

# Guía de trabajos prácticos del Módulo Cero.



Bienvenido al material físico y virtual del Módulo Cero de la Facultad de Ingeniería del Ejército - Universidad de la Defensa Nacional. En estas páginas tendrás todo lo necesario para practicar y entrar con el pie derecho a tu carrera de Ingeniería.

# ¿Qué es este material?

Este material es la práctica correspondiente a las clases con la que trabajaremos a lo largo del módulo.

Desde la Facultad de Ingeniería del Ejército nos hemos propuesto dar el primer paso de tu carrera de Ingeniería juntos y de manera firme. Para cada ejercicio de esta práctica tendrás el video correspondiente con la teoría que lo respalda a solo un click; de manera que si hay algo que no entendieras no tenés más que clickear en el botón provisto en la página pertinente.

Facultad de Ingeniería  
del Ejército-UNDEF.

## Módulo 0

Unidad 1. Números reales.

Unidad 2: Funciones lineales.

Unidad 3: Funciones cuadráticas.

Unidad 4: Polinomios.

Unidad 5: Trigonometría y vectores.

# Unidad 1: Números reales.

## Ejercicio 1.

Resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto  $R$  de los números reales.

a)  $\frac{5}{x+3} + \frac{4}{x} = 3.$

b)  $\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt{x+12}} = 0.$

c)  $\sqrt{2x+9} - \sqrt{3x+16} = -1.$

d)  $x + \sqrt{3x+1} = 3.$

e)  $|x-4| = 8.$

f)  $|x-2| = |3x+1|.$

## Ejercicio 2.

Resolver las siguientes desigualdades y expresar la solución como un intervalo o unión de intervalos.

a)  $-3 \leq \frac{4-x}{4} < 7.$

b)  $\left| \frac{3x-1}{4} \right| \leq 6.$

c)  $x^2 - 3x + 2 > 0.$

d)  $\frac{2x}{x-3} \leq 1.$

## Ejercicio 3.

Utilizando la propiedad siguiente:

Sean  $a \in R - \{1\}$  y  $x, y \in R$ . Si  $a^x = a^y$  entonces  $x = y$ ,

resolver las siguientes ecuaciones en el conjunto  $R$  de los números reales (hay una de ellas que no tiene solución).

a)  $2^x = \frac{1}{2}.$

b)  $\sqrt{3^x} = \frac{1}{\sqrt{27}}.$

c)  $5^{x+1} + 5^x = 750.$

d)  $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = \frac{7}{2}.$

e)  $\frac{3^{x^2}}{9} = 3^{2+3x}.$

f)  $2^{x+1} + 2^{2-x} = 9.$

g)  $4^{2x} + 4^{x+2} = 80.$

h)  $2^x - 3 \cdot 2^x - 4 = 0.$

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

## Ejercicio 4.

Utilizando la propiedad del cambio de base:

$$\text{Sean } (b, c > 0) \wedge (b, c \neq 1). \text{ Entonces } \log_b(x) = \frac{\log_c(x)}{\log_c(b)}.$$

Resolver las siguientes ecuaciones con dos dígitos significativos. Utilice para su solución las bases provistas por su calculadora  $b = e$ ,  $b = 10$ .

a)  $3^x = 6$ .

b)  $4^{2x+1} = 3$ .

c)  $2^{2x} = 5$ .

d)  $4^{2x} - 4^{x+2} = 80$ .

e)  $3^{x+1} + \frac{18}{3^x} = 29$ .

f)  $10^x + 10^{x+1} = 22$ .

b)  $5 \log(x) - \log(10) + 1 = 0$ .

c)  $\log_5(5x) + \log_5(x) = 3$ .

d)  $\ln(x^2) + \ln(x) = 9$ .

e)  $\log_2(x) + \log_2(4x) - 4 = 0$ .

f)  $\log_3^2(x) + \log_3(x) - 6 = 0$ .

## Ejercicio 5.

Utilizando propiedades de los logaritmos resolver las siguientes ecuaciones:

a)  $\log_a(x) + \log_a(4) - \log_a(5) = \log_a(12)$ .

