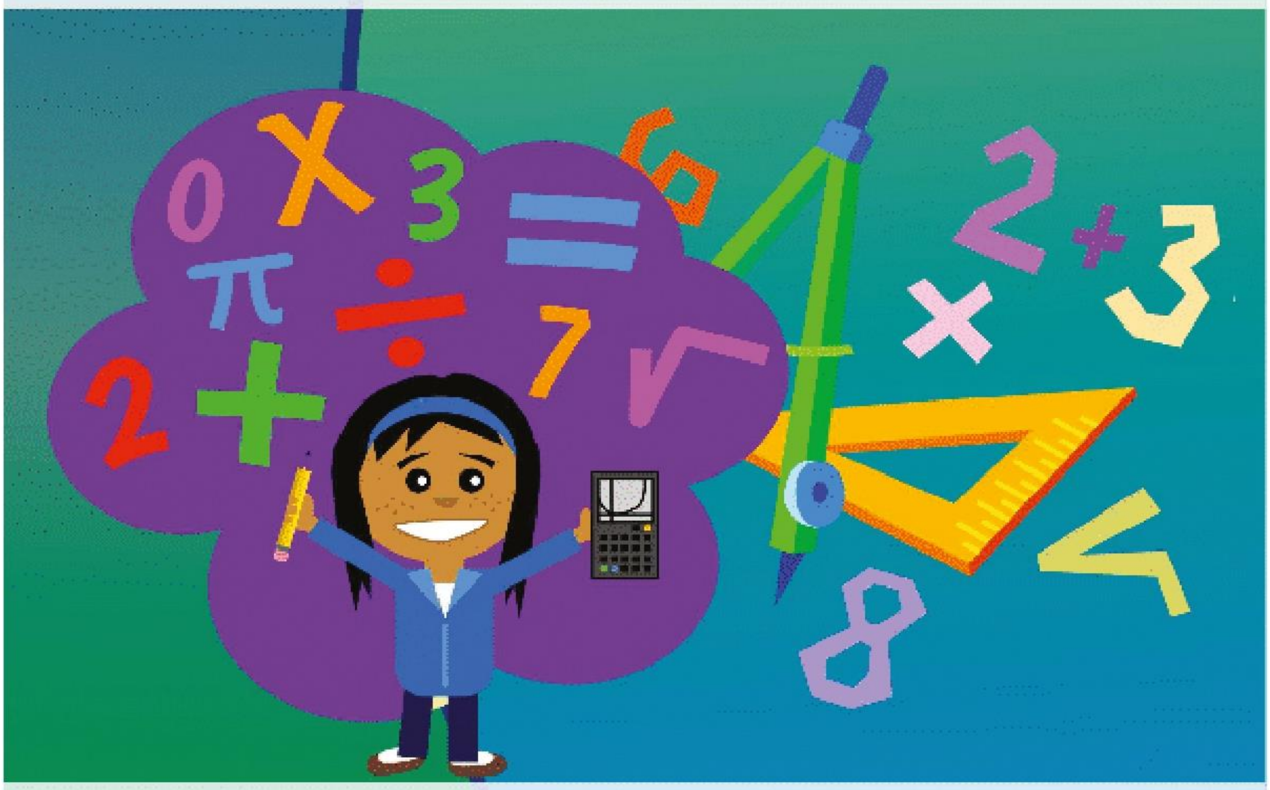
एस.सी.ई.आर.टी., बिहार
द्वारा विकसित

S9-A

दो वर्षीय सेवापूर्व डिप्लोमा इन एलिमेन्ट्री एजुकेशन

गणित का शिक्षणशास्त्र

(उच्च-प्राथमिक स्तर)



राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद् (एस.सी.ई.आर.टी.),
महेन्द्रू, पटना, बिहार

पाठ्य पुस्तक विकास समूह

पत्र–S-9.A

(गणित का शिक्षणशास्त्र, उच्च प्राथमिक स्तर)

दिशाबोध	श्री दीपक कुमार सिंह, भा.प्र.से., अपर मुख्य सचिव, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
	श्री सज्जन राजसेकर, भा.प्र.से., निदेशक, राज्य शिक्षा शोध एवं प्रशिक्षण परिषद्, महेन्द्रू, बिहार, पटना
	डॉ० एस.पी.सिन्हा, सलाहकार, शिक्षा विभाग, बिहार, पटना
समन्वयक	डॉ० रश्मि प्रभा, संयुक्त निदेशक (डायट) एस.सी.ई.आर.टी., पटना
लेखक समूह	श्री कनिष्क कृष्ण, व्याख्याता डायट, सिवान
	श्री सुनील कुमार ताँती, उच्च माध्यमिक विद्यालय छरियारी बुजुर्ग, थरथरी, नालन्दा
	डॉ० अमरेन्द्र कुमार सिन्हा, व्याख्याता डायट, तरार, औरंगाबाद
	श्री सूरज कान्त गौतम, व्याख्याता, डायट टीकापट्टी, कटिहार
समीक्षक	श्री हरिशंकर यादव, प्रभारी प्राचार्य पी.टी.ई.सी., पोखरैरा, मुजफ्फरपुर
	डॉ0 इन्द्रजीत सिंह, वरीय व्याख्याता बाईट, मुसापुर, कटिहार
भाषा समीक्षक	श्रीमती रीना कुमारी, व्याख्यता पी.टी.ई.सी., महेन्द्रू, पटना

पाठ–सूची

इकाई–1

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित के उद्देश्य एवं पाठ्यक्रम

परिचय

शिक्षा का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों के व्यक्तित्व में वांछनीय शारीरिक, मानसिक, बौद्धिक, संवेगात्मक, नैतिक, सामाजिक तथा आध्यात्मिक परिवर्तन लाना है जो समाज द्वारा निर्धारित उद्देश्यों के अनुसार, शिक्षा के उद्देश्यों द्वारा निर्धारित किए जाते हैं ताकि विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का सर्वांगीण एवं सर्वोत्तम विकास किया जा सके। किसी विषय के शिक्षण उद्देश्यों का निर्धारण शिक्षा के व्यापक उद्देश्य, विषय की प्रकृति, समाज का दर्शन, रीति–रिवाज, परंपराओं, मूल्यों एवं राष्ट्रीय आवश्यकताओं एवं समस्याओं को ध्यान में रखकर विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का अधिकतम विकास करने के लिए किया जाता है तथा इन उद्देश्यों के आलोक में विषय के पाठ्यचर्या का निर्धारण किया जाता है ताकि उस विषय से संबंधित गुणों/शक्तियों का सर्वोत्तम विकास किया जा सके।

NCF 2005 के अनुसार उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य दैनिक जीवन की कई समस्याओं को समझने तथा उन्हें हल करने के लिए तरीके प्रदान करना तथा प्राथमिक स्तर पर प्राप्त की गई दक्षताओं तथा अवधारणाओं का सुदृढ़ीकरण करना है। प्रत्येक व्यक्ति सुबह सो कर उठने से लेकर रात सोने तक हर पल, हर क्षण किसी–न–किसी रूप में गणित का प्रयोग करता है परंतु आपने अपने आसपास ऐसे लोगों को देखा होगा जिन्हें गणित काफी कठिन लगता है, वह इससे बचने का प्रयास करते हैं, वहीं कुछ ऐसे लोग भी होते हैं जिन्हें गणित के सवालों को हल करने में आनंद आता है।

हम सब जानते हैं गणित का प्रयोग हर जगह हो रहा है, चाहे सुबह की चाय बनानी हो, साइकिल चलाना हो, घर बनाना हो या दैनिक जीवन का कोई भी अन्य काम हो हर जगह गणित का प्रयोग हो रहा है। हमें गणित सीखना क्यों जरूरी है? गणित सीखने के बाद हमारे जीवन में कितना बदलाव आएगा? गणित सीखने के कौन–कौन से उद्देश्य हैं? गणित का पाठ्यक्रम एवं उसका आधार क्या है? इसका सांकेतिक भाषा क्या है? गणित सीखने की योजना कैसी होनी चाहिए? गणित सीखने का मूल्यांकन कैसे किया जाए? इन सभी प्रश्नों के उत्तर इस इकाई को पढ़ने के बाद आप समझ सकेंगे।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण एवं मूल्यांकन

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण

समाज के हर वर्ग के लोग चाहे वह किसान या मजदूर ही क्यों न हों किसी–न–किसी रूप में गणित का प्रयोग अवश्य करते हैं। ये सभी विद्यालयी गणित की तरह अवधारणों और सूत्रों का प्रयोग तो नहीं करते पर भी अपने गणितीय सूत्र एवं कार्यपद्धति के अनुसार गणितीय कार्य करते हैं। यहां तक कि छोटे बच्चों में भी मूलभूत गणितीय क्षमताएं मौजूद होती हैं। हमारे दैनिक जीवन में गणित की इतनी अधिक आवश्यकता है कि पाठ्यचर्या में पहली कक्षा से ही गणित शिक्षण को महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य दैनिक जीवन की समस्याओं को समझने तथा उनका समाधान करने के लिए विभिन्न तरीके प्रदान करना तथा प्राथमिक स्तर पर प्राप्त की गई दक्षताओं, अवधारणाओं तथा कौशलों का सुदृढ़ीकरण करना है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली द्वारा विकसित प्रारंभिक स्तर पर सीखने के प्रतिफल नामक पुस्तक के अनुसार उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थियों से गणित विषय में पाठ्यचर्या की निम्न अपेक्षाएं हैं।

- संख्याओं के मूर्त संबंध देखें तथा संबंधों में पैटर्न ढूंढ सके।
- चर, व्यंजक, समीकरण, सर्वसमिकाओं आदि से संबंधित अवधारणा को समझ सकें तथा प्रयोग कर सकें।
- वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए अंकगणित तथा बीजगणित का प्रयोग कर सकें तथा अर्थपूर्ण प्रश्न बना सकें।
- त्रिभुज, वृत्त, चतुर्भुज जैसी आकृतियों में सममिति की खोज कर सौंदर्यबोध का विकास कर सकें।
- स्थान को एक आकृति की सीमाओं में बंद क्षेत्र के रूप में पहचान सकें। परिमाप, क्षेत्रफल, आयतन के संदर्भ में स्थान संबंधी समझ विकसित कर सकें तथा उसका प्रयोग दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में कर सकें।
- गणितीय संदर्भ में स्वयं द्वारा खोजे गए निष्कर्षों को तर्कसंगत सिद्ध करने हेतु उचित कारण तथा ठोस तर्क प्रस्तुत करना सीख सकें।
- परिवेश से प्राप्त जानकारियों आंकड़ों को एकत्र कर आरेखीय एवं सारणीबद्ध रूप में प्रस्तुत कर सकें तथा उनकी व्याख्या कर सकें।

आकलन

शिक्षण की प्रक्रिया मुख्य रूप से तीन चरणों में सम्पन्न होती है।

1. शिक्षण की पूर्व क्रिया अवस्थाः – इस अवस्था में शिक्षक कक्षा में शिक्षण कार्य करने से पूर्व शिक्षण की योजना बनाते हैं जिसके अंतर्गत विषय वस्तु शिक्षण के विशिष्ट उद्देश्यों, शिक्षण विधियों एवं प्रविधियों को तय करना, विषयवस्तु के अनुरूप उचित शिक्षण अधिगम सामग्री का निर्माण करना तथा शिक्षण के दौरान आकलन की विधियों तय करना आता है।

2. शिक्षण की अंतः क्रियात्मक अवस्थाः – इस अवस्था में शिक्षण विद्यार्थियों के साथ सीखने की योजना के अनुसार अंतःक्रिया करते हैं ताकि नियोजित किये गए विशिष्ट उद्देश्यों को प्राप्त किया जा सकें।

3. शिक्षण की उत्तर क्रिया अवस्थाः – इस चरण में शिक्षक शिक्षण कार्य समाप्त करने के पश्चात अपने विद्यार्थियों पर इसका प्रभाव जानना चाहते हैं यानि विद्यार्थियों के व्यवहार में आए वास्तविक परिवर्तन की तुलना अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन से करते हैं। यदि विद्यार्थियों के व्यवहार में वांछित परिवर्ततन आ गया तो इसका तात्पर्य है कि शिक्षण कार्य सफल रहा और विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति हो गई। यदि विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति नहीं हुई तो यह शिक्षण कार्य की अपूर्णता को प्रदर्शित करता है।

विद्यार्थियों के वास्तविक व्यवहार परिवर्तन का अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन से तुलना करने के लिए शिक्षक आकलन की विभिन्न विधियों एवं प्रक्रियाओं का चुनाव करते हैं एवं आकलन की अवधारणा को मानना एवं उसका उचित एवं प्रभावी उपयोग करने में पारंगत होना प्रत्येक शिक्षक के लिए नितांत आवश्यक है।

आकलन से तात्पर्य उन प्रक्रियाओं से है जो अधिगमकर्ता की उपलब्धियों को निरंतर सभी क्षेत्रों में मापने के लिए किया जाता है। आकलन के लिए अभीष्ट आंकड़ों का संग्रह कर व्याख्या के लिए उसे व्यवस्थित किया जाता है। यह आंकड़े विभिन्न स्तरों पर विभिन्न उपकरणों, क्षेत्रों एवं प्रक्रियाओं द्वारा एकत्रित किए जाते हैं। आकलन का उद्देश्य हमेशा विद्यार्थियों की शैक्षिक प्रगति की जानकारी एवं उसके स्तर में सतत सुधार करना होता है। आकलन के द्वारा सीखने में आने वाली कठिनाइयों का पता लगाया जाता है तथा उसका उचित समाधान किया जाता है। आकलन हेतु विभिन्न विषयों में उपयुक्तता के अनुसार अंकन एवं ग्रेडिंग दोनों का उपयोग किया जाता है।

आकलन के प्रकार

उद्देश्य के आधार पर आकलन को मुख्य रूप से तीन प्रकार में बांटा जा सकता है।

1. **रचनात्मक आकलनः**— जब कोई शिक्षण प्रक्रिया अपनी प्रारंभिक या निर्माण अवस्था में हो और उसका आकलन कर उसमें सुधार किया जा सकें तो इस प्रकार के आकलन को रचनात्मक आकलन कहते हैं। इसका इस्तेमाल शिक्षण प्रक्रिया की प्रभावशीलता, गुणवत्ता, वांछनीयता या उपयोगिता को बढ़ाने के लिए किया जा सकता है। इसके माध्यम से विद्यार्थियों की क्षमता को पहचानने में तथा उनके उपलब्धि स्तर को बढ़ाने में मदद मिलती है।

2. **संकलनात्मक आकलनः—** संकलनात्मक आकलन का इस्तेमाल एक निर्धारित समय पर जैसे किसी, पाठ्यवस्तु या इकाई के अंत में विद्यार्थियों के ज्ञान, बोध, धनात्मक अभिवृत्ति, कौशल आदि के बारे में जानने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग अनेक विकल्पों में से सर्वोत्तम विकल्प का चयन करने में तथा किसी शैक्षिक कार्यक्रम की प्रभावशीलता का अध्ययन करने के लिए भी किया जाता है।

3. **निदानात्मक आकलनः—** निदानात्मक आकलन का प्रयोग विद्यार्थियों में किसी प्रकार की अधिगम कठिनाई का पता लगाने के लिए किया जाता है। इसके द्वारा शिक्षक यह जानने का प्रयत्न करते हैं कि पाठ्यवस्तु का कितना भाग विद्यार्थियों द्वारा सीखा गया तथा कौन सा भाग सीखने में विद्यार्थी असमर्थ रहें तथा किस भाग में विद्यार्थी पारंगत है। इसके द्वारा विद्यार्थियों की विषयगत विशेषताओं या कमियों का पता लगाकर उनका समाधान किया जाता है।

मूल्यांकन

मूल्यांकन मूल्य निर्धारित की प्रक्रिया तथा शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का एक अभिन्न अंग है। इसके अंतर्गत किसी व्यक्ति के किसी योग्यता अथवा कुशलता की मूल्य निर्धारण किया जाता है तथा वस्तु या प्रक्रिया की विशेषताओं की मान्यता पर निर्णय किया जाता है। परिमाणात्मक एवं गुणात्मक दोनों ही प्रकार की सूचनाओं के आधार पर विद्यार्थी की योग्यता एवं उपलब्धि का मूल्यांकन किया जाता है तथा यह पता किया जाता है कि अपेक्षित व्यवहारगत परिर्वतन किस सीमा तक हुआ । विभिन्न आधारों पर मूल्यांकन को विभिन्न प्रकारों में बांटा गया है। मूल्यांकन के कुछ प्रमुख प्रकार निम्नलिखित है।

1. कसौटी संदर्भित मूल्यांकन

कसौटी संदर्भित मूल्यांकन द्वारा ज्ञान की निरपेक्ष स्थिति का पता चलता है। इसके अंतर्गत विद्यार्थियों की योग्यता को वांछित स्तर के अनुसार रखा जाता है जिससे यह ज्ञात होता है कि शैक्षिक उद्देश्यों में से विद्यार्थी ने क्या–क्या अर्जित किया और क्या अर्जित नहीं कर पाया अर्थात् तय किए गए कसौटी के आलोक में योग्यता का मूल्यांकन किया जाता है।

2. आदर्श संदर्भित मूल्यांकन

जब विद्यार्थियों की उपलब्धि की व्यवस्था विद्यार्थियों के किसी समूह विशेष के संदर्भ में की जाती है तो आदर्श संदर्भित मूल्यांकन किया जाता है। इसमें कोई पूर्व निर्धारित कसौटी नहीं बनाई जाती है और मूल्यांकन के आधार पर न तो किसी को उत्तीर्ण किया जाता है और न ही किसी को अनुत्तीर्ण। परीक्षण में प्राप्त प्राप्तांक के आधार पर प्रत्येक विद्यार्थी का अपने समूह में क्या स्थिति है यह बतलाया जाता है।

सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन–

सतत एवं व्यापक मूल्यांकन का उद्देश्य सीखेन के सभी क्षेत्रों का लगातार मूल्यांकन है ताकि सीखने–सिखाने के क्रम में विद्यार्थियों की आवश्यकता के अनुसार सीखाने की प्रक्रिया में अपेक्षित बदलाव लाया जा सके एवं विद्यार्थिओं की व्यक्तिगत विशेषताओं का ख्याल रखते हुए उनके सर्वागीर्ण विकास हेतु आवश्यक निर्णय लिया जा सके एवं उसको क्रियान्वित किया जा सके।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आप –

- उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित सीखने के उद्देश्यों की चर्चा कर सकेंगे।
- गणित सीखने के उद्देश्यों के अनुसार पाठ्यक्रम एवं उसके आधार को समझ सकेंगे।
- पाठ्यचर्या के उद्देश्यों के आलोक में शिक्षण–अधिगम सामग्री के रूप में पाठ्यपुस्तक की उपयोगिता को समझ सकेंगे।
- उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण की विभिन्न विधियों को जान सकेंगे।
- उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थियों के गणित विषय के उपलब्धियों के आकलन एवं मूल्यांकन के विभिन्न विधियों की समझ बना सकेंगे।
- सीखने की योजना के चरणों एवं अवयवों को जान सकेंगे एवं उसका निर्माण कर सकेंगे।
- गणित की सांकेतिक भाषा को समझ कर उसका उपयोग कर सकेंगे।

गणित सीखने के उद्देश्य

किसी भी विषय को पढ़ाने से पहले सर्वप्रथम हमारा कर्त्तव्य हो जाता है कि हम बेहतर तरीके से जान लें कि उस विषय को क्यों पढ़ाया जा रहा है क्योंकि उद्देश्य के ज्ञान के बिना अध्यापक उस नौका के समान है जिसे अपने लक्ष्य का ज्ञान नहीं है तथा विद्यार्थी उस पतवार विहीन नौका के समान है जो समुद्र की लहरों के थपेड़े खाती हुई तट की ओर बहती है। गणित शिक्षण के निश्चित उद्देश्यों के सामने रहने पर ही

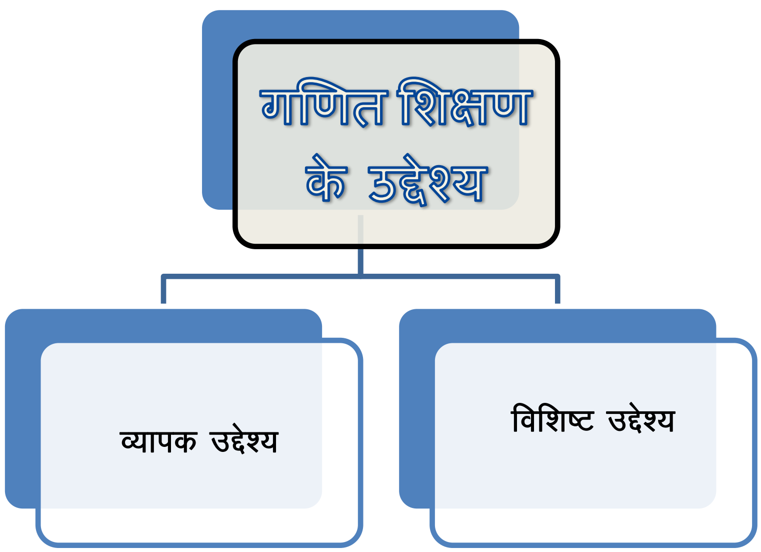
अध्यापक विभिन्न विधियों एवं प्रणालियों का अनुसरण करके उन उद्देश्यों की पूर्ति के लिए पूर्ण शक्ति और उत्साह के साथ कार्य कर सकता है तथा विद्यार्थी भी रुचि से पाठ्यवस्तु को सरलता से ग्रहण कर पाते हैं। देश, काल तथा जीवन के आदर्श अनुसार शिक्षा के उद्देश्यों के साथ गणित शिक्षण के उद्देश्य भी हमेशा बदलते रहते हैं तथा इन उद्देश्यों का स्पष्ट ज्ञान लाभों की प्राप्ति के लिए परम आवश्यक है।

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2005 में गणित शिक्षा के उद्देश्यों/लक्ष्यों के बारे में निम्न विचार व्यक्त किए गए हैं:–

'स्कूलों में गणित शिक्षा के मुख्य लक्ष्य क्या हैं? सरल शब्दों में एक मुख्य लक्ष्य हैं:– बच्चे की विचार प्रक्रिया का गणितीयकरण।'

गणित शिक्षण के उद्देश्यों को मुख्य रूप से दो वर्गों में बांटा जा सकता है:–

- व्यापक उद्देश्य
- विशिष्ट उद्देश्य



प्रायः व्यापक उद्देश्य और विशिष्ट उद्देश्य दोनों का एक–ही अर्थ लगा लिया जाता है, परंतु इन दोनों में समानता होने के साथ वृहद् अंतर भी होता है जिसे जानना शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया के सफल एवं सुचारु संचालन के लिए आवश्यक है। पाठ्यचर्या में गणित पढ़ाने के लक्ष्य को गणित के व्यापक उद्देश्य कहा जाता है तथा इन्हीं व्यापक उद्देश्यों को हम संक्षेप में उद्देश्य कहते हैं जो एक तरह के आदर्श होते हैं एवं जिनकी प्राप्ति में समय लगता है। एक व्यापक उद्देश्य की प्राप्ति के लिए उन्हें कई छोटे–छोटे प्राप्त हो जाने योग्य उद्देश्यों में विभाजित कर लिया जाता है जिसे विशिष्ट उद्देश्य कहा जाता है जिसकी प्राप्ति शिक्षक कक्षा शिक्षण के दौरान नियत कक्षा अवधि और सीमित संसाधनों के द्वारा पूरा करने की कोशिश करता है।

व्यापक उद्देश्य

गणित के व्यापक उद्देश्य निम्नलिखित हैं:–

- विद्यार्थियों में वैज्ञानिक एवं गणितीय विधि को जानने एवं इसके प्रयोग को विकसित करना।
- विद्यार्थियों में मानसिक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में तार्किक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों में गणित के अध्ययन एवं प्रयोग के प्रति रुचि उत्पन्न करना।
- विद्यार्थियों को गणित के ज्ञान द्वारा जीविकोपार्जन हेतु सक्षम बनाना।
- विद्यार्थियों को गणित संबंधी संप्रत्ययों एवं सिद्धांतों का ज्ञान कराना।
- विद्यार्थियों के व्यक्तित्व का सर्वांगीण विकास करना।
- गणित अध्ययन के द्वारा विद्यार्थियों को एक विशिष्ट अनुशासन प्रदान करना।
- गणित सम्बन्धी तथ्यों एवं सूचनाओं को संगठित, वर्गीकृत एवं उपयोग करने की क्षमता का विकास करना।
- गणितीय संक्रियाओं एवं गणनाओं में विद्यार्थियों को दक्ष बनाना।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के इन व्यापक उद्देश्यों के अतिरिक्त गणितीयकरण की क्षमता को विकसित करने के लिए अपेक्षित क्षमता तथा समस्या समाधान, स्वयं परीक्षणों के द्वारा समस्या का हल ढूंढना, प्रतिरूपों का उपयोग, सन्निकटन, प्रस्तुतीकरण, तर्क और प्रमाण, राशियों में संबंध, गणितीय संवाद और सौंदर्यात्मक संवेदनाएं आदि भी विकसित करना गणित शिक्षण के सामान्य उद्देश्य हैं।

विशिष्ट उद्देश्य

एनसीईआरटी के परीक्षा एवं मूल्यांकन नामक दस्तावेज के अनुसारः–

'विशिष्ट उद्देश्य वह बिंदु है जिसकी दिशा में कार्य किया जाता है, एक सुनियोजित परिवर्तन है जिसे किसी क्रिया द्वारा प्राप्त किया जाता है तथा जिसके लिए हम कार्य करते हैं।'

विशिष्ट उद्देश्य बहुत संकुचित, निश्चित, स्पष्ट, व व्यावहारिक व प्राप्त करने के योग्य होते हैं। यह पूर्व निर्धारित होते हैं और इनका निर्माण इस प्रकार किया जाता है कि निश्चित अवधि वाले एक निर्धारित कालांश में संपन्न किए गए सामान्य कक्षा शिक्षण द्वारा आसानी से इनकी प्राप्ति हो सकती है।

उदाहरण 1: प्रकरणः आयत एवं वर्ग का परिमाप

व्यापक/सामान्य उद्देश्य

- विद्यार्थियों में तार्किक एवं विचार शक्ति का विकास हो सकेगा।
- विद्यार्थी अवधारणा से संबंधित गणित का व्यावहारिक जीवन में उपयोग कर सकेंगे।
- विद्यार्थियों में गणित विषय के प्रति रुचि उत्पन्न हो सकेगी।

विशिष्ट उद्देश्य

- विद्यार्थी आयत एवं वर्ग की आकृतियों की पहचान कर सकेंगे।
- विद्यार्थी आयत और वर्ग को परिभाषित कर पाएंगे।

- विद्यार्थी आयत और वर्ग के परिमाप संबंधित प्रश्नों को हल कर पाएंगे।
- विद्यार्थी आयत और वर्ग के क्षेत्रफल संबंधित प्रश्नों को हल कर पाएंगे ।
- विद्यार्थी आयत और वर्ग संबंधित व्यावहारिक समस्याओं को हल करने में रुचि ले सकेंगे।

उदाहरण 2: प्रकरणः चक्रवृद्धि मिश्रधन

व्यापक/सामान्य उद्देश्य

- विद्यार्थियों की तर्क शक्ति एवं बौद्धिक शक्ति का विकास करना।
- विद्यार्थियों को गणित की उपयोगिता का ज्ञान कराना।
- विद्यार्थियों द्वारा गणित का प्रयोग दैनिक जीवन में करना।

विशिष्ट उद्देश्य

- विद्यार्थी चक्रवृद्धि ब्याज एवं चक्रवृद्धि मिश्रधन को परिभाषित कर पाएंगे।
- विद्यार्थी चक्रवृद्धि ब्याज एवं चक्रवृद्धि मिश्रधन की गणना कर पाएंगे।
- विद्यार्थी चक्रवृद्धि मिश्रधन संबंधित तथ्यों का प्रयोग अपने दैनिक जीवन में कर सकेंगे।

गणित का पाठ्यक्रम एवं उसका आधार

पाठ्यक्रम वह रास्ता है जिस पर चलकर विद्यार्थी शिक्षा के लक्ष्य पर पहुंचते हैं। पाठ्यक्रम अध्यापक एवं विद्यार्थी दोनों को क्रमशः शिक्षा देने एवं ग्रहण करने में मार्गदर्शन का कार्य करता है। पाठ्यक्रम के लिए अंग्रेजी शब्द 'करिकुलम' प्रयुक्त होता है जिसका शाब्दिक अर्थ है 'अनुकरण करना' अथवा 'पीछे दौड़ना'। इसमें निहित अर्थ यह है कि पाठ्यक्रम समाज की परंपराओं, आकांक्षाओं, आदर्शों एवं मूल्यों का अनुसरण करता है। पाठ्यक्रम का अर्थ केवल उन शैक्षिक विषयों से नहीं है जो कि परंपरागत ढंग से विद्यालय में पढ़ाए जाते हैं इसमें विद्यार्थियों द्वारा प्राप्त अनुभव को समग्रता से सम्मिलित किया जाता है जो उन्हें विद्यालय, कक्षा, पुस्तकालय, प्रयोगशाला, कार्यालय, खेल के मैदान में, शिक्षक–शिक्षार्थी अनौपचारिक संपर्क की बहुआयामी क्रियाओं से उपलब्ध होते हैं।

किलपैट्रिक के अनुसार 'पाठ्यक्रम में वे सभी अनुभव निहित है जो विद्यार्थी विद्यालय के निर्देशन में प्राप्त करते हैं। पाठ्यक्रम में कक्षा–कक्ष की क्रियाकलाप तथा उससे बाहर के समस्त कार्य एवं खेल सम्मिलित किए जाते हैं। कक्षा में अध्यापक विद्यार्थियों को सीखने के अनुभव प्रदान करते हैं तथा उनका सर्वांगीण विकास कर अध्यापन के उद्देश्यों की प्राप्ति करते हैं। इन सीखने के अनुभवों को नियोजित, क्रमबद्ध तथा श्रेणीबद्ध रखने के ढंग को ही पाठ्यक्रम कहा जाता है। यह नियोजित गतिविधियों का समूह होती है जो विशिष्ट शैक्षिक उद्देश्यों को क्रियान्वित करने के लिए डिजाइन की जाती है।

उच्च प्राथमिक स्तर के लिए गणित का पाठ्यक्रम तथा उसका आधार

शिक्षा का मुख्य उद्देश्य विद्यार्थियों के व्यक्तित्व में वांछनीय परिवर्तन लाना है जो समाज द्वारा निर्धारित उद्देश्यों के अनुसार शिक्षा के उद्देश्य द्वारा निश्चित किए जाते हैं किसी विषय के शिक्षण उद्देश्यों का निर्धारण शिक्षा के व्यापक उद्देश्य, विषय की प्रकृति, समाज का दर्शन, रीति–रिवाज, परंपराओं, मूल्यों एवं राष्ट्रीय

आवश्यकता एवं समस्याओं को ध्यान में रखकर किया जाता है तथा इन उद्देश्यों के आलोक में उस विषय के पाठ्यक्रम का निर्धारण किया जाता है।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के उद्देश्य निम्नलिखित हैं:–

- विद्यार्थी को दैनिक जीवन तथा व्यवहार में समस्याओं के समाधान के लिए गणितीय क्षमता प्राप्त करने में सहायता देना।
- अन्य विषयों को समझाने के लिए गणितीय दक्षताओं एवं अवधारणाओं का समावेशन कर उचित एवं पर्याप्त पृष्ठभूमि एवं आधार प्रदान करना।
- गणित विषय को अधिक रूचिकर एवं जीवन उपयोगी बनाना।
- बच्चों में तार्किक एवं विश्लेषणात्मक क्षमताओं का विकास करना।
- विद्यार्थियों को उच्च अध्ययन के लिए तैयार करना।
- विद्यार्थियों को भविष्य के विभिन्न तकनीकों के इस्तेमाल एवं सामान्य व्यवसाय के लिए तैयार करना।

उच्च प्राथमिक स्तर की गणित की पाठ्यपुस्तकों की समझ

राष्ट्रीय पाठ्यचर्या रूपरेखा–2005 के अनुसार गणित शिक्षण ऐसी होनी चाहिए जिससे बच्चों के वे संसाधन समृद्ध हो जो चिंतन और तर्क में, अमूर्त्तनों की संकल्पना करने और उनका व्यवहार करने में, समस्याओं को सूचीबद्ध करने और समझाने में उनकी सहायता करें। इसी को ध्यान में रखते हुए गणित के पाठ्यक्रम का निर्माण किया जाता है जिसको तय समय सीमा में विद्यार्थियों को पूरा करना होता है। पाठ्यचर्या के उद्देश्यों को हासिल करने के लिए अध्यापक विभिन्न संसाधनों का इस्तेमाल करते हैं जिसमें पाठ्यपुस्तकों का महत्वपूर्ण स्थान होता है।

प्रारंभिक स्तर पर गणित पाठ्यक्रम में शामिल की गई सभी धारणाएं बच्चे के वास्तविक जीवन के अनुभव पर आधारित होती हैं। NCF-2005 में गणित अध्ययन का आधार स्थानीय परिवेश को मानने के साथ–साथ बच्चे को ज्ञान का सृजनकर्ता माना गया है। गणित के शिक्षण के स्वरूप में परिवर्तन के साथ–साथ उसकी शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया एवं पाठ्यक्रम में भी बदलाव आया है। शिक्षण कार्य गतिविधि आधारित एवं विद्यार्थी केंद्रित किए जाते हैं। फलस्वरुप गणित की पाठ्यपुस्तकों में भी बहुत बदलाव हुए हैं। पाठ्यपुस्तकों के माध्यम से पाठ्यवस्तु को संगठित करके पढ़ाया जाता है। इसके माध्यम से पाठ्यक्रम के उद्देश्यों के अनुरूप पाठ्य–सामग्री का चयन किया जाता है जिसे विभिन्न गतिविधियों के माध्यम से उचित ढंग से अंतःक्रियात्मक बनाने का प्रयास किया जाता है। बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा–2008 के अनुसार, 'बच्चे अनुभव के जरिए, कुछ बनाते, प्रयोग करते, पढ़ते, बहुत कुछ पूछते, सुनकर, सोचकर और समझकर अभिव्यक्त करते हुए सीखते हैं।

अतः गणित की उच्च प्राथमिक स्तर की पाठ्यपुस्तक में बच्चों की सामान्य बुद्धि तथा अनुभव पर आधारित क्रियाकलापों का संकलन उनमें गणित के प्रति अभिरुचि पैदा करता है। पाठ्यपुस्तक में संकलित विषय–वस्तु विद्यार्थियों की मानसिक योग्यता रूचि एवं विकास की अवस्था के अनुकूल होनी चाहिए। जब किसी विषय ज्ञान को पाठ्यचर्या के उद्देश्यों के आलोक में पाठ्यक्रम के अनुसार एक स्थान पर पुस्तक के

रूप में संगठित ढंग से प्रस्तुत किया जाता है तो उसे पाठ्यपुस्तक की संज्ञा दी जाती है। चूंकि इसे पाठ्यक्रम के अनुसार तैयार किया जाता है इसलिए यह लेखक के निजी अभिनति, झुकाव से मुक्त होती है तथा यह उस विषय की एक प्रमाणिक पुस्तक होती है।

पाठ्यपुस्तकों के मूल्यांकन के लिए मानदंड

पाठ्यपुस्तक सबसे अधिक इस्तेमाल की जाने वाली शिक्षण–अधिगम सामग्री है जिसका इस्तेमाल अध्यापक तथा विद्यार्थी दोनों ही करते हैं। इसीलिए इसे लागू करने के पहले तथा बाद में भी इसका मूल्यांकन करना अति–आवश्यक है ताकि यह पता किया जा सके की पाठ्यपुस्तक पाठ्यक्रम को पूरा करने में किस सीमा तक सफल है तथा इसकी क्या सीमाएं हैं ताकि इसमें संशोधन कर इसे और बेहतर बनाया जा सके।

कक्षा के अंदर विद्यार्थियों पर प्रयोग करके पाठ्यपुस्तक का मूल्यांकन किया जाता है परंतु प्रायः पाठ्यपुस्तक का मूल्यांकन अधिकतर निम्न व्यक्तियों के अनुज्ञायों पर ही निर्भर करता हैः–

1. विषय के अनुभवी एवं योग्य शिक्षकों या विशेषज्ञ की अनुज्ञा
2. विषय के विद्यार्थियों की अनुज्ञा

