 2, 2a, \rightarrow\}$ with $e(S) = a - 1$ and $F(S) = 2a - 1$.

By the definition of the Young diagram associated with a numerical semigroup, the diagram Y_S corresponding to S can be constructed as in Figure 4.

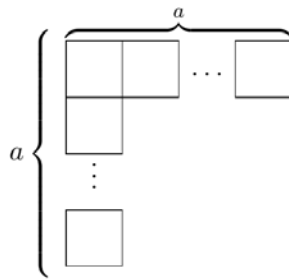


Figure 4. The Young diagram corresponding to $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$.

The resulting diagram has the shape of a hook consisting of a horizontal arm of length a and a vertical arm of length a ,

sharing a common top left cell. Therefore, the total number of cells in the diagram is $2a - 1$.

We now compute the coefficients of the rook polynomial associated with this diagram.

- For zero rooks, there is exactly one empty configuration; hence $r_0(Y_S) = 1$.
- For one rook, each of the $2a - 1$ cells corresponds to a distinct placement, giving $r_1(Y_S) = 2a - 1 = F(S)$.
- The total number of valid two-rook placements can be determined as follows: Each cell belonging to the vertical arm, except for the top left cell, occupies a distinct position in the first column, while each cell in the horizontal arm, excluding the common cell, lies in the first row. Therefore, in order to ensure that the two rooks do not attack each other, one rook must be placed on a cell from the horizontal arm (excluding the overlap) and the other on a cell from the vertical arm (again excluding the overlap). Since there are $a - 1$ available positions in each arm, it follows that there are $(a - 1)^2$ possible non-attacking configurations. Any alternative placement would necessarily position both rooks within the same row or the same column, thereby producing an attacking configuration. Consequently, the total number of valid two-rook placements is $r_2(Y_S) = (a - 1)^2 = [e(S)]^2$.
- The final assertion $r_k(Y_S) = 0$ for $k \geq 3$ is a consequence of the same structural restriction: there is at most one column (the first) available for the lower rows, so more than two rooks cannot be placed without some pair sharing a row or a column.

Consequently, the rook polynomial associated with the Young diagram Y_S is

$$R_{Y_S}(x) = 1 + F(S)x + [e(S)]^2 x^2. \quad (13)$$

This completes the proof.

Example 4.4. Consider the numerical semigroup $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$. It can be written explicitly as $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10 \rangle = \{0, 6, 7, 8, 9, 10, 12, \rightarrow\}$. The fundamental invariants of S are as follows:

$$\begin{aligned} m(S) &= 6, & G(S) &= \{1, 2, 3, 4, 5, 11\}, \\ g(S) &= 6, & e(S) &= 5, \\ n(S) &= 6, & F(S) &= 11. \end{aligned} \quad (14)$$

Based on these invariants, the Young diagram associated with S can be constructed by applying the algorithm described in Section 3. The corresponding diagram is illustrated in Figure 5.

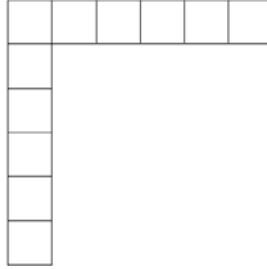


Figure 5. The Young diagram corresponding to $S = \langle 6, 7, 8, 9, 10 \rangle$.

Consequently, the rook polynomial of the Young diagram Y_S is easily computed as

$$R_{Y_S}(x) = 1 + F(S)x + [e(S)]^2 x^2 = 1 + 11x + 25x^2 \quad (15)$$

5. THE HALF OF THE NUMERICAL SEMIGROUP $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$

In this section, we investigate the quotient of the interval-generated numerical semigroup $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$, $a \geq 3$, by a positive integer. Specifically, we focus on understanding the structural changes that occur when S is divided by a positive integer d .

In this section, we consider the quotient of the numerical semigroup $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ by 2. First, we explicitly characterize the quotient semigroup $\frac{S}{2}$ and compute its fundamental invariants, such as the multiplicity, embedding dimension, and Frobenius number. Then, following the algorithm presented in Section 3 for constructing Young diagrams associated with numerical semigroups, we obtain the Young diagram corresponding to $\frac{S}{2}$ and determine its rook polynomial.

Definition 5.1. Let S be a numerical semigroup and let d be a positive integer. The quotient of S by d is defined as

$$\frac{S}{d} = \{x \in \mathbb{N} : dx \in S\}. \quad (16)$$

It follows directly from the definition that $\frac{S}{d}$ is itself a numerical semigroup, since the set on the right-hand side is closed under addition and has a finite complement in $\mathbb{N}$. We refer to $\frac{S}{d}$ as the quotient semigroup of S by d . In particular, $\frac{S}{2}$ is called the half of S , and $\frac{S}{4}$ is referred to as the quarter of S (Rosales & García-Sánchez, 2009).