# Unidad 2: Función lineal.

## Ejercicio 1.

Graficar en el plano  $xy$  las siguientes rectas de las cuales se dan sus ecuaciones.

a)  $y = \frac{1}{2}x + 1$ .

b)  $y = -2x + 3$ .

c)  $5x + 3y = 15$ .

d)  $5x = 10$ .

## Ejercicio 2.

Considere la función lineal  $f(x) = ax + b$  que satisface que  $f(0) = -2$  y  $f(3) = 5$ .

a) Hallar  $a, b \in R$ .

b) Hallar  $f(1), f(2)$ .

## Ejercicio 3.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto de coordenadas  $(6,1)$  y es paralela a la recta de ecuación  $y = -2x + 1$ .

## Ejercicio 4.

Hallar la ecuación de la recta que corta el eje  $y$  en el punto  $(0,2)$  y es paralela a la recta que pasa por el origen de coordenadas y también por el punto  $(2,1)$ .

## Ejercicio 5.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto  $(1,2)$  y es perpendicular a la recta que pasa por el origen de coordenadas y por el punto  $(1,3)$ .

[Ver video sobre rectas.](#)

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

## Ejercicio 6.

Hallar la ecuación de la recta que pasa por los puntos  $(1,3)$  y  $(3,7)$ .

## Ejercicio 7.

Sea  $r$  la recta de ecuación  $y = 2x - 1$ . Determinar, si existe, el valor de  $k \in R$  para que el punto  $(-k, k - 10) \in r$ .

## Ejercicio 8.

Determinar analítica y gráficamente la intersección de las rectas de ecuaciones  $y = -2x + 1$  e  $y = x - 8$ .

## Ejercicio 9.

Considere el triángulo  $\triangle ABC$  donde  $A = (2,4)$ ,  $B = (4, -2)$  y  $C = (8,12)$ .

- Ubicar  $A, B, C$  en un sistema de ejes cartesianos.
- Hallar la longitud de la mediana correspondiente al lado  $BC$ .

c) Hallar la ecuación de la recta que contiene a esa mediana.

d) Hallar la ecuación de la mediatriz del lado  $AB$ .

e) Hallar la ecuación de la recta que contiene a la altura correspondiente al lado  $AC$ , es decir, la altura correspondiente al vértice  $B$ .

f) Hallar la medida de la altura correspondiente al vértice  $B$ .

## Ejercicio 10.

Considere el triángulo  $\triangle ABC$  donde  $A = (0,1)$ ,  $B = (1,6)$  y  $C = (5,2)$ . Probar que dicho triángulo es isósceles.

## Ejercicio 11.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales clasificándolos en compatible determinado, compatible indeterminado o incompatible.

[Ver video sobre paralelismo y perpendicularidad.](#)

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

$$a) \begin{cases} x + 5y = 35 \\ 3x + 2y = 27 \end{cases}$$

$$b) \begin{cases} 3x + 5y = 4 \\ 6x + 10y + 7 = 0 \end{cases}$$

$$c) \begin{cases} -2x + 3y = 4 \\ 4x - 6y + 8 = 0 \end{cases}$$

Realice una interpretación geométrica de cada ítem.

## Ejercicio 12.

Hallar  $k \in R$  para que el sistema siguiente sea incompatible.

$$\begin{cases} (1 + 2k)x + 5y = 7 \\ (2 + k)x + 4y = 8 \end{cases}$$

## Ejercicio 13.

La suma de dos números reales  $x$  e  $y$  es 78 y su diferencia es 24. Hallar dichos números.

## Ejercicio 14.

La suma de tres números impares consecutivos es 183. Hallar los tres números. ¿Tiene solución el problema cambiando impares por pares?

## Ejercicio 15.

En una caja hay 30 monedas que suman un valor 780\$. Las monedas son de 10\$ y de 50\$. ¿Cuántas monedas hay de cada valor?

## Ejercicio 16.

La recaudación de un partido de fútbol fue de 189.562\$. Las entradas a la popular costaban 5\$ y las de la platea 12\$. ¿Cuántas entradas de cada tipo se vendieron si ingresaron al estadio 22.000 personas?

# Unidad 3: Función cuadrática.

## Ejercicio 1.

Dadas las siguientes funciones cuadráticas

a)  $y = x^2 - 3$ .      b)  $y = x^2 + 4x$ .

c)  $y = -x^2 + 3x + 4$ .

