

SEN, LAS REGLAS DE DECISION COLECTIVA Y LAS FUNCIONES DE DECISION SOCIAL

Justo Aguilar (Ph.D)

PARTE PRIMERA FUNDAMENTOS PARA EL ANALISIS DE LAS REGLAS DE DECISION COLECTIVA¹

En el análisis de Sen, se establece que la teoría de escogencia colectiva es esencial para la comprensión del paradigma económico neoclásico (economía del bienestar, teoría de planificación y economía pública), enfoque de que a la vez, se relaciona estrechamente con la ciencia política, en particular a la teoría del Estado y la teoría de toma de decisiones. Tiene además aspectos filosóficos importantes relacionados con la ética y especialmente con la teoría de justicia. Es claro que los problemas de “escogencia colectiva” o “escogencia social” deben ser tratados por varias disciplinas incluyendo la economía. Esta sinopsis presenta en lo esencial las ideas de Sen y su análisis de los aportes de Maurice Dobb, Kenneth Arrow, James Mirrlees y John Rawls al tema tratado, tal como se presenta en su libro “Collective Choice and Social Welfare”.

En esta primera parte se presenta en forma breve un análisis del planteamiento normativo empleado por Sen con referencia a los siguientes temas: primero, se caracterizan los postulados y variables de las “relaciones de preferencia” y el principio de “unanimidad”; segundo, se describen las reglas de escogencia colectiva y de Pareto para llegar un concepto de racionalidad colectiva; y tercero, se define las función de bienestar social en términos de sus postulados, el teorema de la imposibilidad de Arrow y las funciones de decisión social.

1. El Marco Referencial de Sen.

a) El Enfoque de Sen.

El enfoque de Sen focaliza la relación entre objetivos de la política social y las preferencias y aspiraciones de los miembros de una sociedad. En primer lugar, es posible postular que la sociedad es una entidad independiente de los individuos que la forman y en consecuencia las preferencias sociales no deberían considerar las preferencias individuales. Segundo, podría considerarse que hay una “dependencia” pero que la misma podría abstraerse de esas preferencias individuales y que la sociedad tiene preferencias propias². Sin embargo, el enfoque de Sen se aparta de esas posiciones y postula que hay una dependencia entre la escogencia o selección social y políticas públicas de las preferencias individuales.

La capacidad para realizar decisiones razonables sobre el tema de “escogencia colectiva” está referida a las necesidades y los deseos de los miembros de la comunidad, las cuales pueden tomar formas variadas tal como puede inferirse de las siguientes posiciones:

¹ Estas notas constituyen un resumen en traducción libre del capítulo introductorio, del libro de Sen, “Collective Choice and Social Welfare” (A.K. Sen. Cambridge: Holden-Day, Inc.. 1969).

² Se trata de una posición que es asumida en la literature socialista, aún cuando la misma no fue aceptada por Marx quien reconoció “Lo que debe evitarse sobre todo es el reestablecimiento de una sociedad como una abstracción vis a vis el individuo”. Pie de nota en Página 1 en Collective Choice and Social Welfare de Sen (1969).

- Algún individuo podría tomar el punto de vista de que solo sus aspiraciones debieran contar en la escogencia social.
- Podría plantearse que los intereses homogéneos de una clase social o de un grupo son determinantes.
- Alguien podrían proponer que las preferencias de todos los individuos debieran contar por igual.

Esta diversidad es un aspecto esencial en el análisis de escogencia colectiva y determina las diferentes relaciones entre “preferencias individuales” y “escogencia social”. Para cada una de esas interpretaciones se tiene un sistema diferente de realizar una “escogencia colectiva o social”. El enfoque de Sen tiene que ver con estos sistemas de escogencia social, su naturaleza, sus operaciones y sus implicaciones.

b) Elementos de la Escogencia Colectiva.

Primeramente Sen establece la necesidad de considerar la forma en que las “preferencias individuales” son relevantes para la determinación de las “escogencias colectivas/ sociales”. Para ello recurre al trabajo de Arrow (1951), en el cual se consideran “ordenamientos de los individuos en un conjunto de estados sociales alternativos como un componente básico de la escogencia colectiva”. Se entiende en este contexto por “ordenamiento” un ranking de todas las alternativas vis-a-vis cada una de ellas.

El propósito del enfoque de Arrow es el de “determinar las reglas de escogencia colectiva que hacen el ordenamiento de preferencias de una sociedad, una función de ordenamientos de preferencias individuales; de forma tal que si éste último conjunto es especificado (los ordenamientos de preferencias individuales), lo primero entonces debe ser totalmente determinado (ordenamientos de preferencias sociales). Dado un “ordenamiento” la relación del ranking, debe satisfacer al menos tres propiedades de racionalidad. Si se define la relación “x, al menos tan bueno como” esas propiedades son las siguientes:

- 1) **Debe ser transitiva.** Si x es tan bueno como y; y tan bueno como z; entonces x es tan bueno como z.
- 2) **Debe ser reflexiva.** Cada alternativa x debe ser tan bueno como sí misma
- 3) **Debe ser completa.** Para cada par de alternativas x,y; o x es tan bueno como y, o y es tan bueno como x; o posiblemente ambas.