Theorem 5.1. Let $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ with $a \geq 3$. Then the half of S is given by

$$\frac{S}{2} = \{0, [\frac{a}{2}], \rightarrow\}. \quad (17)$$

Proof. By definition,

$$\frac{S}{2} = \{x \in N : 2x \in S\}. \quad (18)$$

Let $x \in \{0, \lceil \frac{a}{2} \rceil, \rightarrow\}$. If $x = 0$, then clearly $2x = 0 \in S$. Otherwise, $x \geq \lceil \frac{a}{2} \rceil$, which implies $2x \geq a$. Since

$$\frac{2a-1}{2} = a - \frac{1}{2} < a, \quad (19)$$

we have $2x \neq 2a - 1$, and hence $2x \in \{0, a, a + 1, \dots, 2a - 2, 2a, \rightarrow\} = S$. Therefore, $x \in \frac{S}{2}$, showing that

$$\{0, \lceil \frac{a}{2} \rceil, \rightarrow\} \subseteq \frac{S}{2}. \quad (20)$$

Conversely, let $x \in \frac{S}{2}$. Then $2x \in S$. If $2x = 0$, we have $x = 0$. Otherwise, $2x \geq a$ and $2x \neq 2a - 1$, which implies $x \geq \frac{a}{2}$, and thus $x \geq \lceil \frac{a}{2} \rceil$. Therefore,

$$\frac{S}{2} \subseteq \{0, \lceil \frac{a}{2} \rceil, \rightarrow\}. \quad (21)$$

Combining both inclusions yields the desired equality:

$$\frac{S}{2} = \{0, \lceil \frac{a}{2} \rceil, \rightarrow\}. \quad (22)$$

Proposition 5.2. Let $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ with $a \geq 3$. The fundamental invariants the half of S , denoted by $\frac{S}{2}$, are given by

$$\begin{aligned} m(\frac{S}{2}) &= \lceil \frac{a}{2} \rceil & G(\frac{S}{2}) &= \{1, \dots, \lceil \frac{a}{2} \rceil - 1, \} \\ e(\frac{S}{2}) &= \lceil \frac{a}{2} \rceil & g(\frac{S}{2}) &= \lceil \frac{a}{2} \rceil - 1 \\ n(\frac{S}{2}) &= 1 & F(\frac{S}{2}) &= \lceil \frac{a}{2} \rceil - 1 \end{aligned} \quad (23)$$

Proof. All equalities above are immediate from the definition of $\frac{S}{2}$ and from the standard definitions of the invariants.

Theorem 5.3. Let $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$ with $a \geq 3$. let $Y_{S/2}$ denote the Young diagram associated with the quotient semigroup $\frac{S}{2}$, constructed under the same convention as in Section 3. Then the rook polynomial of $Y_{S/2}$ is

$$R_{Y_{S/2}}(x) = 1 + \left(\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil - 1 \right) x. \quad (24)$$

Proof. By Theorem 5.1, the half of S is given by $\frac{S}{2} = \{0, \left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil, \rightarrow\}$. From Proposition 5.2, We have the fundamental invariants of $\frac{S}{2}$. Following the construction algorithm of Section 3, the Young diagram corresponding to $\frac{S}{2}$ is formed by $\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil - 1$ arranged in a single column, as shown in Figure 6.

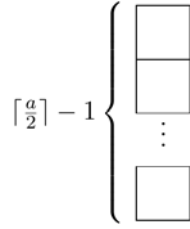


Figure 6. The Young diagram corresponding to the half of $S = \langle a, a + 1, \dots, 2a - 2 \rangle$.

According to the definition of the rook polynomial, we now determine the number of non-attacking rook placements on this board:

- For 0 rooks, there is exactly one configuration the empty placement.
- For 1 rook, it may be placed in any of the $\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil - 1$ cells, giving $\left\lceil \frac{a}{2} \right\rceil - 1$ possible configurations.

- For 2 or more rooks, such placements are impossible since all cells lie in the same column, and thus any two rooks would attack each other.

Consequently, the rook polynomial of $Y_{S/2}$ is

$$R_{Y_{S/2}}(x) = 1 + \left(\left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 \right) x. \quad (25)$$

Example 5.4. Let S be the numerical semigroup given in Example 4.4, where $a = 6$. Then the quotient of S by 2 is $\frac{S}{2} = \{0, 3, \rightarrow\} = \langle 3, 4, 5 \rangle$. The fundamental invariants of $\frac{S}{2}$ are determined as follows:

$$\begin{aligned} m\left(\frac{S}{2}\right) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = 3 & G\left(\frac{S}{2}\right) &= \left\{1, \dots, \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1, \right\} = \{1, 2\} \\ e\left(\frac{S}{2}\right) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor = 3 & g\left(\frac{S}{2}\right) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 = 2 \\ n\left(\frac{S}{2}\right) &= 1 & F\left(\frac{S}{2}\right) &= \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor - 1 = 2 \end{aligned} \quad (26)$$

Following the same algorithm introduced in Section 3, we obtain the Young diagram corresponding to $\frac{S}{2}$, which is shown in Figure 7.



