FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

Guía de trabajos prácticos del Módulo Cero.

Bienvenido al material físico y virtual del Módulo Cero de la Facultad de Ingeniería del Ejército - Universidad de la Defensa Nacional. En estas páginas tendrás todo lo necesario para practicar y entrar con el pie derecho a tu carrera de Ingeniería.

¿Qué es este material?

Este material es la práctica correspondiente a las clases con la que trabajaremos a lo largo del módulo.

Desde la Facultad de Ingeniería del Ejército nos hemos propuesto dar el primer paso de tu carrera de Ingeniería juntos y de manera firme. Para cada ejercicio de esta práctica tendrás el video correspondiente con la teoría que lo respalda a solo un click; de manera que si hay algo que no entendieras no tenés más que clickear en el botón provisto en la página pertinente.

Unidad 1: Números reales.

Ejercicio 1.

Resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto R de los números reales.

a) $\dfrac{5}{x+3} + \dfrac{4}{x} = 3.$

b) $\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{2}{\sqrt{x+12}} = 0.$

c) $\sqrt{2x+9} - \sqrt{3x+16} = -1.$

d) $x + \sqrt{3x+1} = 3.$

e) $|x-4| = 8.$

f) $|x-2| = |3x+1|.$

Ejercicio 2.

Resolver las siguientes desigualdades y expresar la solución como un intervalo o unión de intervalos.

a) $-3 \leq \dfrac{4-x}{4} < 7.$

b) $\left|\dfrac{3x-1}{4}\right| \leq 6.$

c) $x^2 - 3x + 2 > 0.$

d) $\dfrac{2x}{x-3} \leq 1.$

Ejercicio 3.

Utilizando la propiedad siguiente:

Sean $a \in R^{+} - \{1\}$ y $x, y \in R$. Si $a^x = a^y$ entonces $x = y$,

resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto R de los números reales (hay una de ella que no tiene solución).

a) $2^x = \dfrac{1}{2}.$

b) $\sqrt{3^x} = \dfrac{1}{\sqrt{27}}.$

c) $5^{x+1} + 5^x = 750.$

d) $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = \dfrac{7}{2}.$

e) $\dfrac{3^{x^2}}{9} = 3^{2+3x}.$

f) $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9.$

g) $4^{2x} + 4^{x+2} = 80.$

h) $2^x - 3.2^x - 4 = 0.$

Ejercicio4.

Utilizando la propiedad del cambio de base:

Sean $(b, c > 0) \wedge (b, c \neq 1)$. Entonces $\log_b(x) = \dfrac{\log_c(x)}{\log_c(b)}$.

Resolver las siguientes ecuaciones con dos dígitos significativos. Utilice para su solución las bases provistas por su calculadora $b = e,\ b = 10$.

a) $3^x = 6$.

b) $4^{2x+1} = 3$.

c) $2^{2x} = 5$.

d) $4^{2x} - 4^{x+2} = 80$.

e) $3^{x+1} + \dfrac{18}{3^x} = 29$.

f) $10^x + 10^{x+1} = 22$.

Ejercicio 5.

Utilizando propiedades de los logaritmos resolver las siguientes ecuaciones:

a) $\log_a(x) + \log_a(4) - \log_a(5) = \log_a(12)$.

b) $5\log(x) - \log(10) + 1 = 0$.

c) $\log_5(5x) + \log_5(x) = 3$.

d) $\ln(x^2) + \ln(x) = 9$.

e) $\log_2(x) + \log_2(4x) - 4 = 0$.

f) $\log_3^2(x) + \log_3(x) - 6 = 0$.

Unidad 2: Función lineal.

Ejercicio 1.

Graficar en el plano xy las siguientes rectas de las cuales se dan sus ecuaciones.

a) $y = \frac{1}{2}x + 1.$ b) $y = -2x + 3.$

c) $5x + 3y = 15.$ d) $5x = 10.$

Ejercicio 2.

Considere la función lineal $f(x) = ax + b$ que satisface que $f(0) = -2$ y $f(3) = 5$.

a) Hallar $a, b \in R$.

b) Hallar $f(1)$, $f(2)$.

Ejercicio 3.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas $(6,1)$ y es paralela a la recta de ecuación $y = -2x + 1$.

Ejercicio 4.

Hallar la ecuación de la recta que corta el eje y en el punto $(0,2)$ y es paralela a la recta que pasa por el origen de coordenadas y también por el punto $(2,1)$.