- Indique las coordenadas de su intersección con el eje de ordenadas.
- Escriba la ecuación de su eje de simetría.
- Calcule las coordenadas de su vértice.
- Determine el conjunto imagen de  $f$ .
- Determine, si existen, los puntos de intersección con el eje de abscisas.
- Realice un gráfico aproximado de cada una de ellas.

## Ejercicio 2.

La gráfica de  $y = x^2 + bx + c$  corta el eje  $x$  en  $x = -2$  y  $x = 3$ . Halle los valores de  $b$  y  $c$ .

## Ejercicio 3.

La función  $f(x) = (x - m)(x - n)$  corta el eje  $x$  en  $x = -3$  y  $x = 6$ . Escriba  $f$  en la forma polinómica  $f(x) = ax^2 + bx + c$  y luego determine el menor valor que toma  $f$ .

## Ejercicio 4.

Considere la función  $f(x) = 2x^2 - 8x + 5$ . Exprese  $f$  en la forma canónica  $a(x - k)^2 + h$  y luego halle el mínimo valor que toma  $f$ .

Ver video sobre funciones cuadráticas.

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

## Ejercicio 5.

La fórmula  $h = 30t - 5t^2$  nos da la altura  $h$  en metros desde que es arrojada una pelota verticalmente hacia arriba  $t$  segundos después de haber sido lanzada desde el suelo con una velocidad inicial de  $30m/s$ . Determine la altura máxima que alcanza la pelota y el tiempo necesario para que ello ocurra. Determine también cuándo regresa al suelo.

## Ejercicio 6.

La función cuadrática  $f(x) = ax^2 + bx + c$  vale 0 para  $x = 1$  y toma su valor máximo 8 para  $x = 4$ . Determine  $f$ .

## Ejercicio 7.

Determine analítica y gráficamente la o las intersecciones de las gráficas de  $f$  y  $g$  en los siguientes casos:

a)  $f(x) = x^2 - 5x + 6$

$g(x) = -2x^2 + x + 1.$

b)  $f(x) = 6x - 10$

$g(x) = x^2 - 2x + 5.$

c)  $f(x) = 4x + 1$

$g(x) = -x^2 + 6x.$

## Ejercicio 8.

El perímetro de un rectángulo es de  $34cm$ . Sabiendo que la diagonal tiene una longitud de  $13cm$  calcule la longitud de sus lados.

## Ejercicio 9.

La ecuación cuadrática  $4x^2 + 4kx + 9 = 0$  con  $k > 0$  tiene exactamente una solución. Halle el valor de  $k \in R$ .

## Ejercicio 10.

La ecuación cuadrática  $kx^2 - 3x + (k + 2) = 0$  tiene dos soluciones (distintas). Halle los valores posibles de  $k \in R$ .

[Ver video sobre forma polinómica.](#)

# Unidad 4: Polinomios.

## Ejercicio 1.

Sean  $p(x) = 6x^5 + 2x^3 + x - 5$ ,  $q(x) = 2x^2 - 1$ . Calcular

a)  $p(x) - 2q(x)$ .      b)  $3p(x) \cdot 2q(x)$ .

c)  $p(x)/q(x)$ .

## Ejercicio 2.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio  $p(x) = x^3 + x^2 - 1$  por  $q(x) = x - 2$ .

## Ejercicio 3.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio  $p(x) = x^3 + x^2 - 1$  por  $q(x) = x + 3$ .

## Ejercicio 4.

Usar la regla de Ruffini para calcular el cociente y resto de dividir al polinomio  $p(x) = x^3 + x^2 - 1$  por  $q(x) = \frac{1}{2}x + \frac{2}{3}$ .

## Ejercicio 5.

Considere el polinomio  $p(x) = x^3 - x$ .

a) Halle las raíces de  $p$ .

b) Factorice  $p(x)$  sobre el cuerpo de los números reales.

c) Realice una gráfica aproximada de  $p$ .

## Ejercicio 6.

Repita el ejercicio 4 considerando ahora el polinomio  $q(x) = (x - 1)^3 - (x - 1)$ .

[Ver video sobre polinomios.](#)

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

## Ejercicio 7.

Enuncie formalmente el teorema de Gauss sobre las raíces racionales de polinomios con coeficientes enteros.

