Examenul de bacalaureat național 2020

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p	**1.** Arătați că numărul $a=3+2\sqrt{2}+\dfrac{1}{3+2\sqrt{2}}$ este natural.
5p	**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x+1$. Arătați că $(f\circ f)(1)=f(2)+2$.
5p	**3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $9^{x^2}=3\cdot 3^x$.
5p	**4.** Determinați numărul natural nenul n, știind că mulțimea $A=\{1,2,3,\ldots,n\}$ are exact 10 submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(1,0)$, $N(7,0)$ și $A(a,3)$, unde a este număr real. Știind că $AM=AN$, arătați că segmentul AO are lungimea egală cu 5.
5p	**6.** Se consideră $x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ pentru care $3\cos x-2=2\cos 2x$. Calculați $\cos x$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}1 & 2-a & a\\ a & 1 & 1\\ a & 2a-5 & a-2\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+(2-a)y+az=1\\ ax+y+z=2-a\\ ax+(2a-5)y+(a-2)z=-4\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=3$.
5p	**b)** Demonstrați că $\det(A(a))=(a-1)(a-3)(3a+1)$, pentru orice număr real a.
5p	**c)** Determinați numărul natural a pentru care sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și x_0, y_0, z_0 sunt numere naturale.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=\log_2\left(2^x+2^y\right)$.
5p	**a)** Arătați că $0*0=1$.
5p	**b)** Demonstrați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.
5p	**c)** Determinați numărul real x pentru care $(x*x)*x=3+\log_2 3$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

	1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^4-x^2+1}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x(2x^2-1)}{\sqrt{x^4-x^2+1}}$, $x\in\mathbb{R}$.
5p	**b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.
5p	**c)** Demonstrați că, pentru orice $m\in\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},1\right)$, ecuația $f(x)=m$ are exact patru soluții reale.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+2x+5}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^2 x\cdot\frac{1}{f(x)}\,dx=\frac{31}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{1}{2}\ln\frac{8}{5}$, unde $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)+\dfrac{1}{x^2+2x+5}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră numărul $I_n=\displaystyle\int_{-1}^{1} x^{2n-1} f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=0$.