Figure 7. The Young diagram corresponding to the half of S

Accordingly, the rook polynomial associated with this diagram is given by

$$R_{Y_{S/2}}(x) = 1 + 2x \quad (27)$$

REFERENCES

- García-Sánchez, P. A., & Rosales, J. C. (1999). Numerical semigroups generated by intervals. *Pacific Journal of Mathematics*, 191(1), 75-83.
- Keith, W. J., & Nath, R. (2010). Partitions with prescribed hooksets. *arXiv preprint*. arXiv:1011.1945
- Riordan, J. (1958). *An introduction to combinatorial analysis*. New York, NY: Wiley Press.
- Rosales, J. C., & García-Sánchez, P. A. (2009). *Numerical semigroups*. New York, NY: Springer.
- Süer, M. (2025). *Visual and enumerative properties of numerical semigroups: A rook polynomial approach*. In F. Babadag (Ed.), *Akademik Perspektiften Matematik* (pp. 97–119). Yaz Yayınları.
- Süer, M. (in press). Combinatorial insights into numerical semigroups: Rook placements and Lah numbers. *Turkish Journal of Science and Technology*.
- Tutaş, N, Karakaş, H. İ, & Gümüşbaş, N. (2019). Young tableaux and Arf partitions. *Turkish Journal of Mathematics*, 43 (1): 448-459.

EXISTENCE OF SOLUTIONS FOR A STEKLOVPROBLEM INVOLVING THE P(X)- LAPLACE OPERATOR

Zehra YÜCEDAĞ¹

1. INTRODUCTION

We are dealt with the existence of solutions for a elliptic problem with Steklov boundary condition following $p(x)$ – Laplacian operator:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u) + |u|^{p(x)-2}u = h(x, u), x \in \Omega \\ |\nabla u|^{p(x)-2}\frac{\partial u}{\partial \nu} = \lambda|u|^{r(x)-2}u, x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N (N \geq 2)$ is a bounded with smooth boundary $\partial\Omega$, λ is a positive parameter, $p \in C(\overline{\Omega})$ and $r \in C(\partial\Omega)$ such that $p^- := \inf_{x \in \overline{\Omega}} p(x) > 1$, $r^- := \inf_{x \in \partial\Omega} r(x) > 1$ and $p(x) \neq r(y)$ for $x \in \Omega$ and $y \in \partial\Omega$ and $h(x, \cdot): \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a Carathéodory function and $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ is the outer unit normal derivative on $\partial\Omega$. Moreover, $\Delta_{p(x)}u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p(x)-2}\nabla u)$ is $p(x)$ – Laplacian type operator.

Throughout this study, will be considered as follows

$$p^*(x) = \begin{cases} \frac{Np(x)}{N-p(x)}, & N > p(x) \\ \infty, & N \leq p(x) \end{cases}$$

and

¹ Prof.Dr, Dicle University, Vocational School of Social Sciences, Diyarbakir, Turkey, zyucedag@dicle.edu.tr, ORCID: 0000-0003-1950-0163.

$$p^\partial(x) = \begin{cases} \frac{(N-1)p(x)}{N-p(x)}, & N > p(x) \\ \infty, & N \leq p(x) \end{cases}$$

Theorem 1.1. Assume that the following conditions hold

(H1) $h(x, \cdot): \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is a function such that

$$|h(x, t)| \leq c(1 + |t|^{s(x)}) \quad \text{for all } (x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}$$

where c positive constant, $s(x) \in C(\overline{\Omega})$ and

(H2) $h(x, t) = o(|t|^{p^+-1}), t \rightarrow 0$ for all $x \in \overline{\Omega}$ and $p^+ < s^-$

(AR): Ambrosetti-Rabinowitz's type growth condition; there exist $t_1 > 0$ and $\theta > p^+$ such that

$$0 < \theta H(x, t) \leq h(x, t)t, \quad |t| > t_1 \quad \text{for all } x \in \overline{\Omega},$$

Then there exists $\lambda \in (0, \infty)$, problem (1.1) has at least one nontrivial weak solution.