Ejercicio 5.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(1,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto $(1,3)$.

Ver video sobre rectas.

Ejercicio 6.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos $(1,3)$ y $(3,7)$.

Ejercicio 7.

Sea r la recta de ecuación $y = 2x - 1$. Determinar, si existe, el valor de $k \in R$ para que el punto $(-k, k - 10) \in r$.

Ejercicio 8.

Determinar analítica y gráficamente la intersección de las rectas de ecuaciones $y = -2x + 1$ e $y = x - 8$.

Ejercicio 9.

Considere el triángulo $\triangle ABC$ donde $A = (2,4)$, $B = (4, -2)$ y $C = (8,12)$.

a) Ubicar A, B, C en un sistema de ejes cartesianos.

b) Hallar la longitud de la mediana correspondiente al lado BC.

c) Hallar la ecuación de la recta que contiene a esa mediana.

d) Hallar la ecuación de la mediatriz del lado AB.

e) Hallar la ecuación de la recta que contiene a la altura correspondiente al lado AC, es decir, la altura correspondiente al vértice B.

f) Hallar la medida de la altura correspondiente al vértice B.

Ejercicio 10.

Considere el triángulo $\triangle ABC$ donde $A = (0,1)$, $B = (1,6)$ y $C = (5,2)$. Probar que dicho triángulo es isósceles.

Ejercicio 11.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales clasificándolos en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

Ver video sobre paralelismo y perpendicularidad.

a) $\begin{cases} x + 5y = 35 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y + 7 = 0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$

Realice una interpretación geométrica de cada ítem.

Ejercicio 12.

Hallar $k \in R$ para que el sistema siguiente sea incompatible.

$$\begin{cases} (1 + 2k)x + 5y = 7 \\ (2 + k)x + 4y = 8 \end{cases}.$$

Ejercicio 13.

La suma de dos números reales x e y es 78 y su diferencia es 24. Hallar dichos números.

Ejercicio 14.

La suma de tres números impares consecutivos es 183. Hallar los tres números. ¿Tiene solución el problema cambiando impares por pares?

Ejercicio 15.

En una caja hay 30 monedas que suman un valor 780$. Las monedas son de 10$ y de 50$. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?

Ejercicio 16.

La recaudación de un partido de fútbol fue de 189.562$. Las entradas a la popular costaban 5$ y las de la platea 12$. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron si ingresaron al estadio 22.000 personas?

Unidad 3: Función cuadrática.

Ejercicio 1.

Dadas las siguientes funciones cuadráticas

a) $y = x^2 - 3.$ b) $y = x^2 + 4x.$

c) $y = -x^2 + 3x + 4.$

a) Indique las coordenadas de su intersección con el eje de ordenadas.

b) Escriba la ecuación de su eje de simetría.

c) Calcule las coordenadas de su vértice.

d) Determine el conjunto imagen de f.

e) Determine, si existen, los puntos de intersección con el eje de abscisas.

f) Realice un gráfico aproximado de cada una de ellas.

Ejercicio 2.

La gráfica de $y = x^2 + bx + c$ corta el eje x en $x = -2$ y $x = 3$. Halle los valores de b y c.

Ejercicio 3.

La función $f(x) = (x - m)(x - n)$ corta el eje x en $x = -3$ y $x = 6$. Escriba f en la forma polinómica $f(x) = ax^2 + bx + c$ y luego determine el menor valor que toma f.

Ejercicio 4.

Considere la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Exprese f en la forma canónica $a(x - k)^2 + h$ y luego halle el mínimo valor que toma f.

Ver video sobre funciones cuadráticas.

Ejercicio 5.

La fórmula $h = 30t - 5t^2$ nos da la altura h en metros desde que es arrojada una pelota verticalmente hacia arriba t segundos después de haber sido lanzada desde el suelo con una velocidad inicial de $30m/s$. Determine la altura máxima que alcanza la pelota y el tiempo necesario para que ello ocurra. Determine también cuándo regresa al suelo.

Ejercicio 6.

La función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$ vale 0 para $x = 1$ y toma su valor máximo 8 para $x = 4$. Determine f.

Ejercicio 7.

Determine analítica y gráficamente la o las intersecciones de las gráficas de f y g en los siguientes casos:

a) $f(x) = x^2 - 5x + 6$ $\quad g(x) = -2x^2 + x + 1.$

b) $f(x) = 6x - 10$ $\quad g(x) = x^2 - 2x + 5.$

c) $f(x) = 4x + 1$ $\quad g(x) = -x^2 + 6x.$

Ejercicio 8.