## Ejercicio 8.

Utilice el teorema de Gauss para hallar las raíces reales de los siguientes polinomios:

a)  $p(x) = x^3 - 7x + 6$ .

b)  $q(x) = 2x^3 + x^2 + x - 1$ .

c)  $r(x) = x^3 - \frac{2}{5}x^2 + \frac{1}{2}x + 1$ .

d)  $s(x) = x^3 + 4x^2 + 2x + 8$ .

e)  $t(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$ .

f)  $u(x) = 3x^3 + x^2 - 3x - 1$ .

g)  $v(x) = x^4 - 16$ .

## Ejercicio 9.\*

Considere el polinomio  $p(x)$  del ejercicio 8a. Halle la suma de las raíces, el producto de las raíces y la suma de los productos de todos los pares de raíces. Observe que en módulo estos valores son respectivamente el coeficiente del término independiente, el coeficiente del término cuadrático y el coeficiente del término lineal. Escriba esas igualdades.

## Ejercicio 10.\*

Generalice el ejercicio anterior para cualquier polinomio mónico de grado 3.

Ver video sobre el teorema de Gauss.

# Unidad 5: Trigonometría y vectores.

## Ejercicio 1.

Halle, usando la definición, los valores siguientes:

a)  $\sin(45^\circ)$ ,  $\cos(45^\circ)$ .

b)  $\sin(30^\circ)$ ,  $\cos(30^\circ)$ .

## Ejercicio 2.

Un árbol proyecta una sombra de 27 metros de largo. Sabiendo que el ángulo de elevación del sol es de  $60^\circ$  calcule la altura del árbol.

## Ejercicio 3.\*

Demuestre geoméricamente que  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ .

## Ejercicio 4.\*

Utilizando 4 triángulos rectángulos iguales y haciendo uso del ejercicio 3 demuestre el teorema de Pitágoras.

## Ejercicio 5.

Utilizando las definiciones de seno y coseno de un ángulo  $\alpha$  demuestre que  $\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha) = 1$ .

## Ejercicio 6.

La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide  $7\text{cm}$  y uno de sus ángulos agudos mide  $30^\circ$ . Hallar la medida de los dos catetos.

## Ejercicio 7.

a) Demostrar que el área de un triángulo equilátero de lado  $l$  es

$$A = \frac{l^2\sqrt{3}}{4}.$$

b) El área de un triángulo equilátero es igual a  $9\sqrt{3}\text{cm}^2$ . ¿Cuánto mide su lado?

[Ver video sobre trigonometría.](#)

# FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO - UNDEF

---

## Ejercicio 8.

La base de un rectángulo es el doble de su altura. Calcular el ángulo que forma la diagonal con la base.

## Ejercicio 9.

Una rampa de 4 metros y con un extremo en el suelo tiene un ángulo de elevación de  $30^\circ$ . ¿A qué altura se encuentra el extremo más alto de la rampa?

## Ejercicio 10.

Hallar el valor del lado  $AB$  en el triángulo  $\triangle ABC$  si  $BC = 8\text{ m}$ ,  $\angle A = 57^\circ$  y  $\angle C = 42^\circ$ .

## Ejercicio 11.

Hallar el valor del ángulo  $\angle A$  en el triángulo  $\triangle ABC$  si  $BC = 8\text{ m}$ ,  $AB = 10\text{ m}$  y  $\angle C = 47^\circ$ .

## Ejercicio 12.

Considere los vectores (en física, fuerzas) siguientes:

$$\vec{F}_1 = (3,4) \text{ y } \vec{F}_2 = (-2,3).$$

a) Hallar la suma de los vectores  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2$  (en física, la fuerza resultante  $\vec{R}$ ).

b) Realizar una interpretación geométrica por la regla del paralelogramo.

c) Hallar las componentes  $\vec{R}_x$  y  $\vec{R}_y$  de la fuerza resultante  $\vec{R}$ .

d) Determinar y graficar la fuerza equilibrante  $\vec{E} = -\vec{R}$ .

e) Graficar los vectores  $\vec{F}_1$ ,  $\vec{F}_2$  y  $\vec{E}$  en un mismo sistema de ejes cartesianos.

f) Verificar que  $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{E} = \vec{0}$  e interpretar físicamente el resultado.