In recent years, the study of variational problems with nonstandard growth conditions has attracted considerable interest due to its applications in various fields such as electrorheological fluids, elasticity theory, stationary thermo-rheological flows of non-Newtonian fluids, image processing, and the mathematical modeling of barotropic gas filtration through porous media (Chen, Levine, & Rao, 2006; Mihăilescu, & Rădulescu, 2006; Ruzicka, 2000; Zhikov, 1987)

2. PRELIMINARIES

We recall some fundamental definitions and elementary properties of variable-exponent Lebesgue and Sobolev spaces $(L^{p(x)}(\Omega), W^{1,p(x)}(\Omega))$ and $W_0^{1,p(x)}(\Omega)$, see (Afrouzi, Hadijani & Heidarkhani 2014; Ayoujil, 2014; Deng, 2008; Fan, X. & Zhang, 2003; Karim, Zerouali & Chakrone, 2020; Kratou &

Saoudi 2021; Kováčik, & Răkosnik;1991; Yucedag, 2022; Zerouali, Karim, Chakrone & Anane, 2015).

Set

$$C_+(\overline{\Omega}) = \{r: r(x) \in C(\overline{\Omega}), \inf_{x \in \overline{\Omega}} r(x) > 1, \forall x \in \overline{\Omega}\}.$$

We define for any $p(x) \in C_+(\overline{\Omega})$

$$1 < p^- := \inf_{x \in \overline{\Omega}} p(x), p^+ := \sup_{x \in \overline{\Omega}} p(x) < \infty$$

We define the variable-exponent Lebesgue space as follows

$$L^{p(x)}(\Omega) =$$

$$\{u | u: \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ is measurable such that } \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx < \infty \}$$

then, the norm defined in these spaces

$$|u|_{p(x)} := \inf \left\{ \zeta > 0: \int_{\Omega} \left| \frac{u(x)}{\zeta} \right|^{p(x)} dx \leq 1 \right\},$$

Moreover, if $r(x) \in C_+(\partial\Omega)$, we can introduce the variable exponent Lebesgue space

$$L^{r(x)}(\partial\Omega) :=$$

$$\{u: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ measurable, } \int_{\partial\Omega} |u(x)|^{r(x)} d\sigma < \infty\},$$

where $d\sigma$ is the measure on the boundary Ω and $L^{r(x)}(\partial\Omega)$ endowed with the norm

$$|u|_{L^{r(x)}(\partial\Omega)} := \inf \left\{ \zeta > 0: \int_{\partial\Omega} \left| \frac{u(x)}{\zeta} \right|^{r(x)} d\sigma \leq 1 \right\}$$

$(L^{p(x)}(\Omega), |u|_{p(x)})$ and $(L^{r(x)}(\partial\Omega), |u|_{r(x)})$ become Banach spaces.

The variable-exponent Sobolev space $W^{1,p(x)}(\Omega)$ is denined

$$W^{1,p(x)}(\Omega) = \{u \in L^{p(x)}(\Omega): |\nabla u| \in L^{p(x)}(\Omega)\},$$

with the norm

$$\|u\|_{W^{1,p(x)}(\Omega)} = \|u\|_{1,p(x)}$$

$$\inf \{ \varrho > 0 : \int_{\Omega} \left(\left| \frac{u(x)}{\varrho} \right|^{p(x)} + \left| \frac{\nabla u(x)}{\varrho} \right|^{p(x)} \right) dx \leq 1 \}.$$

An equivalent norm is given by

$$\|u\|_{1,p(x)} = \|u\|_{L^{p(x)}(\Omega)} + \|\nabla u\|_{L^{p(x)}(\Omega)}$$

for all $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. $L^{p'(x)}(\Omega)$ is the conjugate space of $L^{p(x)}(\Omega)$ such that $\frac{1}{p(x)} + \frac{1}{p'(x)} = 1$.

Proposition 2.1. For any $u \in L^{p(x)}(\Omega)$ and $v \in L^{p'(x)}(\Omega)$, we have Hölder-Type inequality

$$\left| \int_{\Omega} uv dx \right| \leq C \|u\|_{p(x)} \|v\|_{p'(x)}$$

(Fan, X. & Zhang, 2003 and Kratou & Saoudi 2021)

Define the mapping $\phi(u): L^{p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ by

$$\phi(u) = \int_{\Omega} |u(x)|^{p(x)} dx$$

is called modular on $L^{p(x)}(\Omega)$.

Proposition 2.2. If $u, u_n \in L^{p(x)}(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$), we have

- (i) $|u|_{p(x)} = 1 (< 1, > 1) \Leftrightarrow \phi(u) = 1 (< 1, > 1)$
- (ii) $|u|_{p(x)} > 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^{p^-} \leq \phi(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^+}$
- (iii) $|u|_{p(x)} < 1 \Rightarrow |u|_{p(x)}^{p^+} \leq \phi(u) \leq |u|_{p(x)}^{p^-}$
- (iv) $|u|_{p(x)} \rightarrow 0 (\rightarrow \infty) \Leftrightarrow \phi(u_n) \rightarrow 0 (\rightarrow \infty)$
- (v) $|u_n - u|_{p(x)} \rightarrow 0 (\rightarrow \infty) \Leftrightarrow \phi(u_n - u) \rightarrow 0 (\rightarrow \infty)$.