पाठ्यपुस्तक के बारे में इन अनुज्ञायों को वस्तुनिष्ठ बनाने के लिए जिन आधारों पर अनुज्ञा प्राप्त करनी हो उसके मानदंड निश्चित किए जाते हैं तथा अनुज्ञा प्रकट करने के लिए वर्गक्रमों का प्रयोग किया जाता है इसके लिए प्रायः 5 पदीय रेटिंग स्केल का प्रयोग किया जाता है जो निम्न प्रकार का हो सकता हैः–

वर्ग क्रम	अंक
सर्वोत्कृष्ट	5
अच्छा	4
साधारण	3
निकृष्ट	2
निकृष्टतम	1

पाठ्यपुस्तक का मूल्यांकन करने के लिए निम्नांकित मानदंड स्थापित किए जा सकते हैंः–

1. **पुस्तक का यांत्रिक पहलू** – इसके अंतर्गत पाठ्यपुस्तक का बाह्य स्वरूप एडिटिंग font size आकार कागज इत्यादि आते हैं।
2. **पाठ्यपुस्तक में विषय–वस्तु की व्यवस्था** – इस मानदंड के अनुसार पाठ्यपुस्तक के भीतर विषय–वस्तु का विभाजन, उसकी श्रृंखला–बद्धता, तार्किकता, गतिविधियां, प्रोजेक्ट वर्क तथा अभ्यास करने हेतु प्रश्नों की व्यवस्था पर ध्यान दिया जाता है।

3. **प्रस्तुतीकरण –** इसके अंतर्गत पाठ्यपुस्तकों की भाषा शैली, उस में प्रयुक्त शब्दावली, प्रतिपादन पद्धति, विषय की स्वच्छता एवं बोधग्राह्यता आदि पर ध्यान दिया जाता है।
4. **उदाहरण –** इसके अंतर्गत चलचित्र, चार्ट, रेखाचित्र, ग्राफ इत्यादि की शुद्धता, वस्तुनिष्ठता, स्पष्टता, उपयोगिता इत्यादि पर ध्यान दिया जाता है।
5. **अभ्यास प्रश्न/गतिविधियां/प्रोजेक्ट वर्क –** प्रत्येक पाठ में दिए गए अभ्यास प्रश्न गतिविधियां प्रोजेक्ट का विषय वस्तु से संबंध, उनकी व्यापकता, प्रेरणात्मकता, स्पष्टता, शुद्धता विश्वसनीयता तथा कठिनाई स्तर निर्धारित किया जाता है।
6. **सहायक ग्रंथों की सूची–** पाठ्यपुस्तक में प्रस्तुत सहायक ग्रंथों की सूची तथा निर्देश विद्यार्थियों तथा अध्यापकों की दृष्टि से उपयोगिता, उसकी व्यावहारिकता, निश्चितता, उपलब्धता, विश्वसनीयता एवं वैधता का इसके अंतर्गत विचार किया जाता है।
7. **लेखक –** इसके अंतर्गत लेखक की योग्यता, लेखन तथा शिक्षण अनुभव, व्यवसायिक प्रशिक्षण तथा वर्त्तमान व्यवसाय आदि पर विचार किया जाता है।

प्राथमिक स्तर पर गणित की पाठ्यपुस्तकों की विशेषताएं

प्रारंभिक गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य गणितीयकरण की क्षमता को विकसित करने के लिए अपेक्षित क्षमताएं यथा समस्या समाधान, स्वयं परीक्षणों के द्वारा समस्या का हल ढूंढना, सन्निकटन, प्रतिरूपों का उपयोग, प्रस्तुतीकरण, तर्क और प्रमाण, राशियों में संबंध गणितीय संवाद और सौंदर्यात्मक इत्यादि विकसित करना है। इन उद्देश्यों के आलोक में उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित के पाठ्यक्रम की निम्नलिखित विशेषताएं होनी चाहिएः–

- पाठ्यपुस्तक संपूर्ण पाठ्यक्रम पर आधारित होनी चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक विद्यार्थी के स्तर एवं अध्यापकों के उद्देश्यों के अनुकूल होनी चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विषय–वस्तु की व्यवस्था मनोवैज्ञानिक एवं तार्किक क्रम को ध्यान में रखकर की जानी चाहिए।
- विषय–वस्तु परस्पर संबंधित एवं क्रमबद्ध होने चाहिए।
- पाठ्यवस्तु गणित शिक्षण की आधुनिक व्यावहारिक एवं विद्यार्थी–केंद्रित विधियों पर आधारित होनी चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में विषय–वस्तु में रोचक गतिविधियों, मनोरंजन सामग्री एवं क्रियाओं, पहेलियां, जादू का वर्ग आदि का समावेशन होना चाहिए।
- पाठ्यवस्तु एवं प्रश्नों की भाषा, स्पष्ट, सरल, रोचक तथा उद्देश्यपूर्ण होनी चाहिए।
- पाठ्यवस्तु में योजना, असाइनमेंट, परियोजना कार्य तथा गणित संबंधी प्रयोगात्मक कार्य के लिए सुझाव होने चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में दी गई पाठ्यवस्तु का दैनिक जीवन से संबंध होना चाहिए।
- पाठ्यपुस्तक में पाठ्यवस्तु को छोटे–छोटे अध्यायों में तथा अध्यायों को छोटे–छोटे खंडों में बांटना चाहिए।

- पाठ्यपुस्तक में मौखिक एवं लिखित अभ्यास तथा उपयुक्त गतिविधियों का समावेशन होना चाहिए जो विद्यार्थियों में स्वाध्याय एवं समूह अध्ययन को बढ़ावा दे। पाठ्यपुस्तक में प्रयुक्त चित्र, रेखाचित्र तथा अन्य प्रदर्शनात्मक सामग्री विद्यार्थियों के अनुभव एवं स्थानीय जीवन से संबंधित होना चाहिए।

शिक्षण विधियां

कक्षा में अपनी विषय–वस्तु को प्रस्तुत करने के लिए तथा विद्यार्थियों को ज्ञान तथा कुशलता, सैद्धांतिक और व्यावहारिक अनुभव प्रदान करने के लिए अध्यापक विद्यार्थियों की आयु, क्षमता, रूचि तथा परिस्थिति और आवश्यकता के अनुसार विभिन्न प्रकार की युक्तियों या प्रणालियों की सहायता लेते हैं। इन्हें युक्तियों या प्रणालियों को शिक्षण विधियों के नाम से जाना जाता है।

शिक्षण में सफलता मुख्यतः दो बातों पर निर्भर करती है। पहला शिक्षक का अपने विषय का पूरा ज्ञान तथा दूसरा विद्यार्थियों को अच्छी तरह समझाने और उनमें उपयुक्त और वांछनीय व्यवहार परिवर्तन लाने का कौशल। विषय का ज्ञान तो अध्यापकों को शिक्षण कार्य शुरू करने के पूर्व से ही होता है, परंतु विद्यार्थियों में उपयुक्त एवं अभिष्ट व्यवहार परिवर्तन लाने के लिए अनुभवी अध्यापकों, विषय विशेषज्ञों तथा शिक्षा शास्त्रियों ने विभिन्न उपागमो, विधियों एवं तकनीकों को जन्म दिया है जिनका इस्तेमाल विभिन्न पाठ्यवस्तुओं, प्रकरणों एवं परिस्थितियों के अनुसार अध्यापकों द्वारा किया जाता है। विभिन्न कक्षा स्तरों, प्रकरणों, परिस्थितियों एवं विद्यार्थियों के सामाजिक, मानसिक एवं भावात्मक स्तरो के अनुसार अध्यापकों द्वारा विद्यार्थियों में अधिकतम उपयुक्त वांछनीय व्यवहार परिवर्तन लाने के लिए उपयुक्त शिक्षण विधि का इस्तेमाल किया जाता है। उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण के लिए मुख्य रूप से अग्रलिखित विधियों को इस्तेमाल में लाया जाता हैः–

व्याख्यान विधि

यह एक अध्यापक केंद्रित विधि है जिसमें विद्यार्थियों के समक्ष विषय–वस्तु से संबंधित तथ्यों, सिद्धांतों, नियमों, प्रक्रिया इत्यादि का अध्यापक द्वारा शाब्दिक वर्णन किया जाता है तथा आवश्यकता पड़ने पर शिक्षण–अधिगम सामग्री के रूप में श्यामपट्ट और पाठ्यपुस्तक की सहायता ली जाती है। इसका इस्तेमाल गणित अध्यापक द्वारा विशेषतः गणित संबंधी ऐतिहासिक पृष्ठभूमि, गणितज्ञों की जीवनी आदि से परिचय कराने तथा कुछ विशेष विषयवस्तुओं, जैसे – व्यावसायिक गणित के प्रकरण, ब्याज, मिश्रधन, चक्रवृद्धि ब्याज, लाभ–हानि, प्रतिशत, कर, बट्टा, टैक्स इत्यादि को प्रस्तावित करने में किया जाता है। इस विधि के साथ प्रदर्शन विधि का प्रयोग करने पर यह ज्यादा प्रभावी हो जाती है।

यह विधि मनोवैज्ञानिक नियमों के बिल्कुल विपरीत विधि है जिसमें विद्यार्थी एक निष्क्रिय श्रोता के रूप में रहते हैं तथा उनमें तार्किकता, समस्या समाधान जैसे गुणों का उचित विकास नहीं हो पाता। सिर्फ अध्यापक ही क्रियाशील रहते हैं। गणित शिक्षण के उद्देश्यों की पूर्ति में इसका उचित योगदान न होते हुए भी जब विद्यार्थियों की एक बड़ी संख्या को एक साथ पढ़ाना होता है तब व्याख्यान विधि ही प्रायः इस्तेमाल की जाती है।

विश्लेषण एवं संश्लेषण विधि

विश्लेषण और संश्लेषण गणित शिक्षण की दो ऐसी मुख्य विधियाँ हैं जिनकी प्रक्रिया एक–दूसरे के बिल्कुल विपरीत होते हुए भी उन्हें एक साथ इस्तेमाल किया जाता है।

विश्लेषण विधि

विश्लेषण शब्द का शब्दकोष के अनुसार अर्थ है, "इकट्ठी हुई वस्तुओं अथवा भागों को अलग–अलग करने की प्रक्रिया"। इस विधि से किसी भी समस्या को हल करने के लिए उसे छोटे–छोटे भागों में विभक्त करते हैं और तब सोचते हैं कि कैसे इन्हें हल प्राप्त करने के लिए दुबारा संयोजित कर सकते हैं। इस तरह हम इस विधि में अज्ञात से ज्ञात की ओर बढ़ते हैं।

विश्लेषण विधि की प्रकृति निम्नलिखित हैः–

- यह विधि निष्कर्ष से परिकल्पना की तरफ अग्रसारित होती है।
- यह विधि अज्ञात से ज्ञात की ओर चलती है।

उदाहरणः– प्रश्न यदि a:b = c:d तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$$

हलः यदि $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ सत्य है (हम सुनिश्चित नहीं हैं।)

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = \frac{c}{d} + \frac{d}{d}$$

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{c}{d} + 1$$ (सरलीकरण करने पर)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ (दोनों ओर 1 घटाने पर)

इस प्रकार, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ सत्य होगा,

अर्थात् a:b=c:d जो दी गई शर्त है

अतः $\frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$ भी सत्य है।

संश्लेषण विधि

यह विधि विश्लेषण विधि से बिल्कुल विपरीत है। संश्लेषण का शब्दकोष में अर्थ हैः–

"अलग–अलग वस्तु अथवा भागों को इकट्ठा करने की प्रक्रिया"। इस विधि के द्वारा किसी भी समस्या को हल करने के लिए उस समस्या से संबंधित सभी पूर्व सूचनाओं को एक साथ मिलाकर समस्या को हल करने का प्रयत्न करते हैं। इस विधि में जो ज्ञात है उससे आरंभ करके पूर्व ज्ञान और पहले से ही खोजे

गए अनुमानों का सहारा लेकर हम अज्ञात तक पहुंचने का प्रयत्न करते हैं। संश्लेषण विधि की प्रकृति निम्नलिखित हैः–

- यह विधि ज्ञात से अज्ञात की ओर अग्रसारित होती है।

उदाहरणः प्रश्न यदि, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तो सिद्ध कीजिएः $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

हलः माना कि, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ = k (माना)

तब a= bk, c= dk

अब, $\frac{a+b}{a-b} = \frac{bk+b}{bk-b} = \frac{b\,(k+1)}{b\,(k-1)}$ ....(i)

तथा, $\frac{c+d}{c-d} = \frac{dk+d}{dk-d} = \frac{d\,(k+1)}{d\,(k-1)}$ ....(ii)

अब कथन (i) और कथन (ii) बराबर हैं

अतः $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

यह एक सरल विधि है जिसमें समय और शक्ति की बचत होती है। इसमें समस्याओं के हल को व्यवस्थित रूप में प्रस्तुत किया जाता है जिसके द्वारा अधिकांश विषयवस्तु को सरलता से कमजोर विद्यार्थियों को भी पढ़ाया जा सकता है परंतु यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है जो रटने पर बल देती है जिस कारण विद्यार्थियों के आत्मविश्वास में कमी आती है तथा उनमें मौलिकता और वैज्ञानिक दृष्टकोण उत्पन्न करने में बाधा उत्पन्न होती है।

विश्लेषण और संश्लेषण विधियों का संयोजन

दोनों विधियाँ एक–दूसरे पर निर्भर और एक–दूसरे की पूरक हैं। एक के बिना दूसरी अधूरी है। वस्तुतः एक जटिल गणितीय समस्या को विश्लेषण विधि के द्वारा उसके छोटे–छोटे अवयवों में बांट कर अध्ययन किया जाता है और उनका समाधान करने का प्रयास किया जाता है। तत्पश्चात संश्लेषण के माध्यम से सभी अवयवों को तार्किक रूप से जोड़कर समस्या के संपूर्ण समाधान तक पहुंचा जाता है। विश्लेषण विधि नया शीर्षक या संप्रत्यय समझने में और संश्लेषण विधि उसे याद करने में सहायक हैं। दोनों विधियाँ मिलाकर इस्तेमाल करने पर परिणाम प्रभावशाली रहते हैं।

आगमन एवं निगमन विधि

यह दो विधियाँ आगमन और निगमन का संयोग है। दोनों विधियाँ एक–दूसरे की पूरक होती हैं तथा इनका समन्वय इनकी कमियों को समाप्त कर देता है। इस संयोग को समझने के लिए पहले उन्हें अलग–अलग समझना होगा।

- **आगमन विधि –** आगमन, तार्किकता का एक रूप है जिसमें विशेष उद्देश्य या विशिष्ट प्रविधि के अध्ययन से एक सामान्य नियम या सिद्धांत की व्युत्पत्ति की जाती है। इस विधि में प्रत्यक्ष से प्रमाण

की ओर, उदाहरणों से नियम की ओर, स्थूल से सूक्ष्म की ओर तथा विशेष से सामान्य की ओर बढ़ते हैं।

उदाहरण – 'त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है।' इस सिद्धांत को समझने के लिए विद्यार्थी कई त्रिभुज बनाते हैं, फिर उसके सभी कोणों को माप कर तथा योग करके देखते हैं। सभी स्थितियों में योग 180 डिग्री आता है। इन सभी उदाहरणों से विद्यार्थी इस निष्कर्ष पर पहुंचते हैं कि त्रिभुज के तीनों कोणों का योग 180 डिग्री होता है।
आगमन विधि एक मनोवैज्ञानिक विधि है जो वास्तविक अवलोकन, चिंतन एवं प्रयोग पर आधारित है जो विद्यार्थियों में अनुसंधान करने की प्रवृत्ति का विकास करती है। छोटी कक्षाओं के किसी भी पाठ के प्रारंभिक अंशों को पढ़ाने के लिए यह विधि सर्वथा उपयुक्त है। परंतु बड़ी कक्षाओं और जटिल पाठ्यवस्तु को पढ़ाने के लिए यह विधि उपयुक्त नहीं है तथा इस विधि से सामान्यीकरण करने में भी अधिक समय लगता है।

- **निगमन विधि –** निगमन विधि आगमन विधि से बिल्कुल विपरीत है। इस विधि में विद्यार्थियों को पहले ही पूर्व अनुभवों, प्रयोगों तथा उदाहरणों द्वारा बने हुए नियम तथा सूत्र बता दिए जाते हैं। विद्यार्थी स्वयं इन नियमों तथा सूत्रों की रचना नहीं करते हैं। यह विधि सामान्य से विशेष की ओर, नियम से उदाहरण की ओर तथा सूक्ष्म से स्थूल की ओर चलती है।

उदाहरण – विद्यार्थियों को आयताकार आकृति का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए नियम पहले ही बता दिया जाता है।
आयत का क्षेत्रफल = आयत की लंबाई X आयत की चौड़ाई
अब प्रश्नों को सीधा ही इस नियम द्वारा हल करवाया जाता है।
क) उस आयताकार खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसकी लंबाई 100 मीटर तथा चौड़ाई 80 मीटर हो।
हल – हम जानते हैं कि आयत का क्षेत्रफल = आयत की लंबाई X आयत की चौड़ाई
= 100 मीटर X 80 मीटर
= 8000 वर्ग मीटर।

निगमन विधि विभिन्न गणितीय समस्याओं को हल करने में सभी स्थापित नियमों और सूत्रों को लागू करती है। बड़ी कक्षाओं तथा किसी प्रकरण के कठिन अंशों को पढ़ाने के लिए अधिक उपयुक्त है। इसमें विद्यार्थी और अध्यापक दोनों को ही कम परिश्रम करना पड़ता है तथा इस विधि द्वारा कम समय में ही अधिक ज्ञान दिया जा सकता है। परंतु यह एक मनोवैज्ञानिक विधि है जो विद्यार्थियों में रटने की प्रवृत्ति को जन्म देती है। इसमें बच्चों की रुचि और मानसिक स्तर और ध्यान नहीं दिया जाता तथा उन्हें दूसरों पर आश्रित रहना पड़ता है। इसमें विद्यार्थियों को नियम तथा तथ्यों की सूचनाएं ही मिलती हैं अतः वैज्ञानिक दृष्टिकोण का विकास नहीं होता।
आगमन और निगमन दोनों विधियों की अपनी सीमाएं हैं। परंतु यदि दोनों को मिलाकर प्रयोग किया जाए तो विद्यार्थियों के लिए गणित शिक्षण अधिक तर्कसंगत एवं रुचिकर होगा। गणित शिक्षण में हमें आगमन विधि से आरंभ करना चाहिए फिर उसे निगमन विधि से अभ्यास कराना चाहिए। इससे न केवल गति और पूरी शुद्धता बढ़ेगी बल्कि गणित विषय पर पकड़ भी बढ़ेगी।

प्रयोगशाला विधि

यह विधि आगमन निगमन विधि का क्रियात्मक स्वरूप है जो 'करके सीखना' पर बल देती है। इसमें विद्यार्थी गणित की प्रयोगशाला में स्वाभाविक परिस्थितियों के बीच स्वयं निरीक्षण एवं प्रयोग करते हैं और आगमन विधि द्वारा विद्यार्थी स्वयं ही नियम बनाते हैं। नियमों की खोज करने के बाद इनकी सत्यता की जांच क्रियात्मक रूप से करते हैं तथा इनका फिर अन्य समस्याओं को हल करने में उपयोग करते हैं। यह विधि 'स्थूल से सूक्ष्म की ओर', 'ज्ञात से अज्ञात की ओर', ' करके सीखने' आदि महत्वपूर्ण शैक्षणिक सिद्धांतों पर आधारित है।

उदाहरण – वृत्त की परिधि और व्यास में अनुपात ज्ञात करना।

हल – प्रयोगशाला विधि द्वारा इसे अग्रलिखित चरणों द्वारा संपन्न करेंगेः

1. प्रयोगशाला में प्रत्येक विद्यार्थी को कागज का गत्ता उपलब्ध कराएं।
2. विद्यार्थियों को 7 सेंटीमीटर व्यास वाले वृत्त को अपने–अपने गत्तों पर बनाने के लिए कहें।
3. वृत्त बनने के बाद अब उन्हें भली–भांति कटवा लीजिए।
4. इन वृत्ताकार गत्ते के टुकड़ों को विद्यार्थियों से उनकी कॉपी पर बिना फिसलाए हुए लुढ़का कर एक पूरा चक्कर लगवा दीजिए और इस प्रकार एक चक्कर द्वारा तय की गई दूरी को नपवा लीजिए।
5. इस तरह वृत्त की परिधि मालूम हो जाने पर उसकी व्यास से तुलना करके विद्यार्थियों को अनुपात पता करने के लिए बोलिएः

यहां, वृत की परिधि = 22 सेंटीमीटर

वृत का व्यास = 7 सेंटीमीटर

इस प्रकार दोनों का अनुपात = 22/7

6. यही प्रयोग 3.5 सेंटीमीटर, 14 सेंटीमीटर तथा 21 सेंटीमीटर व्यास वाले वृतों से करके देखने तथा परिणाम निकालने के लिए बोलिए।
7. आगमन चिंतन प्रणाली द्वारा अब विद्यार्थियों को यह सोचने के लिए प्रेरित कीजिए कि वृत्त की परिधि/वृत्त का व्यास = 22/7 = π (पाई)

(इस परिणाम अर्थात, 22/7 को ग्रीक भाषा के अक्षर 'π' (पाई) से सूचित किया जाता है। इसे विद्यार्थियों को भली–भांति समझा दिया जाना चाहिए)

प्रयोगशाला विधि एक वैज्ञानिक विधि है जिसके द्वारा सिद्धांतों, प्रत्ययों एवं नवीन तथ्यों की खोज की जा सकती है और नियमों को व्यावहारिक रूप में सीखकर तथा प्रयोग में लाकर सरलता से सीखा जा सकता है। इसमें विद्यार्थी अपने प्रयत्नों द्वारा रचनात्मक रूप में क्रियात्मक कार्यों द्वारा ज्ञान उपार्जन करते हैं इसलिए शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में उनकी स्वाभाविक रूचि भी बनी रहती है तथा स्थूल वस्तुओं के प्रयोग से सूक्ष्म बातें भी स्पष्ट हो जाती हैं। विद्यार्थियों को गणित के नियमों, सिद्धांतों तथा परिभाषाओं की वास्तविक उपयोगिता का ज्ञान हो जाता है तथा प्राप्त किया हुआ ज्ञान स्थाई रहता है। इससे विद्यार्थियों में निरीक्षण, परीक्षण, चिंतन, तर्क इत्यादि कुशलताओं का विकास होता है परंतु यह विधि तभी सफल सिद्ध हो सकती है, जबकि आवश्यक उपकरणों से युक्त एक अच्छी प्रयोगशाला हो तथा प्रयोगों को करने के लिए पर्याप्त समय हो। इस विधि का प्रयोग करने से विद्यार्थियों को तथ्यों का ज्ञान तो हो जाता है, परंतु इससे उनकी विचार शक्ति का अच्छी तरह विकास नहीं हो पाता तथा गणित के सभी प्रकरण इस विधि द्वारा नहीं पढ़ाए जा सकते हैं।

हयूरिस्टिक विधि/स्वतः शोध विधि
हयूरिस्टिक विधि में सब कुछ शिक्षक द्वारा बताने के स्थान पर विद्यार्थी को स्वयं तथ्यों, नियमों एवं प्रक्रियाओं को खोजने को कहा जाता है। इस विधि को 'अनुसंधान विधि', 'खोज विधि' या 'स्वतः शोध विधि' के नाम से भी जाना जाता है। हयूरिस्टिक "Heuristic" शब्द की उत्पत्ति ग्रीक भाषा के शब्द "Heurisko" से हुई है जिसका अर्थ है – 'मैं खोजता हूँ। इस विधि के जनक हेनरी आर्मस्ट्रांग है। आर्मस्ट्रांग के शब्दों में, 'हयूरिस्टिक विधि शिक्षण की वह विधि है जिसमें हम विद्यार्थी को जहाँ तक हो सके एक अच्छे अनुसंधानकर्ता या खोजी के रूप में देखना चाहते हैं।

हयूरिस्टिक विधि के सिद्धांत
इस विधि का उद्देश्य विद्यार्थियों में वैज्ञानिक प्रवृत्ति का विकास करना है जिससे कि वे स्वयं देखना, सोचना, निर्णय करना तथा अपने विचारों को व्यक्त करना सीख जाएं। इस विधि में अध्यापक विद्यार्थियों के सामने एक समस्या रखते हैं तथा सभी विद्यार्थी इस समस्या को प्रयोगात्मक अथवा सैद्धांतिक रूप से हल करने का प्रयत्न करते हैं। आवश्यकता पड़ने पर वे शिक्षक से परामर्श कर सकते हैं। इस विधि में अध्यापक का कार्य विद्यार्थियों के लिए उपयुक्त वातावरण तैयार करना है तथा उनको आवश्यक सामग्री, उपकरण इत्यादि साधनों को उपलब्ध कराना है जिनका उपयोग विद्यार्थी समस्याओं को हल करने में करते हैं। अध्यापक विद्यार्थियों का मार्गदर्शन करते हैं जिससे वह नवीन नियमों, समाधानों तथा संबंधों की स्वयं अपने प्रयत्नों द्वारा खोज कर सके।

उदाहरणः समस्या – चतुर्भुज के चारों कोणों का योग 360 डिग्री होता है ।
हलः आवश्यक सामग्री एवं उपकरण की व्यवस्थाः गत्ते, चांदा (कोण मापक), विभिन्न प्रकार के कागज के गत्ते पर बने हुए चतुर्भुज (समानांतर, समलंब, पतंग इत्यादि)
विधि का प्रयोगः अध्यापक गत्ते पर बने विभिन्न प्रकार के चतुर्भुज को विद्यार्थियों के बीच बाँट देते हैं तथा चांदा (कोण मापक) के द्वारा विद्यार्थियों को प्रत्येक चतुर्भुज के चारों कोणों को मापने के लिए कहते हैं। विद्यार्थी जब यह काम पूरा कर लेते हैं तब अध्यापक उन्हें मापे गए चारों कोणों का योगफल निकालने के लिए कहते हैं। फिर सभी विद्यार्थी से एक–एक कर उनके योगफल को बोलने के लिए कहते हैं। सभी विद्यार्थियों का उत्तर लगभग 360 डिग्री ही आता है। इस प्रकार सभी विद्यार्थी इस अवधारणा को समझ जाते हैं कि चतुर्भुज के चारों कोणों का योगफल 360 डिग्री होता है।
हयूरिस्टिक विधि एक मनोवैज्ञानिक विधि है जिसके द्वारा विद्यार्थियों में वैज्ञानिक ढंग से सोचने, बोलने, निरीक्षण करने, तथ्यों को परखने तथा उनके द्वारा किसी निश्चित परिणाम पर पहुँचने की क्षमता उत्पन्न होती है। इस विधि में विद्यार्थी सक्रिय रहता है तथा उसे विषय का वास्तविक ज्ञान होता है। परंतु यह विधि समूह शिक्षण, छोटी कक्षा के विद्यार्थियों एवं सामान्य बुद्धि वाले विद्यार्थियों के लिए बहुत प्रभावी नहीं है। इस विधि से शिक्षण में काफी समय और शक्ति लगता है तथा पाठ्यक्रम के सभी प्रकरणों का शिक्षण इस विधि के द्वारा संभव नहीं है। इस विधि से अध्यापन कार्य करने से शिक्षकों का उत्तरदायित्व बहुत बढ़ जाता है और इस विधि द्वारा विद्यार्थियों द्वारा गलत निष्कर्ष निकालने की संभावना भी बनी रहती है।

प्रोजेक्ट/परियोजना विधि
प्रोजेक्ट विधि विद्यार्थी केंद्रित एवं अत्यंत प्रभावी शिक्षण विधि है जिसमें विद्यार्थी की क्रियाशीलता पर पूरा ध्यान दिया जाता है तथा उससे अपेक्षा की जाती है कि वह जो कुछ भी सीखें स्वयं अपने प्रयास से सीखें। किलपैट्रिक को प्रोजेक्ट विधि के जन्मदाता के रूप में जाना जाता है। किलपैट्रिक के अनुसार, 'प्रोजेक्ट एक सोद्देश्य क्रिया है, जिसे मन लगाकर सामाजिक वातावरण में पूरा किया जाता है।'
प्रोजेक्ट विद्यार्थियों के वास्तविक जीवन से संबंधित किसी समस्या का हल ढूंढ निकालने के लिए अच्छी प्रकार से चुना हुआ तथा प्रसन्नता पूर्वक लिया जाने वाला कार्य है जो कि स्वाभाविक परिस्थितियों में पूरा किया जाता है। किसी भी प्रोजेक्ट पर काम करने के लिए हमें वास्तविक रूप से 6 सोपानों से गुजरना होता हैः–

1. परिस्थिति प्रदान करना।
2. प्रोजेक्ट का चुनाव और उद्देश्य के बारे में स्पष्ट ज्ञान।
3. प्रोजेक्ट की रूपरेखा तैयार करना/योजना बनाना।
4. प्रोजेक्ट को कार्यान्वित करना।
5. प्रोजेक्ट का मूल्यांकन करना।
6. प्रोजेक्ट का अभिलेखन करना।

समूह के सभी सदस्यों द्वारा विचार गोष्ठी के बाद प्रोजेक्ट का चुनाव और उसके उद्देश्य के बारे में स्पष्ट ज्ञान हो जाने के बाद प्रोजेक्ट पर कार्य करने की रूपरेखा तैयार की जाती है। योजना के अनुसार सभी विद्यार्थी अपनी योग्यता और सामर्थ्य के अनुसार अपने–अपने उत्तर दायित्व का निर्वहन करते हैं। काम का निश्चित समय अंतराल पर मूल्यांकन भी किया जाता है तथा आवश्यकतानुसार उसमें संशोधन और परिमार्जन किया जाता है।

प्रोजेक्ट के सभी चरणों का अभिलेखन भी किया जाता है – किस प्रकार प्रोजेक्ट का चुनाव हुआ, रूपरेखा तैयार की गई, सदस्यों के बीच कार्यों का बंटवारा हुआ, कार्य करते समय क्या–क्या कठिनाइयां आई, योजना कहां तक सफल हुई इत्यादि सभी बिंदुओं का अभिलेखन किया जाता है। प्रोजेक्ट पूरा करने के लिए सभी विषयों के ज्ञान तथा अनुभव की आवश्यकता होती है।

प्रोजेक्ट विधि मनोवैज्ञानिक सिद्धांतों पर आधारित है। यह विद्यार्थी केंद्रित विधि है जिसमें विद्यार्थियों की स्वाभाविक रुचियां, मनोवृतियों, जिज्ञासा, रचनात्मकता एवं अन्वेषण प्रवृत्ति का पूरा ध्यान रखा जाता है। इस विधि द्वारा विद्यार्थी गणित तो सीखते ही हैं, साथ–ही यह उनमें जनतांत्रिक भावनाओं एवं उत्तरदायित्व की भावना, सहिष्णुता, धैर्य, कर्त्तव्यनिष्ठता एवं दूसरों से सहयोग की भावना आदि सामाजिक गुणों का भी विकास करती है। इस विधि में विद्यार्थियों की सक्रिय भागीदारी एवं प्रत्यक्ष अनुभवों एवं क्रियाओं द्वारा ज्ञान प्राप्त करने के कारण स्पष्ट एवं अस्थायी ज्ञान प्राप्त होता है, परंतु इस विधि के द्वारा गणित के सभी प्रकरणों को नहीं पढ़ाया जा सकता है तथा गणित शिक्षण में क्रमबद्ध ज्ञान देना भी संभव नहीं हो पाता है। इस विधि से शिक्षण हेतु समय, धन एवं श्रम बहुत अधिक लगता है तथा विद्यार्थियों को पर्याप्त अभ्यास कार्य करने का अवसर नहीं मिल पाता है।

समस्या समाधान विधि

गणित की समस्या समाधान विधि एक मनोवैज्ञानिक शिक्षण विधि है जिसका आधार हयूरिस्टिक विधि है जिसमें छात्र को 'करके सीखने' के अवसर उपलब्ध होते हैं। सामान्यतः समस्या समाधान से तात्पर्य "हमारे द्वारा किसी परिस्थिति में किए जाने वाले उन प्रयासों से हैं, जब हमें यह नहीं मालूम होता है कि हमें क्या करना चाहिए"। इसमें विद्यार्थी को किसी दी हुई समस्या का हल ढूंढना होता है जिसको वह कुछ निश्चित, तार्किक, क्रमबद्ध क्रियाओं द्वारा ढूंढता है तथा जिसका हल हो जाने पर विद्यार्थी तृप्ति का अनुभव करता है। इस विधि को अपनाने से विद्यार्थियों में चिंतन, तार्किक एवं निरीक्षण शक्तियों का विकास होता है।

समस्या समाधान विधि के चरण

1. **समस्या को पहचानना –** सर्वप्रथम विद्यार्थी समस्या की उपस्थिति महसूस करता है एवं उसे चिन्हित करता है।
2. **समस्या को परिभाषित करना –** दूसरे चरण में समस्या को व्यवहारिक रूप में परिभाषित किया जाता है ताकि उसके विभिन्न आयामों और विशेषताओं को समझा जा सके। इसके लिए समस्या का विश्लेषण किया जाता है।
3. **संबद्ध आंकड़ों का संकलन –** इस चरण में उन सूचनाओं/तथ्यों को एकत्र एवं व्यवस्थित किया जाता है जो समस्या समाधान में सहायक हो सकते हैं।

4. **आंकड़ों का विश्लेषण –** इस चरण में आंकड़ों का विश्लेषण करके संभव संबंध प्राप्त करने के प्रयास किए जाते हैं।
5. **सही समाधान का चुनाव और उसकी जाँच –** इस चरण में समस्या का सबसे उपयुक्त हल तार्किक चिंतन के द्वारा प्राप्त किया जाता है जो प्रायः पूर्व स्थापित तथ्यों, नियमों एवं सिद्धांतों के अनुकूल होता है।
6. **स्वीकृत समाधान का सत्यापन करना –** अंतिम रूप में स्वीकृत समाधान की प्रमाणिकता और सत्यता सिद्ध करने के लिए उसी प्रकार की समस्याओं के हल में प्रयोग करके देखा जाता है।यह विधि विद्यार्थियों की गणितीय समस्याओं के समाधान की योग्यता बढ़ाने के साथ–साथ दैनिक जीवन की समस्याओं को भी हल करने में सहायक होता है एवं उनमें स्वतंत्र रूप से तार्किक चिंतन करने और पूर्वानुमान लगाने को प्रोत्साहित करती है। यह विधि विद्यार्थियों के अन्वेषण की प्रवृत्ति बढ़ाती है तथा इससे प्राप्त ज्ञान स्थाई होता है जिससे विद्यार्थियों का आत्मविश्वास बढ़ता है। इस विधि से पढ़ाने में समय अधिक लगता है तथा यह सभी प्रकरणों एवं सभी कक्षाओं को पढ़ाने में ज्यादा प्रभावशाली नहीं है। औसत से निम्न स्तर के विद्यार्थियों को पढ़ाने के लिए भी यह विधि उपयुक्त नहीं है ।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण

समाज के हर वर्ग और पेशे के व्यक्ति चाहे वह किसान या मजूदर हीं क्यों न हो किसी न किसी रूप में गणित का प्रयोग अवश्य करते हैं। ये सभी विद्यालयी गणित की तरह अवधारणाओं या सूत्रों का प्रयोग तो नहीं करते पर भी अपने गणितीय सूत्र एवं कार्यपद्धति के अनुसार गणितीय कार्य करते हैं। यहाँ तक की छोटे बच्चों में भी मूलभूत गणितीय क्षमताएँ मौजूद होती हैं। हमारे दैनिक जीवन में गणित की इतनी अधिक आवश्यकता है कि पाठ्यचर्चा में पहली कक्षा से ही गणित शिक्षण को महत्वपूर्ण स्थान दिया गया है।

उच्च प्राथमिक स्तर पर गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य दैनिक जीवन की समस्याओं को समझने तथा उनका समाधान करने के लिए विभिन्न तरीके प्रदान प्रदान करना तथा प्राथमिक स्तर पर प्राप्त की गयी दक्षताओं, अवधारणाओं तथा कौशलों का सुदृढ़ीकरण करना है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान एवं प्रशिक्षण परिषद्, नई दिल्ली द्वारा विकसित प्रारंभिक स्तर पर सीखने के प्रतिफल नामक पुस्तक के अनुसार उच्च प्राथमिक स्तर पर विद्यार्थियों से गणित विषय में पाठ्यचर्चा की निम्न अपेक्षाएँ हैं।