El perímetro de un rectángulo es de $34cm$. Sabiendo que la diagonal tiene una longitud de $13cm$ calcule la longitud de sus lados.

Ejercicio 9.

La ecuación cuadrática $4x^2 + 4kx + 9 = 0$ con $k > 0$ tiene exactamente una solución. Halle el valor de $k \in R$.

Ejercicio 10.

La ecuación cuadrática $kx^2 - 3x + (k + 2) = 0$ tiene dos soluciones reales (distintas). Halle los valores posibles de $k \in R$.

Ver video sobre forma polinómica.

Práctica de repaso unidades I, II y III.

Ejercicio 1.

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x}{x^2-9} < 1$ b) $|\,x+3\,| \leq 4$.

Ejercicio 2.

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de $g(x) = 4x - 3$ que pasa por el punto (5,0).

Ejercicio 3.

Considere las siguientes funciones cuadráticas:

$$f(x) = x^2 + 3x \qquad g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

Para cada una de ellas halle:

a) La ecuación de su eje de simetría.

b) Las coordenadas de su vértice.

c) La imagen de la función.

d) Realice un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 4.

Considere la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Exprese $f(x)$ en la forma canónica y halle el valor mínimo de f.

Ejercicio 5.

La ecuación de una curva se puede escribir en la forma $y = a(x-m)(x-n)$. Se sabe que corta al eje x en -5 y en 3. Se sabe también que el punto $(-3{,}2)$ es un punto de la curva.

a) Calcule las coordenadas del vértice.

b) Escriba las formas polinómica y canónica de la función.

c) Realice un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 6.

La altura h en metros sobre el nivel del mar de una piedra arrojada desde un puente puede ser modelada mediante la función $h(t) = 20 + 15t - 5t^2$ donde t indica el tiempo en segundos desde que fue lanzada la piedra.

a) ¿Desde qué altura se arrojó la piedra?

b) ¿Cuál fue la mayor altura alcanzada por la piedra?

c) ¿Durante cuánto tiempo la piedra permanece por encima de los 20 metros?

d) ¿Cuánto tiempo tarda en caer al agua?

Ejercicio 7.

La función cuadrática f vale 0 para $x = 1$ y toma su valor máximo 5 para $x = -1$. Halle la forma polinómica de f.

Ejercicio 8.

¿Existe algún valor de $a \in R$ para el cual las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^2 + 5x + 8 \qquad g(x) = ax^2 + x + 1$$

se cortan en un solo punto?

Ejercicio 9.

Determine las dimensiones de un rectángulo de 28 unidades de perímetro de manera tal que se área de la mayor posible.

Unidad 4: Polinomios.

Ejercicio 1.

Sean $p(x) = 6x^5 + 2x^3 + x - 5,\ q(x) = 2x^2 - 1$. Calcular

a) $p(x) - 2q(x)$.

b) $3p(x) \cdot 2q(x)$.

c) $p(x)/q(x)$.

Ejercicio 2.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = x - 2$.

Ejercicio 3.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = x + 3$.

Ejercicio 4.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio $p(x) = x^3 + x^2 - 1$ por $q(x) = \dfrac{1}{2}x + \dfrac{2}{3}$.

Ejercicio 5.

Considere el polinomio $p(x) = x^3 - x$.

a) Halle las raíces de p.

b) Factorice $p(x)$ sobre el cuerpo de los números reales.

c) Realice una gráfica aproximada de p.

Ejercicio 6.

Repita el ejercicio 5 considerando ahora el polinomio $q(x) = (x-1)^3 - (x-1)$.

Ver video sobre polinomios.

Ejercicio 7.

Enuncie formalmente el teorema de Gauss sobre las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

Ejercicio 8.

Utilice el teorema de Gauss para hallar las raíces reales de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6.$

b) $q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1.$

c) $r(x) = x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 1.$

d) $s(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 8.$

e) $t(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6.$

f) $u(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1.$

g) $v(x) = x^4 - 16.$

Ejercicio 9.*

Considere el polinomio $p(x)$ del ejercicio 8a. Halle la suma de las raíces, el producto de las raíces y la suma de los productos de todos los pares de raíces. Observe que en módulo estos valores son respectivamente el coeficiente del término independiente, el coeficiente del término cuadrático y el coeficiente del término lineal. Escriba esas igualdades.

Ejercicio 10.*

Generalice el ejercicio anterior para cualquier polinomio mónico de grado 3.