(Afrouzi, Hadijan & Heidarkhani 2014; Deng, 2008; Fan, X. & Zhang, 2003; Kováčik, & Rákosnik, 1991).

Proposition 2.3. Set $\psi(u): L^{p(x)}(\partial\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ and

$$\psi(u) = \int_{\partial\Omega} |u|^{p(x)} d\sigma$$

for $u \in L^{p(x)}(\partial\Omega)$. If $u \in L^{p(x)}(\partial\Omega)$, we have

$$(i) |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} > 1 \Rightarrow |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-} \leq \psi(u) \leq |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+}$$

$$(ii) |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)} < 1 \Rightarrow |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^+} \leq \psi(u) \leq |u|_{L^{p(x)}(\partial\Omega)}^{p^-}.$$

(Deng, 2008; Yucedag, 2022; Zerouali, Karim, Chakrone & Anane, 2015).

Denote for $\Gamma: W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ defined by

$$\Gamma(u) = \int_{\Omega} (|\nabla u|^{p(x)} + |u(x)|^{p(x)}) dx$$

for all $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Proposition 2.4. If $u, u_n \in W^{1,p(x)}(\Omega)$ ($n = 1, 2, \dots$) and $p^+ < \infty$, we have

$$(i) \|u\|_{1,p(x)} = 1 (< 1, > 1) \Leftrightarrow \Gamma(u) = 1 (< 1, > 1)$$

$$(ii) \|u\|_{1,p(x)} > 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^-} \leq \Gamma(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^+}$$

$$(iii) \|u\|_{1,p(x)} < 1 \Rightarrow \|u\|_{p(x)}^{p^+} \leq \Gamma(u) \leq \|u\|_{p(x)}^{p^-}.$$

(Fan, X. & Zhang, 2003; Karim, Zerouali & Chakrone, 2020; Kratou & Saoudi 2021; Kováčik, & Rákosnik; 1991).

Proposition 2.5.

(i) If $1 < p^- \leq p^+ < \infty$, then the spaces $L^{p(x)}(\Omega)$ and $W^{1,p(x)}(\Omega)$ are separable, reflexive Banach spaces,

(ii) Let $s \in C(\overline{\Omega})$. If $1 \leq s(x) < p^*(x)$ for all $x \in \overline{\Omega}$, then the embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{s(x)}(\Omega)$ is compact and continuous,

(iii) Let $s \in C(\overline{\Omega})$. If $1 \leq s(x) < p^\partial(x)$ for all $x \in \partial\Omega$, then the trace embedding $W^{1,p(x)}(\Omega) \rightarrow L^{s(x)}(\partial\Omega)$ is compact and continuous,

(iv) Poincaré inequality; there exists a positive constant c_1 such that

$$\|u\| \leq C|\nabla u|_{p(x)}$$

for all $u \in W^{1,p(x)}(\Omega)$. (Fan, X. & Zhang, 2003; Kováčik, & Răkosnik;1991; Wei & Chen 2012).

Definition 2.6. Let X is a Banach spaces and the function $\Psi \in C^1(X, \mathbb{R})$. We say that Ψ satisfies Palais-Smale condition **(PS)** in X if any sequence $\{v_n\}$ in X such that $\Psi(v_n)$ is bounded and $\Psi'(v_n) \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$ has a convergent subsequence (Willem, 1996).

Lemma 2.7. (Mountain Pass Theorem)

Let X is a Banach spaces and the function $\Psi \in C^1(X, R)$ satisfies Palais-Smale condition. Assume that $\Psi(0) = 0$ and

(i) There exists two positive real numbers τ and α such that $\Psi(u) \geq \alpha$ with $\|u\| = \tau$ for all $u \in X$,

(ii) There exists $\omega \in X$ such that $\|\omega\| > \tau$ and $\Psi(\omega) < 0$.

Put $G = \{\omega \in C([0,1], X): \omega(0) = 0, \phi(1) = \omega\}$. Set $\beta = \inf\{\max\{([0,1])\}$ Then $\beta \geq \alpha$ and β is a critical value of Ψ (Willem, 1996).

3. PROOF OF MAIN RESULTS

Let X denote the variable exponent Sobolev space $W^{1,p(x)}(\Omega)$.

Definition 3.1. A function $v \in X$ is called a weak solution to (1.1) provided that

$$\int_{\Omega} (|\nabla v|^{p(x)-2} v \nabla \vartheta + |v|^{p(x)-2} v \vartheta) dx = \int_{\Omega} h(x, v) \vartheta dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |v|^{r(x)-2} v \vartheta d\sigma = 0$$

for all $\vartheta \in X$.

The energy functional associated with problem (1.1) is defined as follows $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) dx \\ &- \int_{\Omega} H(x, v) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r(x)} |u|^{r(x)} d\sigma \end{aligned}$$

where $F(x, t) = \int_0^t f(x, k) dk$.

