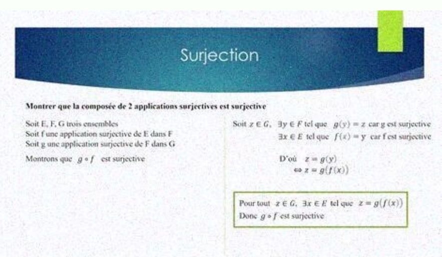
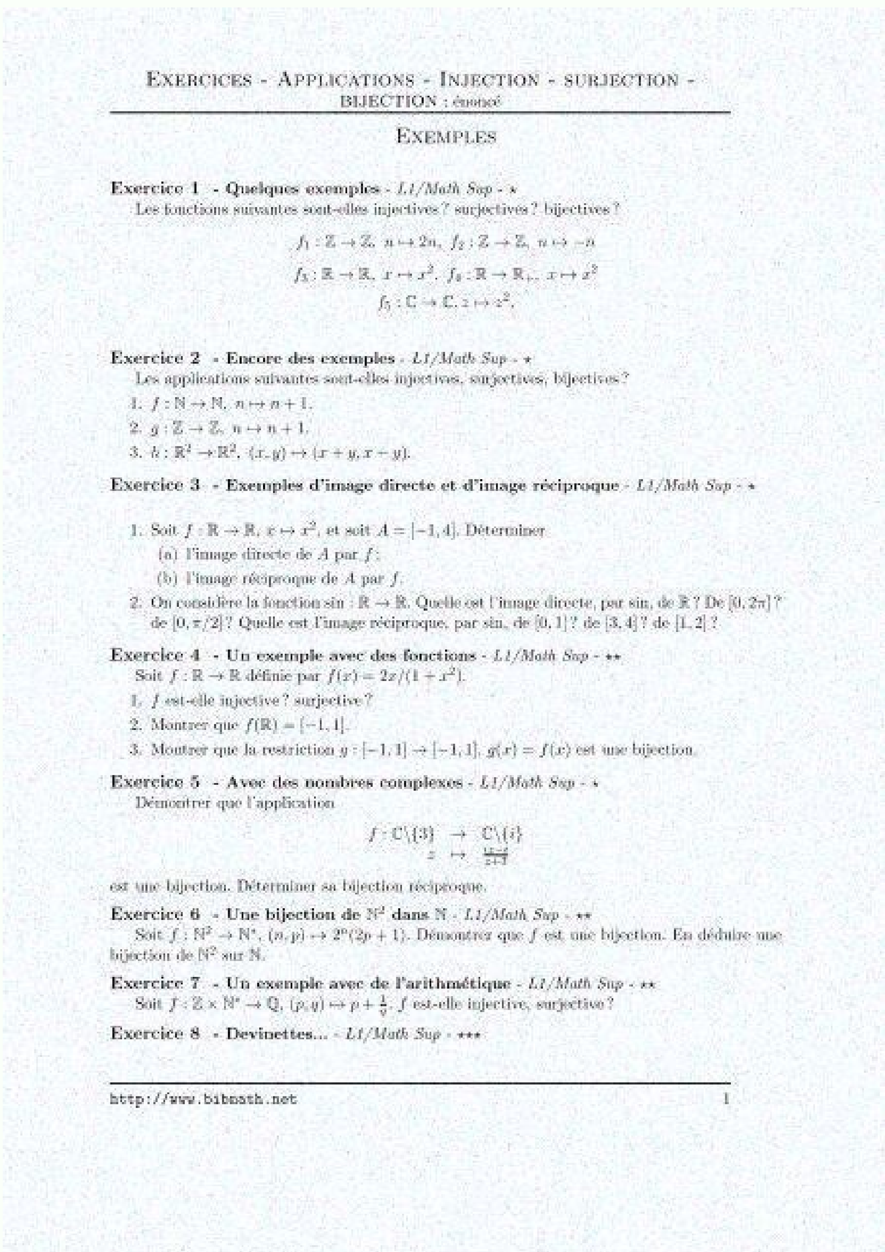
Exercice corrigé injection surjection bijection pdf

