Examenul de bacalaureat naţional 2020
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Arătați că $(0,3\cdot 10-1)(0,3\cdot 10+1)=8$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-6x+m=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care $x_1x_2(x_1+x_2)=12$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $2\sqrt{5-x}=\sqrt{x+10}$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.

5p **5.** Determinaţi numărul real a pentru care vectorii $\vec{u}=a\vec{i}+(a-1)\vec{j}$ și $\vec{v}=3\vec{i}+4\vec{j}$ sunt coliniari.

5p **6**. Arătaţi că, dacă x este număr real pentru care $\sin x=\cos x$, atunci $\cos 2x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a,b)=\begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1,1))=3$.

5p **b)** Demonstrați că $A(a,b)\cdot A(b,a)=A(-ab,a^2+b^2)$, pentru orice numere reale a și b.

5p **c)** Determinați perechile de numere întregi m și n pentru care $\det(A(m,n))=1$.

2. Se consideră polinomul $f=X^3-15X^2+mX-80$, unde m este număr real.

5p **a)** Pentru $m=95$, arătați că $f(1)=1$.

5p **b)** Determinați numărul real m pentru care $x_1(x_1-x_2)+x_2(x_2-x_3)+x_3(x_3-x_1)=0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

5p **c)** Determinați rădăcinile polinomului f, știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x-10$.

5p **a)** Arătați că $f'(0)=0$.

5p **b)** Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției f sunt concurente.

5p **c)** Demonstrați că $e^{x^3}\geq(x+1)(x^2-x+1)$, pentru orice număr real x.

2. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to(0,+\infty)$, $f(x)=x+\dfrac{9}{x}$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_1^3\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)dx=4$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=\dfrac{2}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=1$ și $x=9$ are aria egală cu $2\ln 3$.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}}\left(f(x)-\frac{9}{x}\right)\operatorname{arctg} x\,dx=\frac{5\pi}{12}-\frac{3+\sqrt{3}-a}{2}$.