Proposition 3.2. If one denotes for all $v \in X$

$$\Phi(v) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r(x)} |v|^{r(x)} d\sigma$$

where $r(x) \in C_+(\partial\Omega)$ and $r(x) < p^\partial(x)$ for any $x \in \partial\Omega$, then $\Phi \in C^1(X, \mathbb{R})$ and the derivative operator of Φ , denoted by Φ' , is

$$\langle \Phi'(v), \vartheta \rangle = \int_{\partial\Omega} |u|^{r(x)-2} u \vartheta d\sigma$$

for all $v, \vartheta \in X$ and $\phi: X \rightarrow \mathbb{R}$ and $\phi': X \rightarrow X^*$ are sequentially weak- strongly continuous, bounded, namely, $v_n \rightarrow v$ (weakly) implies $I'(v_n) \rightarrow I'(v)$ (strongly) (Deng, 2008; Zerouali, Karim, Chakrone & Anane, 2015).

Hence, it follows from Proposition 2.3 and Proposition 3.2 that $\Psi: X \rightarrow \mathbb{R}$ is of class C^1 , and any critical point of Ψ corresponds to a weak solution of (1.1) In addition, Ψ' is defined as a mapping from X into its dual X^*

$$\begin{aligned} \langle \Psi'(u), \vartheta \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla v|^{p(x)-2} v \nabla \vartheta + |v|^{p(x)-2} v \vartheta) dx \\ &- \int_{\Omega} h(x, v) \vartheta dx - \lambda \int_{\partial \Omega} |v|^{r(x)-2} v \vartheta d\sigma \end{aligned}$$

for any $u, \vartheta \in X$.

Lemma 3.3. Assume that (H1), (H2), (AR) and $r^- > p^+$ conditions hold. Then, there exists two positive real numbers τ and α for any $\lambda \in (0, \infty)$, we have $\Psi(u) \geq \alpha$ with $\|u\| = \tau \in (0, 1)$ for all $u \in X$.

Proof. Let $\|u\|_{1,p(x)} < 1$. By (H1) and (H2), we obtain

$$|H(x, v)| \leq \varepsilon |v|^{p^+} + c_{\varepsilon} |v|^{s(x)} \quad (3.1)$$

for all $(x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}$. On the other hand, by Proposition 2.5, we have

$$X \rightarrow L^{r^-}(\partial \Omega) \text{ and } X \rightarrow L^{p^+}(\Omega)$$

with continuous and compact embeddings, there exists positive constant $c_2 > 0$ such that

$$|u|_{r^-} \leq c_2 \|u\| \text{ and } |u|_{p^+} \leq c_3 \|u\| \quad (3.2)$$

Thus, using Proposition 2.2, 2.3, 2.4, (3.1) and (3.2) we can write

$$\begin{aligned} \Psi(v) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla v|^{p(x)} + |v|^{p(x)}) dx \\ &- \int_{\Omega} H(x, v) dx - \lambda \int_{\partial \Omega} \frac{1}{r(x)} |v|^{r(x)} d\sigma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \frac{1}{p^+} \|v\|_{1,p(x)}^{p^+} - \int_{\Omega} (\varepsilon |v|^{p^+} + c_{\varepsilon} |v|^{s(x)}) dx - \frac{\lambda c_1}{r^-} \|v\|_{1,p(x)}^{r^-} \\ &\geq \frac{1}{p^+} \|v\|_{1,p(x)}^{p^+} - \varepsilon c_3 \|v\|_{1,p(x)}^{p^+} - c_{\varepsilon} c_3 \|v\|_{1,p(x)}^{s^-} - \frac{\lambda c_1}{r^-} \|v\|_{1,p(x)}^{p^+} \end{aligned}$$

Choose $\varepsilon > 0$ small enough that $0 < \varepsilon c_3 + \frac{\lambda c_1}{r^-} < \frac{1}{2p^+}$, we obtain

$$\Psi(v) \geq \frac{1}{2p^+} \|v\|_{1,p(x)}^{p^+} - c_{\varepsilon} c_3 \|v\|_{1,p(x)}^{s^-}$$

For any $u \in X$ with $\|u\| = \tau \in (0,1)$, we can write

$$\Psi(v) \geq \tau^{p^+} \left(\frac{1}{2p^+} - \tau^{p^+ - s^-} \right)$$

By the above inequality, $p^+ < s^-$, then there exists for any $\lambda \in (0, \infty)$ and any $u \in X$ with $\|u\| = \rho$, such that $\Psi(v) \geq r > 0$.

Lemma 3.4. Under assumptions (AR) and $p^+ < r^-$, there exists $\omega \in X$ such that $\|\omega\| > \tau$ and $\Psi(\omega) < 0$.