- संख्याओं के मूर्त विचार से संख्या बोध की ओर अग्रसर हो सकें।
- संख्याओं के बीच संबंध देखें तथा संबंधों में पैटर्न ढूंढ सके।
- चर, व्यंजक, समीकरण, सर्वसमिकाओं आदि से संबंधित अवधारणा को समझ सके तथा प्रयोग कर सकें।
- वास्तविक जीवन की समस्याओं को हल करने के लिए अंकगणित तथा बीजगणित का प्रयोग कर सकें तथा अर्थपूर्ण प्रश्न बना सकें।
- त्रिभुज, वृत, चतुर्भुज जैसी आकृतियों में समीकरण की खोज कर सौंदर्यबोध का विकास कर सकें।
- स्थान को एक आकृति की सीमाओं में बंद क्षेत्र के रूप में पहचान सके। परिमाप, क्षेत्रफल, आयतन के संदर्भ में स्थान संबंधी समझ विकसित कर सकें तथा उसका प्रयोग दैनिक जीवन की समस्याओं को हल करने में कर सके।

- गणितीय संदर्भ में स्वयं द्वारा खोंजे गए निष्कर्षों को तर्कसंगत सिद्ध करने हेतु उचित कारण तथा ठोस तर्क प्रस्तुत करना सीखें।
- परिवेश से प्राप्त जानकारियों /आँकड़ों को एकत्र कर आरेखीय एवं सारणीबद्ध रूप से प्रस्तुत कर सकें तथा उनकी व्याख्या कर सकें।

आकलन

शिक्षण की प्रक्रिया मुख्य रूप से तीन चरणों में सम्पन्न होती है।

1. **शिक्षण की पूर्व क्रिया अवस्थाः** इस अवस्था में शिक्षक कक्षा में शिक्षण कार्य करने करने से पूर्व शिक्षण की योजना बनाते हैं जिसके अंतर्गत विषय वस्तु शिक्षण के विशिष्ट उद्देश्यों, शिक्षण विधियों एवं प्रविधियों को तय करना, गतिविधियों को तय करना, शिक्षण प्रक्रिया तय करना, विषयवस्तु के अनुरूप उचित शिक्षण अधिगम सामग्री का निर्माण करना तथा शिक्षण के दौरान आकलन की विधियाँ तय करना आता है।
2. **अंतः क्रियात्मक अवस्थाः** इस अवस्था में शिक्षक, विद्यार्थियों के साथ सीखने की योजना के अनुसार अंतःक्रिया करते हैं ताकि नियोजित किये गए विशिष्ट उद्देश्यों को प्राप्त किया जा सकें।
3. **शिक्षण की उत्तर क्रिया / पश्चात अवस्थाः** इस चरण में शिक्षक शिक्षण कार्य समाप्त करने के पश्चात अपने विद्यार्थियों के व्यवहार में आए वास्तविक परिवर्तन की तुलना अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन से करते हैं। यदि विद्यार्थियों के व्यवहार में वांछित परिवर्तन आ गया तो इसका तात्पर्य है कि शिक्षण कार्य सफल रहा और विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति हो गयी है। यदि विशिष्ट उद्देश्यों की प्राप्ति नहीं हुई तो यह शिक्षण कार्य की अपूर्णता को प्रदर्शित करता है।

विद्यार्थियों के वास्तविक व्यवहार परिवर्तन का अपेक्षित व्यवहार परिवर्तन से तुलना करने के लिए शिक्षक आकलन की विभिन्न विधियों एवं प्रक्रियाओं का चुनाव करते हैं।

अतः आकलन की आवश्यकता को जानना एवं उसका उचित एवं प्रभावी उपयोग करने में पारंगत होना प्रत्येक शिक्षक के लिए नितांत आवश्यक है।

आकलन से तात्पर्य उन प्रक्रियाओं से है जो अधिगमकर्त्ता की उपलब्धियों को निरंतर सभी क्षेत्रों में मापने के लिए किया जाता है। आकलन के लिए अभिष्ट आँकड़ों का संग्रह कर व्याख्या के लिए उसे व्यवस्थित किया जाता है। यह आँकडे विभिन्न स्तरों पर विभिन्न उकरणों, क्षेत्रों एवं प्रक्रियाओं द्वारा एकत्रित किए जाते है। आकलन का उद्देश्य हमेशा विद्यार्थिओं की शैक्षिक प्रगति की जानकारी एवं उसके स्तर में सतत् सुधार करना होता है आकलन के द्वारा सीखने में आने वाली कठिनाइयों का पता लगाया जाता है तथा उसका उचित समाधान किया जाता है। आकलन हेतु विभिन्न विषयों में उपयुक्तता के अनुसार अंकन एवं ग्रेडिंग दानो का उपयोग किया जाता है।

आकलन के प्रकार

उद्देश्य के आधार पर आकलन को मुख्य रूप से तीन प्रकार में बाँटा गया है।

1. **रचनात्मक आकलनः** जब कोई शिक्षण प्रक्रिया अपनी प्रारंभिक या निर्माण अवस्था में हो और उसका आकलन कर उसमें सुधार किया जा सकें तो इस प्रकार के आकलन को रचनात्मक आकलन कहतें है। इसका इस्तेमाल शिक्षण प्रक्रिया की प्रभावशीलता, गुणवत्ता, वांछनीयता या उपयोगिता को बढ़ाने के लिए किया जा सकता है। इसके माध्यम से विद्यार्थियों की क्षमता को पहचानने में तथा उनके उपलब्धि स्तर को बढ़ाने में मदद मिलती है।
2. **संकलनात्मक आकलनः** संकलनात्मक आकलन का इस्तेमाल एक निर्धारित समय पर जैसे किसी प्रोग्राम, कोर्स या ईकाई के अंत में विद्यार्थियों के ज्ञान, बोध, धनात्मक अभिवृत्ति, कौशल आदि के

बारे में जानने के लिए किया जाता है। इसका उपयोग अनेक विकल्पों में से सर्वोत्तम विकल्प का चयन करने में तथा किसी शैक्षिक कार्यक्रम की प्रभावशीलता का अध्ययन करने के लिए भी किया जाता है।

3. **निदानात्मक आकलनः** निदानात्मक आकलन का प्रयोग विद्यार्थियों में किसी प्रकार की अधिगम कठिनाई का पता लगाने के लिए किया जाता है। इसके द्वारा शिक्षक यह जानने का प्रयत्न करते हैं कि पाठ्यवस्तु का कितना भाग विद्यार्थयों द्वारा सीखा गया तथा कौन सा भाग सीखने में विद्याार्थी असमर्थ रहें तथा किस भाग में विद्यार्थी पारंगत है। इसके द्वारा विद्यार्थियों की विषयगत विशेषताओं या कमियों का पता लगाकर उनका समाधान किया जाता है।

मूल्यांकन

मूल्यांकन मूल्य निर्धारण की प्रक्रिया तथा शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का एक अभिन्न अंग है। इसके अंतर्गत किसी व्यक्ति के किसी योग्यता अथवा कुशलता का मूल्य निर्धारण किया जाता है तथा वस्तु या प्रक्रिया की विशेषताओं की मान्यता पर निर्णय लिया जाता है। परिमाणात्मक एवं गुणात्मक दोनों हीं प्रकार की सूचनाओं के आधार पर विद्यार्थी की योग्यता एवं उपलब्धि का मूल्यांकन किया जाता है तथा यह पता लगाया जाता है की विद्यार्थी में अधिगम अनुभव द्वारा अपेक्षित व्यवहारगत परिवर्तन किस सीमा तक हुआ।

विभिन्न आधारों पर मूल्यांकन को विभिन्न प्रकारों में बाँटा गया है। मूल्यांकन के कुछ प्रमुख प्रकार निम्नलिखित है–

1. **कसौटी संदर्भित मूल्यांकनः** कसौटी संदर्भित मूल्यांकन द्वारा ज्ञान की निरपेक्ष स्थिति का पता चलता है। इसके अंतर्गत विद्याार्थियों की योग्यता को वांछित स्तर के अनुसार रख जाता है जिससे यह ज्ञात होता है कि शैक्षिक उद्देश्यों में से विद्यार्थी ने क्या–क्या अर्जित किया और क्या अर्जित नहीं कर पाया यानि तय किए गये कसौटी के आलोक में योग्यता का मूल्यांकन किया जाता है।
2. **आदर्श संदर्भित मूल्यांकनः** जब विद्यार्थियों की उपलब्धि की व्याख्या विद्यार्थियों के किसी समूह विशेष के संदर्भ में की जाती है तो आदर्श संदर्भित मूल्यांकन किया जाता है। इसमें कोई पूर्व निर्धातिर कसौटी नहीं बनाई जाती है और मूल्यांकन के आधार पर न ही किसी को उत्तीर्ण किया जाता है और न ही किसी को अनुत्तीर्ण। परीक्षण में प्राप्त प्राप्तांक के आधार पर प्रत्येक विद्यार्थी का अपने समूह में क्या स्थिति है यह बतलाया जाता है।
3. **सतत् एवं व्यापक मूल्यांकनः** सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन का उद्देश्य सीखने के सभी क्षेत्रों का लगातार मूल्यांकन है ताकि सीखने–सिखाने के क्रम में विद्यार्थियों की आवश्यकता के अनुसार सिखाने की प्रक्रिया में अपेक्षित बदलाव लाया जा सके एवं विद्यार्थियों की व्यक्तिगत विशेषताओं का ख्याल रखते हुए उनके सर्वांगीण विकास हेतु आवश्यक निर्णय लिया जा सके एवं उसको क्रियान्वयन किया जा सके। सतत एवं व्यापक मूल्यांकन में विद्यार्थियों के जीवन के संज्ञानात्मक पक्ष के साथ–साथ उनके भावात्मक, सामाजिक, नैतिक, आध्यात्मिक क्रियात्मक आदि सभी पक्षों के आंकलन पर समान रूप से बल दिया जाता है ताकि विद्यार्थियों के व्यक्तित्व के सभी पक्ष मजबूत हो सकें और विद्यार्थियों का सर्वांगीण विकास हो सके। पूर्व में मूल्यांकन की जगह पर सार्वधिक परीक्षाओं का प्रयोग किया जाता था जिसमें विद्यार्थियों के संज्ञानात्मक पक्ष के भी सिर्फ कुछ भागों का ही आकलन हो पाता था जबकि सह–संज्ञानात्मक पक्षों का तो बिलकुल भी नहीं। ऐसे मूल्यांकन से विद्यार्थियों की वास्तविक प्रगति, उपलब्धि समझ, भावात्मक एवं क्रियात्मक पक्षों का वास्तविक आकलन नहीं हो पाता था। तथा अंक–आधारित होने के कारण विद्यार्थियों के उपलब्धि के

वर्गीकरण करने के अत्यधिक बिंदु होते थे जिससे उनमें अंकों के लिए अत्यधिक प्रतिस्पर्धा होती थी तथा वे अत्यधिक तनाव के शिकार हो जाते थे।

पारंपरिक मूल्यांकन की इन्हीं सीमाओं को ध्यान में रखते हुए सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन की अवधारणा को विकसित किया गया। इसकी जरूरत एवं उपयोगिता की चर्चा NCF 1975 तथा 1986 की शिक्षा नीति में भी मिलती है। तथा आज यह सर्वविदित है कि विद्यार्थियों के व्यक्तित्व के सतत् एवं सर्वांगीण विकास हेतु सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन आदि आवश्यक है।

सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन का शाब्दिक अर्थ सीखने के सभी क्षेत्रों का लगातार आकलन है। विद्यार्थियों की सीखने की क्रियाओं के दौरान उनकी सक्रियता, सहभागिता कठिनाइयां, विशेषताओं, सीमाओं आदि को पहचानना और उनके अनुरूप उनके व्यक्तित्व के क्षेत्रों का लगातार विकास करने हेतु अपनी शिक्षण पद्धति, विधियां, प्रविधियां शिक्षण–आधिगम सामग्री आदि में आवश्यकतानुरूप बदलाव लाना सतत् के अंतर्गत आता है। विद्यार्थी के व्यक्तित्व के सभी आयामों संज्ञानात्मक भावात्मक, क्रियात्मक, सामाजिक, नैतिक, सौदर्यात्मक आदि सभी पक्षों का विकास सर्वांगीण कें अंतर्गत आता है।

सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन हेतु सतत् एवं व्यापक शिक्षण करना तथा मूल्यांकन के विभिन्न विधियों एवं उपकरणों की जानकारी एवं उनका उपयोग करने में पारंगत होना नितांत आवश्यक है। सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन की आवधारणा वास्तव में परीक्षा सुधार के निम्न सिद्धांतों पर आधारित है।

1. जो शिक्षक, शिक्षण कार्य करता है, उसी के द्वारा विद्यार्थियों का मूल्यांकन किया जायें न कि किसी बाहरी परीक्षक द्वारा
2. मूल्यांकन कार्य सार्वधिक या सत्र के अंत में न होकर सम्पूर्ण सत्र में निरंतर होता रहें।
3. मूल्यांकन द्वारा वर्त्तमान स्थिति की जानकारी प्राप्त हो।

गणित में सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन का महत्वः–

NCF 2005 परम्परागत मूल्यांकन पद्धति के बजाय नयी तथा सार्थक मूल्यांकन पद्धति अपनाने पर बल देता है RTE Act 2009 के अनुसार शिक्षक को प्रत्येक विद्याथ्री का संचयी प्रगति पत्रक तैयार करना तथा NCF 2020 के अनुसार शिक्षकों के अलावा विद्यार्थियों के मूल्यांकन में उनकी स्वयं की ओर उनके सहपाठियों की भी भूमिका महत्वूपर्ण होगी ताकि बच्चों के सीखने का समग्र रूप से मूल्यांकन किया जा सके और बच्चे बिना डरे मूल्यांकन की प्रक्रिया में भाग ले सकें।

शिक्षण अधिगम की प्रक्रिया अपने दो प्रमुख घटकों शिक्षक और विद्यार्थी उनके बीच होने वाली अतः क्रिया ओर उनके आपसी व्यवहार ओर सामंजस्य पर निर्भर करती है। आधिगम में आकलन की विधियां जिस हद तक विद्यार्थियों की आवश्यकताओं और रूचियों के अनुरूप होती है। वे उनके लिए उतनी ही प्रभावी होती है।

प्राथमिक स्तर पर गणित में CCE – गणित में मूल्यांकन गणित शिक्षण के उद्देश्य से जुड़ा है। विद्यालय के आरंभिक वर्षो में गणित शिक्षण का मुख्य उद्देश्य दैनिक जीवन में उपयोग में आने वाली अवधारणाओं से संबंधित क्षमताओं, दक्षताओं, कौशलों, रूचियों, सोच व तर्क शक्ति को विकसित करना है। ताकि वे अपने आस–पास के वातावरण की छानबीन कर सकें तथा उनसे संबंध स्थापित कर सकें, आकारों एवं आकृतियों को समझ सकें तथा उनके अवलोकनीय गुणों में समानता और अंतर स्पष्ट कर सकें, दैनिक जीवन में संख्याओं पर संक्रियाएं (जोड़, घटाव, गुणा तथा भाग) करने के अपने तरीकों का विकास कर सकें, गणितीय भाषा और प्रतीकों की समझ विकसित कर सकें, पूर्ण के हिस्से को भिन्न के रूप में समझ सके, अपने परिवेश से सरल आंकड़ों का संकलन, प्रदर्शन एवं व्याख्या कर सकें तथा दैनिक जीवन में इनका प्रयोग कर सके, आकृतियों तथ संख्याओं के सरल पैटर्न की पहचान निरतंर कर सके आदि।

आकलन की सामान्य प्रविधियाँ

उद्देश्य की प्राप्ति तभी संभव है जब शिक्षक को प्रत्येक विद्यार्थी का सीखने संबंधी प्रगति की समझ विकसित करने, सीखने संबंधी कमियों को पहचानने तथा उनको दूर करने का पर्याप्त तथा समुचित अवसर मिलें और यह तभी संभव है जब परम्परागत मूल्यांकन की जगह सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन का प्रयोग हो। क्योंकि सतत् एवं व्यापक मूल्यांकन के अंतर्गत गणितीय अधिगम के

विभिन्न आयामों एवं स्तरों के आकलन के लिए आकलन की प्रभावी विधियां, उपकरण एवं तकनीक मौजूद है। जैस– अवलोकन, समवयसमूह द्वारा अवलोकन, स्व–अवलोकन, प्रदत्त कार्य, परियोजना कार्य, औपचारिक एवं अनौपचारिक बातचीत, पोर्टफोलियो, सेटिंग–स्केल, अवलोकन सूची, अनुभव रिकॉर्ड, समग्र प्रगति पत्रक, प्रश्नावली, विभिन्न प्रकार की एकल एवं समूह गतिविधियां आदि इन सभी का प्रयोग विद्यार्थियों के मूल्यांकन को व्यापक एवं उद्देश्यात्मक तरीके से तथा लगातार करने में सहायक होते हैं। तथा किसी भी समय उनकी उपलब्धि का वर्तमान स्तर बता पाने में भी मदद करते है।

अधिगम प्रतिफल

प्रायः शिक्षकों में इस तथ्य की स्पष्टता नहीं होती कि विद्यार्थियों की कक्षाओं के स्तर के अनुसार किस प्रकार का सीखना आवश्यक है तथा वे कौन सी मापदंड हैं जिनका इस्तेमाल कर इसे मापा जा सकता है। प्रायः शिक्षक उपलब्ध पाठ्यपुस्तक को ही संपूर्ण पाठ्यक्रम मानकर अध्यायों के अंत में दिए गए एकांशों के आधार पर अपने विद्यार्थियों की समझ की विभिन्नताओं तथा शिक्षण के विभिन्न सिद्धांतों को वे ध्यान में नही रख पाते। पाठ्यसामग्रियों में संदर्भानुसार विभिन्नताएं और अपनाई गई शिक्षण सिद्धांतों, विधियों एवं तकनीकों में विविधता पर सामान्यतया उनका ध्यान नहीं जाता क्योंकि इनके आकलन की कोई निश्चित कसौटी नहीं है।

अतः सतत् विकास के लक्ष्य के अनुरूप किसी विषयवस्तु के शिक्षक के उपरांत विद्यार्थियों में अपेक्षित ज्ञान, बोध, दक्षता, कौशल, अभिवृत्ति आदि को प्रत्येक कक्षा में प्रत्येक विषय के अनुसार विभिन्न अधिगम प्रतिफलों के रूप में निश्चित किया गया। ये अधिगम प्रतिफल तरीके अपनाने में ही मदद नहीं करते बल्कि अन्य जैसे– संरक्षक, माता–पिता, समुदाय, विद्यालय प्रबंध समिति के सदस्यों, अधिकारियों आदि का गुणवत्तापूर्ण शिक्षा सुनिश्चित करने में उनकी भूमिका के प्रति सतर्क और जिम्मेवार भी बनाता है। स्पष्ट रूप से परिभाषित अधिगम प्रतिफल विभिन्न पाठ्यचर्या क्षेत्रों की अपेक्षाओं को पूर्ण करने में बहुत ही सहायक सिद्ध होते हैं।

अधिगम प्रतिफल की अवधारणा

विद्यार्थियों के व्यवहार के सभी पक्षों में अपेक्षाकृत स्थायी परिवर्तन लाने के लिए पाठ्यचर्या के उद्देश्यों के आलोक में पाठ्यक्रम में सीखने के जो लक्ष्य निर्धारित किए जाते हैं तथा जिन्हें ध्यान में रखकर शिक्षक अपने दैनिक शिक्षण कार्य को संपादित करते हैं तत्पश्चात उनके विद्यार्थियों में जो वांछित परिवर्तन आता है उसे ही अधिगम प्रतिफल कहा जाता है। किसी एक इकाई, अवधारणा, दक्षता या कौशल से जुड़े हुए एक से अधिक अधिगम प्रतिफल हो सकते हैं। इस प्रकार यह किसी विशिष्ट दक्षता या कौशल के भाग होते हैं। अधिगम प्रतिफल एवं विशिष्ट कथन होता है जिसके द्वारा किसी अवधारणा से संबंधित दक्षता, ज्ञान, बोध, कौशल अभिवृति आदि के अर्जित उपलब्धि का मापन किया जाता है।

अधिगम संकेतक

सीखने के संकेतक शिक्षण अधिगम प्रणाली एवं शिक्षण प्रक्रिया में आई प्रगति के प्रमाण हैं। यह अपेक्षित अधिगम प्रतिफल को प्राप्त करने के लिए सहायक होते हैं। अधिगम संकेतकों का निर्माण/निर्धारण पाठ्यक्रम के उद्देश्यों के आलोक में अधिगम प्रतिफल के अनुसार तय किए जाते हैं। उनका निर्माण विद्यार्थियों की कक्षा, आयु, मानसिक स्तर, परिवेश तथा आवश्यकता के अनुसार किया जाता है। इसके द्वारा विद्यालयों में सीखने की गुणवत्ता को बढ़ाया जा सकता है तथा शिक्षकों को भी प्रत्येक अवधारणा/प्रकरण से जुड़े विशिष्ट उद्देश्यों को तय करने, शिक्षण विधियों, प्रविधियों गतिविधियों, शिक्षण अधिगम सामग्रियों एवं वातावरण को निश्चित करने में काफी मदद मिलती है तथा इसकी मदद से अधिगम प्रतिफल एवं शैक्षिक आकांक्षाओं की प्रतिपूर्ति करने में मदद मिलती है।

राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद ने विभिन्न कक्षाओं के विभिन्न विषयों के सीखने के प्रतिफल तय किए है। जो पुस्तक के रूप में संबंधित वेबसाइट पर उपलब्ध है। विभिन्न राज्यों ने अपने

क्षेत्रीय परिप्रेक्ष्य में उसमे परिवर्तन कर अपने राज्य की आवश्यकताओं के अनुसार विभिन्न कक्षाओं की विभिन्न विषयों की अधिगम प्रतिफल तय किया है। ताकि शिक्षक बिना किसी विलम्ब के सभी विद्यार्थियों के लिए सीखने के कौशलों को अधिक उपयुक्त रूप से सुनिश्चित करें एवं आवश्यक तथा अपेक्षित सुधारात्मक कदम उठाएं।

शिक्षकों को निश्चित किए गए अधिगम प्रतिफल के अनुसार अधिगम संकेतकों का निर्माण करना होता है तथा उसके अनुसार वे शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया निश्चित करते हैं एवं आवश्यक एकल एवं सामुहिक गतिविधियों का चुनाव करते हैं। तथा अंत में निश्चित किए गए अधिगम प्रतिफल के आकलन हेतु एकांशों का निर्माण करते हैं

उदारहण हेतु कक्षा 6 के विज्ञान विषय में वर्णित पाठ योजना के लिए निश्चित किया गया पहला अधिगम प्रतिफल–विभिन्न खाद्य सामग्री, उनके प्राप्ति स्त्रोत आदि की पहचान, सूचीकरण, अंतर और वर्गीकरण करते हैं के निम्नलिखित अधिगम संकेतक हो सकते हैं

1. प्रतिदिन खाये जाने वाले खाद्य पदार्थों के बारे में बताना
2. खाद्य सामग्री / व्यंजन बनाने में प्रयुक्त सामग्री की सूची बनाना
3. खाद्य सामग्री/व्यंजन बनाने में प्रयुक्त स्त्रोतों के आधार पर अंतर और वर्गीकरण करना। जैसे पौद्यों, जन्तुओं एवं अन्य स्त्रोत से प्राप्त खाद्य पदार्थ।

इस प्रकार स्पष्ट है कि अधिगम संकेतक शैक्षिक उद्देश्यों की प्राप्ति में काफी सहायक हैं ताकि इनको निश्चित करने से शिक्षकों को अपनी शिक्षण विधियां, गतिविधियां शिक्षण अधिगम सामग्री को तय करने में मदद मिलती है तथा वे आत्मविश्वास के साथ प्रभावी शिक्षण अधिगम प्रक्रिया का संचालन कर पाते हैं।

<u>सीखने की योजना</u>

विधार्थी बेहतर तरीके से तभी सीखते हैं जब विषयवस्तु को इस ढंग से व्यवस्थित किया जाए कि किसी क्लास में शिक्षण अधिगम प्रक्रिया से गुजरने के दौरान विद्यार्थी आन्नद का अनुभव करें। ऐसा तब होता है जब शिक्षक ऐसे वातावरण का निर्माण करें जिसमें विद्यार्थी रूचिपूर्वक सीख सकें। इसके लिए शिक्षण को उचित विधियों, प्रविधियों, गतिविधियों, शिक्षण अधिगम सामग्रियों, प्रक्रियाओं एवं आकलन की विधियों का चयन, विषय वस्तु की प्रकृति एवं कठिनता के स्तर के अनुसार करना होता है।

प्रत्येक विद्यार्थी के पास गणित से संबंधित परिवेश से प्राप्त सामान्य और विशिष्ट अनुभव होते हैं तथा एक शिक्षक यह जानते हैं कि विद्यार्थी गणित कैसे सीखते हैं तथा उनके गणित सीखने की प्रक्रिया को आनंददायी और सार्थक कैसे बनाया जा सकता है। साथ ही सीखने की प्रक्रिया के समाप्त होने के उपरांत प्राप्त हुए अनुभव से विद्यार्थियों के व्यवहार में हुए परिर्वतन का आकलन एवं मूल्यांकन किन विधियों एवं उपकरणों का प्रयोग कर किया जा सकता है।

इसलिए गणित के सफल शिक्षण के लिए तथा विद्यार्थियों के व्यवहार में अपेक्षित परिवर्तन लाने के लिए शिक्षक, शिक्षण के पूर्ण प्रत्येक कक्षा की प्रत्येक विषय के प्रत्येक पाठ के विभिन्न अवधारणाओं को पढ़ाने के पूर्व प्रत्येक कालांश के लिए एक सीखने की योजना तैयार करते हैं। यह प्रत्येक शिक्षक व्यक्तिगत रूप से तैयार करते हैं। यह प्रत्येक शिक्षक की योग्यता से जुड़ी होती है।

एक आदर्श सीखने की योजना तैयार करने के निम्नलिखित लाभ होते हैं।

1. सीखने की योजना के द्वारा विषयवस्तु को क्रमबद्ध सुव्यवस्थित तथा प्रभावी ढंग से पढ़ाया जा सकता है।
2. सीखने की योजना द्वारा उपयुक्त एवं प्रभावी शिक्षण विधियां आकलन गतिविधियां, शिक्षण सहायक सामग्री तथा आकलन की विधियां तय करने में मदद मिलती है।
3. इसके इस्तेमाल से शिक्षक दोहराने से बचते हैं तथा समय एवं साधनों की बचत होती है।
4. इसके द्वारा विद्यार्थियों की रूचि बढ़ाने में मदद मिलती है तथा विषयवस्तु के प्रति उनमें धनात्मक अभिवृत्ति का विकास होता है।
5. इसके इस्तेमाल से शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया में विद्यार्थियों की सहभागिता बेहतर होती हैं

6. शिक्षकों में आत्म–विश्वास का स्तर बढ़ता है तथा वे निश्चित किए गए शैक्षिक उद्देश्यों को प्राप्त करने में सफल होते हैं।

<u>सीखने की योजना तैयार करने के विभिन्न सोपान</u>

सीखने की योजना तैयार करने में सर्वप्रथम विषयवस्तु का निर्धारण किया जाता है। उसके उपरान्त विद्यार्थियों की कक्षा उनकी अवस्था मानसिक स्तर कक्षा की अवधि, उपलब्ध संसाधन आदि के अनुसार सीखने की योजना तैयार की जाती है। जिसके निम्नलिखित पद होते हैं।

1. शीर्षक :– इसके अंतर्गत सीखने की योजना की संख्या सबसे उपर पेज के बीच में लिखी जाती है। उसके नीचे अन्य आरम्भिक विवरण जैसे शिक्षक/शिक्षिका का नाम, कक्षा, कालांश, विषय, इकाई, विषयवस्तु का शीर्षक आदि लिया जाता है।
2. विषयवस्तु से संबंधित पूर्व समझ की समीक्षाः

इसके अंतर्गत पढ़ाये जाने वाले विषयवस्तु/प्रकरण से विद्यार्थी कैसे परिचित हैं? क्या विषयवस्तु के अंदर चर्चित बातें विद्यार्थियों के परिवेश में शामिल है या नहीं? क्या शिक्षक को पूर्व से इस विषयवस्तु पढ़ाने का अनुभव है या नहीं? क्या शिक्षक को इस विषयवस्तु की व्याप्त समझ है या नहीं तथा यह विषयवस्तु पढ़ाये जाने वाली कक्षा के पाठ्यचर्या–पाठ्यक्रम में उल्लेखित किन बिन्दुओं से जुड़ा हुआ है। कक्षा के और किन विषयों या इकाइयों से जुड़ा हुआ हैं आदि के संबंध में चर्चा की जाती हैं।

3. विषयवस्तु के शिक्षणशास्त्रीय योजना का निर्माण
   इसके अंतर्गत विषयवस्तु/ उप विषयवस्तु का विवरण एवं सीखने का महत्व बताया जाता है। विषयवस्तु के शिक्षण के लिए चुनी गई विभिन्न विधियों एवं गतिविधियों को चुनने का आधार बताया जाता है तथा कालांश के दौरान किये जोन वाले शिक्षण का संक्षिप्त विवरण लिखा जाता है।
4. शिक्षक/शिक्षिका द्वारा स्वमूल्यांकन

चौथा चरण शिक्षण प्रक्रिया के बाद किये जाने वाले कार्य से जुड़ा है। इसके अंतर्गत शिक्षक/शिक्षिका खुद से किये गये शिक्षण कार्य का स्वमूल्यांकन करते हैं जिसके लिए वे किये गये शिक्षण कार्य का विभिन्न सुझावात्मक बिन्दुओं के आलोक में आकलन करते हैं।

5. पांचवे चरण में शिक्षक के दौरान अवलोकनकर्त्ता के द्वारा अवलोकन किए गए कक्षा एन. सी. एफ. 2005, बी.सी.एफ. 2008 तथा एन.सी.एफ. टी. ई. 2009 द्वारा सुझाये गए मार्गदर्शक सिद्धांतों के आलोक में समीक्षात्मक टिप्पणी की जाती है तथा शिक्षण–अधिगम प्रक्रिया को बेहतर बनाने के लिए कुछ महत्वपूर्ण सुझाव दिए जाते हैं।

सीखने की योजना की सबसे महत्वपूर्ण खूबी इसका लचीलापन तथा शिक्षण के तीनों चरणों यथा 1 पूर्व–क्रिया अवस्था 2 अन्तःक्रियात्मक अवस्था तथा 3 उत्तर–क्रिया अवस्था से इसका जुड़ा होना है। साथ ही सीखने की योजना के द्वारा शिक्षक/शिक्षिका को स्वयं द्वारा किए गए शिक्षण कार्य का स्वमूल्यांकन करने का अवसर भी प्राप्त होता है तथा अनुभवी एवं योग्य शिक्षकों द्वारा उनके द्वारा की गई शिक्षण कार्य की समीक्षा भी की जाती है।

सीखने की योजना बहुत लचीली है इसमें शिक्षण में आनेवाली संभावित चुनौतियों को भी शामिल किया गया है। इसके द्वारा बाल केन्द्रित शिक्षा, लोकतांत्रिक सोच, सृजनशीलता, नवाचार, आलोचनात्क शिक्षणशास्त्र आदि अवधारणाओं को बल मिलता है। सीखने की योजना द्वारा शिक्षक, शिक्षण की प्रक्रिया तथा/अलग–अलग नीतिगत दस्तावेजों, पाठ्यपुस्तकों एवं पाठ्यक्रम से अपने विषवस्तु को जोड़ पाते हैं आगे सीखने की योजना का एक सुझावात्मक एवं सामान्य प्रारूप दिया जा रहा है जिसमें जगह–जगह पर कुछ उदाहरणों, चिंतन के बिंदुओं, नीतिगत दस्तावेजों के सीखने की योजना का प्रभावी ढंग से निर्माण किया जा सके।

ई– संसाधन

एन.सी.ई.आर.टी. (2005), राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूपरेखा 2005, नई दिल्ली, एन.सी.ई.आर.टी
एन.सी.ई.आर.टी. (2017), प्रारंभिक स्तर पर सीखने के प्रतिफल 2017, नई दिल्ली, एन.सी.ई.आर.टी
एन.सी.ई.आर.टी. (2009), सतत एवं व्यापक मूल्यांकन शिक्षक निर्देशिका 2009, नई दिल्ली, एन.सी.ई.आर.टी

मूल्यांकन

1. परंपरागत मूल्यांकन और सतत एवं व्यापक मूल्यांकन में क्या अंतर हैं?
2. किसी एक कालांश में शैक्षिक प्रक्रिया के सफल संचालन हेतु सीखने की योजना की उपयोगिता पर प्रकाश डालें।
3. आकलन, मूल्यांकन से कैसे संबंधित है, इसकी चर्चा करें।
4. अधिगम प्रतिफल और अधिगम संकेतक से आप क्या समझते हैं?
5. अधिगम संकेतक शिक्षकों के लिए सहायक है। इसके पक्ष में पर्याप्त तर्क दीजिए।

इकाई 2
संख्या प्रणाली, संख्याओं की तुलना और बीजगणित का शिक्षण

परिचय

हमारे दिनचर्या में ऐसे बहुत सारे कार्य होते हैं जिसमें गणना की आवश्यकता होती है, जैसे – घर में कुल कितने सदस्य हैं, कक्षा में कितने छात्र और छात्राएं हैं, कुल कितने विषय पढ़ने हैं, क्रय–विक्रय के क्रम में पैसों के लेनदेन के लिए घर में बाजार की दूरी कितनी है, इत्यादि। गिनती के बिना हम इन प्रश्नों का जवाब ही नहीं दे पाएंगे। इसी कारण एक बच्चे को 3 वर्ष की आयु से ही उंगलियों का प्रयोग करते हुए गिनती सिखाते हैं और धीरे–धीरे उसे उंगलियों पर गिनना सिखा देते हैं।
किंतु संख्यायें विभिन्न प्रकार की होती हैं, जैसे – प्राकृत संख्याएं, पूर्ण संख्याएं, पूर्णांक, परिमेय, अपरिमेय तथा वास्तविक संख्याएं। प्रस्तुत इकाई में हम इनके विकास और संख्या रेखा पर निरूपित समूह को हम यह भी देखेंगे की संख्या संक्रियाएं के बारे में गणितीय ढंग से कैसे सोचा जा सकता है। अंकगणित का व्यापक स्वरूप बीजगणित है। इसमें कुछ चिह्नों का उपयोग करके कई गुणों को प्रदर्शित किया जा सकता है। बच्चों को अक्सर सामान्य समान्यीकरण की प्रक्रिया में इसे व्यक्त करने व उसके लिए स्वरूप को समझने में कठिनाई होती है।
समीकरण का उपयोग हम जीवन में अनौपचारिक रूप से करते रहते हैं। इस तरह की परिस्थितियों में उत्तर तक पहुंचने के अलग–अलग रास्ते खोजते रहते हैं। इस इकाई के माध्यम से हम तमाम जीवन की परिस्थितियों को समझकर समीकरण बनाना सीखेंगे ताकि हल करने के साथ–साथ हम उन परिस्थितियों के स्वरूप को समझ पाएं। साथ–ही बच्चों की दिक्कतों व दैनिक जीवन में समाजीकरण के उदाहरण खोजने के मौके देने व बताने के बारे में भी अभ्यास करेंगे। अक्सर ब्याज, कमीशन व गति, समय, नक्शों की स्पेलिंग, प्रतिशत, तुलना आदि सभी एक समान गणितीय अवधारणा पर आधारित हैं। यह अवधारणा है अनुपात की। इसी अनुपात से एक–एक नियम बना है। हम इसपर आधारित नियम को समझने का प्रयास करेंगे इसके उदाहरण दैनिक जीवन में ढूंढेंगे।

उद्देश्य

इस इकाई को पढ़ने के बाद आपः–

- प्राकृत संख्या से वास्तविक संख्या तक के विकास पर चर्चा करेंगे।
- पूर्णांक, परिमेय तथा अपरिमेय संख्याओं की अवधारणा निरूपण तथा उनपर आधारित संक्रियाओं को समझ सकेंगे।
- बच्चे ऐकिक नियम अनुपात और समानुपात का संबंध पहचान पाएंगे।
- प्रतिशत एवं ब्याज के अर्थ की समझ विकसित करने समझाने के कारगर तरीके विकसित कर पाएंगे और इनका अनुपात से संबंध देख पाएंगे।
- चक्रवृद्धि ब्याज बैठाकर तथा राशियों की तुलना के व्यापक रूप के जान पाएंगे तथा उसे गणितीय भाषा में व्यक्त कर पाएंगे।
- यह बता पाएंगे कि बीजगणित सीखते समय बच्चों में किन कौशलों का विकास होता है।
- यह देखकर समझ पाएंगे कि बच्चे अपने पूर्व गणितीय समझ का उपयोग बीजगणित सीखने में कैसे करते हैं।
- बच्चों को चर की अवधारणा सिखाने के तरीके समझा पाएंगे।
- ऐसे तरीके समझा पाएंगे जिनमें उच्च प्राथमिक स्तर के बच्चे अंकगणितीय सिद्धांतों का व्यतिकरण करना सीख पाएंगे।
- बच्चों द्वारा की जाने वाली सामान्य गलतियों व उनके सोचने के तरीके को पहचान पायेंगे।

संख्या प्रणाली (Number system)

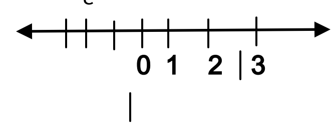
गणित के शिक्षक को संख्याओं के प्रकार के बारे जानना बहुत ही आवश्यक है गणित में संख्या जैसे – 1,2,3............4 ⁄ 3,0.1,–4,–2 ⁄ 3 होते है। इन सभी के बीच मे अंतर है जिसको समझना एक शिक्षक के लिए अति आवश्यक है।
प्राकृत संख्या से वास्तविक संख्या तक विकास

प्राकृतिक–संख्या (Natural Number) or Counting Number

वैसी संख्याएं जिनका प्रयोग हम गिनने के लिए करते हैं जैसे कि 1,2,3,4,5........
प्रश्न – सबसे छोटी प्राकृत संख्या क्या है?
सबसे छोटी प्राकृत संख्या 1 है पर इसकी सबसे बड़ी संख्या हम नहीं बता सकते।
प्राकृत संख्या को हम N से निरूपित करते हैं और इसे लिखते हैं – N = {1,2,3....}
इस तरह के निरूपण में {........} का चिह्न यह दर्शाते हैं कि इसी तरह आगे बढ़ते जाएं।

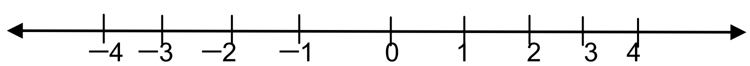
पूर्ण संख्याएँ (Whole Number)

W = {0,1,2,3......}
इस समुच्चय को हम पूर्ण संख्याओं के समुच्चय के रूप में जानते हैं। इसमें सभी प्राकृत संख्याओं के साथ शून्य भी आवश्यक है। पूर्ण संख्याओं के समूह समुच्चय का पहला सदस्य 0 है।



संख्या रेखा पर संख्याओं का निरूपण

संख्या रेखा एक ऐसी रेखा है जिस पर हम प्रत्येक संख्या को एक इकाई दूरी (unit distance) पर एक बिंदु द्वारा दर्शाते हैं। पूर्ण संख्याओं को हम संख्या रेखा पर इस तरह दर्शाते हैं।



उस रेखा पर 0 से 1 के बीच की दूरी इकाई दूरी है। हर एक–दूसरे के तुरंत बाद आने वाली संख्याओं के बीच इकाई दूरी ही होगी। संख्या रेखा पर हम असंख्य संख्याएं दर्शा सकते हैं।

गतिविधि

फर्श पर एक संख्या रेखा बनाएं और इस पर किसी भी बिंदु को 'शून्य' कहा जा सकता है।
पूर्ण संख्या समझाने के लिए एक खेल खेला सकते हैं, जैसे –एक बच्चे को तीन बार आगे की ओर कूदने को कहें, फिर 5 बार उल्टा कूद कर दो पर आने को कहें। अब एक बार और आगे कूदने दें, फिर एक बार कूदकर शून्य पर आ जाएं।
प्रश्न – प्राकृत संख्याओं में 0 जोड़ने से उस समूह को W ={0,1,2,3......} लिखना सही है क्यों?

