**Examenul național de bacalaureat 2023**
**Proba E. c)**

**Matematică *M_mate-info***

**Model**

***Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică***
***Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

**SUBIECTUL I** **(30 de puncte)**

**5p** **1.** Determinați numerele reale $a$ și $b$ pentru care $(a+bi)(1+i)=4$, unde $i^2=-1$.

**5p** **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=mx^2-2x+m$, unde $m$ este număr real nenul. Determinați numerele reale $m$ pentru care $f(m-x)=f(m+x)$, pentru orice număr real $x$.

**5p** **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2\log_2(2x)-1=\log_2\left(x^2+x+2\right)$.

**5p** **4.** Se consideră mulțimile $A=\{1,2,3,4\}$ și $F=\{f \mid f:A\to A\}$. Determinați probabilitatea ca, alegând un element $f$ din mulțimea $F$, acesta să verifice inegalitatea $f(n)\le n$, pentru orice $n\in A$.

**5p** **5.** În reperul cartezian $xOy$ se consideră punctele $A(5,3)$ și $B(-1,5)$. Determinați coordonatele punctului $C$, știind că $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}=2\overrightarrow{OC}$.

**5p** **6.** Se consideră triunghiul $ABC$, cu $AB=8$, măsura unghiului $C$ de $30^\circ$ și punctul $O$, centrul cercului circumscris triunghiului $ABC$. Determinați distanța de la punctul $O$ la latura $AB$.

**SUBIECTUL al II-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} 3 & a & -2 \\ 2a+1 & 1-a & -1 \\ a+2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} 3x+ay-2z=b \\ (2a+1)x+(1-a)y-z=c \\ (a+2)x-2y+z=-1 \end{cases}$, unde $a$, $b$ și $c$ sunt numere reale.

**5p** **a)** Arătați că $\det(A(0))=5$.

**5p** **b)** Determinați numerele reale $a$ pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.

**5p** **c)** Determinați numerele reale $b$ și $c$ pentru care sistemul de ecuații este compatibil, oricare ar fi numărul real $a$.

**2.** Se consideră polinomul $f=X^4+aX^3+aX^2+8X-8$, unde $a$ este număr real.

**5p** **a)** Arătați că $f(-1)=-15$, pentru orice număr real $a$.

**5p** **b)** Determinați numărul real $a$ pentru care restul împărțirii polinomului $f$ la polinomul $g=X^2-1$ este egal cu $15X$.

**5p** **c)** Arătați că, pentru orice număr real $a$, polinomul $f$ **nu** are toate rădăcinile numere întregi.

**SUBIECTUL al III-lea** **(30 de puncte)**

**1.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1-x-\left(x^4-1\right)\operatorname{arctg}x$.

**5p** **a)** Arătați că $f'(x)=-x^2(4x\operatorname{arctg}x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

**5p** **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției $f$ care este paralelă cu axa $Ox$.

**5p** **c)** Demonstrați că $\operatorname{tg}(f(x))\ge f(x)\ge f(\operatorname{tg}x)$, pentru orice $x\in[0,1]$.

**2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+e^x}{1+e^{-x}}$.

**5p** **a)** Arătați că $\int_0^3\left(1+e^{-x}\right)f(x)\,dx=8+e^3$.

**5p** **b)** Arătați că $\int_{-m}^{m}\dfrac{f(x)}{x^2+e^x}\,dx=m$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.

**5p** **c)** Determinați numărul real nenul $a$ pentru care $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{e^{ax}-1}\int_0^x f(t)\,dt\right)=1$.