Proof . Then, by (AR), we obtain

$$H(x, \mu) \geq c_4 |\mu|^{\theta} \text{ for all } (x, v) \in \Omega \times \mathbb{R}.$$

Let $v_1 \in C_0^\infty$, $v_1 \geq 0$, $v_1 \neq 0$ and $t > 1$. We have

$$\begin{aligned} \Psi(tv_1) &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla tv_1|^{p(x)} + |tv_1|^{p(x)}) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} H(x, tv_1) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r(x)} |tv_1|^{r(x)} d\sigma \\ &\leq t^{p^+} \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla v_1|^{p(x)} + |v_1|^{p(x)}) dx \\ &\quad - t^{\theta} \int_{\Omega} H(x, v_1) dx - \lambda t^{r^-} \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r(x)} |v_1|^{r(x)} d\sigma \end{aligned}$$

Since $p^+ < r^-$ and $p^+ < \theta$, we show that $\Psi(tv_1) \rightarrow -\infty$ as $t \rightarrow \infty$ for all $\lambda \in (0, \infty)$. Then, we can take $\omega = tv_1$ such that $\|\omega\| > \tau$ and $\Psi(\omega) < 0$.

Lemma 3.5. If the conditions (H1), (H2), (AR) and $r^- > \theta$ hold, then Ψ satisfies the Palais-Smale condition.

Proof: Assume that $\{v_n\} \subset X$ is a Palais-Smale sequence which satisfy the properties:

$$\Psi(v_n) \rightarrow c_5 \text{ and } \Psi'(v_n) \rightarrow 0 \text{ in } X^* \text{ as } n \rightarrow \infty \quad (3.3)$$

where $c_5 > 0$ is a constant.

Here, we show that $\{v_n\}$ possesses a convergent subsequence in X . Then, we prove that $\{v_n\}$ is bounded in X . We do the proof by contradiction. That is, we show that $v_n \rightarrow \infty$ as $n \rightarrow \infty$.

Firstly, we show that there exists a subsequence of $\{v_n\}$ which converges in X . Then we argue that $\{v_n\}$ must be bounded in X . We carry out this argument by contradiction, i.e. we show that $\|v_n\| \rightarrow +\infty$ as $n \rightarrow \infty$ and deriving an inconsistency."

Furthermore, from (3.3), (AR), Proposition 2.4, $r^- > \theta$ and considering $\|v_n\| > 1$, for n large enough, we get

$$\begin{aligned} \|v_n\| + c_5 &\geq \Psi(v_n) - \frac{1}{\theta} \langle \Psi'(v_n), v_n \rangle \\ &= \int_{\Omega} \frac{1}{p(x)} (|\nabla v_n|^{p(x)} + |v_n|^{p(x)}) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} H(x, v_n) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} \frac{1}{r(x)} |v_n|^{r(x)} d\sigma - \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^{p(x)} \\ &\quad + |v_n|^{p(x)}) dx \\ &\quad + \frac{1}{\theta} \int_{\Omega} h(x, v_n) v_n dx + \frac{\lambda}{\theta} \int_{\partial\Omega} |v_n|^{r(x)} d\sigma \\ &\geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^{p(x)} + |v_n|^{p(x)}) dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +\lambda \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{r^-} \right) \int_{\partial\Omega} |v_n|^{r(x)} d\sigma \\
 & \geq \left(\frac{1}{p^+} - \frac{1}{\theta} \right) \|v_n\|^{p^-}
 \end{aligned}$$

Now, if we divide the above inequality by $\|v_n\|^{p^-}$, and passing to the limit as $n \rightarrow \infty$, we have $p^+ < \theta$. Hence, this result contradict with the condition $p^+ < \theta$, we have that $\{v_n\}$ is bounded in X . Now, we prove that $\{v_n\}$ strongly convergent to v in X . As X is reflexive spaces from Proposition 2.5, there exists a subsequence denoted by $\{v_n\}$ and $v \in X$ such that $v_n \rightarrow v$ (weak convergent) in X .

On the other hand, from Proposition 2.5, the compact embeddings $X \rightarrow L^{s(x)}(\partial\Omega)$ and $X \rightarrow L^{r(x)}(\Omega)$, we have

$$v_n \rightarrow v \text{ (strongly convergent) in } L^{s(x)}(\partial\Omega) \quad (3.4)$$

and

$$v_n \rightarrow v \text{ (strongly convergent) in } L^{r(x)}(\Omega) \quad (3.5)$$

From (3.3), we get $\langle \Psi'(v_n), v_n - v \rangle \rightarrow 0$ as $n \rightarrow \infty$. That is,

$$\begin{aligned}
 \langle \Psi'(v_n), v_n - v \rangle &= \int_{\Omega} (|\nabla v_n|^{p(x)} + |v_n|^{p(x)})(v_n - v) dx \\
 &- \int_{\Omega} h(x, v_n)(v_n - v) dx - \lambda \int_{\partial\Omega} |v_n|^{r(x)}(v_n - v) d\sigma \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