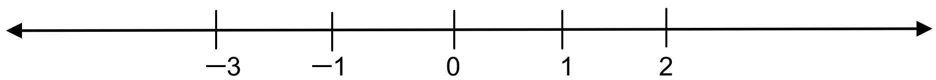
पूर्णांक

हम यह जानते हैं कि कई जगहों का ताप जीरो डिग्री सेल्सियस से कम मापा जाता है। झील का पानी कई बार तल से भी नीचे रह जाता है। व्यापार में शून्य लाभ होने के स्थान पर पहले से राशि कम हो जाती है। ऐसी सभी परिस्थितियों में हमें शून्य से कम की ओर जाना होता है। इसी क्रम में जब हम आगे बढ़ते हैं तो पूर्णांकों को समझने से पहले हमारा सामना ऋणात्मक संख्याओं से होता है। इन सभी उदाहरणों में हमें शून्य से भी छोटी संख्या की आवश्यकता होती है। इन संख्याओं को हम –1,–2,–3..... लिखते हैं ऐसी संख्याओं को हम ऋणात्मक संख्याएँ कहते हैं।

यदि हम पूर्ण संख्याओं के समूह में इन संख्याओं को भी मिला दें तो हमें नया समुच्चय प्राप्त होगा। इस नए समुच्चय में प्राकृत संख्याएं शून्य व ऋणात्मक संख्याएं होगी। यह समुच्चय पूर्णांक (integer) कहलाता है।
इस समुच्चय को अंग्रेजी के 'Z' अक्षर से दर्शाया जाता है। इस समुच्चय में Z = {– – –, –3,–2,–1,0,1,2,3, ––} ऋणात्मक व धनात्मक सभी संख्याएं सम्मिलित होती हैं।

पूर्णांकों का संख्या रेखा पर निरूपण

पूर्णांक संख्याओं को हम संख्या रेखा पर इस प्रकार दर्शाते हैं:–



इस रेखा पर 0 से 1 तथा 0 से –1 के बीच की दूरी इकाई दूरी है। हर एक–दूसरे के तुरंत बाद आनेवाली संख्याओं के बीच इकाई दूरी ही होगी।

गतिविधि – पिंकी की कक्षा विद्यालय में प्रथम तल्ले पर है। पिंकी जब भी कक्षा जाने के लिए सीढ़ियां चढ़ती है तो वह सीढ़ियां को गिनते हुए चढ़ती है। पिंकी में कक्षा ऋणात्मक संख्याओं की समझ विकसित करने के लिए उसकी गणित की शिक्षिका ने उसकी इस आदत का प्रयोग करते हुए एक गतिविधि कराने की सोची।
पिंकी को सीढ़ी पर बने चौताल पर खड़े होने को कहा, फिर पिंकी को चौताल से तीन पायदान ऊपर चढ़ने को तथा 5 पायदान नीचे उतरने को कहा।
जब पिंकी को ऊपर नीचे का कुछ अभ्यास हो गया तब शिक्षिका ने 'ऊपर नीचे' शब्द को छोड़ ऊपर के लिए '+' और नीचे की जगह '–' चिह्न इस्तेमाल करने को कहा। यह स्पष्ट था कि 'नीचे' वाली संख्याओं के साथ '–' चिह्न और ऊपर वाली संख्याओं के साथ '+' जरूरी था ताकि उन्हें अलग पहचाना जा सके।
इस गतिविधि में शिक्षिका ने चौताल को शून्य के रूप में प्रयोग किया।
इस गतिविधि के जरिए हम कक्षा में बच्चों को ऋणात्मक संख्याओं से परिचय करवा सकते हैं।
प्रश्न 1 – क्या 4/1,–1/2, –0.3 पूर्णांक संख्याएं हैं?
प्रश्न 2 – पूर्णांक, पूर्ण संख्या और प्राकृत संख्या के बीच संबंध को किस प्रकार दर्शा सकते हैं?

<u>परिमेय संख्या</u>

हम अपने दैनिक क्रियाकलापों में अक्सर ऐसे वाक्यों का प्रयोग करते नजर आते हैं, जैसे – आधा गिलास पानी, डेढ़ रोटी, चौथाई चम्मच चीनी, ढाई मीटर कपड़ा इत्यादि। अक्सर इन संख्याओं को भिन्न संख्याओं के रूप में प्रयोग किया जाता है।
परिमेय संख्याएं वैसी संख्याएं होती हैं जिन्हें p/q के रूप में लिखा जाता है। जहां p तथा q – ये दोनों पूर्ण संख्याओं के योजन के रूप में दर्शायी और लिखी गई पूर्ण संख्याएं हैं जहां q शून्य के बराबर नहीं है तथा परिमेय संख्या को Q से दर्शाते हैं। भिन्नात्मक संख्या भी परिमेय संख्याएं ही हैं।
आम तौर पर भिन्न को पूर्ण के हिस्से के रूप में (part of a whole) के तरीके से परिचय करवाया जाता है।
उदाहरण – 2/3, –3/4, –5/6 भिन्नात्मक संख्याओं के लिए संदर्भ भिन्नात्मक संख्याएं – पूर्ण के हिस्से के रूप में

1. 1/3 (एक तिहाई, एक बटा तीन), 3 तीन समान भागों का एक भाग।
2. 2/3 (तीन सामान भागों का 2 भाग)। 2 'अंश' है और 3 'हर' है।
3. समूह के बंटवारे के संदर्भ में **= 5/13, = 4/7**

जैसे – 13 फूलों में से 5 फूलों को लेना, 7 टमाटर में से 4 टमाटरों को लेना।

4. अनुपात के रूप में, जैसे – परिवार में महिला पुरुष का अनुपात 2:4 है यानी 1/2 ।

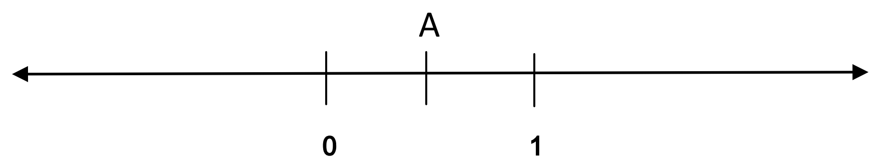
प्रश्न – क्या सभी परिमेय संख्याएं भिन्नात्मक संख्याएं होती हैं? उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें।

परिमेय संख्याओं का संख्या रेखा पर निरूपण

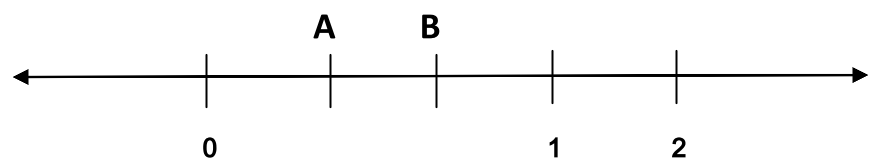
पूर्णांक संख्याओं को संख्या रेखा पर निरूपित करना हम सीख चुके हैं। अब हम संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं को निरूपित करना सीखेंगे।
यहां हम सबसे पहले 1/2 को संख्या रेखा पर निरूपित करना सीखेंगे।

1) 1/2 का संख्या रेखा पर निरूपण

½ का अर्थ है किसी संपूर्ण को दो बराबर भागों में बांटना। यहाँ संख्या रेखा पर 0 तथा 1 के बीच के भाग को दो बराबर भागों में बांटा गया है तथा बिंदु A विभाजन बिंदु है जो ½ को दर्शाता है।



2) 2/3 का संख्या रेखा पर निरूपण



यहाँ 0 तथा 1 के बीच के भाग को तीन बराबर भागों में बांटा गया है तथा **A** और B विभाजन बिंदु हैं। यहां बिंदु B 2/3 को दर्शाता है।

प्रश्न – 1/4,–2/5,1/3 को संख्या रेखा पर निरूपित करें।

<u>अपरिमेय संख्या</u>

संख्या रेखा पर किन्ही दो संख्याओं के बीच जितने बिंदु हैं क्या वह सारे–के–सारे परिमेय संख्या द्वारा ढ़क जाते हैं? ऐसा लगता है कि अंत संख्या होगी तो सब कुछ ढ़क ही लिया जाएगा। कुछ बिंदु फिर भी छूट जाते हैं जो p/q , q शून्य के बराबर नहीं है के रूप में नहीं है।

हम अपरिमेय संख्याओं को नीचे दिए गए उदाहरण द्वारा समझने का प्रयास करते हैं:–
एक समकोण समद्विबाहु त्रिभुज जिसकी भुजा 1 सेंटीमीटर है। यदि इसका कर्ण ज्ञात करना चाहे तो हम पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग से ज्ञात कर सकते हैं।

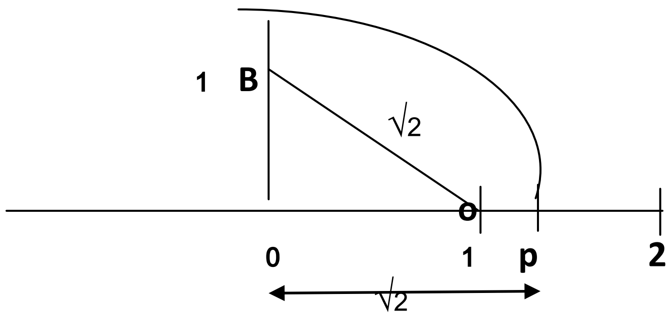
पाइथागोरस प्रमेय,

कर्ण का वर्ग = लंब का वर्ग + आधार का वर्ग
कर्ण का वर्ग = 1 का वर्ग + 1 का वर्ग
= 1+1
कर्ण का वर्ग = 2
कर्ण = $\sqrt{2}$

यहाँ $\sqrt{2}$, एक ऐसी संख्या है जिसे हम p/q जहाँ p,q पूर्णांक है, के रूप में नहीं लिख सकते हैं। अतः $\sqrt{2}$ एक अपरिमेय संख्या है।

$\sqrt{2}$ को संख्या रेखा पर दर्शाने के लिए हम संख्या रेखा पर शून्य से इकाई वर्ग के वर्ग के कर्ण के बराबर की दूरी पर बिंदु P लगा सकते हैं। चित्र में 'OB' कर्ण है और 'OB' के बराबर की दूरी पर एक बिंदु P माप लेते हैं जो संख्या रेखा पर $\sqrt{2}$ को निरूपित करता है।

चित्रः अपरिमेय संख्याओं का निरूपण



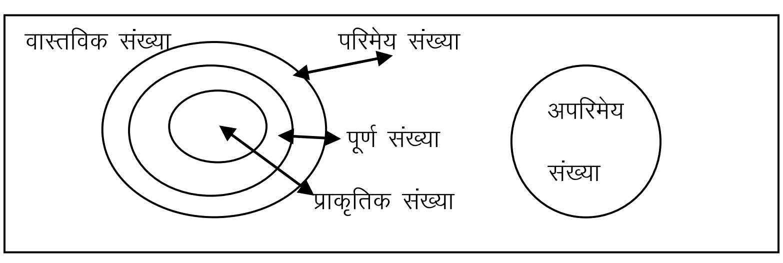
इसका अर्थ यह हुआ कि संख्या रेखा पर परिमेय संख्याओं के अलावा भी बिंदु है जो अपरिमेय संख्याओं को दर्शाता है। इन अपरिमेय संख्या व परिमेय संख्याओं को मिलाकर वास्तविक संख्याओं का समुच्चय बनता है तथा इस समुच्चय को अंग्रेजी के अक्षर ℜ से निरूपित किया जाता है। वास्तविक संख्याओं के समुच्चय में जितनी भी संख्याएं आती हैं, प्रत्येक संख्या के लिए संख्या रेखा पर एक बिंदु है।

प्रश्न – संख्या रेखा पर $\sqrt{3}$ए $\sqrt{5}$ को निरूपित करें।
प्रश्न – $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ के अलावा और अपरिमेय संख्याओं का उदाहरण प्रस्तुत करें।

लगभग 400 वर्ष पूर्व प्रसिद्ध यूनानी गणितज्ञ पाइथागोरस के अनुयायियों ने अपरिमेय संख्याओं का सबसे पहले पता लगाया था। इन संख्याओं को अब परिमेय संख्याएं कहा जाता है क्योंकि इन्हें पूर्णांकों के अनुपात के रूप में नहीं लिखा जा सकता है। 425 ईस्वी पूर्व की ओर डोरस नामक गणितज्ञ ने यह दर्शाया था कि $\sqrt{3}$,$\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$...... आदि भी अपरिमेय संख्याएँ हैं। साथ–साथ 17वीं शताब्दी के अंत में लैंबर्ट ने सिद्ध किया कि π एक अपरिमेय संख्या है।

प्राकृत संख्या से वास्तविक संख्या तक का विकास

इस प्रकार हमने पहले प्राकृत संख्याओं (N) का समूह बनाया उसके बाद पूर्ण संख्याओं (W)समूह बनाया जिसमें प्राकृत संख्याएं भी शामिल हैं। फिर पूर्णांकों (Z) का समूह बनाना सीखा जिसमें पूर्ण संख्याएं, शामिल है तथा जिसके बाद परिमेय संख्याओं क्यों के समूह को बनाने सिखा जिसके अंदर अंतर्गत शामिल है इन संख्याओं को यदि हम चित्र के माध्यम से प्रदर्शित करें तो कुछ इस प्रकार दिखेगाः–



वास्तविक संख्याओं के समूहों पर संक्रियाएं तथा उसके आधार पर समूहों के गुण

पूर्णांक संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण

संवृतता के गुण (Closure Property)

यदि दो पूर्णांक संख्याओं के समूह पर किसी भी संक्रिया (जोड़ (+), घटाव (–), गुणा (X), भाग (%)) की जाती है, तब यदि प्रतिफल भी पूर्णांक संख्या प्राप्त होती है तो इसका तात्पर्य है कि पूर्णांक संख्या, उस संक्रिया के संदर्भ में संवृतता के गुण को संतुष्ट करती है।

योग के लिए संवृतता के गुण

a + b = c यहाँ a और b एक पूर्णांक संख्या है। क्या c भी एक पूर्णांक संख्या है? आइये हम इसे उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण – **7** + 3 = ? यहाँ 7 और 3 पूर्णांक संख्याएं हैं।

7 + 3 = 10 क्या 10 भी पूर्णांक संख्या है?

10 भी पूर्णांक संख्या है।

(–2) + 3 = ? यहाँ (–2) और 3 पूर्णांक संख्याएं हैं।

(–2) + 3 = 1 यहाँ (–2) और 3 का योग 1 है जो कि एक पूर्णांक संख्या है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि किन्हीं दो पूर्णांक संख्यायों a और b के लिए (a+b)भी पूर्णांक संख्या है।

घटाव के लिए संवृतता के गुण

a - b = c यहां a और b एक पूर्णांक संख्या है। क्या c भी एक पूर्णांक संख्या है? आइये हम इसे उदाहरण द्वारा समझते है।

उदाहरण – 4 – 7 = –3 यहाँ 4 और 7 पूर्णांक संख्याएं हैं तथा उनका घटाव (–3) भी एक पूर्णांक संख्या है।

(–2) – 3 = –5 यहाँ (–2) और 3 पूर्णांक संख्याएं हैं तथा उनका घटाव (–5) भी एक पूर्णांक संख्या है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि किन्ही दो पूर्णांक संख्यायों a और b के लिए (a – b) भी पूर्णांक संख्या है।

गुणा के लिए संवृतता के गुण

a × b = c यहाँ a और b एक पूर्णांक संख्या है। क्या c भी एक पूर्णांक संख्या है? आइये हम इसे उदाहरण द्वारा समझते हैं।

उदाहरण – 7 X 4 = 28 यहाँ 7 और 4 पूर्णांक संख्याएं हैं तथा उनका गुणा 28 भी एक पूर्णांक संख्या है।

(–4) X (–3) = 12 यहाँ (–4) और (–3) पूर्णांक संख्याएं हैं तथा उनका गुणा 12 भी एक पूर्णांक संख्या है।

उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि किन्ही दो पूर्णांक संख्यायों a और b के लिए (a x b) भी पूर्णांक संख्या है।

भाग के लिए संवृतता के गुण
a ÷ b = c यहाँ a और b एक पूर्णांक संख्या है। क्या c भी एक पूर्णांक संख्या है? आइये हम इसे उदाहरण द्वारा समझते है।
उदाहरण
$4 \div 5 = \frac{4}{5}$ यहाँ 4 और 5 पूर्णांक संख्याएं हैं लेकिन उनका भाग $\frac{4}{5}$ पूर्णांक संख्या नहीं है। $\frac{4}{5}$ परिमेय संख्या है।
$(-1) \div (3) = -\frac{1}{3}$ यहाँ (–1) और (+3) पूर्णांक संख्याएं हैं लेकिन उनका भाग $-\frac{1}{3}$ पूर्णांक संख्या नहीं है। $\frac{1}{3}$ परिमेय संख्या है।
उपर्युक्त उदाहरणों से यह स्पष्ट है कि किन्ही दो पूर्णांक संख्यायों a और b के लिए (a ÷ b) पूर्णांक संख्या नहीं है।

पूर्णांक के संवृतता के गुण को सारणीबद्ध तरीके से हम निम्न प्रकार लिख सकते हैंः–

संक्रियाएँ	संवृतता के गुण
योग (+)	**हाँ**
घटाव (-)	**हाँ**
गुणा (×)	**हाँ**
भाग (÷)	**नही**

प्रश्न – क्या पूर्ण संख्या और प्राकृत संख्या में जोड़, घटाव, गुणा, और भाग के संदर्भ में संवृतता के गुण हैं? उदाहरण द्वारा समझाइए।

सहचार्यता के गुण (Associative Property)

योग के लिए सहचार्यता के गुण
किन्ही तीन पूर्णांक संख्याओं a, b, c के लिए (a + b) + c = a + (b + c) होता है।
उदाहरण

$(-2 + 4) + 6 = -2 + (4 + 6)$

=> $2 + 6 = -2 + 10$

=> $8 = 8$

घटाव के लिए सहचार्यता के गुण
1. किन्ही तीन पूर्णांक संख्याओं a, b, c के लिए $(a - b) - c \neq a - (b - c)$ होता है।

उदाहरण

$(-2 - 4) - 6 \neq -2 - (4 - 6)$

=> $-6 - 6 \neq -2 - (-2)$

=> $-12 \neq 0$

आइए हम कुछ और उदाहरणों द्वारा समझते हैं।

$(1 - 4) -7 = -3 -7$

=

$1 - (4 - 7) = 1 - (-3)$

$= 4$

लेकिन $-10 \neq 4$

इसलिए $(1 - 4) -7 \neq 1 - (4 - 7)$

गुणा के लिए सहचार्यता के गुण

किन्ही तीन पूर्णांक संख्याओं a, b, c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

उदाहरण

$(2 \times 3) \times -9 = 6 \times -9$

$= -54$

$2 \times (3 \times -9) = 2 \times -27$

$= -54$

इसलिए $(2 \times 3) \times -9 = 2 \times (3 \times -9)$

$(-1 \times -5) \times 2 = 5 \times 2$

$= 10$

$-1 \times (-5 \times 2) = -1 \times -10$

$=10$

इसलिए $(-1 \times -5) \times 2 = -1 \times (-5 \times 2)$

भाग के लिए सहचार्यता के गुण

किन्ही तीन पूर्णांक संख्याओं a, b, c के लिए $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ होता है।

उदाहरण

$(2 \div 7) \div 4 = \frac{2}{7} \div 4$

$= \frac{2}{7} \times \frac{1}{4}$

$= \frac{2 \times 1}{7 \times 4}$

$= \frac{2}{28}$

$= \frac{1}{14}$

$2 \div (7 \div 4) = 2 \div \frac{7}{4}$

$= 2 \times \frac{4}{7}$

$= \frac{8}{7}$

लेकिन $\frac{1}{14} \neq \frac{8}{7}$
इसलिए $(2 \div 7) \div 4 \neq 2 \div (7 \div 4)$

$(-4 \div -3) \div 12 = \frac{-4}{-3} \div 12$

$= \frac{-4}{-3} \times \frac{1}{12}$

$= \frac{-4 \times 1}{-3 \times 12}$

$= \frac{-4}{-36}$

$= \frac{1}{9}$

$-4 \div (-3 \div 12) = -4 \div \frac{-3}{12}$

$= -4 \div \frac{-1}{4}$

$= -4 \times -4$

$= 16$

लेकिन $\frac{1}{9} \neq 16$
इसलिए $(-4 \div -3) \div 12 \neq -4 \div (-3 \div 12)$

पूर्णांक के सहचार्यता के गुण को सारणीबद्ध तरीके से हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:–

संक्रियाएँ	संवृतता के गुण
योग (+)	हाँ
घटाव (-)	नही
गुणा (×)	हाँ
भाग (÷)	नही

प्रश्न – क्या पूर्ण संख्या और प्राकृत संख्या में जोड़, घटाव, गुणा और भाग के संदर्भ में सहचार्यता के गुण है? उदाहरण द्वारा समझाइये।

योज्य तत्समक (Additive Identity)

किसी पूर्णांक संख्या 'a' के लिए a + 0 =0 + a = a होता है। अतः '0' को पूर्णांक संख्या का योज्य तत्समक कहा जाता है।

उदाहरण

$3 + 0 = 0 + 3 = 3$

$-5 + 0 = 0 + -5 = -5$

प्रश्न – पूर्ण संख्याओं और प्राकृत संख्याओं का योज्य तत्समक क्या होगी?

गुणन तत्समक (Multiplicative Identity)

किसी पूर्णांक संख्या 'a' के लिए a × 1 =1 × a = a होता है। अतः '1' को पूर्णांक संख्या का गुणन तत्समक कहा जाता है।

उदाहरण

$3 \times 1 = 1 \times 3 = 3$

$-5 \times 1 = 1 \times -5 = -5$

प्रश्न – पूर्ण संख्याओं और प्राकृत संख्याओं का गुणन तत्समक क्या होगा?

क्रम विनिमेय गुण (Commutative Property)

योग के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो पूर्णांक संख्या a और b के लिए a + b = b +a होता है।

उदाहरण

$4 + 3 = 7$

तथा

$3 + 4 = 7$

इसलिए

$4 + 3 = 3 + 4$

$-2 + 3 = 1$

तथा

$3 + (-2) = 1$

इसलिए

$-2 + 3 = 3 + (-2)$

घटाव के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो पूर्णांक संख्या a और b के लिए $a - b \neq b - a$ होता है।

उदाहरण

$7 - 2 = 5$

उसी प्रकार

$2 - 7 = -5$

लेकिन

$-5 \neq 5$

इसलिए $7 - 2 \neq 2 - 7$

उसी प्रकार $-2 - 3 = -5$

$3 - (-2) = 5$

इसलिए

$-2 - 3 \neq 3 - (-2)$

गुणा के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो पूर्णांक संख्या a और b के लिए $a \times b = b \times a$ होता है।

उदाहरण

$9 \times 2 = 18$ तथा

$2 \times 9 = 18$

इसलिए

$9 \times 2 = 2 \times 9$

उसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$-3 \times -7 = 21$

और

$-7 \times -3 = 21$

इसलिए

$-3 \times -7 = -7 \times -3$

प्रश्न– क्या पूर्ण संख्या और प्राकृत संख्या में गुणा के संदर्भ में क्रम विनिमेयक गुण है? उदाहरण दीजिये।

भाग के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो पूर्णांक संख्या a और b के लिए $a \div b \neq b \div a$ होता है।

उदाहरण

$13 \div 26 = \frac{1}{2}$ **तथा**

$26 \div 13 = 2$

लेकिन

½ ≠ 2

इसलिए

13 ÷ 26 ≠ 26 ÷ 13

उसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

-12 ÷ 3 = -4

तथा

$3 \div -12 = \frac{-1}{4}$

लेकिन -4 ≠ -1/4
इसलिए

-12 ÷ 3 ≠ 3 ÷ -12

पूर्णांक के क्रम विनिमेय गुण को सारणीबद्ध तरीके से हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:—

संक्रियाएँ	क्रम विनिमेय गुण
योग (+)	हाँ
घटाव (-)	नहीं
गुणा (×)	हाँ
भाग (÷)	नहीं

प्रश्न — क्या पूर्ण और प्राकृत संख्याओं मैं भी भाग के संदर्भ में क्रम विनिमेयक गुण है? उदाहरण द्वारा समझाइये।

परिमेय संख्याओं पर संक्रियाओं के गुण
संवृतता के गुण (Closure Property)

योग के लिए संवृतता के गुण
किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए उनका योग (a + b) भी परिमेय संख्या है।
a + b = c यहाँ a , b और c परिमेय संख्याएं हैं।
उदाहरण

$$\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4\times2}{3\times2} + \frac{1\times3}{2\times3}$$

$$= \frac{8}{6} + \frac{3}{6}$$

$$= \frac{11}{6}$$

यहाँ $\frac{4}{3}, \frac{1}{2}$ और उनका योग $\frac{11}{6}$ परिमेय संख्याएं हैं।

उसी प्रकार हम देख सकते हैं कि

$\frac{1}{7} + \frac{2}{3} = \frac{3+14}{21} = \frac{17}{21}$

यहाँ $\frac{1}{7}, \frac{2}{3}$ और उनका योग $\frac{17}{21}$ परिमेय संख्याएं हैं।

घटाव के लिए संवृतता के गुण

किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए उनका घटाव (a - b) भी परिमेय संख्या है।

a- b= c यहाँ a, b और c परिमेय संख्याएं हैं।

उदाहरण

$\frac{6}{5} - \frac{2}{3} = \frac{18-10}{15}$

$= \frac{8}{15}$

यहाँ $\frac{6}{5}, \frac{2}{3}$ और उनका घटाव $\frac{8}{15}$ परिमेय संख्याएं हैं।

$\frac{-1}{9} - \frac{2}{3} = \frac{-1-6}{9}$

$= \frac{-7}{9}$

यहाँ $\frac{-1}{9}, \frac{2}{3}$ और उनका घटाव $\frac{-7}{9}$ परिमेय संख्याएं हैं।

गुणा के लिए संवृतता के गुण

किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए उनका गुणन (a × b) भी परिमेय संख्या होता है।

a × b = c यहाँ a, b और c परिमेय संख्याएं हैं।

उदाहरण

$\frac{6}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{6\times2}{5\times3}$

$= \frac{12}{15}$

$= \frac{4}{5}$

यहाँ $\frac{6}{5}, \frac{2}{3}$ और उनका गुणन $\frac{4}{5}$ परिमेय संख्याएं हैं।

$\frac{-1}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{-1\times3}{9\times2}$

$= \frac{-3}{18}$

$= \frac{-1}{6}$

यहाँ $\frac{-1}{9}, \frac{3}{2}$ और उनका गुणन $\frac{-1}{6}$ परिमेय संख्याएं हैं।

भाग के लिए संवृतता के गुण
किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए उनका भाग (a ÷ b) भी परिमेय संख्या होता है।
a ÷ b = c यहाँ a, b और c परिमेय संख्याएं हैं।
उदाहरण

$\frac{3}{7} \div \frac{4}{3} = \frac{3}{7} \times \frac{3}{4}$

$= \frac{3 \times 3}{7 \times 4}$

$= \frac{9}{28}$

यहाँ $\frac{3}{7}, \frac{4}{3}$ और उनका गुणन $\frac{9}{28}$ परिमेय संख्याएं हैं।

$\frac{-1}{2} \div \frac{6}{7} = \frac{-1}{2} \times \frac{7}{6}$

$= \frac{-7}{12}$

$= \frac{-7}{12}$

यहाँ $\frac{-1}{2}, \frac{6}{7}$ और उनका गुणन $\frac{-7}{12}$ परिमेय संख्याएं हैं।

परिमेय संख्या के संवृतता के गुण को हम सारणीबद्ध तरीके से निम्न प्रकार लिख सकते हैंः–

संक्रियाएँ	क्रम विनिमेय गुण
योग (+)	हाँ
घटाव (-)	हाँ
गुणा (×)	हाँ
भाग (÷)	हाँ

सहचार्यता के गुण (Associative Property)

योग के लिए सहचार्यता के गुण
किन्ही तीन परिमेय संख्या a, b, c के लिए (a + b) + c = a + (b + c) होता है।
उदाहरण

$(\frac{4}{9} + \frac{1}{7}) + \frac{2}{3} = (\frac{28+9}{63}) + \frac{2}{3}$

$= \frac{37}{63} + \frac{2}{3}$

$= \frac{37+42}{63}$

$= \frac{79}{63}$

$\frac{4}{9} + (\frac{1}{7} + \frac{2}{3}) = \frac{4}{9} + (\frac{3+14}{21})$

$= \frac{4}{9} + \frac{17}{21}$

$= \frac{28+51}{63}$

$= \frac{79}{63}$

$\therefore (\frac{4}{9} + \frac{1}{7}) + \frac{2}{3} = \frac{4}{9} + (\frac{1}{7} + \frac{2}{3})$

घटाव के लिए सहचार्यता के गुण

किन्ही तीन परिमेय संख्या a, b, c के लिए $(a - b) - c \neq a - (b - c)$ होता है।

उदाहरण

$(-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) - \frac{7}{3} = (\frac{-1-2}{3}) - \frac{7}{3}$

$= \frac{-3}{3} - \frac{7}{3}$

$= \frac{-3-7}{3}$

$= \frac{-10}{3}$

$\frac{-1}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{7}{3}) = \frac{-1}{3} - (\frac{2-7}{3})$

$= \frac{-1}{3} - (\frac{-5}{3}$

$= \frac{-1+5}{3}$

$= \frac{4}{3}$

लेकिन $\frac{-10}{3} \neq \frac{4}{3}$

$\therefore (-\frac{1}{3} - \frac{2}{3}) - \frac{7}{3} \neq \frac{-1}{3} - (\frac{2}{3} - \frac{7}{3})$

गुणा के लिए सहचार्यता के गुण

किन्ही तीन परिमेय संख्या a, b, c के लिए $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ होता है।

उदाहरण

$(\frac{6}{7} \times \frac{4}{3}) \times \frac{-1}{5} = (\frac{6\times4}{7\times3}) \times \frac{-1}{5}$

$= (\frac{24}{21}) \times \frac{-1}{5}$

$= \frac{-24}{105}$

$\frac{6}{7} \times (\frac{4}{3} \times \frac{-1}{5}) = \frac{6}{7} \times (\frac{4 \times -1}{3 \times 5})$

$= \frac{6}{7} \times \frac{-4}{15}$

$= \frac{-24}{105}$

$\therefore\ (\frac{-1}{3} \times \frac{2}{3}) \times \frac{7}{3} = \frac{-1}{3} \times (\frac{2}{3} \times \frac{7}{3})$

भाग के लिए साहचार्यता के गुण

किन्ही तीन परिमेय संख्या a, b, c के लिए $(a \div b) \div c \neq a \div (b \div c)$ होता है।

उदाहरण

$(-\frac{4}{5} \div \frac{1}{4}) \div \frac{1}{2} = (\frac{-4}{5} \times \frac{4}{1}) \div \frac{1}{2}$

$= \frac{-4 \times 4}{5 \times 1} \div \frac{1}{2}$

$= \frac{-16}{5} \div \frac{1}{2}$

$= \frac{-16}{5} \times \frac{2}{1}$

$= \frac{-32}{5}$

$\frac{-4}{5} \div (\frac{1}{4} \div \frac{1}{2}) = \frac{-4}{5} \div (\frac{1}{4} \times \frac{2}{1})$

$= \frac{-4}{5} \div (\frac{1 \times 2}{4 \times 1})$

$= \frac{-4}{5} \div (\frac{2}{4})$

$= \frac{-4}{5} \div (\frac{1}{2})$

$= \frac{-4}{5} \times (\frac{2}{1})$

$= \frac{-8}{5}$

लेकिन $\frac{-32}{5} \neq \frac{-8}{5}$

$\therefore (-\frac{4}{5} \div \frac{1}{4}) \div \frac{1}{2} \neq \frac{-4}{5} \div (\frac{1}{4} \div \frac{1}{2})$

परिमेय संख्या के सहचार्यता के गुण को सारणीबद्ध तरीके से हम निम्न प्रकार लिख सकते हैं:–

संक्रियाएँ	सहचार्यता के गुण
योग (+)	हाँ
घटाव (-)	नहीं
गुणा (×)	हाँ
भाग (÷)	नहीं

योज्य तत्समक (Additive Identity)
किसी परिमेय संख्या 'a' के लिए a + 0 =0 + a = a होता है। '0' को परिमेय संख्या का योज्य तत्समक कहा जाता है।
उदाहरण

$$(\frac{-4}{3}) + 0 = 0 + (\frac{-4}{3}) = \frac{-4}{3}$$

$$\frac{1}{2} + 0 = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

प्रश्न – '0' परिमेय संख्या का योज्य तत्समक है। इसे अन्य उदाहरण द्वारा स्पष्ट करें।

गुणन तत्समक (Multiplicative Identity)
किसी परिमेय संख्या 'a' के लिए a × 1 =1 × a = a होता है। '1' को परिमेय संख्या का गुणन तत्समक कहा जाता है।
उदाहरण

$$\frac{5}{4} \times 1 = 1 \times \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$$

$$(\frac{-4}{3}) \times 1 = 1 \times (\frac{-4}{3}) = \frac{-4}{3}$$

क्रम विनिमेय गुण (Commutative Property)

योग के लिए क्रम विनिमेय गुण
किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए a + b = b + a होता है।
उदाहरण

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{1\times6}{4\times6} + \frac{1\times4}{6\times4}$$

$$= \frac{6}{24} + \frac{4}{24}$$

$$= \frac{6+4}{24}$$

$$= \frac{10}{24}$$

$$= \frac{5}{12}$$

$$\frac{1}{6}+\frac{1}{4}=\frac{1\times4}{6\times4}+\frac{1\times6}{4\times6}$$

$$=\frac{4}{24}+\frac{6}{24}$$

$$=\frac{4+6}{24}$$

$$=\frac{10}{24}$$

$$=\frac{5}{12}$$

$$\therefore \frac{1}{4}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}$$

प्रश्न – सिद्ध करें कि ;$\frac{-2}{7}$) + ($\frac{-1}{3}$) = ($\frac{-1}{3}$) + ($\frac{-2}{7}$) होता है।

घटाव के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए a - b ≠ b - a होता है।

उदाहरण

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{6}=\frac{6}{24}-\frac{4}{24}$$

$$=\frac{6-4}{24}$$

$$=\frac{2}{24}$$

$$=\frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6}-\frac{1}{4}=\frac{4}{24}-\frac{6}{24}$$

$$=\frac{4-6}{24}$$

$$=\frac{-2}{24}$$

$$=\frac{-1}{12}$$

लेकिन $\frac{1}{12} \neq \frac{-1}{12}$

$$\therefore \frac{1}{4}-\frac{1}{6}\neq\frac{1}{6}-\frac{1}{4}$$

प्रश्न – सिद्ध करें कि ($\frac{-2}{7}$) - ($\frac{-1}{3}$) ≠ ($\frac{-1}{3}$) - ($\frac{-2}{7}$)

गुणा के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए a × b = b × a होता है।

उदाहरण

$\frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{3 \times 2}{4 \times 7}$

$= \frac{6}{28}$

$= \frac{3}{14}$

$\frac{2}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{2 \times 3}{28}$

$= \frac{6}{28}$

$= \frac{3}{14}$

$\therefore \frac{3}{4} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{7} \times \frac{3}{4}$

प्रश्न – सिद्ध करें कि $\frac{-5}{4} \times \frac{6}{7} = \frac{6}{7} \times \frac{-5}{4}$

भाग के लिए क्रम विनिमेय गुण

किन्ही दो परिमेय संख्या a और b के लिए $a \div b \neq b \div a$ होता है।

उदाहरण

$\frac{-1}{3} \div \frac{1}{9} = \frac{-1}{3} \times \frac{9}{1}$

$= \frac{-1 \times 9}{3 \times 1}$

$= \frac{-9}{3}$

$= \frac{-3}{1}$

$= -3$

$\frac{1}{9} \div \frac{-1}{3} = \frac{1}{9} \times \frac{-3}{1}$

$= \frac{1 \times -3}{9 \times 1}$

$= \frac{-3}{9}$

$= \frac{-1}{3}$

लेकिन $-3 \neq \frac{-1}{3}$

$\therefore \frac{-1}{3} \div \frac{1}{9} \neq \frac{1}{9} \div \frac{-1}{3}$

प्रश्न – सिद्ध करें कि $\frac{-1}{5} \div \frac{10}{7} \neq \frac{10}{7} \div \frac{-1}{5}$

परिमेय संख्या के क्रम विनिमेय गुण को सारणीबद्ध तरीके से हम निम्न प्रकार लिख सकते हैंः–

संक्रियाएँ	क्रम विनिमेय गुण
योग (+)	हाँ
घटाव (-)	नहीं
गुणा (×)	हाँ
भाग (÷)	नहीं

प्रश्न – किन्हीं तीन परिमेय संख्या a, इए c के लिए सिद्ध करें कि

$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$

प्रश्न – क्या $a \times (b - c) = a \times b - a \times c$ होता है?