Ver video sobre el teorema de Gauss.

Unidad 5: Trigonometría y vectores.

Ejercicio 1.

Halle, usando la definición, los valores siguientes:

a) $\sin(45^\circ)$, $\cos(45^\circ)$.

b) $\sin(30^\circ)$, $\cos(30^\circ)$.

Ejercicio 2.

Un árbol proyecta una sombra de 27 metros de largo. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de 60° calcule la altura del árbol.

Ejercicio 3.*

Demuestre geométricamente que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Ejercicio 4.*

Utilizando 4 triángulos rectángulos iguales y haciendo uso del ejercicio 3 demuestre el teorema de Pitágoras.

Ejercicio 5.

Utilizando las definiciones de seno y coseno de un ángulo α demuestre que $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$.

Ejercicio 6.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide $7cm$ y uno de sus ángulos agudos mide 30°. Hallar la medida de los dos catetos.

Ejercicio 7.

a) Demostrar que el área de un triángulo equilátero de lado l es $A = \dfrac{l^2\sqrt{3}}{4}$.

b) El área de un triángulo equilátero es igual a $9\sqrt{3}cm^2$. ¿Cuánto mide su lado?

Ver video sobre trigonometría.

Ejercicio 8.

La base de un rectángulo es el doble de su altura. Calcular el ángulo que forma la diagonal con la base.

Ejercicio 9.

Una rampa de 4 metros y con un extremo en el suelo tiene un ángulo de elevación de 30°. ¿A qué altura se encuentra el extremo más alto de la rampa?

Ejercicio 10.

Hallar el valor del lado AB en el triángulo $\triangle ABC$ si $BC = 8\,m$, $\angle A = 57°$ y $\angle C = 42°$.

Ejercicio 11.

Hallar el valor del ángulo $\angle A$ en el triángulo $\triangle ABC$ si $BC = 8\,m$, $AB = 10\,m$ y $\angle C = 47°$.

Ejercicio 12.

Considere los vectores (en física, fuerzas) siguientes:

$$\vec{F}_1 = (3,4) \quad \text{y} \quad \vec{F}_2 = (-2,3).$$

a) Hallar la suma de los vectores $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$ (en física, la fuerza resultante $\vec{R}$).

b) Realizar una interpretación geométrica por la regla del paralelogramo.

c) Hallar las componentes $\vec{R}_x$ y $\vec{R}_y$ de la fuerza resultante $\vec{R}$.

d) Determinar y graficar la fuerza equilibrante $\vec{E} = -\vec{R}$.

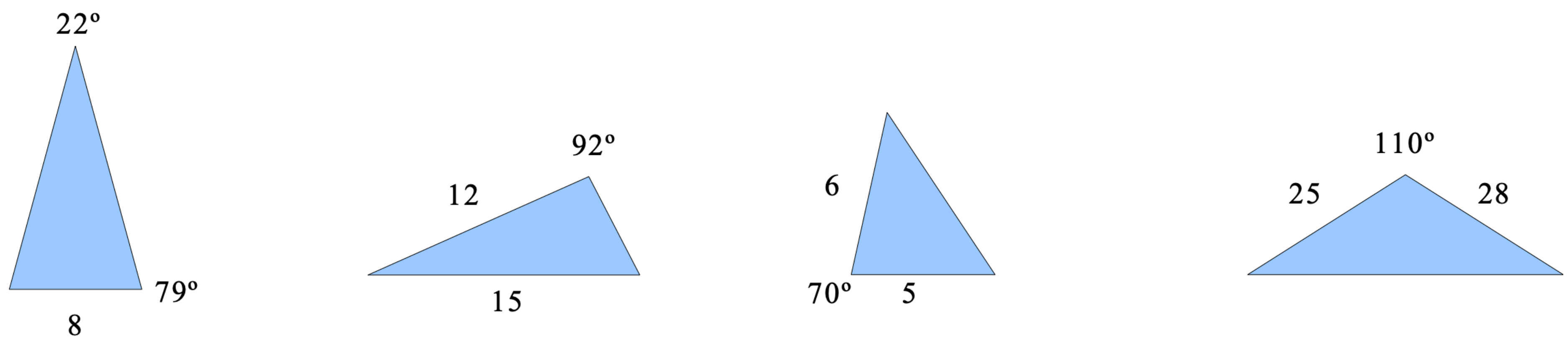
e) Graficar los vectores $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{E}$ en un mismo sistema de ejes cartesianos.

f) Verificar que $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{E} = \vec{0}$ e interpretar físicamente el resultado.