Exo7Injection, surjection, bijectionExercice 1Soient f:R→Ret g:R→Rtelles que f(x) = 3x+1 et g(x) = x2−1. A-t-on f◦g=g◦f?Indication HCorrection HVidéo [000185]Exercice 2Soit f:[0,1]→[0,1]telle quef(x) = (xsi x∈[0,1]∩Q,1−xsinon.Démontrer que f◦f=id.Indication HCorrection HVidéo [000199]Exercice 3Soit f:[1,+∞[→[0,+∞[telle que f(x) = x2−1. fest-elle bijective ?Indication HCorrection HVidéo [000202]Exercice 4Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives?1. f:N→N,n7→ n+12. g:Z→Z,n7→ n+13. h:R2→R2,(x,y)7→ (x+y,x−y)4. k:R\{1}→R,x7→ x+1x−1Indication HCorrection HVidéo [000190]Exercice 5Soit f:R→C,t7→ eit . Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) fdeviennebijective.Indication HCorrection HVidéo [000200]Exercice 6 Exponentielle complexeSi z=x+iy,(x,y)∈R2, on pose ez=ex×eiy.1. Déterminer le module et l'argument de ez.2. Calculer ez+z′,ez,e−z,(ez)npour n∈Z.3. L'application exp : C→C,z7→ ez, est-elle injective ?, surjective ?Correction HVidéo [000197]Exercice 7On considère quatre ensembles A,B,Cet Det des applications f:A→B,g:B→C,h:C→D. Montrer que :g◦finjective ⇒finjective,g◦fsurjective ⇒gsurjective.1 Lorsqu'on entre dans le supérieur, les notions d'injection, de surjection et de bijection sont parmi les premières que l'on voit. Dans cet article, nous allons donner les définitions et démontrer quelques exercices importants.Pour toute la suite, on désignera par f : E \to F une application.Une application f est dite injective si et seulement si \forall x,y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y .Dit en français, cela revient à dire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au maximum un antécédent.Une application f est dite surjective si et seulement si \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) .Dit en français, cela revient à dire que pour une application surjective chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.Les deux propositions suivantes sont équivalentes :Une application est une bijection si elle est à la fois une injection et surjection\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)Dit en français, une application est bijective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.Si E et F sont en bijection, on dit qu'ils sont équipotents.Si f est une bijection, alors elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}Passons ensuite à quelques propriétés sur l'injection, la surjection et la bijection :La composée de deux injections est injectiveLa composée de deux surjections est surjectiveLa composée de deux bijections est bijectiveSi E et F sont des ensembles finis :La fonction ne peut être injective que si \text{card} (E) \leq \text{card}(F)De plus, elle ne peut être surjective que si \text{card} (E) \geq \text{card}(F)Et pour qu'elle soit bijective, il est nécessaire que \text{card} (E) = \text{card}(F)Une application classique et liée à la notion de bijection est le théorème de Cantor-BernsteinEnoncé : Cet exercice présente un résultat à retenir pour la composition de fonctions.Corrigé : Question 1 : Si h est surjective, on a \forall y \in G, \exists x \in E, y = h(x) . Or h(x) = g(f(x)) .



Or h(x) = g(f(x)) . Posons z = f(x). On a y = g(z) .



Exercices - Applications - Injection - surjection - bijection : énoncé

Exemples

Exercice 1 - Quelques exemples - *L1/Math Sup* - ⋆

Les fonctions suivantes sont-elles injectives ? surjectives ? bijectives ?

$$f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto 2n,\quad f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto -n$$
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2,\quad f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+,\ x \mapsto x^2$$
$$f_5 : \mathbb{C} \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^2.$$

Exercice 2 - Encore des exemples - *L1/Math Sup* - ⋆

Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

1. $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ n \mapsto n+1$.
2. $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ n \mapsto n+1$.
3. $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y)$.

Exercice 3 - Exemples d'image directe et d'image réciproque - *L1/Math Sup* - ⋆

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto x^2$, et soit $A = [-1,4]$. Déterminer
   (a) l'image directe de A par f ;
   (b) l'image réciproque de A par f.
2. On considère la fonction $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Quelle est l'image directe, par sin, de $\mathbb{R}$? De $[0, 2\pi]$? de $[0, \pi/2]$? Quelle est l'image réciproque, par sin, de $[0,1]$? de $[3,4]$? de $[1,2]$?

Exercice 4 - Un exemple avec des fonctions - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 2x/(1+x^2)$.

1. f est-elle injective ? surjective ?
2. Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1,1]$.
3. Montrer que la restriction $g : [-1,1] \to [-1,1]$, $g(x) = f(x)$ est une bijection.

Exercice 5 - Avec des nombres complexes - *L1/Math Sup* - ⋆

Démontrer que l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C}\backslash\{3\} & \to & \mathbb{C}\backslash\{i\} \\ z & \mapsto & \frac{iz-i}{z+3} \end{array}$$

est une bijection. Déterminer sa bijection réciproque.

Exercice 6 - Une bijection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$ - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}^*,\ (n,p) \mapsto 2^n(2p+1)$. Démontrer que f est une bijection. En déduire une bijection de $\mathbb{N}^2$ sur $\mathbb{N}$.

Exercice 7 - Un exemple avec de l'arithmétique - *L1/Math Sup* - ⋆⋆

Soit $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q},\ (p,q) \mapsto p + \frac{1}{q}$. f est-elle injective, surjective ?