- **संख्याओ की तुलनाः**

हमें अपने दैनिक जीवन में अनेक बार ऐसे अवसर प्राप्त होते हैं जहां पर दो संख्याओं व राशियों की तुलना करने की आवश्यकता पड़ती है। चाहे ऐकिक नियम के सवाल हों या फिर अनुपात और समानुपात, प्रतिशतता, ब्याज या फिर वहा संबंधी प्रश्न या समस्याएं हों।

आइए, हम एक–एक कर इन्हें समझने की कोशिश करते हैं।

- **ऐकिक नियम**

यदि एक वस्तु का मूल्य ज्ञात हो, तो ऐकिक नियम (विधि) की सहायता से उसी प्रकार की कुल वस्तुओं के अभीष्ट मूल्य प्राप्त किए जा सकते हैं।

इसी प्रकार, एक ही प्रकार की कुछ वस्तुओं के मूल्य ज्ञात रहने पर उनमें से किसी एक वस्तु का मूल्य ऐकिक विधि की सहायता से ज्ञात किया जा सकता है और फिर अभीष्ट संख्याओं की वस्तुओं का मूल्य निकाल सकते हैं।

इसमें दो स्थितियां हो सकती हैंः–

पहली स्थितिः एक वस्तु का मूल्य ज्ञात रहने पर

एक से अधिक उसी प्रकार की वस्तओं का मूल्य= एक वस्तु का मूल्य X वस्तुओ की संख्या

दूसरी स्थितिः एक से अधिक एक ही प्रकार की वस्तओं का मूल्य ज्ञात रहने पर

$$\text{एक वस्तु का मूल्य} = \frac{\text{एक से अधिक एक ही प्रकार की वस्तुओं का मूल्य}}{\text{एक ही प्रकार की वस्तुओं की संख्या}}$$

आइए, इसे हम कुछ उदाहरणों से समझने का प्रयास करते हैं

उदाहरण 1 यदि एक कलम का मूल्य 12 रुपये हो तो उसी प्रकार के 5 कलमों का मूल्य निकालिए।

हल चूंकि 1 कलम का मूल्य 12 रुपये है।

∴ 5 कलमों का मूल्य 12रु. X 5= 60 रुपये

उदाहरण 2 18 बोरी चीनी का भार 414 किग्रा है, तो 1 बोरी चीनी का भार बताइए।

चूंकि 18 बोरी चीनी का भार = 414 किग्रा

∴ 1 बोरी चीनी का भार = 414/18 किग्रा

= 23 किग्रा

इसी प्रकार की कुछ अन्य स्थितियां भी हो सकती हैं।

- किसी काम में कम आदमी लगाने से काम अधिक दिनों में पूरा होगा।
- किसी काम में अधिक आदमी लगाने से काम कम दिनों में पूरा होगा।

प्रश्न : यदि 10 आदमी एक काम को 5 दिनों में करते हैं तो 25 आदमी उसे कितने दिनों में पूरा करेंगे?
प्रश्नः एक छात्रावास में 120 छात्रों के लिए 30 दिनों की खाद्य सामग्री है। यदि 20 छात्र चले जाएं, तो वह खाद्य सामग्री कितने दिन चलेगी?

अनुपात और समानुपातः–

- **अनुपात–** हम अपने दैनिक जीवन में गणित का उपयोग करते समय कई तरह की परिस्थितियां सामने आती हैं। चाहे सामान की खरीदारी का बिल बनाना हो, चाहे दिए गए कर्ज पर ब्याज की गणना करनी हो, चाहे उपलब्ध सामग्री, उपस्थित लोगों की संख्या के आधार पर बांटना, दो परीक्षाओं में प्राप्त अंकों की तुलना या फिर आवश्यक राशि अथवा सामग्री की मात्रा का अनुमान आदि।

इन सभी में हम अनुपात और कई जगह समानुपात का भी उपयोग करते हैं।
उदाहरण के लिए– मान लीजिए दो पेड़ों की ऊंचाई की तुलना कर रहे हैं तो हम पाते हैं कि
(I) खजूर, केले से 3 गुना लंबा है
अथवा
(II) केले की ऊंचाई, खजूर की ऊंचाई की एक तिहाई हैं
अतः केले के पेड़ और खजूर के पेड़ की ऊंचाई का अनुपात 1ः 3 है।

प्रश्नः– आप ऐसे 5 उदाहरण बताइए जहां अनुपात का उपयोग करके गणना की जाती है।
प्रश्नः– उत्कर्ष एवं प्रियंका द्वारा गणित में प्राप्त अंक क्रमशः 36 और 24 है। इनके अंकों का अनुपात बताइए।
अनुपात एक किस्म की तुलना है। तुलना का मतलब हम कितना कम या कितना ज्यादा– यह पूछ रहे हैं। यह भी हमें ध्यान रख्ना चाहिए कि तुलना करते समय दोनों राशियों की इकाइयां भी समान होनी चाहिए।
अनुपात को संकेत में " : " दर्शाया जाता है।
आइए कुछ व्यावहारिक सवालों को देखते है और हल करके जानते है कि अनुपात के सवाल किस प्रकार के हो सकते हैं।
यदि पिता की उम्र से 45–15, अर्थात् 30 वर्ष अधिक है। इनकी उम्रों की तुलना हम इस प्रकार भी कर सकते है–

$$\frac{\text{पिता की उम्र}}{\text{पुत्र की उम्र}} = \frac{45}{15} = \frac{3}{1}$$

अर्थात्, पिता की उम्र पुत्र की उम्र की तीन गुनी है।
इसें हम इस प्रकार भी कहते हैं कि पिता की उम्र और पुत्र की उम्र का अनुपात (या निष्पत्ति) 3:1 है। 3:1 को ''3'' अनुपात 1'' पढ़ा जाता है।

यदि दो सजातीय राशियों का अनुपात 4:5 कहा जाए तो इसका अर्थ है कि पहला का मान किसी राशि का 4 गुना है और दूसरा का मान उसी राशि का 5 गुना है। 4:5 को 4 अनुपात 5 पढ़ा जाता है।
उदाहरणः यदि एक पेन का मूल्य 15 रू0 और पेंसिल का मूल्य 10 रू0 है तो पेन का मूल्य 5 रू0 का 3 गुना और पेंसिल का मूल्य 5 रू0 का 2 गुना है।

अतः पेन के मूल्य और पेंसिल के मूल्य का अनुपात 3:2 है।

(I) अनुपात में कोई इकाई नहीं होती है। यह विशुद्ध संख्या है।

(II) दो विजातीय राशियों की तुलना करना अर्थहीन है। जैसे, 10 रू0 और 20 गाय की तुलना नहीं की जा सकती है।

(III) तुलना करते समय दोनों राशियों की इकाइयां भी समान होनी चाहिए।

- **समानुपात**

यदि चार राशियां ऐसी हों कि पहली और दूसरी राषियों का अनुपात तीसरी और चौथी राशियों के अनुपात के बराबर हों तो ऐसी चार राशियां समानुपाती कहलाती है।

जैस– राशियां 5, 2, 15 और 6 को लीजिए।

स्पष्टताः 5:2 = 5/2 और 15:6= 15/6 = 5/2

अतः 5:2 और 15:6 समान है।

इसलिए 5, 2, 15 और 6 समानुपाती है।

संकेत में हम इसे 5:2 : : 15:6 लिखते हैं।

समानुपात की चारों राशियों को पद कहा जाता है, जिनमें पहले और चौथे पद को **चरम पद** (Extreme Term) तथा दूसरे और तीसरे पद को **मध्य पद** (Middle Term) कहा जाता है।

जैस 25:40 : : 15:6 15:24 में 25,24 चरम पद है और 40 , 15 मध्य पद हैं।

यदि दो अनुपात परस्पर बराबर होते हैं तो उन्हें समानुपत (Proportion) कहते हैं। संख्याओं को समानुपात में होने पर दो अनुपातों के बीच ": :" चिन्ह रखते हैं।

आइए, हम एक उदाहरण लेते हैं।

यदि 8 कलमों का मूल्य 40 रुपये हैं तथा इसी प्रकार की 12 कलमों का मूल्य 60 रुपये हैं तो

कलमों की संख्या का अनुपात = 8:12 यानी 2:3

कलमों के मूल्यों का अनुपात = 40:60 यानी 2:3

स्पष्ट है कि 8:12= 40:60

अर्थात् कलमों की संख्या में वही अनुपात है जो उनके मूल्यों में अनुपात है।

यानी यदि दो अनुपात परस्पर बराबर होते हैं तो उन्हें समानुपात कहते हैं।

प्रश्नः क्या आप ऐसी गतिविधि बना सकते हैं जिससे समानुपात की अवधारणा को समझा जा सकता है?

प्रतिशतता और प्रतिशत द्वारा संख्या की तुलना–

प्रतिशत का अर्थ –

प्रतिशत दो शब्दों 'प्रति' और 'शत' से मिलकर बना है। 'प्रति' का अर्थ 'प्रत्येक' और 'शत' का अर्थ 'सौ' होता है।

अतः 'प्रतिशत' अथवा प्रति सैकड़ा का अर्थ 'प्रत्येक सौ पर' होता है।

प्रतिशत को संकेत में % द्वारा प्रदर्शित करते हैं जैसे– 50 प्रतिशत का अर्थ है प्रत्येक 100 में 50 जिसे संकेत में 50% लिखते हैं। इसका भिन्न रूप 50/100 है तथा इसको दशमलव में 0.5 लिखते हैं। इस प्रकार 'प्रतिशत'को साधारण भिन्न या दशमलब भिन्न के रूप में प्रकट किया जा सकता है।

प्रतिशत एक भिन्न है जिसका हर सदा 100 रहता है और अंश प्रतिशत की संख्या होती है।

आइए इसे हम एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।

मान लीजिए कि किसी परीक्षा में हर्ष गणित में 87 प्रतिशत अंक प्राप्त किया है तो इसका अर्थ यह हुआ कि हर्ष को 100 अंक में से 87 अंक प्राप्त हुए, अर्थात् दूसरे शब्दों में उसे कुल अंकों में से 87/100 अनुपात में अंक प्राप्त हुए।

जब गणना प्रति 100 पर करके कोई परिणाम निकाला जाए, तो उसे प्रतिशतता में प्रकट करना कहते हैं और प्राप्त संख्या प्रतिशत कहलाती है।

भिन्न और प्रतिशत में संबंध

जिस भिन्न के हर में 100 हो, उसका अंश प्रतिशत की संख्या को प्रकट करेगा।

जैसेः– किसी राशि का 9 / 100 भाग= राशि का 9 %

संक्षेप में, 9 / 100= 9 %

जब भिन्न के हर में 100 न रहे, तो भिन्न के हर की 100 में परिवर्तित करना होगा

जैस $\frac{3}{25} = \frac{3X4}{25X4} = \frac{12}{100} = 12$

विलोमतः 12% = 12 / 100 = 3 / 25

दैनिक जीवन में प्रतिशत का उपयोगः–
दैनिक जीवन के विभिन्न पहलुओं में ऐसी बहुत सी परिस्थितियां आती है जिसमें हमें प्रतिशत शब्द से सामना होता है। उदाहरण के लिए

(I) आलिया को 89 प्रतिशत की छूट दी जा रही है।
(II) सभी साड़ियों पर 25 प्रतिशत की छूट दी जा रही है।
(III) चुनाव के दौरान मतदाताओं की संख्या 65 प्रतिशत से अधिक थी।

प्रतिशतता का दैनिक जीवन में प्रयोग से संबंधित कुछ उदाहरण देखिए।

उदाहरणः एक शिक्षक का वेतन 19000 रू0 मासिक से बढ़कर 22800 रू0 मासिक हो गया, तो वेतन कितना प्रतिशत बढ़ा

हलः वेतन में वृद्धि = 22800 रू0 – 19000 रू0 = 3800 रू0

चूकि 19000 रू0 मासिक वेतन में वृद्धि = 38000 रू0

∵ 1 रू0 मासिक वेतन में वृद्धि = 3800 / 19000रू0

∴ 100रू. मासिक वेतन में वृद्धि = $\frac{3800}{19000}$X 100 रू0

अतः वेतन 20% बढ़ा

ब्याज और चक्रवृद्धि ब्याज
दैनिक जीवन में हमें घरेलू खर्च के लिए, व्यवसाय को बढ़ाने के लिए या अन्य कई कार्यों के लिए कुछ अतिरिक्त धन की आवश्यकता होती है। इसके लिए हमें बैंक या अन्य व्यक्तियों से धन उधार लेना या देना पड़ता है। उधार लिए गए या दिये गए धन को मूलधन (Principle) कहा जाता है।
यह धन, वापस करने से पहले ऋण प्राप्त करने वाले व्यक्ति के द्वारा कुछ समय तक इसका उपयोग किया जाता है। अतः एक निश्चित अवधि तक धन को उपयोग में लाने के बदले कुछ अतिरिक्त धन बैंक या

उधार देने वाले व्यक्तियों को देना होता है। उधार लिए गए धन के उपयोग के बदले जो अतिरिक्त धन चुकाना पड़ता है, यह अतिरिक्त धन ब्याज (Interest) कहलाता है।

एक निश्चित अवधि के बाद आपको मूलधन और ब्याज दोनों को मिलाकर पूरा धन, ऋण प्राप्त करने वाले को वापस करना होता है। जिसे मिश्रधन कहते हैं।

अर्थात्

मिश्रधन = मूलधन+ब्याज

ब्याज एक निश्चित दर पर परिकलित किया जाता है जो प्रायः प्रत्येक 100 रू0 के लिए एक वर्ष के लिए निर्धारित होता है।

इसे इस प्रकार लिखा जाता है– 8 प्रतिशत प्रति वर्ष या 8 प्रतिशत वार्षिक।

यानी 8 प्रतिशत वार्षिक का अर्थ है कि प्रत्येक 100 रू0 पर प्रतिवर्ष 8 रू0 ब्याज के रूप में अतिरिक्त देने होंगे।

अतः जिस हिसाब से ब्याज लगाया जाता है, उसे ब्याज की दर (Rate) कहते हैं।

साधारण ब्याज के प्रश्नों को ऐकिक नियम की रीति से हल किया जा सकता है, साथ ही निम्नलिखित सूत्र की सहायता से भी –

$$\textbf{साधारण ब्याज} = \frac{\textbf{मूलधन X दर X समय}}{\textbf{100}}$$

मूलधन को P से, ब्याज को I मिश्रधन को A से, समय को T से एवं दर प्रतिशत को R से इंगित करते हैं।

अतएव $A = P+I$

$P = A–I$

$I = A–P$

आइए, एक उदाहरण लेकर देखें कि ब्याज की गणना कैसे की जाती है।

उदाहरणः साधारण ब्याज निकालिए जबकि मूलधन = 300 रू0

समय= 2 वर्ष और दर = 5 प्रतिशत वार्षिक है।

हल पहली विधि : ऐकिक नियम से–

∵ 100 रू0 का 1 वर्ष का ब्याज = 5 रू0

∴ 1 रू0 का 1 वर्ष का ब्याज = 5 ⁄ 100 रू0

∴ 300 रू0 का 1 वर्ष का ब्याज = $\frac{5 \text{ X } 300 \text{ X } 1}{100}$ रू0

∴ 300 रू0 का 2 वर्ष का ब्याज = $\frac{5 \text{ X } 300 \text{ X } 2}{100}$ रू0

= 30 रू0

दूसरी विधिः सूत्र की सहायता से–

$$I = P \times T \times R$$

$$= \frac{300 \times 2 \times 5}{100} \text{ रू0} = 30 \text{ रू0}$$

चक्रवृद्धि ब्याज–

अभी हमने साधारण ब्याज की चर्चा की है। अब हम देखेंगे कि चक्रवृद्धि ब्याज क्या है।
नियत समय के बाद ब्याज को मूलधन में जोड़ दिया जाता है और हम मिश्रधन को मूलधन मानकर एक नियत समय के लिए ब्याज निकालते हैं तथा इस ब्याज को पहले मिश्रधन में जोड़ देते हैं और फिर नियत समय के लिए इसका ब्याज निकालते हैं। यह क्रिया नियत काल तक जारी रखते हैं। इसी को चक्रवृद्धि ब्याज कहते हैं।
चक्रवृद्धि ब्याज को सूद–दर –सूद भी कहा जाता है।
आइए, इसे हम एक उदाहरण द्वारा समझते हैं।
उदाहरणः 800 रू0 पर 2 वर्ष का 5% की दर से चक्रवृद्धि ब्याज ज्ञात कीजिए।

हलः $\because$ 1 वर्ष का ब्याज =800 रू0 का 5% $= 800 \times \frac{5}{100}$ रू0

= 40 रू0

$\therefore$ दूसरे वर्ष का मूलधन = (800+40)रू. = 840 रू0
$\therefore$ दूसरे वर्ष का मूलधन = 800रू0 का 5% =42 रू0

$\therefore$ अभीष्ट चक्रवृद्धि ब्याज =40रू0 +42 रू0 =82रू0

ब्याज देने योग्य बातेंः–

(I) चक्रवृद्धि ब्याज अर्द्धवार्षिक अर्थात् ब्याज जोड़ने की अवधि छमाही होने पर वर्ष की संख्या को दुगुना और ब्याज की वार्षिक दर को आधा कर दिया जाता है।
कारण, 1 वर्ष = 2 X छः माह
और ब्याज की दर वार्षिक दर **r** होने पर छमाही दर = r/2

(II) चक्रवृद्धि ब्याज त्रैमासिक, अर्थात् ब्याज जोड़ने की अवधि तिमाही होने पर वर्ष की संख्या की चौगुना और ब्याज की वार्षिक दर को चौथाई 1/4 भाग कर दिया जाता है।
कारण 1 वर्ष = 4 X 3 माह और ब्याज और ब्याज की वार्षिक दर **r** होने पर, तिमाही दर = r/4

बट्टा व कर

बट्टा (कटौती या छूट) से संबंधित निम्नांकित पद व्यवहार किए जाएंगे, जिनकी समझ लेना अत्यंत आवश्यक है।
सूची मूल्य या अंकित मूल्य– वह मूल्य जिस पर कोई वस्तु बेची जाने वाली है, सूची मूल्य अथवा अंकित मूल्य कहलाता है।
बट्टा व छूट – किसी कारणवश वस्तु या सामान खराब हो जाने के कारण अथवा पुराना हो जाने से अथवा वस्तु की बिक्री बढ़ाने के लिए थोक व्यापारी खुदरा व्यापारी को अथवा खुदरा व्यापारी ग्राहक को वस्तु के अंकित मूल्य से कम दाम पर बेचता है। अंकित मूल्य में जो कटौती की जाती है, यह बट्टा कहलाती है।

बट्टा अंकित मूल्य के प्रतिशत के रूप में व्यक्त किया जाता है आइए इसे हम एक उदाहरण से समझते हैं।
उदाहरण– एक पंखे का अंकित मूल्य 975 रू0 है। जाड़े में एक दुकानदार ने उसे 800 रू0 में बेचता है, तो पंखे पर बट्टा राशि = 975–800 =175 रू0
इस स्थिति में हम कहते हैं कि वह पंखा 175 रू. बट्टा पर उपलब्ध है।
इस प्रकार,
बट्टा देने पर वस्तु के अंकित मूल्य के लिएः–
विक्रय मूल्य (मूल्य जिस पर वस्तु उपलब्ध है) = अंकित मूल्य–बट्टा
स्पष्टतः विक्रय मूल्य < अंकित मूल्य एवं

अंकित मूल्य= विक्रय मूल्य + बट्टा

$$\text{सूत्रः प्रतिशत बट्टा} = \frac{\text{बट्टा} \times 100}{\text{सूची मूल्य}}$$

$$\text{बट्टा राशि} = \frac{\text{सूची मूल्य} \times \text{बट्टा दर}}{100}$$

बिक्री कर – किसी वस्तु के विक्रय मूल्य पर बिक्री दर दुकानदार द्वारा ग्राहक से वसूला जाता है और वह राशि सरकार को दिया जाता है, कभी–कभी यह राशि वस्तु के मूल्य में VAT (Value Added Tax) के नाम से जुड़ा रहता है।

राशियों की तुलना का व्यापक रूप व उसे गणितीय भाषा में व्यक्त करना –

हम अपने कार्यों में सामान्यतः राशियों की तुलना करते रहते हैं। बाजार में हो या अपने आस–पास प्रतिशत, लाभ–हानि, बट्टा, ब्याज जैसे शब्दों की किसी न किसी रूप में सुना व देखा होगा। इन सभी को लेकर हमारे दिमाग में कोई न कोई अवधारणा जरूर होगी चाहे वह गणितीय रूप में हो या नहीं।

बाजार में मूल्यों का निर्धारण करते हुए, वस्तु का मूल्य चुकाते हुए ऐकिक नियम का जाने–अनजाने में प्रयोग भी किया होगा । साथ ही साथ किसी भी राशि को घटते–बढ़ते अनुपात में भी अवश्य देखा होगा। अपने परीक्षाफल के स्वयं के अंको के प्रतिशत की गणना अवश्य की होगी तथा अपने अंको की तुलना दूसरे के अंकों के साथ भी की होगी।

निश्चित तौर पर व्यवहार गणित में राशियों की तुलना से संबंधित कई तरह की परिस्थितियां सामने आती है। सामानों की खरीददारी का बिल बनाने
से लेकर दिए गए कर्ज पर ब्याज की गणना करना हो।

बच्चे दो राशियों की तुलना करने का मतलब समझ पाये, इसके लिए उसके घर, गांव तथा विद्यालय से संबंधित समस्याओं को हल करने का मौका देना चाहिए। बच्चों के दैनिक जीवन से संबंधित निम्नांकित दो राशियों की तुलना करने पर जोर देना चाहिए। जैसे–

– बेंच की लम्बाई और चौड़ाई
– कमरे की लम्बाई और चौड़ाई
– चाय बनाने में दूध और पानी का अनुपात
– शर्बत बनाने में पानी और चीनी का अनुपात
– प्राप्तांकों की तुलना
– बचत और व्यय की तुलना
– लाभ और हानि की तुलना, इत्यादि।

बीजगणित

बीजगणित एक व्यापक अंकगणित है जिसमें संख्याओं को अक्षरों से निरूपित किया जाता है। हमारे देश भारतवर्ष में एक विख्यात गणितज्ञ आर्यभट्ट ने अपनी पुस्तक 'आर्यभट्ट तंत्र' में बीजगणित पर प्रकाश डाला है। भारतवर्ष के ही एक प्रसिद्ध बीजगणितज्ञ ब्रह्मगुप्त भी थे। किन्तु बीजगणित का विकास मुख्यतः यूरोप में हुआ जिसका आधार अरब देश से प्राप्त हुआ था।

बीजगणित में निश्चित अथवा अनिश्चित संख्यात्मक मान की राशि के लिए अंग्रेजी वर्णमाला के अक्षरों a,b,c एवं x, y, z, इत्यदि को संकेत–स्वरूप काम में लाया जाता है।

यदि x एक सांकेतिक संख्या हो तो इसको विभिन्न संख्यात्मक मान दिया जा सकता है x को एक बीजीय संकेत या चर भी कहते है।

बीजगणित का जीवन में उपयोग

बीजगणित से बच्चों का पहला संपर्क व्यापीकृत अंकगणित के रूप में होता है। बीजगणित का विकास पैटर्न, संबंधों का व्यापीकरण की तलाश से होता है। सबसे पहले चर की अवधारणा हमें व्यापक संबंधों का अध्ययन करने में मदद करती है।

बीजगणित सीखने का एक कारण है– आनंद। गणित के कई खेलों, गतिविधियों व पहेलियों का हल बीजगणित में है। जैसे– संख्या सोचने के इस खेल को देखिए–

दो अंको की कोई भी संख्या सोच लें। अंको की अदला–बदली करें। नई संख्या को पहली वाली संख्या में जोड़े और योगफल में पहली संख्या के अंको के जोड़ से भाग दें । आपका उत्तर 11 आएगा। क्या आप ऐसे ही तीन अंकों की संख्या लेकर कर सकते हैं और तब आप देखिए कि क्या ऐसा संभव है?

अकगणित से बीजगणित की ओर–

अंकगणित का व्यापक स्वरूप बीजगणित है। इसमें थोड़े चिन्हों का उपयोग करके कई गुणों को प्रदर्शित किया जा सकता है। बीजगणित संख्या लिखते समय अक्षरों का संख्या के रूप में लिखा जाता है।
प्राथमिक स्तर की कक्षाओं में पाठ्यपुस्तकें इस बात पर जोर देती है कि बच्चे आकारों और संख्याओं के विभिन्न पैटर्न को पहचान सकें, समझ सकें और खुद नये पैटर्न बना सकें। इसी समझ को आगे बढ़ाते हुए उन पैटर्नों से जुड़े हुए नियम और संबंधों पर चर्चा की जाती है। फिर सटीक ढंग से शब्दों और प्रतीकों का उपयोग करते हुए उन संबंधों के व्यापकीकरण की ओर बढ़ते है।

इस प्रकार किसी भी पैटर्न को अंकों के रूप लिखना, उनके बीच के संबंध को समझना और नियम निकालना बीजगणित की शुरूआत है।

अतः बीजगणित को 'व्यापीकृत' अंकगणित के रूप में परिभाषित किया जा सकता है।
आइए इससे संबंधित एक उदाहरण देखते हैं।
दो प्राकृत संख्याओं के जोड़ पर आधारित एक व्यापक नियम को देखिऐ।
''कोई भी दो प्राकृत संख्याओं का जोड़ एक प्राकृत संख्या होगी और दोनों संख्याओं से बड़ी होगी''

जैसे– 5+13=18

16+100=119 इत्यादि

यहां एक पैटर्न नजर आता है। पहले उदाहरण को देखए: यहां 5 एक प्राकृत संख्या है ओर 13 भी एक प्राकृत संख्या है जिनका जोड़ 18 है जो कि एक प्राकृत संख्या है जो कि 5 ओर 13 से बड़ी है।

इस नियम का व्यापीकरण शब्दों व प्रतीकों का इस्तेमाल करते हुए इस प्रकार किया जा सकता है।

N1+N2=N3 जहां N1,N2,N3 ε N

N3>N1 (N= प्राकृत संख्याओं का समुच्चय है)

N3>N2

<u>गणितीय संबंध फलन व समीकरण–</u>

बीजगणित की समझ विकसित करने के लिए 'चर' की समझ जरूरी है मान लीजिए कि **'x'** कोई भी संख्या है। इस कथन को प्रारंभ में बच्चे समझने में कठिनाई अनुभव करते हैं।

आइए इसे देखिए $4+5=5+4$

क्या इसे हम $a+b=b+a$ के रूप में लिखा जा सकता है। जहां a और b कोई भी दो संख्याएं हैं। बीजगणित संख्या लिखते समय अक्षरों का उपयोग संख्याओं के स्थान पर होता है। इसलिए इन पर संख्याओं की तरह संक्रियाएं भी की जा सकती है।

जैसं– $5Y = 5 \times Y$

अर्थात् 5Y में 5 और Y गुणा होता है।

इसी प्रकार $10+x$ का अर्थ 10 में x का जोड़ है।

इसके अलावे बीजगणित में रैखिक समीकरण में भी अक्षरों का उपयोग अज्ञात राशियों के स्थान पर किया जाता है।

हम जानते हैं कि $3+2= 5$

परन्तु, 3+.......=5

3+.......≠5 के खाली स्थान को किस संख्या से भरा जा सकता है।

आप सोच सकते हैं कि कुछ मान तो उस कथन को सही साबित करते हैं, जबकि कुछ और मान उसे गलत ठहराते हैं।

ऐसा कोई भी व्यंजक जिसमें बराबर का चिन्ह शामिल हो। समीकरण होता है।

एक उदाहरणः– $2x(m-3)+4=12$

यहां m एक अज्ञात राशि है, किसी भी मान के लिए '=' के दोनों तरफ मान बराबर होने चाहिए।

बीजीय व्यंजक, बहुपद और उनके शून्यक

गणित की संक्रिया–चिन्ह युक्त संख्याओं और सांकेतिक संख्याओं अर्थात् अक्षरों के एक सार्थक संग्रह को बीजीय व्यंजक कहा जाता है।

चर और अचर को जोड़, घटाव, गुणा एवं भाग संक्रियाओं द्वारा संयोजित किया जाता है। जैसें–

$x+1$ में चर x में 1जोड़कर $x+1$ प्राप्त किया गया है।

इसी प्रकार $a, m^2, 2a+6b, x^2+y^2+z^2$ इत्यादि में प्रत्येक एक बीजीय व्यंजक है।

बीजीय व्यंजक के पद–

एक व्यंजक $5x+7$ पर विचार कीजिए। इसे बनाने के लिए पहले x एवं 5 का गुणा करके 5x बनाया गया है फिर 5x में 7 को जोड़ दिया गया है।

इसी प्रकार $3x^2+7y, 7xy=3x^2$ बीजीय व्यंजक है।

इस प्रकार हम पाते हैं कि किसी व्यंजक के छोटे–छोटे भाग होते हैं, जो अलग से बनाये जाते हैं फिर आपस में जोड़ दिये जाते हैं और व्यंजक बन जाता है और यही छोटे–छोटे भाग व्यंजक के पद कहलाते हैं।

जैसे–व्यंजक $5x+7$ में 5x और 7 दो पद है।

यानी एक बीजीय व्यंजक + या – चिन्ह के द्वारा भिन्न–भिन्न खंडों में बंटे हो सकते है। ऐसी स्थिति में + या – चिन्हों के द्वारा बंटे हुए प्रत्येक खंड को उसके चिन्ह के साथ, उस बीजीय व्यंजक का एक पद कहा जाता है।

स्पष्टतः पदों का योगफल ही बीजीय व्यंजक है।

आइए कुछ करके देखें–

व्यंजक	पदों का संख्या	पद
$3x^2+7$	2	$3x^2$, 7
$7(x+y)+9$	....	....
$3x^2y-5xy^2+6y^3$	....	....

