Examenul de bacalaureat naţional 2016
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 2

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total obţinut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_3 = 2016 + 2 \cdot 2 =$	**3p**
	$= 2020$	**2p**
2.	$f(1) = 2 \Rightarrow 1 + m = 2$	**3p**
	$m = 1$	**2p**
3.	$2^{4x-6} = \left(2^2\right)^{3x-4} \Leftrightarrow 4x - 6 = 6x - 8$	**3p**
	$x = 1$	**2p**
4.	Mulțimea A are 40 de elemente, deci sunt 40 de cazuri posibile	**1p**
	Numerele din mulțimea A care conțin cifra 4 sunt 4, 14, 24, 34 și 40, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p = \dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \dfrac{5}{40} = \dfrac{1}{8}$	**2p**
5.	$y - 2 = \dfrac{5-2}{4-1}(x-1)$	**3p**
	$y = x + 1$	**2p**
6.	Cum $x \in \left(0, \dfrac{\pi}{2}\right)$, obţinem $\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \dfrac{3}{5}$	**3p**
	$\sin 2x = 2 \sin x \cos x = 2 \cdot \dfrac{4}{5} \cdot \dfrac{3}{5} = \dfrac{24}{25}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \det\left(A(0)\right) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} =$	**2p**
	$= -2 + 0 + 0 - 1 - (-1) - 0 = -2$	**3p**
b)	$\det\left(A(a)\right) = \begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 2(a-1)(a+1)$	**3p**
	Pentru orice număr real a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, obţinem $\det\left(A(a)\right) \neq 0$, deci matricea $A(a)$ este inversabilă	**2p**
c)	Sistemul are soluție unică, deci $a \neq -1$ și $a \neq 1$; pentru fiecare număr a, $a \neq -1$ și $a \neq 1$, soluția sistemului este de forma $\left(-\dfrac{1}{a-1}, \dfrac{1}{a-1}, 0\right)$	**3p**
	Cum a este număr întreg, $\dfrac{1}{a-1} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow a - 1$ este divizor al lui 1, deci $a = 0$ sau $a = 2$	**2p**

2.a)	$x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=$	**3p**
	$=3x(y+1)+3(y+1)-1=3(x+1)(y+1)-1$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
b)	$f(x\circ y)=3(x\circ y)+3=3(3(x+1)(y+1)-1)+3=9(x+1)(y+1)=$	**3p**
	$=(3x+3)(3y+3)=f(x)f(y)$, pentru orice numere reale x și y	**2p**
c)	$f\left(\underbrace{a\circ a\circ\ldots\circ a}_{\text{de 2016 ori } a}\right)=f\left(3^{2015}-1\right)\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3\cdot\left(3^{2015}-1\right)+3\Leftrightarrow\left(f(a)\right)^{2016}=3^{2016}\Leftrightarrow f(a)=-3$ sau $f(a)=3$	**3p**
	$a=-2$ sau $a=0$	**2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Cum $x\in(1,+\infty)$, $f(x)=\ln(x+1)-\ln(x-1)\Rightarrow f'(x)=\left(\ln(x+1)-\ln(x-1)\right)'=$	**2p**
	$=\left(\ln(x+1)\right)'-\left(\ln(x-1)\right)'=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}$	**3p**
b)	$f''(x)=\dfrac{4x}{(x-1)^2(x+1)^2}$	**2p**
	Pentru orice $x\in(1,+\infty)$, $f''(x)>0$, deci funcția f este convexă pe $(1,+\infty)$	**3p**
c)	$\lim\limits_{n\to+\infty}\left(f'(2)+f'(3)+\ldots+f'(n)\right)=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\left(\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{1}\right)+\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n-1}\right)\right)=$	**3p**
	$=\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)=-\dfrac{3}{2}$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_1^2\sqrt{x}f(x)\,dx=\int_1^2(x+1)\,dx=\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+x\right)\right\|_1^2=$	**3p**
	$=4-\dfrac{3}{2}=\dfrac{5}{2}$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_1^{e^2}\left(f(x)-\sqrt{x}\right)\ln x\,dx=\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\cdot\ln x\,dx=2\sqrt{x}\cdot\ln x\Big\|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\dfrac{1}{\sqrt{x}}\,dx=$	**3p**
	$=\left.\left(2\sqrt{x}\cdot\ln x-4\sqrt{x}\right)\right\|_1^{e^2}=4e-4e+4=4$	**2p**
c)	$\displaystyle V=\pi\int_1^a g^2(x)\,dx=\pi\int_1^a\left(x+2+\dfrac{1}{x}\right)dx=\pi\left.\left(\dfrac{x^2}{2}+2x+\ln x\right)\right\|_1^a=\pi\left(\dfrac{a^2}{2}+2a+\ln a-\dfrac{5}{2}\right)$	**3p**
	$\pi\left(\dfrac{a^2}{2}+2a+\ln a-\dfrac{5}{2}\right)=\pi\left(\ln a+\dfrac{7}{2}\right)\Leftrightarrow a^2+4a-12=0$ și, cum $a>1$, obținem $a=2$	**2p**