I'm not robot
reCAPTCHA
I'm not robot!

Logique et raisonnement exercices corrigés pdf 1 bac sm

Logique et raisonnement exercices corrigés 1 bac. (première s/ 1ère année bac)Exercice 1 (Logique et raisonnement exercices corrigés 1 bac)Donner la négation et la valeur de vérité de chacune des assertions suivantes :∀x ∈ [−1, 0], −3x2 + 5x + 2 < 0.(∃x ∈ ℝ) , (∀x ∈ ℝ) , x − 2y < 0.(∃x ∈ ℝ) , (∀x ∈ ℝ) , x < y2.(∀x ∈ ℝ) , (∃y ∈ ℝ) , x + y > 0.Exercice 2
Montrer que : ∀(x, y) ∈ ([1, +∞[)2, x ≠ y ⇒ (x − 1)√x+1 ≠ (y − 1)√y+1.Montrer que : ∀(x, y) ∈ ℝ2, (x + √x2+1)(y+√y2+1) = 1 ⇔ x + y = 0.Montrer que : ∀(a, b, c) ∈ ℝ3, a2 + b2 = c2 ⇒ |a| ≤ |c| et |b| ≤ |c|.Montrer que : ∀x ∈ ℝ*, |1 + 1/x| ≤ √2√x2+1/x2 .Montrer que : ∀x ∈ ℝ*, √|x|/2 + √1/2|x| ≤ √|x|+1/|x|.Exercice 3 Soit n ∈ ℕ*.
Montrer que si n est un carré parfait, alors 2n ne peut pas être un carré parfait.Soit n ∈ ℕ. Montrer que : 3 divise n2 ⇔ 3 divise n.Montrer que : √3 ∉ ℚ.Soit n ∈ ℕ. Montrer que : √4n2+5n+3 ∉ ℕ.Montrer que : ∀(a, b, c, d) ∈ ℚ4. n + √2m = p + √2q ⇔ (n = p et m = q).Exercice 4 (Logique et raisonnement exercices corrigés 1 bac) Résoudre dans ℝ l'équation suivante (E) : |2x2 − x − 6| − |x + 1| − 1 = 0.Résoudre dans ℝ les inéquations suivantes (I) et (I′) :(I) : √x2+1 − 2x + 1 ≤ 0 ; (I′) : √x−1 ≥ x − 7Exercice 5Montrer que : (∀n ≥ 5) , n2 < 2n.Montrer que : (∀n ∈ ℕ) , ∑nk=1 k2 = n(n+1)(2n+1)/6.Montrer que : (∀a ∈ ℝ* \ {−1}) , (∀n ∈ ℕ) , ∑2nk=0 (−1)kak = a2n+1+1/a+1 .Montrer que : (∀n ∈ ℕ) , 11 divise 32n + 26n−5.Exercice 6 Montrer que : (∀n ∈ ℕ*) , n(n − 1)(n − 2) × … × 3 × 2 × 1 ≥ 2n−1. On pose : (∀n ∈ ℕ) , Sn = 1 + 2 + 22 + … + 2n.Montrer que : (∀n ∈ ℕ) , Sn = 2n+1 − 1.Cliquer ici pour télécharger Logique et raisonnement exercices corrigés 1 bacCorrection de la série d'exercices sur la logique et raisonnementExercice 1▮ La proposition P1 est vraie (par exemple 7 ∈ ℕ et 72 > 7).▮ La proposition P2 est vraie, il suffit de prendre x = 0 et on trouve |0| ≤ 0.▮ On a 0 ∈ ℝ+ mais 0 + √0 = 0 < 2, alors la proposition P3 est fausse.▮ On a − 1 ∈ ℝ* mais − 1+ 1/−1 < 2, alors la proposition P4 est fausse.▮ Puisque les solutions de l'équation x2 = 9 sont −3 et 3 et comme −3 ∈ ℚ et 3 ∈ ℚ, alors la proposition P5 est vraie.▮ Soit x ∈ ℤ, existe-t-il y dans ℤ tel que : x − y = 3 ?on a : x − y = 3 alors y = x − 3 ∈ ℤ.
Donc la proposition P6 est vraie.▮ Soit x ∈ ℝ, existe-t-il y dans]−∞, 1[tel que : 3x2y − x + y = 0 ?On a3x2y − x + y = 0⇔ y(3x2 + 1) = x⇔ y = x/3x2+1il reste à montrer que y < 1On ay − 1 = x/3x2+1 − 1= x−3x2−1/3x2+1= − (3x2−x+1/3x2+1)on a (∀x ∈ ℝ) , 3x2 − x + 1 > 0 (car Δ = − 11 et a > 0 (a = 3)) et 3x2 + 1 > 0 donc y − 1 < 0 c'est-à-dire y < 1, par suite la proposition P7 est vraie.Cliquer ici pour télécharger la correction Devoir surveillé sur la logique et raisonnement 1 bacExercice 1Soient a, b, x et y des réels non nuls.Montrer que :ax + by = 1 ⇒ 1/x2+y2 ≤ a2 + b2 2. Montrer que :∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2, a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 13.
Soient a, b et c des réels.a) Vérifier que : (a + b)2 − (a − b)2 = 4ab.b) Montrer que :|ab| > c2/2 ⇒ |a−b| > c ou |a + b| > c 4. Montrer que :∀(x, y) ∈ ℝ2*, y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 75. n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair. Montrer que : n/m ∉ ℕ.∀(a, b) ∈ ([0, +∞[)2 , √a+1 − √b+1 < √a − √b ⇔ a > b2.