- **बहुपद और उनके शून्यकः–**

जिस बीजीय व्यंजक में दो या दो से अधिक पद होते हैं उसे बहुपद व्यंजक कहते हैं स्पष्टतः सभी द्विपदी या त्रिपदी व्यंजक भी बहुपदी व्यंजक जैसे– $5x^6-24x^2y+7y^3-9x^2y^2+7$ एक बहुपदी व्यंजक है।
यहां ध्यान दीजिए कि
बीजीय व्यंजक के किसी पद के कोई भी गुणनखंड को उस पद के चिन्ह के साथ, शेष गुणनखंडों के गुनणफल का गुणांक कहा जाता है।
जैसे– $-7xy$ में xy का गुणांक – 7
x का गुणांक – $7y$
yका गुणांक – $7x$

बच्चों की सामान्य गलतियाँ व सोचने का सामान्य तरीका

बच्चों की गणितिय भाषा के बारे में समझ तथा इसका प्रयोग करने की क्षमता के विकास में बच्चों की अपनी भाषा बहुत महत्वपूर्ण है। गणित के सवालों को हल करने–खसकर संख्या प्रणाली में पूर्णाकों, परिमेय और अपरिमेय संख्याओं तथा बीजगणित के समीकरण, कथनों को हल करने में भाषा काफी मायने रखती है। उसे लिखने में भी काफी गलतियाँ बच्चे करते है। इबारती सवालों को हल करने में बच्चे ज्यादा गलतियाँ करते है। यहाँ तक कि इस तरह के कथनों को गणितीय स्वरूप देने में गलतियाँ हो ही जाती है।
जैसे–भिन्नात्मक संख्या $\frac{3}{4}$ का मतलब हम निम्न रूप में देख सकते है।
$\frac{3}{4}$ का मतलब $\frac{1}{4}$ जैसे 3 हिस्से मिलाओं तो $\frac{3}{4}$
एक गणक के रूप में– जैसे–एक किलोग्राम चीनी की कीमत 30 रूपये हैं तो $\frac{3}{4}$ किलोग्राम चीनी की कीमत क्या होगी ?
अनुपात के रूप में–_जैसे–कक्षा में लड़कियों और लड़कों का अनुपात 18:24 है यानी $\frac{3}{4}$
हमें बच्चों को बीजगणित सीखने में वह किस प्रकार संख्या और अक्षरों को एक साथ लिखने, पढ़ने के साथ–साथ उनके सोचने–समझने की हर क्रियाकलाप पर पैनी नजर रखनी चाहिए। कक्षा के सभी बच्चों का किसी खास सवाल के प्रति अलग–अलग नजरिया होता है और वे अपनी गति व दृष्टि से सीखने–समझने का प्रयास करते है। क्या आप इस सवाल की देखकर सोंचे और बताये कि बच्चे ने ऐसा क्यों किया ? – रश्मि की वर्तमान उम्र (x) उसकी माँ की वर्तमान उम्र (y) की आधी है। इसका उत्तर $y\ \frac{x}{y}$ लिखा था।

सिखने के लिए रोचक कक्षा प्रक्रिया/गतिविधियाँ तथा सीखने की

बच्चों को कक्षा–कक्ष में पाठ्यपुस्तक के अलावे कुछ ऐसे क्रियाकलाप व गतिविधियाँ का समावेश किया जाना चाहिए जिससे कि पाठ्यवस्तु रोचक, आनंददायी हो सके। गतिविधियों से बच्चों में सीखने के प्रति उत्सुकता बनी रहती है और कक्षा का वातावरण अच्छा बना रहता है।

निश्चित तौर पर एक अच्छी कक्षा के लिए विभिन्न प्रकार की रणनीतियाँ, गतिविधियाँ व संसाधनों की जरूरत होती है। साधन और कभी–कभार शिक्षक द्वारा निर्मित वर्कशीट्स देखने को मिलती है। एक

अच्छी कक्षा में बच्चे सामग्री का उपयोग दुनिया की खोजबीन करने और अपने से संबंधित संदर्भों के जरिए विचारों की खोज करने के लिए कर सकते है।

सिखने के लिए कक्षा में सीखने की योजना काफी महत्वपूर्ण है। इसके निम्नांकित सोपान हो सकते है

शिक्षक / शिक्षिका का नाम..

कक्षा–............................ कलांश...................................... विषय–...........................

अध्याय–.................................... विषयवस्तु की शीर्षक–.............................

तिथि–............................

1. विषय वस्तु से संबंधित पूर्व समझ की समीक्षा
2. शिक्षक की विषयवस्तु से संबंधित पूर्व–समझ
3. स्कूली पाठ्यचर्या–पाठ्यक्रम से विषयवस्तु का संबंध
4. विषयवस्तु के शिक्षणशास्त्रीय योजना का निर्माण
5. सीखने–सीखने की विधि / विधियों का शिक्षणशास्त्रीय चयन
6. सीखने की विधि तथा शिक्षणशास्त्र का संक्षिप्त विवरण यानी योजना बनाना
7. शिक्षिक / शिक्षिका द्वारा स्वमूल्यांकन के सुझावात्मक बिन्दु
8. अवलोकनात्मक बिन्दु
9. समीक्षात्मक बिन्दु

सीखने की योजना का प्रारूप :—

सीखने की योजना संख्या :
Learning Plan

विद्यालय का नाम :

प्रशिक्षु का नाम :		सत्र :		वर्ग क्रमांक :
कक्षा :	बच्चों की अनुमाणित संख्या :	घंटी :	अवधि 40 मिनट	तिथि :
विषय :		इकाई :		
विषयवस्तु :				

SEP प्रभारी व्याख्याता का नाम :...

मेन्टर शिक्षक का नाम : ....

विषयवस्तु से संबंधित पुर्व समीक्षा	
नये विषयवस्तु की चर्चा शुरू करनी है ☐	पिछले कालांश के विषयवस्तु का विस्तार करना है ☐

यह विषयवस्तु इस कक्षा के पाठ्यचर्या—पाठ्यक्रम में उल्लेखित किन उद्देश्यों/विन्दुओं से जुड़ा हुआ है

....

....

....

....

क्या यह विषयवस्तु पूर्ववत कक्षाओं के पाठ्यक्रम में भी शामिल है? कैसे :

....

....

क्या मैने इस विषयवस्तु का शिक्षण पहले किया है? हाँ ☐ नही ☐

यह विषयवस्तु इस कक्षा के और किन—किन विषयों/इकाइयों से जुड़ा है :

....

....

कक्षा के विद्यार्थियों के पास इस विषयवस्तु से संबंधित क्या आधारभूत समझ हो सकती है :

बहुत कम ☐ थोड़ा—बहुत ☐ बहुत—अधिक ☐

विषयवस्तु/उप विषयवस्तु का विवरण : (संक्षिप्त परिचय तथा क्या महत्वपूर्ण है इसमें?)

....

....

....

....

....

सीखने—सिखाने की विधि/विधियां :

....

....

....

कुछ सुझावात्मक उदाहरण	
सामूहिक चर्चा	प्रयोग
समूह कार्य	खोज
एकल कार्य	खेल
पठन—लेखन	रोल—प्ले

विधि/विधियों को क्यों चुना गया : (शिक्षाशास्त्रीय चयन का आधार/Pedagogical basis)

....

....

....

....

....

....

योजना

ध्यान में रखने योग्य समावेशी बिन्दु

* क्या बच्चों के संदर्भ को ध्यान मे रखा गया है? आप किस प्रकार के उदाहरणों को प्रस्तुत करेंगे।
* बच्चों को स्वयं से सीखने का कितना अवसर है? उन्हे सवाल पुछने का कितना अवसर है?
* सीखने–सिखाने का समयानुपात क्या है? एक कालांश का कितना समय शिक्षक के सक्रिय निर्देशन में है और कितना समय बच्चो को स्वतंत्र चिंतन व कार्य करने के लिए दिया गया है।
* क्या चर्चा में समाजिक, सांस्कृतिक, राजनैतिक, आदि मुद्दों को शामिल करने की संभावना है?
* एन.सी.एफ.–2005 व बी.सी.एफ.–2008 के सुझाव बिन्दुओं का कितना ध्यान रखा गया है?
* क्या योजना में सामाजिक व संवैधानिक मुल्यों का समाहित करने की संभावना है?
* क्या सतत एवं व्यापक मूल्यांकन की कोई प्रक्रिया भी साथ–साथ चल रही है?
* इस योजना के क्रियांवयन में आपको क्या–क्या चुनौतियां आ सकती है?
* इस योजना में कितना लचीलापन है, अर्थात कक्षा के माहौल के हिसाब से इस योजना में बदलाव की कितनी संभावना हो सकती है?
* क्या योजना में जेण्डर संवेदनशीलता का ध्यान रखा गया है।

1. वर्ग व्यवस्था :–

....

....

....

2. आरंभिक व्यवहार :–

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

योजना

3. विषय प्रवेश :–

....

....

....

....

....

....

....

....

....

4. सरांश :–

....

....

....

5. वर्ग कार्य :–

....

....

....

....

....

....

6. गृह कार्य :–

....

....

....

प्रशिक्षु का हस्ताक्षर एवं तिथि

विद्यालय के व्याख्याता द्वारा योजना निर्माण का अनुमोदन :

....

....

....

.... **प्रभारी व्याख्याता का हस्ताक्षर एवं मुहर**

....

....

....

.... **विद्यालय के मेंटर शिक्षक/ प्र0 अ0 का हस्ताक्षर**

<table>
<tr>
<td rowspan="4">वर्ग में पाठ समीक्षात्मक बिन्दु</td>
<td>एन.सी.एफ.–2005, बी.सी.एफ.–2008 व एन.सी.एफ.टी.ई.–2010 द्वारा सुझाये गए किन–किन मार्गदर्शक सिद्धांतों को कक्षा के सीखने–सिखाने की प्रकिया में आपनाया जा रहा है या नहीं।
प्रशिक्षु से और क्या–क्या अपेक्षा की जा सकती है?</td>
<td rowspan="4">कुछ मार्गदर्शक सिद्धांत
• ज्ञान को स्कूल के बाहर के जीवन से जोड़ना।
• पढ़ाई रटंत प्रणाली से मुक्त हो, यह सुनिश्चित करना।
• पाठ्यचर्या का इस तरह संवर्धन कि वह बच्चों को चहुँमुखी विकास के अवसर मुहैया करवाए बजाए इसके कि वह पाठ्यपुस्तक–केंद्रित बन कर रह जाए।
• परीक्षा को अपेक्षाकृत अधिक लचीला बनाना और कक्षा की गतिविधियों से जोड़ना।
• एक ऐसी अधिभावी पहचान का विकास जिसमें प्रजातांत्रिक राज्य–व्यवस्था के अंतर्गत राष्ट्रीय चिंताए समाहित हों।
• बिहार के क्षेत्रीय एवं ग्रामीण संदर्भ को महत्व देना।
• बच्चों की अस्मिता एवं विविधता का सम्मान करना।
• एक 'प्रोफेशनल' शिक्षक/शिक्षिका के रूप में कक्षा के सीखने–सिखाने की प्रकिया में भूमिका निभाना।
• आलोचनात्मक चिंतन को प्रोत्साहित करना।
• लोकतांत्रिक कक्षा के माहौल को तैयार करना।</td>
</tr>
<tr>
<td>(1) संबंधित दूसरे प्रशिक्षु द्वारा समीक्षा :
....
....
....
....
....
संबंधित प्रशिक्षु का हस्ताक्षर</td>
</tr>
<tr>
<td>(2) प्रभारी व्याख्याता द्वारा समीक्षा :
....
....
....
....
....
.... व्याख्याता का हस्ताक्षर</td>
</tr>
<tr>
<td>............
....
....
....
....
....
.... मेंटर शिक्षक का हस्ताक्षर</td>
</tr>
</table>

शिक्षक/शिक्षिका द्वारा स्वमूल्यांकन के सुझावात्मक बिन्दु
क्या विद्यार्थी ने उन उद्देश्यों को समझा जिसके लिए यह विषयवस्तु थी? इसका मूल्यांकन किया कि नहीं। ....
क्या इस विषयवस्तु को फिर से कक्षा मे चर्चा करने की आवश्यकता है? क्यों या क्यों नहीं? ....
विद्यार्थियों द्वारा पूछे गए प्रमुख सवाल क्या थें? कितने विद्यार्थियों ने सवाल पूछें? ....
मैने उन सवालों को कैसे समझाया? क्या विद्यार्थियों से स्वयं उन सवालों को हल करने का मौका मिला? ....
इस विषयवस्तु के सीखने–सिखाने में किस प्रकार के संसाधनों का प्रयोग किया गया? उनकी क्या उपयोगिता रही? ....
इस विषयवस्तु को यदि दुबारा पढ़ाना हो तो मैं सीखने–सिखने की योजना में क्या बदलाव करूंगा/करूंगी। ....
इस विषयवस्तु से संबंधित कोई ऐसा सवाल या दुविधा जिसे अपने संस्थान के विषयविशेषज्ञ तथा मेंटर से चर्चा करना की अपेक्षा है। ....
कोई अन्य टिप्पणी ....

समेकन

इस इकाई में हमने संख्या प्रणाली के अंतर्गत प्राकृत संस्था से वास्तविक संख्या तक का विकास पर काफी विस्तृत चर्चा किया है। पूर्णाक, परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं तथा इन पर संक्रियाएं करते हुए इनके रेखा पर निरूपण की चर्चा किया गया है।

संख्याओं की तुलना हमे ऐकिक नियम, अनुपात और समनुपात प्रतिशतत्, ब्याज, चक्रवृद्धि ब्याज, के साथ–साथ बट्टा, कर (Tax) के रूप में विभिन्न उदाहरणों के माध्यम से समझने का प्रयास किया है। हमारे जीवन में बीजगणित का प्रयोग किया जाता है और इसमें कैसे यह अंकगणित का व्यापीकरण है– इस पर विशेष रूप से प्रकाश डाला है। बच्चों की समान्य गलतियों और रोचक कक्षा प्रक्रिया के बारे में जानने का सार्थक प्रयास किया है।

मूल्यांकन प्रश्न

1. पूर्णाकों का घटाना सीखाने के लिए संख्या–रेखा का उपयोग करते हुए एक गतिविधि बनाइए।
2. संख्या–रेखा पर कुछ परिमेय और अपरिमेय संख्याओं का निरूपण को किस प्रकार दिखायेंगे। उदाहरण के साथ स्पष्ट कीजीए।
3. अपने परिवेश से कुछ उदाहरण प्रस्तुत कीजिए जहाँ राशियों की तुलना करके गणना की जाती है।
4. बीजगणित सिखने के दौरान बच्चों की गई गलतियाँ की सूची तैयार कीजिए और आप इसी तरह की गलतियों को दूर करने की योजना बनाइए।
5. समीकरण क्या है ? एक उदाहरण द्वारा समझाइए।

इकाई– 3
जगह की समझ और ज्यामितीय शिक्षण

परिचय

बच्चे जैसे जैसे बड़े होते हैं, वह स्थान संबंधी कुछ सहज विचार विकसित करने लगते हैं, जैसे – दूर, पास, लंबा, मोटा, छोटा, पास दूर आदि। आज अधिकांश बच्चे बिंदु रेखा, रेखाखण्ड, वर्ग जैसी ज्यामिति अवधारणाओं को सीखने के लिए औपचारिक परिभाषा या मौखिक वर्णन का सहारा लेते हैं। नतीजा यह होता है कि बच्चे सिखाई गई अवधारणाओं का मानसिक चित्र निर्मित नहीं कर पाते हैं। यदि आप कक्षा 6,7,8 के बच्चों के साथ इस संदर्भ में बातें करें या उनके गणितीय अवधारणाओं का अवलोकन करें तो शायद आपको कई ऐसे बच्चे मिलेंगे जो आपको वर्ग, आयत अथवा अन्य किसी आकृति की परिभाषा तो बता देंगे लेकिन यदि आप उनसे बहुत से अनेक आकृतियों में से किसी विशेष आकृति को पहचानने के लिए कहेंगे तो शायद वह न पहचान पाए। यदि आप उनसे पूछें कि वर्ग आयत है या नहीं..? अथवा वर्ग किस प्रकार का आयत है? तो वे इसका सटीक जवाब न दे पाए। इसलिए यह निर्दिष्ट होता है कि कहीं–न–कहीं बच्चों में आकृतियों की समझ कमजोर है, बच्चों में आकृतियों की सममिति, सर्वांगसमता, समरूपता, क्षेत्रफल, आयतन या विभिन्न विमाओं की आकृतियों के गुण से संबंधित संप्रत्यय स्पष्ट नहीं है। आज हमारे चारों तरफ ढेर सारे उपरोक्त गुणों एवं विशेषता रखने वाले वस्तु मौजूद है। यदि विद्यार्थियों को उपरोक्त संप्रत्यय को दैनिक जीवन से जोड़कर पढ़ाया जाए तो वह बेहतर ढंग से सीख पाएंगे। प्रस्तुत इकाई में उपरोक्त सभी संप्रत्यय को हम विस्तृत रूप से समझाने का प्रयास कर रहे हैं।

सीखने के उद्देश्य

इस इकाई के अध्ययन करने के उपरांतः–

- विद्यार्थी आकृति के सममिति, सर्वांगसमता आदि की अवधारणाओं को समझ सकेंगे।
- विद्यार्थी सतह का क्षेत्रफल एवं आयतन में अंतर बता पाएंगे।
- विद्यार्थी ज्यामिति से संबंधित आकृतियों के गुण एवं विशेषताओं को बात सकेंगे।
- विभिन्न आकृतियों के ज्यामितीय निहितार्थ क्या है? बता पाएंगे।
- ज्यामितीय अवधारणाओं को अपने दैनिक जीवन में उपयोग कर पाएंगे।
- ज्यामिति अवधारणाओं को समझने के लिए विद्यार्थी विभिन्न खेल एवं गतिविधि का निर्माण कर पाएंगे।
- द्विविमीय एवं त्रिविमिय आकृतियों के बारे में विद्यार्थी अपनी समझ विकसित कर पाएंगे।

रेखा गणित

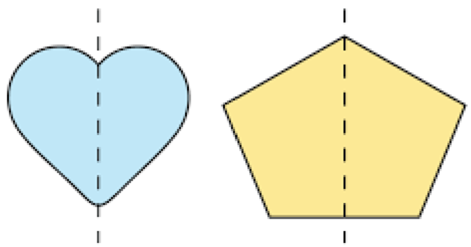
अंकगणित और बीजगणित के अतिरिक्त गणित की तीसरी मुख्य शाखा रेखागणित है। यह शाखा गणित की चित्र शाखा है जो पूर्ण रूप से लंबाई तथा परस्पर काटने वाली रेखाओं के बीच के कोणों पर आधारित है। रेखा गणित के अध्ययन को हम मुख्य रूप से दो भागों में बांट सकते हैं – पहला औपचारिक गणित जिसमें हमें सैद्धांतिक पक्ष पर जोर न देकर क्रियात्मक और व्यवहारात्मक ज्ञान पर जोर देते हैं। प्राथमिक कक्षाओं में रेखा गणित के इसी स्वरूप से ही प्रारंभ किया जाता है। इसके पश्चात उच्च प्राथमिक कक्षाओं में रेखा गणित के दूसरे भाग औपचारिक रेखा गणित की शुरुआत की जाती है तथा विश्लेषणात्मक विधि द्वारा गणित के क्रियात्मक ज्ञान को सैद्धांतिक रूप से सिखाया जाता है।

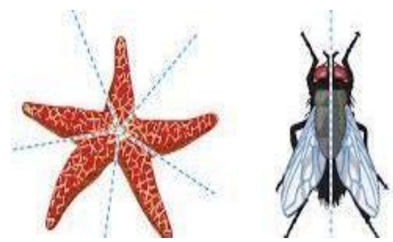
रेखा गणित का महत्व

प्राथमिक अवस्था में रेखा गणित का अध्ययन विद्यार्थियों में क्रियात्मक और व्यवहारात्मक कार्य के बहुत ही अवसर प्रदान करता है जिससे विद्यार्थियों की गणित के अध्ययन के प्रति रुचि बढ़ती है। उनमें रेखा गणित संबंधी विभिन्न तथ्यों का ज्ञान होता है तथा वस्तुओं में समानता, सुडोलता, अनुरूपता, समरूपता इत्यादि का रहस्य समझ में आ जाता है। यह गणित की चित्र शाखा है। इसके अध्ययन से बच्चे विभिन्न चित्रों एवं डिजाइनों के निर्माण में दक्ष हो सकते हैं तथा उनमें तर्कशक्ति विचार शक्ति कल्पना शक्ति का विकास होता है।

आकृतियों की सममिति

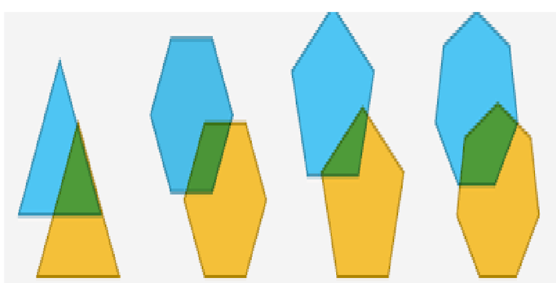
किसी चित्र को सममिति चित्र तब कहा जाता है जब चित्र को उसके तल में खींची गई कोई रेखा चित्र को दो बराबर हिस्सों में बांट दें और जब चित्र को इस रेखा से मोड़ा जाए तो चित्र के दो अर्धांश हर प्रकार से एक–दूसरे से मेल खाएं। इस रेखा को सममिति–अक्ष कहा जाता है।
हमारे आसपास समिति के कई उदाहरण मौजूद हैं, जैसे –

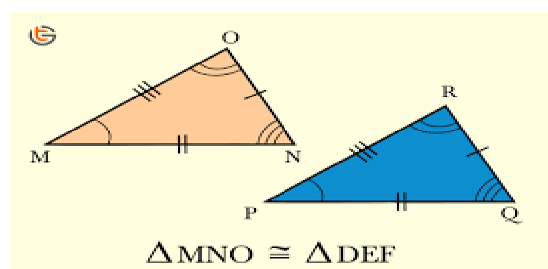




सर्वांगसमता

विद्यार्थियों को सर्वांगसमता की अवधारणा से परिचय कराने हेतु आवश्यक शुरुआत ऐसी स्थूल सामग्री तथा पदार्थों से होनी चाहिए जो विद्यार्थियों के भौतिक वातावरण में आसानी से उपलब्ध हो तथा जिनके माध्यम से सर्वांगसम आकृति के उदाहरण भली–भांति दिए जा सकते हैं। जैसे





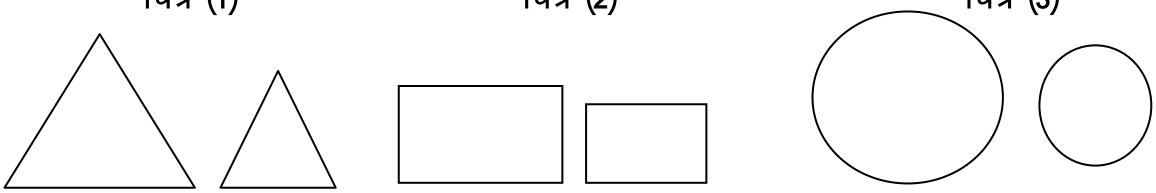
अब विद्यार्थियों से यह कहा जा सकता है कि वह एक जैसी दिखने वाली इन वस्तुओं को किसी समतल धरातल पर एक–दूसरे के ऊपर रख कर देखें, वे पाएंगे की वस्तुएँ पूरी तरह से एक–दूसरे को ढक लेती है। वस्तुओं या आकृतियों के इस प्रकार के एक–दूसरे को पूरा ढक लेने के गुणों को ही हम दो वस्तुओं या आकृतियों का अध्यारोपण या सुरपोशिन कहते हैं और इस प्रकार की आकृतियों को हम सर्वांगसम आकृतियों के नाम से जानते हैं ।

“दो आकृतियां सर्वांगसम कही जा सकती हैं अगर वह आकार और बनावट में एक जैसी हो। अगर उन्हें उठाकर किसी एक समतल धरातल पर एक–दूसरे के ऊपर रखा जा सके तो ऐसी स्थिति में वह एक–दूसरे को पूरा–पूरा ढंक ले” ।

<u>समरूपता</u>

यदि दो ज्यामिति आकृतियों या वस्तुओं की आकृति समान हो तो उन्हें समरूप कहा जाता है। समरूप आकृतियों का विस्तार माप या परिमाप समान या असमान हो सकते हैं। दूसरे शब्दों में, यदि दूसरी आकृति की सभी लंबाईयों को सामान अनुपात में घटाकर या बढ़ाकर पहली आकृति प्राप्त की जा सकती है तो यह दोनों आकृतियां परस्पर समरूप है। उदाहरणस्वरूप, किन्ही दो समरूप बहुभुजों की संगत भुजाएं समान होती हैं और संगत कोणों के मान समान होते हैं तो विभिन्न मापों की होने के बावजूद सभी समबाहु त्रिभुज, सभी वर्ग और सभी वृत्त एक–दूसरे के समरूप होते हैं।

चित्र (1) **चित्र (2)** **चित्र (3)**



क्षेत्रफल की संकल्पना

किसी वस्तु के क्षेत्रफल की माप करने से पहले यह समझना जरूरी है कि वास्तव में क्षेत्रफल का अर्थ क्या है। नीचे कुछ आकृतियां दी जा रही हैं। यह सभी आकृतियां तल में कुछ क्षेत्र को घेरती हैं। क्या आप बता सकते हैं कि इनमें से कौन सी आकृति ज्यादा स्थान घेरती है?

चित्र 1 (बड़ा गोला, छोटा गोला) **चित्र 2 (बड़ा आयत, छोटा आयत)**

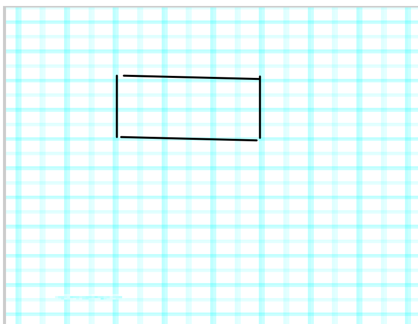
बंद आकृतियों द्वारा घेरे गए तल के परिमाण को उसका क्षेत्रफल कहते हैं।

आयत का क्षेत्रफल

एक ग्राफ पेपर की सहायता से क्या बता सकते हैं कि एक आयत का क्षेत्रफल कितना होगा जिसकी लंबाई 3 सेमी और चौड़ाई 2 सेमी है?

ग्राफ पेपर पर एक आयत बनाइए जिसपर 1 सेमी 1 सेमी के वर्ग हो। यह आयत 6 वर्गों को पूर्णतया ढक लेता है।

ग्राफ पेपर



कोई आयत ग्राफ पेपर पर जितने वर्गों को ढक लेता है, वर्गों की कुल संख्या को हम आयत का क्षेत्रफल कहते हैं।

इस प्रकार आयत का क्षेत्रफल 6 वर्ग सेमी होगा, जिसे हम 3x2 वर्ग सेमी (लंबाई X चौड़ाई) के रूप में भी लिख सकते हैं।

आयत का क्षेत्रफल = (लंबाई X चौड़ाई)

इस प्रकार हम किसी आयत का क्षेत्रफल बिना ग्राफ पेपर की सहायता से भी निकाल सकते हैं यदि उसके लंबाई और चौड़ाई हमें प्राप्त हो।

प्रश्न संख्या 1: नीचे दिए गए बॉक्स में लंबाई और चौड़ाई का प्रयोग करके उन का क्षेत्रफल ज्ञात करें।

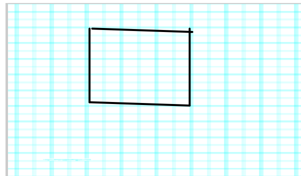
लम्बाई	चौडाई	क्षेत्रफल
4	3	....
6	4	....
7	5	....

वर्ग का क्षेत्रफल

ग्राफ पेपर की सहायता से क्या आप एक वर्ग का क्षेत्रफल निकाल सकते हैं? जिसकी एक भुजा की लंबाई 3 सेमी हो।

आकृति को देखकर आप बता सकते हैं कि इसका क्षेत्रफल कितना होगा?

यदि हम इसे सेंटीमीटर ग्राफ पेपर पर रखते हैं तब क्या देखते हैं। हमें प्राप्त होता है कि या ग्राफ के 9 वर्गों को पूर्णता ढक लेता है।



इसलिए वर्ग का क्षेत्रफल = 9 वर्ग सेमी

वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा X भुजा

उदाहरण 1 – एक वर्गाकार भूखंड का क्षेत्रफल ज्ञात करिए जिसकी एक भुजा की लंबाई 6 मीटर है।
हलः वर्ग की एक भुजा 6 मीटर
वर्ग का क्षेत्रफल = भुजा X भुजा
= 6 X 6 = 36 वर्ग मीटर

उदाहरण 2 – एक आयताकार डब्बे का क्षेत्रफल 36 वर्ग सेमी तथा इसकी लंबाई 9 सेमी है। डब्बे का चौड़ाई ज्ञात करिए।
हलः आयताकार डब्बे का क्षेत्रफल = 36 वर्ग सेमी
लंबाई = 9 वर्ग सेमी
चौड़ाई = ?
आयत का क्षेत्रफल = लंबाई X चौड़ाई
इसलिए, चौड़ाई = क्षेत्रफल/लंबाई = 36/9 = 4 सेमी
अतः डब्बे की चौड़ाई 4 सेमी है।

आयतन की संकल्पना

एक त्रिविमिय (ठोस) वस्तु द्वारा गिरी हुई जगह उसका आयतन कहलाता है। आपने अपने आसपास के ठोस वस्तुओं के आयतन की तुलना करने का प्रयास कीजिए, जैसे – किसी कमरे के अंदर रखी हुयी टीवी की तुलना उस कमरे के अन्दर आलमारी से कितना अधिक है? इसी प्रकार आपके जमेट्री बॉक्स का आयतन उसके अंदर रखे गए रबड़ और पेन के आयतन से कितना अधिक है? क्या आप इनमें से किसी भी वस्तु का आयतन माप सकते हैं? आपको पता है कि किसी क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए वर्ग इकाई का उपयोग करते हैं? यहाँ हम ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए घन इकाई का उपयोग करेंगे क्योंकि घन सबसे अधिक सुविधाजनक ठोस आकार है। क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम क्षेत्र को वर्ग इकाइयों में विभाजित करते हैं। इसी प्रकार किसी ठोस का आयतन ज्ञात करने के लिए हम उस ठोस को घन इकाइयों में विभाजित करने की आवश्यकता है।

घन का आयतन

एक ऐसा त्रिविमिय ठोस वस्तु जिसका प्रत्येक फलक की लंबाई, चौड़ाई एवं ऊँचाई समान होती है, घन कहलाता है। पलकों से गिरे हुए अंदर की जगह को घन का आयतन कहलाता है।

यदि किसी घन का लंबाई, चौडाई एवं ऊंचाई को हम क्रमशः से निर्दिष्ट करें तो

घन का आयतन = लंबाई X चौड़ाई X ऊँचाई

घनाभ का आयतन
एक ऐसा ठोस त्रिविमिय वस्तु जिसके फलक की लंबाई, चौडाई एवं ऊंचाई असमान होती है घनाभ कहलाता है।

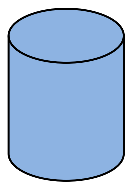
अतः घनाभ का आयतन लंबाइ l , चौडाई b, एवं ऊंचाई h होने पर

घनाभ का आयतन= $l \times b \times h$

= आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

बेलन का आयतन
हम जानते है घनाभ का आयतन उसके आधार के क्षेत्रफल और ऊँचाई का गुणनफल करते हुए ज्ञात किया जा सकता है। क्या इसी प्रकार हम बेलन का आयतन ज्ञात कर सकते हैं?

बेलन



घनाभ की तरह बेलन में भी एक आधार और शीर्ष होता है जो एक–दूसरे के सर्वांगसम और समान्तर होता है। घनाभ की तरह इसका वक्रपृष्ट आधार पर लम्ब होता है।

इसलिए, घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x ऊँचाई

$= l \times b \times h = lbh$

बेलन का आयतन = आधार का क्षेत्रफल x उचाई

$= \pi r^2 \times h = \pi r^2 h$

आयतन और धारिता
आयतन और धारिता में बहुत ज्यादा अंतर नही है। दोनों सम्प्रत्यय को निम्न तरीके से परिभाषित किया जा रहा है:–

(अ) किसी वस्तु द्वारा घिरी हुयी जगह की मात्रा उसका आयतन कहलाता है।

(ब) किसी बर्तन में भरी गयी वस्तु की मात्रा उसकी धारिता कहलाती है।

धारिता लीटर में मापा जाता है।

उदाहरण 1 – ऐसे घनाभ की उचाई ज्ञात कीजिये जिसका आयतन 264 cm^3 और आधार का क्षेत्रफल 24 cm^2 है।

हल: घनाभ का आयतन = आधार का क्षेत्रफल X ऊँचाई

अतः घनाभ की उँचाई = घनाभ का आयतन / आधार का क्षेत्रफल = 264/24 = 11 cm

उदाहरण 2 – 14 cm चौड़ाई वाले एक आयताकार कागज को चौड़ाई के अनुदिस मोड़कर 18 cm त्रिज्या वाला एक बेलन बनाया जाता है। बेलन का आयतन ज्ञात कीजिये (आकृति 1) (π के लिए 22/7 लीजिये)

हलः कागज को चौडाई के अनुदिस मोड़कर बेलन का निर्माण किया गया है, इसलिए कागज की चौडाई बेलन की उचाई होगी और बेलन की त्रिज्या 18 cm होगी।

बेलन की ऊँचाई = h =14 cm

त्रिज्या = r = 18 cm

बेलन का आयतन = $V = \pi r^2 h$

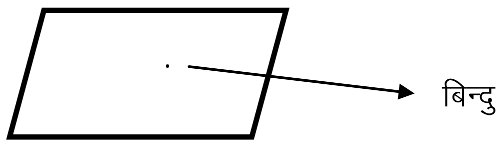
$$= 22/7 \times 18 \times 18 \times 14 = 14256\ cm^3$$

अतः बेलन का आयतन 14256 cm^3

ज्यामितीय रचना के निहितार्थ व ज्यामितीय आकृतियों के गुण

ज्यामिति का अध्ययन मूलभूत ज्यामितीय वस्तुएं बिंदु और सरल रेखा से प्रारंभ होता है। हम जानते हैं कि बिंदु एक मौलिक ज्यामितीय वस्तु है। बिंदु अपरिभाषित है, किंतु बोधगम्य है। इसकी केवल स्थिति होती है, किंतु लंबाई, चौड़ाई और ऊंचाई नहीं होती है।

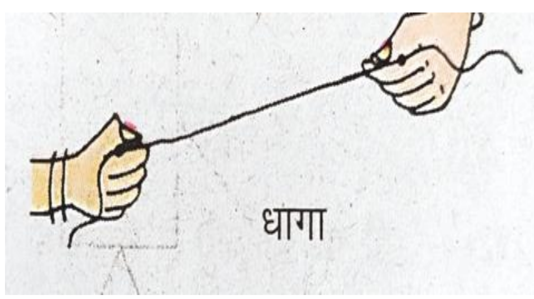
आप अपनी कॉफी के किसी पृष्ठ पर बारीक नोक वाले पेंसिल को सटा दीजिए। पृष्ठ पर एक चिह्न बन जाएगा। यह चिह्न बिंदु को प्रदर्शित करती है।

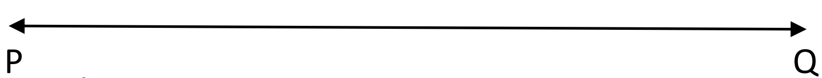


इसी प्रकार सरल रेखा भी एक मौलिक ज्यामितीय वस्तु है। सरल रेखा को समझने के लिए हम निम्नलिखित क्रिया करते हैं–

एक पतले धागे के दोनों छोरों को हाथों की चुटकियों से अलग–अलग पकड़िए और धागे को इस प्रकार तानिए कि वह टूटने न पाए। अब चुटकियों के बीच धागे के खंड के रूप में हमें रेखा के चित्र का बोध होता है।

P





इसे $\overleftrightarrow{PQ}$ से दर्शाते हैं। सरल रेखा PQ को दाएं और बाएं अपनी सीध में असीमित दूरी तक बढ़ाया जा सकता है। स्पष्टतः सरल रेखा पर अनंत बिंदु होते हैं।

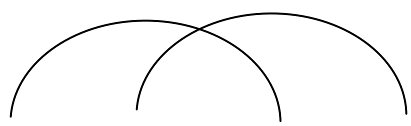
अक्सर कक्षा–कक्ष में पढ़ाते समय आपने भी अनुभव किया होगा कि बच्चों की परकार, चांदा, डिवाइडर, स्केल आदि ज्यामितीय बॉक्स में रखी सामग्री से तरह–तरह कि आकृतियां बनाने में तो खास मजा आता है, परंतु जैसे ही त्रिभुज, चतुर्भुज, आयत, वर्ग की रचना करने संबंधी कोई सवाल उन्हें दिया

जाता है तो वे भौचक्के–से रह जाते हैं। इस पर आगे बात की जाए तो त्रिभुजों में समरूपता एवं सर्वांगसमता और ज्यामितीय प्रमेयों को समझने व उन पर आधारित सवालों को सिद्ध करने वाले तर्कों को वे बिना समझे ही रट लेते हैं। देखने में तो यह भी आया है कि शिक्षकों को भी उसमें काफी परेशानियों का सामना करना पड़ता है। आखिर ऐसा क्यों होता है? किताबों में जिन तरीकों से इन मुद्दों को रखा जाता है उसमें कोई कारण छुपा है या फिर गणित की प्रकृति ही कुछ ऐसी है कि इन मुद्दों पर से पार पाना हर किसी के बस की बात नहीं है। आखिर इसमें जयामितीय रचना के निहितार्थ क्या है? आइए हम इसे ऐसे समझने का प्रयास करते हैं।

