Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n\geq1}$, știind că $b_5=6$ și $b_6=18$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+x-4$. Determinaţi numerele reale m, ştiind că $f(m)=m$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $100\cdot10^{2x}=10^{3x}$.

5p **4.** Determinaţi câte numere naturale pare, de două cifre, se pot forma cu cifre din mulțimea $\{0,1,2,3,4\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,0)$, $B(4,0)$ şi $C(0,4)$. Determinaţi coordonatele centrului cercului circumscris triunghiului ABC.

5p **6.** Arătați că $\sin 2x=1$, știind că $\operatorname{tg} x=1$ și $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}x+2 & 3\\ -1 & x-2\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=-1$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care matricea $A(x)$ este inversabilă.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c, astfel încât $A(a)\cdot A(b)=A(c)$. Demonstrați că $a^2+b^2+2c=3$.

2. Pe mulțimea $M=[-1,1]$ se definește legea de compoziție $x\circ y=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}$.

5p **a)** Arătați că $0\circ1=1$.

5p **b)** Determinați $x\in M$ pentru care $x\circ x=0$.

5p **c)** Demonstrați că $x\circ\sqrt{1-x^2}=1$, pentru orice $x\in[0,1]$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x+x\ln x-1$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=e^x+\ln x+1$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $e^x+x\ln x\geq\sqrt{e}+\frac{1}{2}\ln\frac{1}{2}$, pentru orice $x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+2}+\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)\sqrt{x^2+2}\,dx=\frac{17}{6}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

5p **c)** Se consideră funcția $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-\frac{x}{\sqrt{x^2+2}}$. Determinați $a\in(0,+\infty)$ pentru care $\int_0^1 g(x)\,dx=\frac{\sqrt{3}}{2}+\ln\frac{a+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$.