Exercice 8 - Devinettes... - *L1/Math Sup* - ⋆⋆⋆

http://www.bibmath.net 1

Changer les ensembles de départ et d'arrivée afin que (la restriction de) fdeviennebijective.Indication HCorrection HVidéo [000200]Exercice 6 Exponentielle complexeSi z=x+iy,(x,y)∈R2, on pose ez=ex×eiy.1. Déterminer le module et l'argument de ez.2. Calculer ez+z′,ez,e−z,(ez)npour n∈Z.3. L'application exp : C→C,z7→ ez, est-elle injective ?, surjective ?Correction HVidéo [000197]Exercice 7On considère quatre ensembles A,B,Cet Det des applications f:A→B,g:B→C,h:C→D. Montrer que :g◦finjective ⇒finjective,g◦fsurjective ⇒gsurjective.1 Lorsqu'on entre dans le supérieur, les notions d'injection, de surjection et de bijection sont parmi les premières que l'on voit.

Dans cet article, nous allons donner les définitions et démontrer quelques exercices importants.Pour toute la suite, on désignera par f : E \to F une application.Une application f est dite injective si et seulement si \forall x,y \in E, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y .Dit en français, cela revient à dire que chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au maximum un antécédent.Une application f est dite surjective si et seulement si \forall y \in F, \exists x \in E, y = f(x) .Dit en français, cela revient à dire que pour une application surjective chaque élément de l'ensemble d'arrivée a au moins un antécédent.Les deux propositions suivantes sont équivalentes :Une application est une bijection si elle est à la fois une injection et surjection\forall y \in F, \exists ! x \in E, y = f(x)Dit en français, une application est bijective si et seulement si chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.Si E et F sont en bijection, on dit qu'ils sont équipotents.Si f est une bijection, alors elle admet une bijection réciproque notée f^{-1}Passons ensuite à quelques propriétés sur l'injection, la surjection et la bijection :La composée de deux injections est injectiveLa composée de deux surjections est surjectiveLa composée de deux bijections est bijectiveSi E et F sont des ensembles finis :La fonction ne peut être injective que si \text{card} (E) \leq \text{card}(F)De plus, elle ne peut être surjective que si \text{card} (E) \geq \text{card}(F)Et pour qu'elle soit bijective, il est nécessaire que \text{card} (E) = \text{card}(F)Une application classique et liée à la notion de bijection est le théorème de Cantor-BernsteinEnoncé : Cet exercice présente un résultat à retenir pour la composition de fonctions.Corrigé : Question 1 : Si h est surjective, on a \forall y \in G, \exists x \in E, y = h(x) . Or h(x) = g(f(x)) . Posons z = f(x). On a y = g(z) . Donc l'image de z par g est y. Ainsi, g est surjective.Question 2 : Soient x,y \in E tels que f(x)=f(y) . On a alors, en composant par g, h(x) = g(f(x)) =g(f(y)) = h(y) . Or, h est injective, d'où x = y . Ainsi, f est injective.Corollaire : On remarque alors que si h est bijective alors f est injective et g est surjective.Enoncé : Soit I un intervalle. Montrer qu'une fonction f : I \to \R strictement monotone est injective.Corrigé : Quitte à considérer - f , on peut supposer que f est strictement croissante. La contraposée de l'injectivité s'écrit \forall x,y \in I, x eq y \Rightarrow f(x) eq f(y) . Soient x eq y. Quitte à échanger x et y, on peut supposer que x < y . Par stricte croissance de f, on a f(x) < f(y) et donc f(x) eq f(y), ce qui est bien le résultat attendu.Enoncé : Trouver le bon intervalle de départ et d'arrivée pour rendre f: x \mapsto x^2 bijective.Corrigé : Remarquons déjà que f n'est ni injective ni surjective. En effet f(2) = f(-2)= 4 et on sait aussi que -1 n'a pas d'antécédent réel. De plus, on sait que l'image de f est \R_+. En prenant comme ensemble d'arrivée \R_+ on va rendre l'application surjective.De plus, on sait que f(x) = y a deux solutions : \sqrt{y} et - \sqrt{y} . Donc si on enlève les négatifs, on aura un seul antécédent (attention à bien garder 0). Ainsi, si on définit f: \R_+ \to \R_+ , on aura bien une bijection.Exercice pour le lecteur : Faire de même avec g : x \mapsto e^x et h : x \mapsto \cos(x) et aussi dans les complexes comme ensemble de départ et d'arrivée avec j : t \mapsto e^{t} .En fait, en réduisant suffisamment l'ensemble de départ et en réduisant celui d'arrivée à l'image, on peut toujours se débrouiller pour rendre l'application bijective.