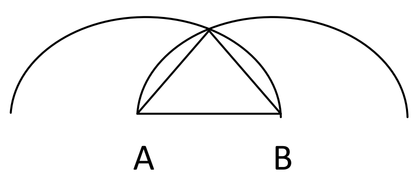
प्रत्येक बच्चे के पास स्थान (Space) संबंधी जैसे– दूर, पास, लम्बा, छोटा, दूरी आदि कुछ सहज विचार विकसित होते हैं, इन्हीं सहज विचारों पर ज्यामितीय रचनाओं एवं अवधारणों को सिखाने की आवश्यकता होनी चाहिए। बच्चों को औपचारिक परिभाषाओं से सिखाई गयी अवधारणाओं का मानसिक चित्र निर्मित नहीं हो पाता हैं। फलतः ज्यामितीय आकृति विशेष को पहनानने में कठिनाई होती है।

आइए ज्यामितीय रचना के निहितार्थ को समझने के लिए एक गतिविधि पर ध्यान दीजिए।

सातवीं कक्षा के कुछ छात्र परकार, पेंसिल और स्केल लेकर तरह–तरह के रोचक चित्र बना रहे थे।



उनमें से एक साथी ने उस आकृति में तीन बिंदुओं को जोड़कर एक त्रिभुज बना दिया



तभी उनमें से दूसरे छात्र ने कहा लगता है कि इस त्रिभुज की तीनों भुजाएं बराबर हैं। क्योंकि बिंदु A से खींचे गए अर्द्धवृत्त की परिधि पर सभी बिंदु A से समान दूरी पर है, तो AB=AC इसी प्रकार की माप को बिना बदले ही B से भी एक अर्द्धवृत्त की परिधि के भी सारे बिंदु केन्द्र से समान दूरी पर होंगे। तो हम कह सकते हैं कि AB=BC

उपर्युक्त तर्कों के आधार पर हम कह सकते हैं कि AB=AC=BC

इस तर्क के आधार पर इस प्रकार से बनाई गई हर आकृति को बिना मापे ही सिद्ध कर सकते हैं कि तीन बिंदुओं को मिलाने पर समबाहु त्रिभुज ही प्राप्त होता है।

इसी प्रकार उच्च प्राथमिक कक्षाओं में परकार की सहायता से विभिन्न कोण बनाए होंगे। समान चाप लेकर 60 के कोण को बनाना सीखे होंगे।

क्या हमें लगता है कि इस तरह के सामान्य प्रारंभिक तर्कों को बच्चों के साथ साझा करना चाहिए? या फिर केवल यांत्रिक प्रक्रिया के तहत बच्चे सिर्फ ऐसी आकृतियां बिना इनके पीछे के तर्कों को जाने बना देते हैं। इनमें से कौन ज्यादा सार्थक हैं? विचार कीजिए।

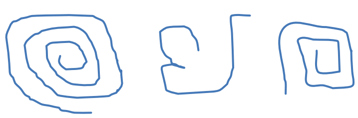
ज्यामितीय आकृतियों के गुण

ज्यामितीय आकृतियां कोई ऐसी संरचना खुली या बंद होती है, जिसमें रेखाओं, वक्रों ओर बिंदुओं से बनी एक निश्चित आकृति और गुण होते हैं। हमारे चारों ओर एक निश्चित संरचना वाली कोई भी वस्तु एक ज्यामितीय आकृति मानी जा सकती है। कुछ ज्ञात ज्यामितीय आकृतियां वर्गाकार, आयत, बेलन आदि हैं

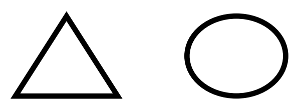
हम यहां विभिन्न द्विआयमी और त्रि–आयामी ज्यामितीय आकृतियों और उनके गुणों के बारे में जानेंगे।

अपने वास्तविक जीवन में हम विभिन्न बुनियादी ज्यामितीय आकृतियों से घिरे होते हैं जैसे पिज्जा का टुकड़ा त्रिकोण के आकार में होता है, दरवाजे या खिड़कियां एक आयत के आकार की होती है आदि।

ज्यामिति में, जब कोई वस्तु या आकृति दोनों सिरों से जुड़ी नहीं होती हैं, तो उसे **खुली ज्यामितीय** आकृति माना जाता है। जब कोई वस्तु या आकृति दोनों सिरों से जुड़ी होती हैं तो उसे **बंद ज्यामितीय** आकृति माना जाता है।



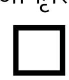
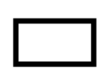
खुली ज्यामितीय आकृति

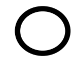
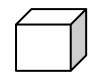
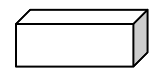
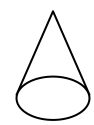
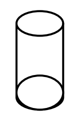
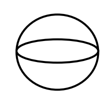


बंद ज्यामितीय आकृति

बच्चें अपने परिवेश में विभिन्न ज्यामितीय आकृतियों व वस्तुओं को अक्सर देखकर पहचान बना लेते हैं। जिससे उनमें स्थानिक क्षमता के विकास हेतु कई स्वाभाविक परिस्थितियां स्वतः उत्पन्न होती हैं। इसके अन्य विशेषताओं व गुणों की पहचान को हम इस तालिका में देखेंगे।

कई बुनियादी ज्यामितीय आकृतियां हैं जिन्हें बनाया जा सकता है। उनमें से कुछ द्वि आयामी (2-D) हैं और कुछ त्रि–आयामी (3-D) हैं। उनके फलकों, किनारों और शीर्षों के साथ ज्यामितीय आकृतियों की सूची निम्न प्रकार है–

नाम	प्रकार	किनारों	कोने	चेहरे(फलक)	आकृति
वर्ग	(2-D)	4	4	-	
					

आयत	(2-D)	4	4	-	
त्रिभुज	(2-D)	3	3	-	
घेरा (वृत्त)	(2-D)	मुड़ा हुआ	0	–	
घन	(3-D)	12	8	6	
घनाभ	(3-D)	12	8	6	
शंकु	(3-D)	1	1	2	
बेलन	(3-D)	2	0	3	
गोला	(3-D)	मुड़ा हुआ	0	1	

इस प्रकार ज्यामितीय आकृतियों की पहचान एवं रचना की समझ को विकसित कर बच्चे परिवेश में ज्यामितीय ठोस चीजों व वस्तुओं के बारे में विशेष जानकारी प्राप्त कर सकते हैं। बच्चों की स्थान–संबंधी क्षमतओं का विकास के साथ ही उनकी गणितीय क्षमताओं का विकास संभव हो सकेंगा। वे बहुत अधिक सामग्री का उपयोग किए बिना भी आकृतियों के माध्यम से ज्यामितीय अवधारणओं को जानने के मौके विकसित किए जा सकते हैं।

त्रिविम को द्विविम पर दर्शाना

आप जानते हैं कि यदि एक वस्तु को एक समतल पर इस प्रकार रखा जा सके कि वस्तु का कोई भी हिस्सा समतल के बाहर न हो, तो ऐसे वस्तु को एक द्विविमीय (two-dimensional) वस्तु या समतलीय वस्तु कहा जाता है, अन्यथा उसे एक त्रिविमीय (three-dimensional) वस्तु कहा जाता है। संक्षेप में द्विविमीय और त्रिविमीय वस्तुओं को क्रमशः 2-D और 3-D वस्तुएं कहा जाता है।

ईंट, दियासलाई की डिबिया, पाउडर का डिब्बा, फुटबॉल इत्यादि का आकार त्रिविमीय है।

अपने दैनिक जीवन में प्रायः हम अपने चारों तरफ विभिन्न आकारों की वस्तुओं को देखते हैं, जैसे– गेंद, पुस्तक, गिलास, शंकु इत्यादि। इन सभी वस्तुओं में एक सामान्य बात तो है कि प्रत्येक वस्तु की कुछ लंबाई, चौड़ाई, ऊंचाई या गहराई अवश्य होती है। इसी कारण ये सभी स्थान घेरते हैं ओर इनकी तीन विमाएं हैं इसीलिए ये त्रिविमीय आकर (3-D) कहलाते हैं।

इसी प्रकार एक कागज पर खींची जा सकने वाली आकृतियां (जिनकी केवल लंबाई और चौड़ाई होती हैं) को द्विविमीय आकृतियाँ कहते हैं। जैसे– वर्ग, आयत, वृत्त, त्रिभुज इत्यादि।

अब हम यहाँ दिखने वाली दुनिया के द्विविमीय निरूरणों को पढ़ पाने की बच्चों की क्षमता पर विचार करेंगे। हम देखेंगे कि छोटे बच्चे चित्रों पर किस तरह से प्रतिक्रिया व्यक्त करते हैं।

स्थान (spatial) – संबंधी क्षमताओं में शामिल है दुनिया जैसे हमें दिखती है उसको समझना, उसे दूसरों को समझ पाना और इस जानकारी को विविध निरूपणों के जरिए एक दूसरे से बांटने की क्षमता।

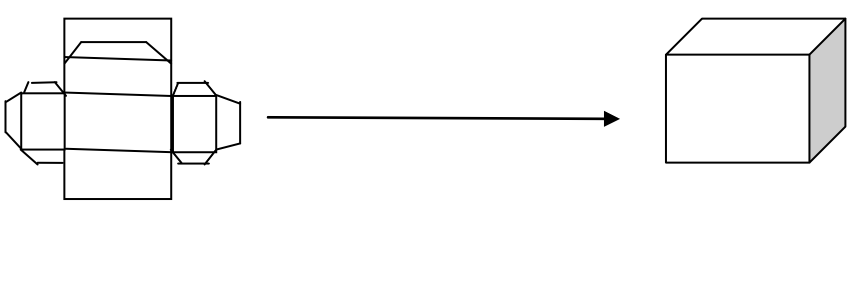
यहाँ हम देख सकते हैं कि द्विविमीय आकृतियों के रूप त्रिवीमीय आकारों के फलकों की पहचान की जा सकती है।

डदाहरण के लिए एक घन के फलक की आकृति वर्गाकार है जबकि बेलन के सपाट फलक वृत्ताकार है।

घन **बेलन**

अब हम यह देखेन की प्रयत्न करेंगे कि किस प्रकार कुछ 3-D आकारों को 2-D आकृतियों के चित्रीय रूप में (अर्थात् कागज पर) निरूपित किया जा सकता है।

एक बॉक्स लीजिए। इसके कुछ किनारों के अनुदिश काटकर सपाट (Flat) बना लीजिए। अब आपके पास इस बॉक्स का जाल (net) है। जाल 2-D में एक प्रकार का ऐसा ढाँचा होता है जिसे मोड़ने पर परिणामस्वरूप एक 3-D आकार प्राप्त हो जाता है।

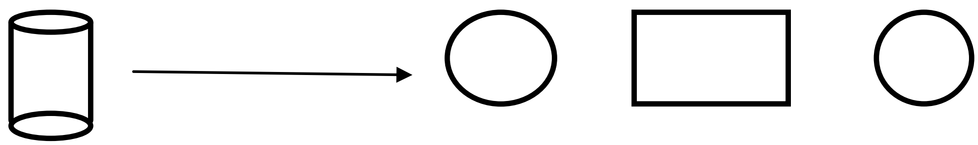


इस प्रकार हम एक घन का जाल बनाना चाहें तो हमें निम्न आकृति प्राप्त होगी।

	पीछे का फलक	
बायें तरफ का फलक	पेंदे का फलक	दायें तरफ का फलक

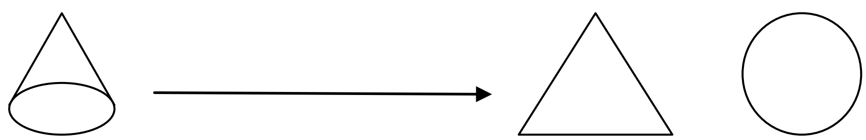
सामने का फलक
उपर का फलक

निम्नलिखित आकृति बेलन का द्विविमीय निरूपण करती है–



बेलन (3–D) द्विविमीय निरूपण (2-D)

इसी प्रकार शंकु का जाल यानी द्विविमीय निरूपण निम्न है।



शंकु (3-D) द्विविमीय निरूपण (2-D)

क्या आप पासे (Dice) का द्विविमीय निरूपण कर सकेंगे? हमें यह याद रखना चाहिए कि पासे के सम्मुख फलकों की संख्याओं का योग सदैव 7 होता है।

नीचे एक पासे का दो चित्र प्रदर्शित किया गया है। क्या आप बता सकते हैं कौन सा द्विविमीय निरूपण सही है?

1			
3	2	4	5
			6

चित्र (I)

1	2		
	3	4	
		5	6

चित्र (II)

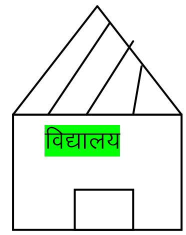
यहाँ आप देखेंगे कि चित्र (II) एक पासे का द्विवीमीय निरूपण नहीं हो सकता क्योंकि पासे के एक जोड़े के विपरीत फलक 1 और 4 हैं जिनका योग 7 नहीं आता है। इसी प्रकार विपरीत फलक के दूसरे जोड़े 3 एवं 6 हैं जिनका भी योग 7 नहीं हैं।

चित्र (I) के बारे में आपके क्या विचार हैं? स्पष्ट करने का प्रयास कीजिए।

बच्चों के पाठ्यपुस्तकों में दिये गये चित्रों और रेखाचित्रों से संबंधित उदाहरणों पर जब गौर करेंगे तो पाएंगे कि किस प्रकार त्रिविमिय में चीजों को द्विविमीय रूप में पढ़ने व कल्पना करने की क्षमता विकसित की जा

सकती है। बच्चों को कहानी समझने में मदद देने के लिए हम प्रायः चित्रों का उपयोग करते हैं। बच्चों के अधिकांश पुस्तकें चित्रों से भरी होती हैं।

चित्र किसी त्रिविमीय छवि को द्विविमीय सतह पर प्रस्तुत करने का तरीका हैं। इसमें त्रिविमीय आकृति की कई जानकारियां छिप जाती है। चित्र देखते समय देखने वाले को इस जानकारी को दोबारा निर्मित करना होता है।



बच्चें चित्र समझने लगे, इसके लिए उन्हें विभिन्न किस्म के चित्र देखने व उनके बारे में बात करने का अवसर दिया जाना चाहिए। यहाँ कक्षा–कक्ष परिस्थिति में बच्चों को अपनी बात रखने का मौका देना भी जरूरी है। खासकर चित्रों के माध्यम से।

इस इकाई में आपने देखा कि किस प्रकार जब समतलीय त्रिविमीय (3-D) आकृतियों को जाल (net) के रूप में खोलते हैं तो उसके विभिन्न फलक प्राप्त होते हैं जो द्विविमीय (2-D) आकृतियों के निरूपण को दर्शाता है।

प्रश्नः आप एक मिठाई के डिब्बे का चित्र बनाइए और इसके फलकों को खोलते हुए किस प्रकार द्विविमीय आकृति का निरूपण करेगें?

ई–संसाधन

- Website link
  1. www. Nctm.org
  2. www.greatmathsteachinggideas.com
  3. www.basic-mathematic.com
  4. www.geogebra.org
  5. www.mathguru.com
  6. www.curriki.org
  7. www.ncert.nic.in

- **ICT USE**
  1. शिक्षण सहायक सामग्री, ग्राफ, चार्ट पेपर, स्लाइड, प्रोजेक्टर ऑडिओ–विजुअल एड/एनिमेशन सामग्री इत्यादि
  2. (U-tube links), वेब रिसोर्स, ओपन रिसोर्स, शॉर्ट फिल्म, कार्टून, इत्यादि

मूल्यांकन

1. रेखा गणित का आपके जीवन में क्या उपयोग है? उदाहरण देकर समझाईये।
2. आकृतियों के सममिति से आप क्या समझते है? दैनिक जीवन में सममिति विषय वस्तु का उदाहरण दीजिये तथा सममिति रेखा को परिभाषित कीजिये।
3. सर्वांगसमता एवं समरूपता में क्या अंतर है? दोनों का उदाहरण देकर समझाएं।
4. क्षेत्रफल की संकल्पना से आप क्या समझते है? ग्राफ पेपर विधि से क्षेत्रफल निकलने की विधि को विस्तारपूर्वक समझाये।
5. आयतन की संकल्पना से आप क्या समझते है? घन घनाभ एवं बेलन का सूत्र सहित उदाहरण दे।
6. आयतन एवं धारिता में क्या अंतर होता है? उदाहरण सहित व्याख्या करें।
7. ज्यामितीय आकृतियों के कौन–कौन से गुण होते हैं? उदाहरण दें।
8. बच्चों का सोचने का तरीका कैसा होता है? उनके सोचने में कौन–कौन से कारक प्रभावित करते है?
9. ज्यामितीय गणित में बच्चे किस प्रकार की गलतियाँ करते है? उनमें सुधार कैसे लाया जा सकता है?
10. ज्यामितीय गणित को रोचक कैसे बनाया जाये? इनमें कौन–कौन सी गतिविधियों को शामिल किया जा सकता है?

इकाई–4 :
आँकड़ों का प्रबंधन एवं संभावना

परिचय (Introduction)

हम सभी को जाने–अनजाने में यह मालूम है कि मनुष्य (जो सभी प्राणियों में अत्यधिक चेतनशील, संवेदनशील है) दैनिक जीवन में विभिन्न प्रकार की वस्तुओं (Object), (विचारों) Ideas, विशेषताओं (Traits), अनुभवों (Experiances) आदि की सूचनाओं से धिरे रहते हैं। मनुष्य एवं अन्य प्राणियों का जीवन जन्म से लेकर मरण तक आँकड़ो से भरा पड़ा है। हम सभी को अपने–अपने जन्म–दिन, विवाह–दिन, माता–पिता के जन्म–दिन, विभिन्न व्यवहारों, आयोजनों आदि की सूचनाएँ संख्यात्मक रूप से या भाषिक रूप में देखने को मिलती है। इन सभी अनुभवों, जानकारियों को एक तथ्यात्मक, संख्यात्मक रूप से प्रयोग करते हैं, जिसे आँकड़ा या प्रदत्त कह सकते हैं।, आंकड़ों का प्रबंधन एवं सम्भावना जीवन में बनी रहती है। हम सभी यह भी जानते हैं कि अमुक वर्ष 2022 में मेरा जन्म 25 अक्टुबर को हुआ है जो दिन रविवार को पड़ता हैं तब अगले वर्ष या 2030 में जन्म दिन किस दिन होगा, की संभावना बनी रहती है। संभावना मनुष्य जीवन की एक आशा के रूप में निश्चित होती है। आँकड़ो की प्रत्याशा में हम सभी तरह–तरह की गणना करते हैं। हम सभी दैनिक जीवन की समस्याओं, सूचनाओं, तथ्यों, अनुभवों आदि को वर्गीकृत भी करते हैं और नहीं भी करते हैं। इनकी केन्द्रीय प्रवृति भी समझने की कोशिश करते हैं। दैनिक जीवन की परिस्थितियों में केन्द्रिय प्रवृति के विभिन्न मानों जैसे– मध्यमान, माध्यिका, बहुलक आदि की गणना करने की कोशिश भी करते हैं। पठन–पाठन के क्रम में प्राप्त अंको का विश्लेषण भी करते हैं कि कौन–सा छात्र/छात्रा अव्वल है, कौन कमजोर है, किसकी पुनरावृत्ति अधिक बार है आदि। हम सभी इन सारी संभावनाओं के द्वारा प्रायिकता (Probability) की गणना तक करने लग जाते हैं जो मानव जीवन की विभिन्न अनुभवों, गुणों, विशेषताओं, प्रकारो आदि पर प्रकाश डालता है।

आँकड़ो का प्रबंधन एवं संभावना शीर्षक के विभिन्न उपविषयों को विद्यालय के बाहर के ज्ञान अर्थात दैनिक जीवन में प्रत्यक्ष या अप्रत्यक्ष रूप में दिखनेवाले सारे समस्याओं का खेल/क्रिया/गतिविधि/प्रयोग/उपयोग/ प्रदर्शन आदि के द्वारा अध्ययन करना, समझना और जीवन में उतारना। जाने–अनजाने में उपर्युक्त सारी क्रियायें होती हैं, सिर्फ हम सब को पहचानने का समझ विकसित करना है।

मानव जीवन एवं संसार आँकड़ों से भरा पड़ा है। आँकड़ों को व्यवस्थित रूप से सजाना एवं उनकी मदद से विभिन्न दैनिक निष्कर्ष तक पहुँचना जीवनोपयोगी कौशल है। हम इस इकाई में आँकड़ों के प्रबंधन (Data handling) पर सोंच विचार करेंगे। इसके अन्तर्गत आँकड़ों के समीकरण, वर्गीकरण व निरूपण को समझने का सार्थक प्रयास करेंगे। हम सब मिलकर एक साथ आँकड़ों के विभिन्न, प्रकार से प्रस्तुतीकरण के तरीकों तथा उनका उपयोग भी करेंगे। केन्द्रीय प्रवृत्तियों के दैनिक जीवन में उपयोग पर भी जानने का प्रयास करेंगे। बच्चे की आँकड़ों एवं संभावनाओं से संबंधित अवधारणाओं एवं कौशलों को विकसित करने का प्रयत्न करेंगे।

इस इकाई में आप सभी जो एक अद्भुत अधिगमकर्त्ता हैं, आँकड़ों का उपयोग एवं वर्गीकरण करेंगे। आप के केन्द्रीय प्रवृति की समझ बनायेंगे एवं दैनिक परिस्थितियों में मान पता करेंगे। यद्यपि इसकें विषय सामग्री को तार्किक क्रम में प्रस्तुत करने के साथ–साथ प्रत्येक स्तर पर अध्येताओं, अद्भुत अधिगमकर्त्ता (Unique Learner) की कठिनाइयों को समझने एवं उन्हें उन्हीं के अनुभवों के आधार पर दूर करने का भरपूर प्रयत्न, प्रयास किया गया है परन्तु पूर्णता का दावा मैं नहीं कर सकता।

उद्देश्य (Objectives)

इस इकाई के अध्ययन के पश्चात् आप

- आँकड़ों का अर्थ उदाहरण के साथ बता सकेंगे।
- आँकड़ों का एकीकरण एवं वर्गीकरण कर सकेंगे एवं समझ सकेंगे।
- आँकड़ों का उपयोग का वर्णन कर सकेंगे।
- केन्द्रीय प्रवृति को समझ सकेंगे एवं उनकी मान पता कर सकेंगे।
- केन्द्रीय प्रवृतियों का दैनिक जीवन में उपयोग कर सकेंगे।
- बच्चे की आँकड़ों व संभावनाओं से संबंधित अवधारणाओं व कौशलों का वर्णन कर सकेंगे।
- बच्चे केन्द्रीय प्रवृति की समझ को दैनिक जीवन में उपयोग में ला सकेंगे।

आँकड़ों का अर्थ (Meaning of Data) : “Data” DATUM का बहुवचन है।

हम सभी जानते है कि प्रश्न करना बालकों के सोंच (Thinking) को उद्दीपन (Stimulate) करती है। Questioning Stimulates thinking. आँकड़ा (Data) क्या है?

आगे बढ़ने से पहले ठहरो और सोंचो (Stop and Thinking) किसी व्यक्ति, वस्तु, गुण, विचार अथवा क्रिया की विशेषताओं के बारे में वैज्ञानिक परीक्षणों, अनुमानों या अन्य साधनों के द्वारा जो सामग्री प्राप्त होती है, उसे आँकड़े, समंक या प्रदत्त कहते है। **गौरेट के शब्दों में** – "आँकड़े वे अंक, संख्या, सूची तथा अन्य सूचनार्थ है जो परीक्षण, सर्वेक्षण तथा वर्णनात्मक अध्ययनों द्वारा प्राप्त होते है।" सामान्य रूपों में, किसी वस्तु अथवा प्राणी के विषय में गुणात्मक अथवा भावात्मक तथ्यों को संख्यिकी में गुणात्मक अथवा मात्रात्मक तथ्यों को संख्यिकी, किसी कक्षा के किसी बालक के बारे में यह जानना कि वह उच्च बुद्धि, मध्य बुद्धि या निम्न बुद्धि का बालक है, एक गुणात्मक आँकड़ा है, साथ ही उसके बारे में ये जानना कि उसकी बुद्धि–लब्धि (IQ) 100, 110, 135, 90, 75 है, एक मात्रात्मक आँकड़ा है।

उदाहरण (Example) :

1. भारत की जनसंख्या तेजी से बढ़ रही है। एक सर्वे के अनुसार भारत में 96.5% बच्चे स्कूल जाते है।
2. भारत में प्रति वर्ष भारी मात्रा में भोजन बर्बाद होता है। एक सर्वे के मुताबिक भारत में प्रति वर्ष 40% से अधिक भोजन जो करीब 58,000 करोड़ मूल्य की बर्बाद होती है।

आँकड़े दो प्रकार के होते है।

आँकड़ा

(DATA)

1. गुणात्मक आँकड़ा
   (Qualitative Data)
2. संख्यात्मक आँकड़ा
   (Quantitative Data)

यह ज्ञातव्य हो कि 'Data' शब्द सदैव बहुवचन में ही प्रयुक्त होता है, एकवचन में नहीं। DATA- "DATUM" का बहुवचन हैं

<u>आँकड़ा का उदाहरण :</u>

आइए, 20 बालकों में गणित (100 अंक) विषय की परीक्षा के प्राप्तांको का अवलोकन करते हैं –

45	65	75	85
35	30	18	62
20	55	51	71
40	31	67	72
15	10	49	58

उपर्युक्त प्राप्तांक 20 बालको के गणित विषय हेतु आँकड़ा कहलाता है।

1- गुणात्मक आँकड़ा (Qualitative Data) :

जब वस्तुओं या प्राणियों का वर्गीकरण उनके गुणों के आधार पर किया जाता है तो उसे गुणात्मक आँकड़ा कहते है। जैसे – किसी कक्षा के छात्र को बुद्धि (गुण) के आधार पर निम्न बुद्धि, सामान्य बुद्धि या उच्च बुद्धि बताना।

यह संख्या के रूप में प्रयुक्त नहीं होता है बल्कि प्राकृतिक भाषा वर्गीकरण के रूप में।

2. मात्रात्मक आँकड़ा (Quantitative Data)

संख्यात्मक आँकड़ा जैसा की नाम से ही स्पष्ट है संख्यात्मक माप है अभिव्यक्त किया जाता है न कि प्राकृतिक भाषा वर्णन से (National Language Description)

संख्यात्मक

(Quantitative)

Discrete (असतत्) Continuous(सतत्)

4.123.........

जैसे : छात्रों की संख्या

जैसे : छात्र की ऊँचाई

4.3.3 मात्रात्मक व गुणात्मक में अन्तर :

क्र0सं0	मात्रात्मक (Quantitave Data)	गुणात्मक (Quantitave Data)
1.	संख्याओं से मतलब रखता है।	विवरण से संबंधित है।
2.	आँकड़ा जिसे मापा जा सकता है।	इसे अवलोकित किया जा सकता है। मापा नहीं जा सकता है।
3.	आयतन, लम्बाई, चैडाई, चाल, भार, क्षेत्रफल, आद्रता , आयु, तापमान आदि	श्रंग, गंध, स्वाद, सुन्दरता आदि
4.	संख्या	गुण
5.	उदाहरण_:– Oil Painting  चित्र : 10^{11} X 12^{11} भार 20 KG क्षेत्रफल 120 sq	उदाहरण_:– Oil Painting  चित्र : ब्लु /हरा (Blue/Green) Color, grid frame Peaceful scene of the Country Smell odd and musty

प्राप्तांक (Score)

यह वह संख्या है जो किसी वस्तु या व्यक्ति की विशेषता की मात्रा का ज्ञान कराती है।

जैसे– अदित्य कृष्ण, गणित की 100 अंको की परीक्षा में 87 अंक प्राप्त करता है।

$\therefore$ प्राप्तांक = 87

प्राप्तांक की सीमाएँ (Limit of Scores)–

किसी प्राप्तांक की वास्तविक सीमा अंकित मूल्य से 0.5 unit के ऊपर ओर 0.5 unit नीचे तक होती है। इन दोनो सीमाओं के अन्तर को प्राप्तांक का विस्तार (Range) कहते है।

(Range) विस्तार है।

विस्तार (Range) = उच्च सीमा–निम्न सीमा

(Upper Limit)–(Lower Limit)

0 का Range = $-0.5 - 0.5$

1 का Range = $0.5 - 1.5$

2 का Range = $1.5 - 2.5$

आँकड़ो का उपयोग (Utilisation of Data) :

आधुनिक शिक्षा के क्षेत्र में आँकड़े का उपयोग दिन–प्रति–दिन बढ़ता जा रहा है। आज से कुछ दशक पहले तक तो हम सब इसका उपयोग केवल शिक्षित व अशिक्षित, अमीर व गरीब, शहरी व ग्रामीण, विद्याालय व शिक्षकों की संख्या आदि को जानने के लिए करते थे लेकिन अब धीरे–धीरे शिक्षा ही नहीं अपितु विभिन्न क्षेत्रों में आँकड़ो का उपयोग होने लगा है, आइए देखते हैं।

1. **शैक्षिक अनुसंधान के क्षेत्र चयन में उपयोग :** वैज्ञानिक आँकड़ो का उपयोग अनुसंधान के, क्षेत्र चयन में सुविधा होती है। शिक्षा के क्षेत्र में कौन–सी समस्या गंभीर है, ज्वलंत है और किए समस्या पर कितने क्षेत्र विशेष हेतु अनुसंधान की जरूरत है।
2. **अधिगमकर्त्ता के वर्गीकरण में उपयोगः** बालकों के वर्गीकरण हेतु आँकड़ों की बड़ी आवश्यकता है। विद्यालय में बच्चों के द्वारा परीक्षा में प्राप्त अंक, खेलकुद के अंक, ऊँचाई, भार, आदि से संबंधित आँकड़ो की आवश्यकता उनके वर्गीकरण में आवश्यक होता है।
3. **शैक्षिक प्रशासन के उपयोग** : शिक्षा के प्राशासनिक क्षेत्रों में भी कार्यरत व्यक्ति शिक्षा से संबंधित किसी भी समस्या की संख्यात्मक जानकारी आँकड़ो के माध्यम से ही प्राप्त करते है।
4. **विद्यालय प्रबंधन एवं प्रशासन में उपयोगः** विद्यालयों के वार्षिक बजट एवं उसकी विभिन्न योजना निर्माण के आँकड़ो की आवश्यकता होती है।
5. **शिक्षण विधियों आदि के मूल्यांकन में उपयोगः** शिक्षण विधियों के मूल्यांकन में आँकड़ो का खेल है। अगर शिक्षण के बाद भी बालक नहीं समझ रहे हैं तो उसके अनेक कारण हो सकते है। शिक्षक के शिक्षण में कमी हो सकती है, पाठ्य–सामग्री में कमी हो सकती है, अधिगमकर्त्ता में कमी हो सकती है। इससे संबंधित आँकड़ो के विश्लेषण द्वारा इनका निदान किया जा सकता है। अतः आँकड़े की आवश्यकता है।
6. **शैक्षिक नियोजन में उपयोग :** किसी देश, राज्य क्षेत्र आदि की शिक्षा योजना बनाने के योजनाकारों को विभिन्न स्तरों के आँकड़ो की आवश्यकता होती है। जैसे–स्कूल में विभिन्न आयु वर्ग के पढ़ने योग्य बच्चो की संख्या, निर्धन परिवार के बच्चों की संख्या विद्यालय में उपलब्ध शिक्षको के अनुपात में विभिन्न स्तरों पर विद्यालय की स्थापना एवं नियोजन की आवश्यक जानकारी आवश्यक है।

7. **अधिगमकर्त्ता को शैक्षिक एवं व्यावसायिक निर्देशन में उपयोग :** हम सभी जानते है कि शैक्षिक एवं व्यावसायिक निर्देशन के मुख्य आधार हैं–बुद्धि, रूचि, अभिरूचि, योग्यता, क्षमता, अभिवृत्ति आदि। वर्तमान में बालकों में उपर्युक्त को मापन एवं मूल्यांकन हेतु आँकड़ों की आवश्यकता होती है।
8. **अधिगमकर्त्ता के विषय में भविष्यवाणाी करने में उपयोग :** आँकड़ा भविष्य कथन का विज्ञान है। अतः आँकड़ा किसी बालक की विभिन्न विषयों एवं क्रियाओं में रूचि, अभिरूचि, क्षमता, योग्यता एवं उपलब्धि की गणना के आधार पर उसके विषय में भविष्यवाणी करती है।
9. **अधिगमकर्त्ता के परीक्षा प्राप्तांको की व्याख्या करने में उपयोग :** चूँकि किसी परीक्षा में बालकों के प्राप्ताकों की व्याख्या प्रतिशत में की जाती है। जैसे–आदित्य ने 60 ईशा के 87 व प्रेम ने 55 अंक प्राप्त किए। लेकिन इससे किसी छात्र की समूह में स्थिति का वास्तविक स्थान पता नहीं होता। आँकड़ो के द्वारा किसी बालक, छात्र की समूह में स्थिति का स्थान केन्द्रीय प्रवृति के मानों के आधार पर किया जाता है।
10. **परीक्षा की वैधता व विश्वसनीयता का पता लगाने में उपयोग :** कोई परीक्षा कितनी वैध एवं विश्वसनीय हैं, इसको ज्ञात करने के लिए आँकड़ो का उपयोग किया जाता है।
11. **अधिगमकर्त्ता के दो समूहों के प्राप्तांकों की तुलना करने में उपयोग :** आँकड़ो के बिना किसी भी दो समूहों की तुलना नही की जा सकती। आँकड़े सामान्यतः दो समूहों के प्राप्तांको की तुलना प्रतिशत परीक्षा परीणाम के आधार पर की जाती है।

वर्गीकृत व अवर्गीकृत आँकड़ो का प्रस्तुतीकरण :

हम सभी आँकड़ो से भली भाँति परीचित हैं। अब इन आँकड़ों का दो भागों में विभाजित करके समझने का प्रयास करते हैं।

आँकड़ों को प्रायः दो भागो में बांटा जा सकता है–

1. अवर्गीकृत आँकड़ा (Ungrouped data or Unclassified data)
2. वर्गीकृत आँकड़ा (Grouped data or Classified data)

आइए, बारी–बारी से दोनों का अध्ययन करते हैं।

1. अवर्गीकृत आँकड़ा (Ungrouped data or Unclassified data)

DIET, Tarar के Section । के 50 टीचर ट्रेनिंग का गणित विषय (पूर्णांक–75) का प्राप्तांक निम्नांकित है :

35	32	45	42	30	55	40	62	65	60
70	30	60	47	41	50	46	40	35	61
47	40	50	60	40	45	46	41	36	50
30	50	51	61	71	43	46	52	53	54
61	71	62	60	70	30	33	20	54	58

उपर्युक्त 50 छात्राध्यापकों के गणित विषय के जो अंक प्राप्त हुए हैं, जो Raw data के रूप में है, जैसा वे अंक प्राप्त किए हैं इन्हें अवर्गीकृत आँकड़े के रूप में सम्बोधित करते हैं।

उपर्युक्त किए हुए आँकड़ो से आवृति वितरण तालिका बनाना सीखते हैं।

Preparation of frequency distribution Table
(आवृति वितरण तालिका बनाना)

एक परीक्षा में गणित विषय (पूर्णांक–50) में 30 छात्राध्यापकों के प्राप्तांक निम्नांकित है।

22	14	14	20	25	20	16	16	21	24
21	24	16	16	23	25	14	22	16	22
22	16	21	22	25	22	14	16	20	23

आवृति वितरण तालिका

Preparation distribution table

प्राप्तांक (Score)	टैली (Tallies)	आवृत्तियाँ (Frequencies) (ʃ)
25	III	3
24	II	2
23	II	2
22	~~IIII~~ I	6
21	III	3
20	III	3
16	~~IIII~~ II	7
14	IIII	4

दिए गए प्राप्तांक को अपनी सुविधानुसार आरोही (Ascending order) या अवरोही क्रम (Descending order) में सजा लेते हैं तथा संगत प्राप्तांक के सामने टैली मार्क लगाते जाते हैं तथा आवृति दशमलव अंकन पद्धति में लिखते जाते हैं।

अवर्गीकृत आँकड़ो (Ungrouped data) के द्वारा निम्नांकित रेखाचित्रो का प्रयोग किया जाता हैः–

1. Pictograph/Pictogram (चित्रालेख)
2. Bar graph/Bar chart (दंडारेख)
3. Pie chart/Circle graph (वृतारेख)
4. Line graph (रेखीय ग्राफ)

ध्यातव्य हो कि

1 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ।

2 टैली मार्क के लिए चिन्ह– II

3 टैली मार्क के लिए चिन्ह– II

4 टैली मार्क के लिए चिन्ह– IIII

5 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~

6 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~I

7 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~II

8 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~III

9 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~IIII

10 टैली मार्क के लिए चिन्ह– ~~IIII~~ IIII

11 टैली मार्क के लिए चिन्ह– इसी तरह आगे भी...........