By (H1) and Proposition 2.2, we have

$$\begin{aligned}
 \left| \int_{\Omega} h(x, v_n)(v_n - v) dx \right| &\leq \left| \int_{\Omega} c(1 + |v_n|^{r(x)})(v_n - v) dx \right| \\
 &\leq c_6 |v_n - v|_{r(x)} + c_7 \|v_n\|^{r(x)-1} |v_n - v|_{r'(x)}
 \end{aligned}$$

If we use the relation (3.4) in the above inequality, we have

$$\int_{\Omega} h(x, v_n)(v_n - v) dx \rightarrow 0 \text{ as } n \rightarrow \infty. \quad (3.7)$$

Similarly, from Proposition 2.2 and the relation (3.5), we have

$$\int_{\partial\Omega} |v_n|^{r(x)} (v_n - v) d\sigma \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Using (3.7) and (3.8), we obtain

$$\int_{\Omega} (|\nabla v_n|^{p(x)} + |v_n|^{p(x)}) (v_n - v) dx \rightarrow 0 \quad \text{as } n \rightarrow \infty.$$

This together with the convergence of $v_n \rightarrow v$ (weak convergent) in X $v_n \rightarrow v$ (strong convergent) in X as $n \rightarrow \infty$.

Hence, Ψ satisfies the (PS) condition.

Proof of Theorem 1.1.

From Lemma 3.4, Lemma 3.5, Lemma 3.5 and $\Psi(0) = 0$, Ψ satisfies the all statements of Lemma 2.7 (Willem, 1996). Therefore, Ψ has at least one nontrivial critical point, i.e., problem (1.1) has a nontrivial weak solution. The proof is complete.

REFERENCES

- Afrouzi, A.G., Hadijan, A., & Heidarkhani, S. (2014). Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian, *Electron.J. Diff. Equ.*, 134 1-11.
- Ayoujil, A. (2014). On the superlinear Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian, *EJQTDE.*, 38, pp.1-13.
- Ben Ali K. (2018). Existence results for Steklov problem involving the $p(x)$ -Laplacian, *Complex Var. and Elliptic Equ.* 63, pp.1675-1686.
- Chen, Y., Levine S., & Rao M.(2006). Variable exponent, linear growth functionals in image processing. *SIAM J Appl Math.* 66:1383–1406.
- Deng, SG. (2008). Eigenvalues of the $p(x)$ -Laplacian Steklov problem. *J.Math Anal Appl.*, 339,925–937.
- Fan, X. L., & Zhang, Q. H. (2003). Existence of solutions for $p(x)$ -Laplacian Dirichlet problems, *Nonlinear Anal.* 52,1843--1852.
- Karim B., Zerouali A. & Chakrone O. (2020). Steklov eigenvalue problem with α -harmonic solutions and variable exponents, *Georgian Mathematical Journal* · February DOI: 10.1515/gmj-2019-2079.
- Kratou M., & Saoudi K. (2021). The fibering map approach for a singular elliptic system involving the $p(x)$ -laplacian and nonlinear boundary conditions, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, 62 (1), 171-189.
- Kováčik O., & Rákosník J. (1991). On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{k,p(x)}$, *Czechoslovak Math. J.* 41 no.116, 592-618.
- Mihăilescu M., & Rădulescu V. (2006). A multiplicity result for a nonlinear degenerate problem arising in the theory of

- electrorheological fluids, *Proceedings of the Royal Society A*. 462, 2625-2641.
- Ruzicka M. (2000). Electro-rheological fluids: modeling and mathematical theory. Lecture notes in mathematics. Vol. 1784. Berlin: Springer-Verlag
- Wei, Z., & Chen Z. (2012). Existence results for the $p(x)$ -Laplacian with nonlinear boundary condition, *Applied Math.*, DOI:10.5402/2012/727398.
- Willem, M. (1996). *Minimax Theorems*, Birkhauser, Basel.
- Yucedag, Z. (2022). Variational Approach For A Steklov Problem Involving Nonstandard, *AIMS Mathematics*, 8(3): 5352-5368.
- Zerouali, A., Karim, B., Chakrone, O., & Anane, A. (2015). Existence and multiplicity of elliptic problems with Nonlinear Boundary Conditions and variable exponents, *Bol. Soc. Paran. Mat*, v. 33, 2121-131.
- Zhikov ,VV. (1987). Averaging of functionals of the calculus of variations and elasticity theory, *Math. USSR. Izv.*, 29, pp.33-66

MATEMATİK DEĞERLENDİRMELERİ

yaz
yayınları

YAZ Yayınları
M.İhtisas OSB Mah. 4A Cad. No:3/3
İscehisar / AFYONKARAHİSAR
Tel : (0 531) 880 92 99
yazyayinlari@gmail.com • www.yazyayinlari.com