Ejercicio 13.

En cada uno de los siguientes triángulos hallar los lados y ángulos restantes.

a) b) c) d)



Ejercicio 14.

Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50° y otro pueblo B situado al otro lado con un ángulo de 60°. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 km del pueblo A y a 4 km del pueblo B, hallar la distancia entre los pueblos A y B.

Ejercicio 15.

Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Beto hay una distancia de 25 m, y entre Beto y Camilo una distancia de 12 m. El ángulo formado en la esquina de Camilo es de 20°. Calcular la distancia entre Alberto y Camilo.

Ejercicio 16.

Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 m en su lado mayor, 6 metros en otro, y el ángulo formado entre ellos es de 60°. Calcular el perímetro de la valla.

Práctica de repaso para el examen.

Ejercicio 1.

Resolver las siguientes desigualdades:

a) $\dfrac{x}{x^2 - 16} < 0$

b) $2 < |x + 3| \leq 4$.

Ejercicio 2.

Hallar la ecuación de la recta perpendicular a la gráfica de $g(x) = \dfrac{1}{2}x - 3$ que pasa por el punto (5,2).

Ejercicio 3.

Considere las siguientes funciones cuadráticas:

$$f(x) = x^2 - 5x \qquad g(x) = -x^2 + 3x + 4.$$

Para cada una de ellas halle:

a) La ecuación de su eje de simetría.

b) Las coordenadas de su vértice.

c) La imagen de la función.

d) Realice un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 4.

Considere la función $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$. Exprese $f(x)$ en la forma canónica y halle el valor mínimo de f.

Ejercicio 5.

La ecuación de una curva se puede escribir en la forma $y = a(x - m)(x - n)$. Se sabe que corta al eje x en -5 y en 3. Se sabe también que el punto $(-3,2)$ es un punto de la curva.

a) Calcule las coordenadas del vértice.

b) Escriba las formas polinómica y canónica de la función.

c) Realice un gráfico aproximado de la función.

Ejercicio 6.

La altura h en metros sobre el nivel del mar de una piedra arrojada desde un puente puede ser modelada mediante la función $h(t) = 1{,}4 + 19{,}6t - 4{,}9t^2$ donde t indica el tiempo en segundos desde que fue lanzada la piedra.

a) ¿Desde qué altura se arrojó la piedra?

b) ¿Cuál fue la mayor altura alcanzada por la piedra?

Ejercicio 7.

La gráfica de una función cuadrática tiene su vértice en el punto $(2, -5)$ y pasa por el punto $(-1{,}13)$. Hallar $f(4)$.

Ejercicio 8.

¿Existe algún valor de $a \in R$ para el cual las gráficas de las funciones

$$f(x) = -x^2 + 5x + 8 \qquad g(x) = ax^2 + x + 1$$

se cortan en un solo punto?

Ejercicio 9.

Determine las dimensiones de un rectángulo de 28 unidades de perímetro de manera tal que se área de la mayor posible.

Ejercicio 10.

Hallar las coordenadas de los puntos de intersección de las gráficas de las funciones

$$y = x^2 - 8x - 18 \qquad y = x - 3.$$

Realice un gráfico aproximado de cada una de las funciones indicando los puntos hallados.

Ejercicio 11.

Resuelva la desigualdad siguiente:

$$x^2 + 5x + 6 > 2x^2 + 2x - 4.$$

Ejercicio 12.

Utilice el teorema de Gauss para hallar las raíces reales de los siguientes polinomios:

a) $p(x) = x^3 - 7x + 6.$

b) $q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1.$

d) $s(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 8.$

g) $v(x) = x^4 - 81.$

Ejercicio 13.

Calcule las longitudes de los lados de un triángulo rectángulo dados un ángulo y un lado en los siguientes casos:

a) $b = 5,\ C = 40^\circ.$

b) $b = 5,\ B = 10^\circ.$

Ejercicio 14.

Resuelva los siguientes triángulos:

a) $a = 32,\ A = 64^\circ,\ B = 48^\circ.$

b) $c = 34,\ A = 19^\circ,\ B = 20^\circ.$

c) $b = 50,\ c = 66,\ C = 57^\circ.$

Ejercicio 15.

A cierta hora, cuando los rayos del sol forman un ángulo de 50° con la horizontal, la longitud de la sombra del árbol es de 25 metros. Calcule la altura del árbol.