Prépa CAPES UPMC 2009-2010 — Matthieu Romagny

Vendredi 4 septembre 2009

Logique et raisonnement mathématique

La logique s'intéresse d'une part aux règles de construction des phrases mathématiques, d'autre part à leur vérité.

Soit X un ensemble. Un *énoncé*, ou une *proposition*, est une phrase mathématique dépendant des éléments de X. Un énoncé peut avoir deux valeurs, dépendant des éléments de X : *vrai* ou *faux* (1 ou 0). On associe à chaque énoncé P la partie de X des éléments tels que P est vrai.

Exemple : pour l'énoncé « $x \geq 3$ » la partie correspondante de $\mathbb{R}$ est $[3;+\infty[$.

Par définition, si cette partie est X tout entier l'énoncé « $\forall x \in X,\ P(x)$ » est vrai.
De même, si cette partie n'est pas vide, l'énoncé « $\exists x \in X,\ P(x)$ » est vrai.

Correspondance entre connecteurs logiques et opérations ensemblistes :

Logique	Ensemble	Symbole
P		
non P		$\neg P$
P ou Q		$P \vee Q$
P et Q		$P \wedge Q$
P implique Q = (non P) ou Q		$P \Rightarrow Q$ = $(\neg P) \vee Q$
P équivaut à Q = (P implique Q) et (Q implique P)		$P \Leftrightarrow Q$ = …

Complétez par vous-mêmes la deuxième colonne en dessinant l'interprétation ensembliste de chaque connecteur : si la partie de X des éléments tels que P est vrai est notée A, et celle associée de même à Q est notée B, alors la partie associée à P ou Q est…