2. वर्गीकृत आँकड़ा (Grouped data or Classified data)

उपर्युक्त दिए गए आँकड़ो को हम वर्गो में विभाजित करते हैं। यह प्रसार, वर्गो की संख्या, वर्गो का आकार, प्रथम वर्ग का प्रांरभ व टैली मार्क पर निर्भर करता है। इसे समझने हेतु निम्नांकित को समझते हैः–

एक परीक्षा के गणित विषय (पूर्णांक–50) में 30 छात्राध्यापकों का प्राप्तांक निम्नवत् है, आइए अब वर्गीकृत आँकड़ो के लिए इसे समझते है :–

22	14	<u>14</u>	20	<u>25</u>	20	16	16	21	24
21	24	16	16	23	25	14	22	16	22
22	16	21	22	25	22	14	16	20	23

अधिकतम अंक (Highest Score) = 25

न्युनतम अंक (Lowest Score) = 14

हमें मालूम है कि प्रसार ज्ञात करने के लिए अधिकतम अंक(H.S) से न्युन्तम प्राप्तांक (L.S) घटा देते हैं। चूँकि प्राप्तांको में उच्चतर व न्यूनतम दोनों शामिल होते हैं अतः वही प्रसार (Range) ज्ञात करने हेतु अंतर में 01 (एक) जोड़ देते हैं।

∴ प्रसार (Range)= (अधिकतम अंक—न्युनतम अंक)+1

=(25—14)+1

= 11+1

= 12

(II) वर्गो की संख्या (NO. of Classè)

वर्गो की संख्या के संबंध के भिन्न–2 विद्वानों का विभिन्न–2 मत है पर अपनी सुविधानुसार 5–15 तक रखनी उत्तम हो सकती है। प्राप्तांको का प्रसार कम हो तो कम वर्ग तथा अधिक हो तो अधिक वर्ग बनाया जा सकता है।

∴ वर्गो की संख्या= $\frac{\text{(Range)}}{\text{(Class Interval)}}$

यहाँ प्रसार (Range) आप अपनी सुविधानुसार आँकड़ा देखते हुए(अभ्यास करने से समझ पैदा हो जाती है) लें। वर्ग अंतराल जितना आप पूर्णांक में रखना चाहते है जैसा की ऊपर बताया गया है।

वर्गों की संख्या = $\frac{\text{(Range)}}{\text{(Class Interval)}}$ $= \frac{12}{3} = 4$

नोट (अगर 2 रखेंगे तो) $\frac{12}{2} = 6$ C.I, 3 रखेंगे तो $\frac{12}{3} = 4$ C.I. 6 रखेंगे तो $\frac{12}{6} = 2$ C.I इत्यादि)

(III) वर्गो का आकार (Size of Class) इस पर भी विद्वानों का मत भिन्न–2 है। सामान्यतः वर्गों का आकार आँकड़ो के आकार के अनुसार (बड़ा आँकड़ा या छोटा आँकड) 3, 5,7,9, 10, 12, 15 20 – इन वर्गोन्तरो को लोग ज्यादा पंसंद करते है। वैसे तो आपका अपना समझ तभी विकसित होगा जब आप इसकें तन्मयता के साथ गोता लगायेंगे। गणित कहता है हमें गणना करके देखो प्यारे।

(IV) प्रथम वर्गो का प्रांरभ : सवाल है–प्रथम वर्ग (1st class) का प्रारंभ कहाँ से करना चाहिए? जबाब है प्राप्तांक का न्यूनतम अंक में 1 या 2 कम करके किया जा सकता है। तब तक आगे बढ़ते रहना चाहिए जब तक उच्चत्तम अंक सम्मिलित न हो जाय। वर्ग (Cl) का प्रारंभ 0, 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 50 आदि से करना उत्तम समझा जाता है। उपर्युक्त उदाहरण दें,

न्यूनतम प्राप्तांक=14 है। अतः वर्ग 12 या 13 से प्रारंभ किया जा सकता है। जैसे :

वर्ग

12—14

14—16

16—18

18—20

20—22

22—24

24—26 (यहाँ आँकड़ा में उच्चतम प्राप्तांक 25 है)

अब वर्गीकृत आँकड़ो के आवृति वितरण तलिका (Frequency distribution table) तैयार करना। निम्नांकित आँकड़ो को ध्यान के देंखे और F.D.T तैयार करना सीखें जो दैनिक शिक्षण में छात्र/छात्राओं के प्राप्तांक को विश्लेषित कर हम आसानी से समझ और समझा सकते हैं।

आइए, विचार करते है;

22	14	14	20	25	20	16	16	21	24
21	24	16	16	23	25	14	22	16	22
22	16	21	22	25	22	14	16	20	23

Range = (H.S-L.S)+1

= (25-14)+1= 11+1=12

No. of Groups = $\frac{\text{Range}}{\text{C.I}} = \frac{12}{2} = 6\ (\text{Group})$

नोट : सांख्यिकी में वर्ग–अंतराल नीचे से ऊपर लिखने की परिपाटी है।

वर्ग–अन्तराल (C.I)	टैली (Tallies)	आवृत्तियाँ (Frequencies) (ʃ)
24–26	~~IIII~~	5
22–24	~~IIII~~ III	8
18–20	~~IIII~~ I	6
16–18	0	0
14–16	~~IIII~~ II	7
14–16	IIII	4
12–14	0	0

नोट : अगर C.I क्रमश : 3 लेंगे, 4 लेंगे, 5 लेंगे, 6लेंगे तो इसके वर्गो की संख्या में अंतर आयेगा।

आपको बताते चलें कि वर्ग–अंतराल ज्ञात करने की तीन विधियाँ है

1. अपवर्जी विधि (Exclusive Method) :

   इस विधि में वर्ग–अंतराल की उच्चतम सीमा इसकें सम्मिलित नही होती है जैसे–

   20–22 (...............)
   18–20 (...............)
   16–18 (इसमें 16, 17 है, 18 नहीं)
   14–16 (इस वर्ग में 14, 15 है, 16 नहीं)
   12–16 (इसमें 12, 13 है, 14 नहीं)

2. समावेशी विधि (Inclusive method)

   इस विधि में वर्ग–अन्तराल की उच्चतम सीमा सम्मिलित कर ली जाती है। इस वर्ग की उच्च सीमा इसी में रहती है, जैसे–

   25–26 (...............)
   23–24 (...............)
   21–22 (...............)
   18–20 (...............)
   16–17 (...............)
   14–15 (इसमें 14, 15 दोनों सम्मिलित है)
   12–13 (इसमें 12, 13 दोनों सम्मिलित है)

3. वास्तविक सीमाएँ विधि (Real limit method)

इस विधि में वर्ग अंतराल लेने के लिए न्यूनतम अंक (Lower limit) में 0.5 घटाते है और Upper limit में 0.5 जोड़ते हैं। जैसे–

20.5–21.5	
19.5–20.5	
18.5–19.5	
17.5–18.5	
16.5–17.5	
15.5–16.5	
14.5–15.5	
13.5–14.5	
11.5–13.5	

नोट : सामान्यत (Generallly) Inclusive Method का प्रयोग अधिक किया जाता है

वर्गीकृत आँकड़ो से निम्नांकित रेखाचित्र द्वारा प्रस्तुत किया जाता है;–

(I) Histogram (स्तंभाकृति)

(II) Frequency polygon (आवृति बहुभुज)

(III) Cumulative frequency Curve (संख्या आवृति वक्र)

(Iv) Ogive Curve (ओजाइव)

नोट : गणित केवल कार्य करक ही सीखी जा सकती है

"Mathematics can be learn only by doing work."

केन्द्रीय प्रवृति की समझ (Understanding of Central tendency) :

आखिर '' केन्द्रीय प्रवृति की समझ'' समझने की एक शिक्षक को क्यों जरूरत पड़ी ? ठहरिए और सोंचिए, आगे बढ़ने के पहलें। ैं(top and think before going ahead).

एक शिक्षक और एक शिक्षार्थी को सदैव अंको, प्राप्तोंको, प्रतिशतों आदि का सामना करना पड़ता है। शिक्षक, शिक्षार्थी एवं अभिभावक के दैनिक, अर्द्धवार्षिक व वार्षिक आदि अवसरों पर समूह के केन्द्र की ओर संक्षिप्त में जानने की इच्छा हाती है और सुविधा, समझ आसानी से प्राप्त होती है।

केन्द्रीय प्रवृति का अर्थ (Meaning of Central tendency) :

मान लिजिए कोई व्याख्याता (Lecture) अपने वर्ग (Cl) संख्या–50 के छात्राध्यापकों से गणित विषय की Performance(निष्पादन) जानना चाहता है। ऐसी स्थिति में व्याख्याता के लिए यह संभव नहीं प्रतीत होता है कि वह प्रत्येक 50 छात्रध्यापकों के अंको को याद न रखे और ना ही सभी छात्राध्यापकों/प्रशिक्षुओं के अलग–अलग अंको के आधार पर अच्छा या बुरा होने का अंदाजा लगा जा सकता है। पर अगर वह (व्याख्याता) सभी प्रशिक्षुओं द्वारा प्राप्त अंको का एक केन्द्रीय मान (Central value) या औसत मान (Average Value) ज्ञात कर लेते है तो वे वर्ग के निष्पादन (Performance) के विषय में आसानी से अंदाजा लगाया जा सकता है और समझा जा सकता है। मान लिजिए गणित विषय के छात्राध्यापकों के प्राप्तांकों का केन्द्रीय मान 75 मे 70 है मतलब 93% तो व्याख्याता आसानी से, समझते हुए ये कह सकते हैं कि गणित में प्रशिक्षुओं का निष्पादन (Performance) बेहतर है।

अगर हिन्दी विषय के समझ प्रशिक्षुकों का केन्द्रीय मान 75 में 40 आता है अर्थात 53% तो व्याख्याता/शिक्षक आसानी से कह सकते है कि हिन्दी विषय का निष्पादन (Performance) गणित (93%) विषय के निष्पादन से अच्छा नहीं है। इससे ये स्पष्ट है कि केन्द्रीय प्रवृति हमें अंको अथवा प्राप्तांको का केन्द्रीय मान (Central Value) औसत मान/बीच का मान बतलाता है। ज्यादा स्पष्ट शब्दों में कहें तो मध्य के मान (Value) को सांख्यिकी में Central Tendency (बीच की तरफ प्रवृति होने वाला मान) कहलाता है।

अतः केन्द्रीय प्रवृति को इस प्रकार परिभाषित किया जा सकता है–

“केन्द्रीय प्रवृति किसी सम्पूर्ण समूह का वह प्रतिनिधि अंक होता है जिसके आस–पास उस समूह के अधिकांश प्राप्तांक केन्द्रित होते है।”

केन्द्रीय प्रवृति की माप तीन प्रकार के होते हैं–

1. मध्यमान (Mean)/अंकगणितीय औसत
2. माध्यिका (Medium)/मध्यांक
3. बहुलक (Mode)

केन्द्रीय प्रवृति के मानों का उपयोग :

शिक्षक, शिक्षा एवं प्रशिक्षण के विभिन्न क्षेत्रों में केन्द्रीय प्रवृति के मानों का उपयोग निम्नलिखित कार्यो के लिए किया जा सकता है–

(I) किसी समूह की कुल योग्यता को संक्षेप में समझने हेतु

(II) दो या दो से अधिक समूहों के प्राप्तांको की तुलना करने हेतु

(III) समूह के छात्र/छात्राओं के प्राप्तांको का तुलना करने हेतु

(IV) किसी समूह के प्राप्तांको के केन्द्रीय मान को समझने हेतु।

(V) अनुसंधान के क्षेत्र में तथ्यों को प्रभावित करने के सहायक के रूप में।

केन्द्रीय प्रवृति का मान ज्ञात करना (To find out the values of central tendenciė)

हम ज्यों ही केन्द्रीय प्रवृति की मान का बात करते हैं, इससे तीन चिजें मालूम पड़ती है–

(I) मध्यमान (Mean)

(II) माध्यिका (Medium)

(III) बहुलक (Mode)

Mean/Arithmetic Mean (मध्यमान, अंकगणितीय औसत)

प्रशिक्षुओ! इस शिक्षक प्रशिक्षण में आपको मध्यमान के बारे में प्रशिक्षण क्यों? जरा इस प्रश्न पर विचार कीजिए।

आप सभी को शिक्षक बनने के बाद अंको/आँकड़ो से सामना करना पड़ता है। आप सबों को एक साथ 100–150 बालकों का प्राप्तांक नजर आता है और उसे देखकर आपको अपने छात्रों/छात्राओं के बारे में अच्छे/बुरे का आकलन करने में कठिनाई होती है। उसी के सहायातर्थ यह केन्द्रीय प्रवृति का मध्यमान का ज्ञान होना जरूरी है ताकि एक अंक देखकर पूरे छात्रों का अनुमान लगाया जा सके। यह वही है जैसे पहेली मे पक रही चावल टटोल कर देखा जाता है, सारा चावल पक गया। इसी प्रकार एक प्राप्तांक के द्वारा बच्चे का मूल्य/मान पता चल जाता है।

हम सभी को यह मालूम होना चाहिए कि केन्द्रीय प्रवृति का सबसे सरल, पर सबसे अधिक उपयोगी मान, मध्यमान ही है। हम सब को यह भी मालूम होना चाहिए कि मध्यमान बहुत विश्वसनीय (Reliable) एवं शुद्ध (Accurate) केन्द्रीय प्रवृति का मान होता है।

आप सब को यह भी पता होना चाहिए कि इसके दोनों ओर के प्राप्तांको के विचलनों का योग शून्य होता है अर्थात् बढ़ते या घटते हुए क्रम में अधिक की ओर या कम की ओर का विचलन शून्य (0) होता है।

उदाहरण :

(1) किसी कक्षा का 50 अंको की परीक्षा में 5 छात्रों का प्राप्तांक इस प्रकार है–

16, 25, 30, 40 व 34

$\therefore$ मध्यमान (M) $\frac{16+25+30+40+34}{5} = \frac{145}{5} = 29$

अब, इन प्राप्तांको को आरोही (Ascending mode) में रखकर औसत मान से विचलन –

प्राप्तांक	औसत मान	विचलन	विचलनो का योग
40 34 30 25 16	$\frac{16+25+30+34+40}{5}$ = 29	11 5 1 + 17 -4 -13 +17	+17–17=0

संक्षेप में, प्राप्तांकों के कुल योग में उसकी संख्या से भाग देने पर जो प्राप्त होता है, उसे मध्यमान या औसत मान कहते हैं। इसे प्रायः M या X से सुचित किया जाता है। —

$$M \text{ या } \overline{X} = \sum \frac{x}{n}$$

दैनिक परिस्थितियों में मध्यमान का उपयोग एवं महत्व :

NEP 2020 में भी छात्र/छात्राओं में दैनिक Progress का Report शिक्षक को लेना आवश्यक है जिसके लिए इसकी जानकारी नितांत आवश्यक है। आप सब को पता होना चाहिए कि शिक्षा के क्षेत्र में सबसे अधिक प्रयोग मध्यमान का ही होता है।

दैनिक परिस्थितियों में शिक्षा के क्षेत्र में इसका प्रयोग मुख्यतः तब किया जाता है जब–

1. किसी कक्षा के सभी छात्रों के प्राप्तांक के गुरूत्वकेन्द्र को जानना होता है।
2. किसी कक्षा के सभी प्राप्तांको को उनके मानानुसार महत्व देना होता है।
3. दो या दो से अधिक कक्षाओं, स्कूलों के प्राप्तांको की तुलना करनी होती है।
4. शैक्षिक अनुसंधानों में जरूरत होती है।

माध्यिका/मध्यांक (Median)

प्रश्न है, माध्यिका की आवश्यकता एक शिक्षक/प्रशिक्षु को क्यों ? यह सवाल हमारे मस्तिष्क को सोचने पर मजबूर कर देती है। आइए हम सोंचते एवं करते हैं क्यो ? Why (क्यों) शिक्षा के क्षेत्र में शिक्षार्थियों के गुणों की व्याख्या करने के लिए मध्यमान व बहुलक की नहीं माध्यिका की जरूरत पड़ती है। दैनिक शिक्षण में शिक्षक/शिक्षार्थियों को प्रायः अंको एवं प्राप्तांकों से सामना करना पड़ता है। इन प्राप्तांकों का विश्लेषण करने हेतु इसकी जरूरत पड़ती है। शिक्षण संस्थानों में मानव संसाधन (शिक्षक, छात्र, अभिभावक) संस्कृति, बुद्धि, ईमानदारी, स्वास्थ्य, व्यवसाय आदि के बारे में एक भिन्न तथ्य की जरूरत पड़ती है जिसके लिए माध्यिका का ज्ञान आवश्यक है।

माध्यिका का अर्थ एवं परीभाषा (Meaning and definition of median)

माध्यिका को संकेत में Md या Mdn से सूचित किया जाता है। यह केन्द्रीय प्रवृति का वह मान है जो किसी समूह के प्राप्तांक को दो बराबर भागों में बाँट देती है। मान लिजिए, किसी कक्षा के 5 छात्रों का प्राप्तांक इस प्रकार है– 40, 65, 87, 92, 58, अब इस प्राप्तांक को आरोही (Ascending) या अवरोही (Descending) क्रम में व्यवस्थित करने पर बीच का (50% नीचे या 50% उपर) जो मान प्राप्त होगा, वही माध्यिका होगा।

आरोही – 40, 58, 65, $\boxed{65}$, 92 Mdn=65

अवरोही – 92, 87, 65 $\boxed{65}$, 40 Mdn=65

एक दूसरा उदाहरण : अंको की एक परीक्षा में 10 छात्रों के प्राप्तांक क्रमशः 20, 41, 32, 38, 15, 25, 35, 42, 31, 26 है। माध्यिका ज्ञात कीजिए।

प्राप्तांको को सबसे पहले आरोही या अवरोही क्रम में व्यवस्थित करते हैं।

आरोही – 15, 20, 25, 26, $\boxed{31,32}$ 35, 38, 41, 42

अवरोही – 42, 41, 38, 35, $\boxed{32, 31}$ 26, 25, 20, 15

प्राप्तांक सम (Even) होने पर आरोही या अवरोही क्रम में बनाने के बाद बीच के पदों को जोड़ कर 2 से विभाजित किया जाता है। जैसे –

ऊपर के उदाहरण में,

$$\text{Mdn} = \frac{31+32}{2} = \frac{63}{2} = 31.5$$

दैनिक परिस्थितियों में माध्यिका/मध्यांक का उपयोग :

मानव जीवन आँकड़ो का खेल है। सूचनाओं का आकलन उनके विश्लेषण से पता चलता है। चूँकि मध्यांक, आँकड़ो के मध्य में घटने वाली विभिन्न प्रकार की घटनाओं का मध्यस्थता करता है। दैनिक जीवन के निम्न स्थिति में माध्यिका का उपयोग किया जाता हैः–

1. जब किसी कक्षा या समूह के प्राप्तांकों/आँकड़ों का वितरण सामान्य नहीं होता है।
2. जब किसी कक्षा या समूह के सभी प्राप्तांक प्राप्त नहीं होते है।
3. जब हमें किसी कक्षा या समूह के प्रयोग विशेष की इस स्थिति का पता लगाना होता है कि वह प्रयोग प्राप्तांकों की दृष्टि से प्रथम 50ः में आता है या अन्तिम 50ः में आता है।
4. जब मध्यमान/औसत निकालने का समय नहीं होता है।
5. शैक्षिक शोधों के निष्कर्ष प्रतिपादन में।

बहुलक (Mode)

"Mode" जिसे हिन्दी में बहुलक कहते है, फ्रेंच भाषा के "Le Mode" शब्द से लिया गया है। जिसका तात्पर्य 'सर्वाधिक फैशन' में होता है। सर्वाधिक फैशन का तात्पर्य है कि जो चिज सर्वाधिक फैशन में होती है। कहने का तात्पर्य कि बहुलक भी वही सर्वाधिक फैशन से जुड़ा है। अर्थात् Mode (बहुलक) का अर्थ–वितरण में जो सबसे अधिक बार दिखे अर्थात् पुनरावृति।

आइए इसे उदाहरण द्वारा समझते है :

निम्नलिखित आँकड़ों पर ध्यान से देखिए :

5, 3, 2, 8, 5, 2, 2, 3, 2, 8, 3, 2, 2, 8, 2, 3, 2

5 की आवृति – 2 बार

3 की आवृति –4 बार

2 की आवृति – 8 बार

8 की आवृति – 3 बार

उपर्युक्त उदाहरण में 2 की आवृति अधिक बार अर्थात् 8 बार है।

बहुलक की परिभाषा :

"बहुलांक किसी समूह का वह प्राप्तांक होता है जिसकी उस समूह के प्राप्तांकों में सबसे अधिक आवृति होती है।"

गैरेटे के अनुसार – "बहुलांक वह अकेला मापन या प्राप्तांक है जो प्रायः धटित होता है।"

"Mode is the Single measure or Score which occurs most frequently."

-Garrett

बहुलक में केन्द्रीय प्रवृति के मापों में सबसे सरल मापन है। अधिक गणितीय गणना के बिना भी ज्ञात किया जा सकता है। इसको समझना भी अत्यंत सरल है। इसका प्रयोग अधिकता फैशन के विषय में किया जाता है। दैनिक जीवन में अवलोकन से यह पता किया जाता है कि किसी वस्तु, चित्र या प्रतिपाद का उपयोग अधिक किया जाता है। जिसे जितना अधिक उपयोग किया जाता है वह उतना ही अधिक अच्छा है, ऐसा माना जाता है। यह कोई जरूरी नहीं कि वह अच्छा ही है।

दैनिक परिस्थितियो में बहुलक का उपयोग :

हम सभी जानते है कि केन्द्रीय प्रवृति के मध्यमान व माध्यिका की अपेक्षा कम विश्वसनीय होता है फिर भी कुछ ऐसी परिस्थितियाँ हैं जहाँ इसका उपयोग किया जाता है। :

1. जब किसी समूह की कक्षा की केन्द्रीय प्रवृति का अनुमान लगाना होता है। अर्थात् जब केन्द्रीय प्रवृति का एक मोटा अनुमान लगाना हो।
2. जब किसी समूह की सर्वाधिक उपलब्धियों का पता लगाना हो।
3. जब किसी समूह के बहुचर्चित मान का पता लगाना होता है।
4. जब मध्यमान या माध्यिका ज्ञात करने का समय नहीं होता है।

माध्य, माध्यिका व बहुलक में संबंध :(Relation among Mean, median and mode)

माध्यिका, हमेशा मध्यमान और बहुलक के बीच होता है।

$\boxed{M>Mdn>Mo}$ or $\boxed{Mo<Mdn<M}$

Mean = $\frac{3\ \text{Median}-\text{mode}}{2}$

Median = $\frac{1}{3}$ (2 Mean+Mode)

Mode = 3Median-2Mean

इन तीनो में सबसे अधिक विश्वसनीय मान मध्यमान होता है। सांख्यिकी में इसका सबसे अधिक प्रयोग होता है। यह बहुत संवेदनशील होता है। एक भी प्राप्तांक बदलने पर यह बदल जाता है जबकि उस स्थिति में माध्यिका और बहुलक के मान पर कोई प्रभाव नहीं पड़ता है।

आइए, मध्यमान की संवेदनशीलता एक उदाहरण से समझने का प्रयास करते है:

उदाहरण : निम्न प्राप्तांकों के मध्यमान, मध्यांक व बहुलक ज्ञात कीजिए –

Mean, (M) = $\frac{2+4+7+10+12+12+16}{7}$

$\frac{63}{7}$ = 9

Mdn =10

Mo = 12

अब अगर उपर्युक्त प्रश्न में 16 के जगह 14 कर दिया जाए तो

2, 4, 7, 10, 12, 14

Mean, M = $\frac{2+4+7+10+12+12+14}{7}$ = $\frac{61}{7} = 8.71$

Mdn = 10

Mo = 12

इस प्रकार हम देख रहे है कि Mean (मध्यमान) बदल गया पर माध्यिका एवं बहुलक नहीं बदला। इसका मतलब यही न हुआ कि मध्यमान अत्यधिक संवेदनशील होता है।

बिना सन्देह के हम कह सकते है कि मध्यमान संवेदनशील होता है।

बच्चों की संभावना के बारे में समझः

संभावना (Possibility) एक बच्चे में असीमित (Unlimited) है। बच्चों के ज्ञान, समझ की अनन्त संभावनाए हैं। इन संभावनाओं को बच्चों में उत्तेजित करने की जरूरत है। इसके लिए बच्चों में ज्ञान, जानकारी की अद्भूत अग्नि भरनी होगी– खेल जो बच्चों का जन्म सिद्ध अधिकार है, उन्हे खेलने दें और खेल में ज्ञान को ढुढ़ने का कौशल विकास करने की तरकीब शिक्षक को सुझाना हैं। (Play is universal for all children).

बच्चों के संबंध में ऐन फ्रैंक का कथन – "काश कोई तो होता जो मेरी भावनाओं को गंभीरता से समझ पाता। अफसोस, ऐसा व्यक्ति मुझे अब तक नहीं मिला......।"

बच्चों की भावनाओं को समझने वाला एक शिक्षक ही उसकी संभावनाओं को आगे बढ़ा सकता है जिसके लिए दार्शनिक दृष्टिकोण ही नहीं अ्पितु दार्शनिक कर्म की भी जरूरत है।

हरेक बच्चे एक अलग प्रकार के उर्जा (Potential) से भरा होता है। उनके रूचि को गौर से देखिए।

संभावना व प्रायकिता, दोनों एक दुसरे से भिन्न है। संभावना एवं प्रायिकता शब्द को उदाहरण द्वारा समझने का प्रयास करते हैः– उदाहरण

शब्द 'सभावना' (Possibility) लैटिन शब्द के **"**POSSIBILITIAS**"** से लिया गया है जिसका अर्थ है– **'**able to be done**'** अर्थात् 'किया जा सके'। अब बच्चों की संभावना का मतलब हुआ – बच्चों के लिए जो किया जा सके। प्रायिकता (Probability), संभावना (Possibility) का उपसमुच्चय होता है।

प्रायिकता यह अनुमान लगाने के बारे में है कि कुछ होने की कितनी संभावना है।

दिन–प्रतिदिन के जीवन के हम कब अक्सर ही ऐसा कहा करते है–

1. आज शाम तक वर्षा हो सकती है।
2. भारत, पाकिस्तान को मैच में जरूर हरा सकता है।
3. ऐसा लगता है कि भारत विकसित देश बन जाएगा आदि

CHANCE (अवसर): यह कुछ होने की संभावना है। अगर आप एक सिक्का उछालते हैं, तो आप भविष्यवाणी नहीं कर सकते कि आपको क्या मिला– चित या पट (Head or Tail) । जब आप एक पासा फेंकेंगे, तो संख्या की भविष्यवाणी करना कतई संभव नहीं हैं।

इस जगत में प्रत्येक बच्चे के पास अपनी एक अलग क्षमता (potential) होती है जबकि कुछ अकादमिक रूप से उत्कृष्ठ होते हैं, दूसरे खेल, कला, संगीत आदि के अपनी योग्यता दिखाते हैं। बहुत कम उम्र से ही बच्चे रुचि (interest), (habit) आदत एवं जुनून (passion) के रूप में अपनी क्षमता (potential) प्रदर्शित करना प्रारंभ कर देते हैं।

अगर माता–पिता या शिक्षक इन बच्चों पर स्पष्ट दृष्टि रखते हैं तो वे आसानी से बच्चें की क्षमता की खोज कर सकते हैं।

आइए, बच्चों में इन क्षमताओं का अवलोकन करने का प्रयास करते हैं

1. उनके रूचि की तलाश करें– बच्चे बहुत कुछ करना पसंद करते हैं– खेलना,पेंटिंग करना, दौड़ना–पढ़ना आदि ऐसी कई चीजें हैं जिन्हें वे दिनभर में करना पसंद करते हैं। शिक्षक होने के नाते इन्हें पहचनाने का गौर करें।
2. उनमे शौक के लिए देखें– शौक, रूचि से अलग हैं, भिन्न हैं। वे अल्पकालिन हो सकते हैं गर्मी के छुट्टी में नृत्य सीखना, समर कैंप करना, गीटार सीखना छुट्टी में आदि। बच्चों के शौक का पोषण करें। इसके बारे में बच्चे से बातचीत करने का प्रयास करें।
3. विषय के प्रति उनके प्रेम पर ध्यान दें– बच्चों का स्कूल में पढ़नेवाले विषयों के प्रति अलग–अलग झुकाव होते हैं। कुछ बच्चे गणित, कुछ विज्ञान तो कुछ अंग्रेजी, तो कुछ हिन्दी, इतिहास, भूगोल, आदि में रूचि रखते हैं तो घर पर वे उस विषय को पढ़ते हैं ।
4. खेलकूद के लिए उनके शौक को कभी नजर अंदाज नहीं करनी चाहिए–खेल से अभ्यास में रूचि पैदा होता है। विद्यालय में बच्चों के साथ खेलने में उनके योग्यता का विकास होता है।

5. व्यवहार का अध्ययन–व्यवहार से हमारा तात्पर्य है कि वे स्वयं को अपने भिन्न समूह है, पारिवारिक मंडलियों एवं सामाजिक मेलजोल में कैसे कर सकते हैं। शिक्षक बच्चे के व्यवहार पैटर्न का अध्ययन अवश्यक उनकी असीम संभावनाओं को बेहतर बनने के लिए दिशा में प्रसास करें।

संभावना से प्रयिकता

संभावना से प्रायिकता को इस शिक्षक प्रशिक्षण में सीखने की आवश्यकता क्यों पड़ी अपने आप से आगे बढ़ने से पहले सोचिएं।

निःसन्देह, संभावना एवं प्रायिकता दोनों एक चीज नहीं है। परन्तु कुछ लोगों के लिए संभावना व प्रायिकता की भिन्नता को समझ पाना कठिनाई वाला कार्य हो सकता है। आइए इसे समझने के लिए हम एक उदाहरण का सहारा लेते हैं।

चित्र

1. उदारहणः– चार दरवाजे में से किसी एक दरवाजे के पीछे एक बिल्ली छुपकर बैंठी है। दाई ओर से पहले दरवाजे को खोला जा चुका है। शेष तीन दरवाजे में से बाई ओर के दरवाजे के पीछे बिल्ली होने की प्रायिकता क्या होनी जबकि दाई ओर से किस पहले दरवाजे को खोला गया था उसके पीछे बिल्ली थी या नहीं थी! इसके बारे में हमें जानकारी नहीं है।

   जब घटना की अनिश्चितता को अंकगणित के रूप में व्यक्त किया गया है तो उसे प्रायिकता कहते हैं। किसी घटना में होने की संभावना को प्रायिकता या संभाव्यता कहते हैं। जब हम एक सिक्का उछलते हैं तब हमें हेड या टेल मिलता है, केवल दो संभावित परिणाम (H,T) सांख्यिकी में बहुत प्रयोग होता गणित, विज्ञान, दर्शनशास्त्र इत्यादि क्षेत्रों में इसका बहुत प्रयोग होता है। इस सिद्धांत का जन्म जुआ के खेल से हुआ। यह अनिश्चितताओं की परिमाणात्मक माप हैं। यह सदैव 0 और 1 के बीच की एक संख्या होती है। इसमें 0 और 1 दोनों संभावित हैं। यदि किसी घटना की प्रायिकता एक के निकट है तो उसके घटित होने की संभावाना अधिक और अगर 0 के निकट है तो घटना के घटित होने की संभावना कम होती है।

उदारहणः संभावना व प्रायिकता को एक उदाहरण से समझते हैं – एक दिन मैं ओर मेरे दोस्त दोनों एक सिक्के के साथ खेलना शुरू किया। खूब मजा के साथ दोनों खेलना शुद्ध किया। चूंकि सिक्के को उछालने वाला यह खेल शर्तियां तौर पर खेला जाता है। लेकिन कुछ लोगों के लिए यह खेल अपनी किस्मत को आजमाने के लिए अच्छा साधन उपलब्ध कराता है। इसलिए वे लोग इस खेल में पैसा लगाते हैं। सिक्के से उछालने का काम मैं स्वयं कर रहा था अगर अपनी किस्मत

को आजमाने का काम मेरा दोस्त कर रहा था। मैं लगातार एक–एक करके पांच चाल हार चुका था। मेरा दोस्त हर बार चित आने की संभावना को लेकर शर्त लगता और हार जाता है। अब मेरे दोस्त को लगने लगा कि आज उसकी किस्मत जोरों पर है। तो फिर क्या था इस बार उसने अपनी किस्मत को अजमाने के लिए अपना दाव चित के स्थान पर पट पर लगाया। सोचिए अभी बताइए, क्या वाकई में मेरे दोस्त की किस्मत जोरों पर थी? अगर जब दूसरे दिन भी इसी खेल को खेलते हैं जब क्या से मेरे दोस्त की किस्मत उसको जीतायेगी।

स्पष्टीकरण– मैं लगातार चित आने के कारण अपने दोस्त से पांच बार हार चुका हूं तो इस बार चित आने की संभावना चौथी और पांचवी बार की अपेक्षा कहीं अधिक हो जाती है। इसका सीधा अर्थ है इस बार मेरे दोस्त की हारने की संभावना 100 प्रतिशत है क्योंकि इस बार मरे दोस्त के अपनी किस्मत को आजमाने हेतु अपना दाव पट आने पर लगाया है। वही इस बार भी चित या पट आने की प्रायिकता 1/2 यानि 50 प्रतिशत ही है। अर्थात् यह जरूरी नहीं कि हजार बार सिक्का उछालने पर 500 बार चित आएगा। हो सकता है पांच बार भी चित न आए दूसरे दिन भी चित या पट आने की प्रायिकता 1/2 या 50 प्रतिशत ही रहती है। जबकि संभावना पुनः संयोग पर निर्भर करती है। और यह संयोग घटको के कारक बनने पर निर्भर करता है।

संभावना का मान परिस्थितियों के आधार पर चर और प्रायिकता का मान विशेष शर्त्तों अथवा संयोग के आधार पर अचर होता है।

मूल्यांकन

- **आँकड़ा से आप क्या समझते है? यह कितने प्रकार के होते है?**
- **मध्यमान, मध्यांक एवं बहुलक को परिभाषित करें तथा दैनिक परिस्थितियों में इनके उपयोगिता का वर्णन करें।**
- **प्रायिकता क्या है? इसके महत्व को बताएँ।**
- **एक पासे को उछालने पर सम संख्या आने की प्रायिकता क्या होगी?**
- **कक्षा में प्रायिकता को समझाने के लिए आप किन–किन गतिविधियों का उपयोग करेंगे?**

<u>संदर्भ सूची</u>

- राष्ट्रीय पाठ्यचर्या की रूप रेखा (NCF) -2005
- बिहार पाठ्यचर्या की रूपरेखा (BCF) -2008
- बिहार राज्य की गणित की पाठ्यपुस्तकें–कक्षा 1 से 8 तक।
- एन.सी.ई.आर.टी. की पुस्तकें
- प्राथमिक स्तर पर गणित का अधिगम (डी.एल.एड.), इंदिरा गाँधी रास्ट्रीय मुक्त विश्विद्यालय
- गणित शिक्षण का अधिगम, इंदिरा गाँधी रास्ट्रीय मुक्त विश्विद्यालय, नई दिल्ली
- गणित की गतिविधियाँ, एकलव्य प्रकाशन
- गणित की पाठ पुस्तक, कक्षा 6, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुसंधान और प्रशिक्षण परिषद् नई दिल्ली
- गणित की पाठ पुस्तक, कक्षा 7, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुशंधान और प्रशिक्षण परिषद् नई दिल्ली
- पाठ पुस्तक, कक्षा 8, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुशंधान और प्रशिक्षण परिषद् नई दिल्ली
- गणित का शिक्षण शास्त्र, राष्ट्रीय शैक्षिक अनुशंधान और प्रशिक्षण परिषद् नई दिल्ली
- गणित का शिक्षण शास्त्र, डिप्लोमा इन एजुकेशन (डी.एड.), ह्रदय कान्त वेलफेयर एसोसिएशन पटना
- NCERT (2006) Position paper, national focus group on teaching of Mathematics, New Delhi.