Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$(0{,}3\cdot 10-1)(0{,}3\cdot 10+1)=(3-1)(3+1)=$	**3p**
	$=2\cdot 4=8$	**2p**
2.	$x_1+x_2=6$, $x_1x_2=m$	**2p**
	$6m=12$, deci $m=2$	**3p**
3.	$4(5-x)=x+10 \Rightarrow 20-4x=x+10 \Rightarrow 5x=10$	**3p**
	$x=2$, care convine	**2p**
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile	**2p**
	În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\dfrac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\dfrac{7}{90}$	**1p**
5.	$\dfrac{a}{3}=\dfrac{a-1}{4} \Leftrightarrow 4a=3a-3$	**3p**
	$a=-3$	**2p**
6.	$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=$	**2p**
	$=(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)=0\cdot(\cos x+\sin x)=0$	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1))=\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 1\end{vmatrix}=1\cdot 1-(-1)\cdot 2=$	**3p**
	$=1+2=3$	**2p**
b)	$A(a,b)\cdot A(b,a)=\begin{pmatrix}a & 2b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b & 2a\\ -a & b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ab-2ab & 2a^2+2b^2\\ -b^2-a^2 & -2ab+ab\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}-ab & 2(a^2+b^2)\\ -(a^2+b^2) & -ab\end{pmatrix}=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b	**2p**
c)	$\det(A(m,n))=\begin{vmatrix}m & 2n\\ -n & m\end{vmatrix}=m^2+2n^2$	**2p**
	Cum m și n sunt numere întregi, din $m^2+2n^2=1$ obținem $m=-1$, $n=0$ sau $m=1$, $n=0$	**3p**
2.a)	$f=X^3-15X^2+95X-80 \Rightarrow f(1)=1^3-15\cdot 1^2+95\cdot 1-80=$	**2p**
	$=1-15+95-80=1$	**3p**
b)	$x_1+x_2+x_3=15$ și $x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=m$	**2p**
	$(x_1+x_2+x_3)^2-3(x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3)=0 \Leftrightarrow 225-3m=0$, deci $m=75$	**3p**

c)	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	**2p**
	$x_1 x_2 x_3 = 80 \Rightarrow x_1 x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$, polinomul f are rădăcinile 2, 5 și 8	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = e^x - 1,\ x \in \mathbb{R}$	**3p**
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	**2p**
b)	$f''(x) = e^x > 0$, pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci f' este injectivă	**2p**
	Pentru orice numere reale x_1 și x_2, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$, deci tangentele la graficul lui f în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	**3p**
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	**1p**
	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$, obținem $f(x) \geq -9$, pentru orice număr real x	**2p**
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$, deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$, pentru orice număr real x	**2p**
2.a)	$\int_1^3 \left(f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 \left(x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 x\,dx = \frac{x^2}{2} \Big\|_1^3 =$	**3p**
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	**2p**
b)	$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9 \|g(x)\| dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \ln(x^2 + 9) \Big\|_1^9 =$	**3p**
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2 \ln 3$	**2p**
c)	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x\,dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left(\frac{x^2 + 1}{2} \right)' \operatorname{arctg} x\,dx = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x \Big\|_1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1)} dx = \left(\frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \Big\|_1^{\sqrt{3}} =$	**3p**
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$, de unde obținem $a = 4$	**2p**