



LOS 10 EJERCICIOS CLAVE DE VECTORES

Domina la base de la geometría analítica paso a paso

MÉTODO GAUSS · GRUPOS DE MÁX. 7 ALUMNOS

01

CONCEPTOS Y MÓDULOS

Antes de operar, recuerda que un vector es una instrucción de movimiento que siempre tiene **Módulo** (la distancia de la flecha), **Dirección** (la línea sobre la que se apoya) y **Sentido** (hacia dónde apunta).

■ Ejercicio 1: Cálculo del vector entre dos puntos

Dado el punto A(2, 3) y el punto B(5, 7), calcula las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ y su módulo (la distancia entre A y B).

Paso 1: Para hallar el vector, restamos las coordenadas del extremo (B) menos el origen (A).

$$\overrightarrow{AB} = (5 - 2, 7 - 3) = (3, 4)$$

Paso 2: El módulo se calcula aplicando el Teorema de Pitágoras con esas coordenadas.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$$

■ Ejercicio 2: Vector unitario

Calcula un vector unitario (de módulo exacto 1) que tenga la misma dirección y sentido que el vector $\mathbf{v} = (8, -6)$.

Paso 1: Calculamos el módulo del vector original.

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{8^2 + (-6)^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100} = 10$$

Paso 2: Dividimos cada coordenada original entre el módulo obtenido.

$$\text{Vector unitario } \mathbf{u} = (8/10, -6/10) = (4/5, -3/5)$$

02

OPERACIONES FUNDAMENTALES

Ejercicio 3: Suma y producto por un escalar

Dados los vectores $\mathbf{u} = (1, -2)$ y $\mathbf{v} = (-3, 4)$, calcula analíticamente la operación $2\mathbf{u} + \mathbf{v}$.

Paso 1: Primero multiplicamos todas las coordenadas de $\mathbf{u}$ por el escalar (2).

$$2\mathbf{u} = 2(1, -2) = (2, -4)$$

Paso 2: Sumamos el nuevo vector con $\mathbf{v}$, coordenada X con X, coordenada Y con Y.

$$2\mathbf{u} + \mathbf{v} = (2, -4) + (-3, 4) = (2 - 3, -4 + 4) = (-1, 0)$$

Ejercicio 4: Punto medio de un segmento

Calcula las coordenadas del punto medio M del segmento formado por los extremos A(-2, 4) y B(6, -2).

Regla clave: El punto medio se calcula haciendo el promedio matemático de las coordenadas.

$$M = ((-2 + 6)/2, (4 + (-2))/2)$$

$$M = (4/2, 2/2) = (2, 1)$$

Ejercicio 5: Combinación lineal

Expresa el vector $\mathbf{w} = (4, 1)$ como combinación lineal de $\mathbf{u} = (2, -1)$ y $\mathbf{v} = (1, 1)$.

Planteamiento: Buscamos dos incógnitas (x, y) tales que: $\mathbf{w} = x\mathbf{u} + y\mathbf{v}$

$$(4, 1) = x(2, -1) + y(1, 1) \rightarrow (4, 1) = (2x + y, -x + y)$$

Sistema de ecuaciones:

Ecuación X: $2x + y = 4$

Ecuación Y: $-x + y = 1 \rightarrow$ Despejamos: $y = x + 1$

Sustituimos: $2x + (x + 1) = 4 \rightarrow 3x = 3 \rightarrow x = 1$. (Por tanto, $y = 2$).

Solución: $\mathbf{w} = 1\mathbf{u} + 2\mathbf{v}$

03

PRODUCTO ESCALAR Y ÁNGULOS

El producto escalar es la herramienta definitiva en geometría. Su resultado **es un número real** (no un vector) y nos chiva la relación angular que existe entre dos direcciones.

Ejercicio 6: Cálculo directo del producto escalar

Calcula el producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = (3, 1)$ y $\mathbf{v} = (2, -4)$.

Multiplicamos las coordenadas X entre sí, las coordenadas Y entre sí, y sumamos los resultados.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (3 \times 2) + (1 \times -4)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 6 - 4 = 2$$

Ejercicio 7: Condición de perpendicularidad (Top Exámenes)

Halla el valor de la incógnita k para que los vectores $\mathbf{u} = (k, 2)$ y $\mathbf{v} = (4, -6)$ sean perpendiculares.

Regla de oro: Si dos vectores forman 90 grados, su producto escalar es estrictamente CERO.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$$

$$(k \times 4) + (2 \times -6) = 0$$

$$4k - 12 = 0 \rightarrow 4k = 12 \rightarrow k = 3$$

Ejercicio 8: Ángulo entre dos vectores

Halla el ángulo exacto que forman los vectores $\mathbf{u} = (1, 1)$ y $\mathbf{v} = (0, 2)$.

Utilizamos la fórmula: $\cos(\alpha) = (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) / (|\mathbf{u}| \times |\mathbf{v}|)$

Numerador (Prod. escalar): $(1 \times 0) + (1 \times 2) = 2$

Denominador (Módulos): $|\mathbf{u}| = \sqrt{2}$ y $|\mathbf{v}| = \sqrt{4} = 2$

04

APLICACIONES GEOMÉTRICAS

Ejercicio 9: Vectores paralelos

Halla el valor de **a** para que el vector **u** = (a, 15) sea paralelo al vector **v** = (2, 5).

Dos vectores son paralelos si tienen la misma dirección, es decir, sus coordenadas son proporcionales.

$$a / 2 = 15 / 5$$

$$a / 2 = 3 \rightarrow a = 3 \times 2 \rightarrow \mathbf{a = 6}$$

Ejercicio 10: Puntos alineados

Comprueba matemáticamente si los puntos A(1, 2), B(3, 5) y C(7, 11) pertenecen a la misma recta.

Calculamos los vectores de los tramos: **AB** = (3-1, 5-2) = (2, 3) y **BC** = (7-3, 11-5) = (4, 6)

Comprobamos proporciones: $4/2 = 6/3 = 2$. Como el cociente es el mismo, **sí están alineados**.

05

PRUEBA DE NIVEL

1. ¿Qué información nos da el módulo de un vector?

- ☐ Su inclinación exacta en el plano de coordenadas.
- ☐ La longitud o distancia de la flecha representativa.
- ☐ El sentido hacia el que apunta.

2. Para que dos vectores sean perpendiculares, su producto escalar debe ser:

- ☐ Estrictamente igual a cero (0).
- ☐ Igual a uno (1).
- ☐ Igual a la suma de sus módulos.

3. Si las coordenadas de dos vectores son proporcionales, significa que:

- ☐ Son perpendiculares.
- ☐ Son paralelos o están apoyados en la misma recta.
- ☐ Forman un ángulo de 45 grados exactos.

¿Te has atascado en algún paso?

Las matemáticas no se memorizan, se entienden. En **Academia Gauss** hemos acabado con las clases masificadas. Trabajamos la EVAU y el Bachillerato en grupos ultra-reducidos de máximo 7 alumnos, con profesores especialistas que detectan tu bloqueo al instante.

Reserva tu plaza