1

Montrer que :∀(x, y) ∈ ℝ2, √x2+1 + √y2+1 = 2 ⇔ x = y = 03. Soient a et b deux réels non nuls.a) Montrer que :(a + 1/a) = (b + 1/b) ⇔ (a = b ou a = 1/b)b) Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E) : x2 + 1/x2 = 17/4.Exercice 3 Soit n ∈ ℕ. On pose : un = (1 + 1)2 × (1 + 1/3)2 × (1 + 1/5)2 × … × (1 + 1/2n+1)2.Montrer que : ∀n ∈ ℕ, un+1 = un(1 + 1/2n+3)2.Montrer que : ∀n ∈ ℕ, un > 2n +3.Montrer que : (∀n ∈ ℕ) , 6 divise n(n + 1)(n + 2) .Exercice 4 Résoudre dans ℝ2 le système suivant :{ x3 + x2 − 2 = 0 et x2 + xy − y + y2 = 0Cliquer ici pour télécharger Logique et raisonnement exercices corrigés 1 bac (Devoir surveillé)Exercice 1Soient (a, b, x, y) ∈ ℝ4*.On suppose que ax + by = 1, et on montre que : 1/x2+y2 ≤ a2 + b2 .1/x2+y2 − (a2 + b2) = 1−(x2+y2)(a2+b2)/x2+y2 = 1−(a2x2 + b2x2 + a2y2 + y2b2)/x2+y2 = 1−(a2x2 + b2y2 + a2y2 + b2x2)/x2+y2 = 1−((ax + by)2 − 2axby + a2y2 + b2x2)/x2+y2 = 1−(1 − 2axby + a2y2+ b2x2)/x2+y2 = 1−1+2axby−a2y2−b2x2/x2+y2 = −(a2y2 − 2aybx + b2x2)/x2+y2 = −(ay − bx)2/x2+y2Donc 1/x2+y2 − (a2 + b2) ≤ 0, c'est-à-dire : 1/x2+y2 ≤ a2 + b2. D'oùax + by = 1 ⇒ 1/x2+y2 ≤ a2 + b2 .a2 = b + 1⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 1.Donc∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2. a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a+1) = 1. 3. a) Soient (a, b, c) ∈ ℝ3.(a + b)2 − (a − b)2 = a2 + 2ab + b2 − a2 + 2ab − b2 = 4abb) Soient (a, b, c) ∈ ℝ3.L'assertion : |ab| > c2/2 ⇒ |a − b| > c ou |a + b| > c, est équivalente à :|a − b| ≤ c et |a + b| ≤ c ⇒ |ab| ≤ c2/2 .On suppose que |a − b| ≤ c et |a + b| ≤ c et on montre que : |ab| ≤ c2/2 .On a 4ab = (a + b)2 − (a − b)2 , donc|4ab| = |(a + b)2 − (a − b)2| ≤ |a + b|2 + |a − b|2et comme |a + b|2 ≤ c2 et |a − b|2 ≤ c2 , alors|4ab| ≤ 2c2 par suite|ab| ≤ c2/2.Par contraposition ceci équivalent à :|ab| > c2/2 ⇒ |a−b| > c ou |a + b| > c L'assertion : y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 7, est équivalent à :x−y/x+y = 7 ⇒ y = −3/4xOn ax−y/x+y = 7 ⇒ x − y = 7(x + y)⇒ − y − 7y = −x + 7x⇒ −8y = 6x⇒ y = −6x/8⇒ y = −3/4xPar contraposition ceci équivalent à :∀(x, y) ∈ ℝ2*, y ≠ −3/4x ⇒ x−y/x+y ≠ 75. Soient n et m deux entiers naturels tels que n est impair et m est pair.On suppose par l'absurde que : n/m ∈ ℕ. Donc∃p ∈ ℕ, n/m = pAlors n = p.m, ce qui est contradictoire puisque n est impair et m.p est pair. Doncn/m ∉ ℕExercice 2Soient (a, b) ∈ ([0, +∞[)2 .Cliquer ici pour télécharger la correction du devoir surveilléExercice 1 (Les deux questions sont indépendantes)On considère les deux assertions :P : (∀x ∈ ℝ+) , x ≥ 2√x − 1 et Q : (∀y ∈ ℝ)(∃x ∈ ℝ) , xy ≠ x.a) Donner la négation de P et Q.b) Montrer que P est vraie et Q est fausse.2. Donner la négation des assertions suivantes :R : (∀x ∈ ℝ)(∃k ∈ ℤ) , k ≤ x < x + 1 et F : ∀(α, β) ∈ ℝ2, (α − β > 1 ⇒ ∃n ∈ ℤ, α < n < β)Exercice 2 (Les questions sont indépendantes)Montrer que : ∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2, a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a + 1) = 1.Montrer par la contraposée que : (∀n ∈ ℕ) , n2/3 ∈ ℕ ⇒ n/3 ∈ ℕ.Soit x ∈ ℝ+, montrer que : √x/x2−x+1 ≤ 4/3√x.Soit n ∈ ℕ, montrer que : √4n2+5n+3 ∉ ℕ.Résoudre dans ℝ l'inéquation : (I) : √x−1 ≥ x − 7.Montrer que : (∀x ∈ ℝ) , x6 − x5 + x4 − x3 + x2 − x + 3/4 > 0. (Étudier : x ≤ 0, 0 < x < 1 et x ≥ 1).Montrer que : (n ∈ ℕ*) , 1 + 3 + 5 + … + (2n + 1) = (n + 1)2.Exercice 4 Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :f(x) = √(|x| − 2)|x| , { f(x) = 3x+1/√x+2 , si x ≤ 1 et f(x) = x2/2x−1 , si x > 1 et f(x) = x−1/x2+x+m , (m est un paramètre)Cliquer ici pour télécharger devoir maison logique et raisonnement exercices corrigés 1 bacExercice 1On considère les deux assertions :P : (∀x ∈ ℝ+) , x ≥ 2√x − 1 et Q : (∀y ∈ ℝ)(∃x ∈ ℝ) , xy ≠ x.a) La négation de P et Q.∴ La négation de P est : P−: (∃x ∈ ℝ+), x < 2√x − 1.∴ La négation de Q est : Q−: (∃y ∈ ℝ)(∀x ∈ ℝ) , xy = x.b) Montrons que P est vraie et Q est fausse.∴ Soit x ∈ ℝ+.On ax ≥ 2√x − 1 ⇔ √x2 − 2√x + 1 ≥ 0 ⇔ (√x − 1)2 ≥ 0comme l'assertion (√x − 1)2 ≥ 0 est vraie pour tout x ∈ ℝ+, ce qui signifie que l'assertion P est vraie.∴ Si y = 1, on obtient l'égalité : x = x qui est vraie pour tout x ∈ ℝ, alors l'assertion Q− est vraie, par suite l'assertion Q est fausse.2. La négation des assertions R et F.∴ La négation de l'assertion R est : R− : (∃x ∈ ℝ)(∀k ∈ ℤ), k > x ou x ≥ x + 1.∴ La négation de l'assertion F est : F− : ∃(α, β) ∈ ℝ2, α − β > 1 et (∀n ∈ ℤ, α ≥ n ou n ≥ β).Montrons que : ∀(a, b) ∈ (]0, +∞[)2, a2 = b + 1 ⇒ √a−√b+√a+√b/√2(a + 1) = 1.Montrons par la contraposée que : (∀n ∈ ℕ) , n2/3 ∈ ℕ ⇒ n/3 ∈ ℕ.Soit n ∈ ℕ.L'assertion : n2/3 ∈ ℕ ⇒ n/3 ∈ ℕ est équivalente : n/3 ∉ ℕ ⇒ n2/3 ∉ ℕ.On suppose que n/3 ∉ ℕ. On va distinguer deux cas lorsque n = 3k + 1 ou n = 3k + 2 tel que k ∈ ℕ.∴ Si n = 3k + 1, alorsn2 = (3k + 1)2 = 9k2 + 6k + 1 = 3(3k2 + 2k) + 1On pose p = 3k2 + 2k ∈ ℕ. On obtient : n2 = 3p + 1. Donc ceci signifie que 3 ne divise pas n2. (c'est-à-dire : n2/3 ∉ ℕ).∴ Si n = 3k + 2, alorsn2 = (3k + 2)2 = 9k2 + 12k + 4 = 3(3k2 + 4k + 1) + 1On pose p′ = 3k2 + 4k + 1 ∈ ℕ. On obtient : n2 = 3p′ + 1. Donc ceci signifie que 3 ne divise pas n2. (c'est-à-dire : n2/3 ∉ ℕ).On conclut que dans tous les deux cas n2/3 ∉ ℕ. Ceci signifie que : n/3 ∉ ℕ ⇒ n2/3 ∉ ℕ. Donc par contraposition ceci est équivalente à :(∀n ∈ ℕ) , n2/3 ∈ ℕ ⇒ n/3 ∈ ℕ.4. Soit n ∈ ℕ.
Montrons que : √4n2+5n+3 ∉ ℕ.On suppose par l'absurde que √4n2+5n+3 ∈ ℕ.
Alors∃m ∈ ℕ, √4n2+5n+3 = mDonc4n2 + 5n + 3 = m2On a : (2n + 1)2 < 4n2 + 5n + 3 et 4n2 + 5n + 3 < (2n + 2)2. C'est-à-dire(2n + 1)2 < 4n2 + 5n + 3 < (2n + 2)2donc(2n + 1) < √4n2+5n+3 < (2n + 2)d'où(2n + 1) < m < (2n + 2).C'est une contradiction car on peut pas avoir un entier strictement compris entre deux entiers consécutifs (2n + 1) et (2n + 2).Ceci signifie que(∀n ∈ ℕ) , √4n2+5n+3 ∉ ℕ.Cliquer ici pour télécharger la correction du devoir maison logique et raisonnement exercices corrigés 1 bacVous pouvez aussi consulter :