Un individuo con una “relación de preferencias completa” conoce su mente en escogencias sobre cada par del ordenamiento respectivamente. Una calificación de este análisis distingue entre “indiferencia” y la ausencia de la condición de ser “completa”. La formalización de esta relación se da a través de las siguientes dos proposiciones:

- *x es tan bueno como y*
- *y es tan bueno como x*

Ello es importante pues en el lenguaje corriente, la formalización es débil para distinguir esta condición de indiferencia y falta de definición en la relación de ser “completa”. Así tenemos que para un individuo dado, que no sabe cual alternativa escoger (x,y), podría pensarse entonces que es indiferente frente a las dos alternativas (x,y), aunque ello pudiera significar que efectivamente no puede tomar una decisión. Bajo el enfoque de Arrow se asume que cada individuo tiene un ordenamiento sobre los estados sociales alternativos y que la sociedad tiene un ordenamiento basado en el conjunto de ordenamientos individuales.

Sen se aparta de este marco referencial de Arrow en los siguientes aspectos:

- 1) **Escogencia consistente.** Sen sugiere que *no es necesaria que la sociedad debiera tener un ordenamiento transitivo tal como lo requiere Arrow.* Considere un ranking de alternativas que cumpla las siguientes condiciones:
 - *x es preferido a y*
 - *y es preferido a z*
 - *z es indiferente a x*

En este caso la sociedad puede tener una escogencia consistente aún cuando la relación no es transitiva bajo las reglas de racionalidad de Arrow: x es escogido en relación con el par (x,y) ; y es preferido en relación con el par (y,z) ; x o y pueden ser escogidos del par (x,z) y finalmente x puede ser escogido de todas las alternativas (x,y,z) .

- 2) **Escogencia no completa.** *Para algunos problemas de escogencia no es necesario que la relación sea completa según el análisis de racionalidad de Arrow.* Considere un ordenamiento con las siguientes relaciones:
 - *x es preferido a y*
 - *x es preferido a z*
 - *El par (y,z) no son estados comparables*

En este caso todavía podemos realizar una escogencia social, a saber, escoger x en relación con el par (y,z) aún cuando la escogencia entre y y z genera un problema. Este sería un caso definido por Sen como un quasi-ordenamiento.

- 3) **Intensidades de las preferencias.** Para ciertos casos se puede argüir que la escogencia social depende no únicamente en los ordenamientos individuales, sino también en las intensidades de las preferencias individuales.
- 4) **Comparaciones interpersonales.** En situaciones particulares la escogencia colectiva podría depender no solamente en ordenamientos individuales sino también en comparaciones interpersonales de niveles de bienestar, o de ganancias y pérdidas marginales de bienestar de los individuos y ello abre un nuevo conjunto de posibilidades. Ello no requiere necesariamente de cardinalidad en los ordenamientos.

Sen considera marcos referenciales alternativos para la escogencia pública/ social con puntos de vista alternativos en los elementos necesarios de tal escogencia, que varían desde ordenamientos puramente individuales como el de Arrow; a funciones de bienestar individuales con o sin cardinalidad; y con o sin comparación interpersonal de varios tipos.

c) La Naturaleza de las Preferencias Individuales.

La efectividad de diferentes reglas de escogencia colectiva depende mucho en la configuración precisa de los ordenamientos de preferencias individuales, y estas configuraciones por lo general reflejan las fuerzas que determinan las preferencias individuales en una sociedad.

Sen argumenta que una escogencia social podría estar basada en preferencias individuales y que éstas a su vez dependen de la naturaleza de la sociedad. De esa forma, lo apropiado de las reglas de escogencia colectiva/ social alternativas dependerán parcialmente de la estructura precisa de la sociedad.

El contenido de las preferencias individuales es también un tema importante. En algunos estudios de escogencia social una distinción se hace entre preferencias individuales como ellas actualmente son y aquellas que consideran a los individuos cuando se ponen en la posición de otros. Esta es una distinción importante pero no debe olvidarse que las preferencias individuales tales como son, de alguna manera reflejan una preocupación por los otros.

En la realidad, la sociedad en que una persona vive, la clase a que pertenece, la relación que tiene con la organización social y su estructura económica, son factores determinantes para la escogencia de esa persona, no solamente por que ellos afectan la naturaleza de su interés personal, pero también porque ellos influyen su sistema de valores incluyendo su noción de preocupación por otras personas.

La definición de un individuo económico insular persiguiendo su propio interés, al tiempo que excluye toda otra consideración podría representar un supuesto que permea mucho del análisis económico tradicional, pero que no es particularmente útil para entender los problemas de escogencia colectiva/ social. El enfoque de Sen no excluye las interdependencias interpersonales.

Un ejercicio preliminar de utilidad considera el estudio de las propiedades lógicas de las relaciones de preferencia. Muchos de estos resultados son ampliamente conocidos, aunque no necesariamente en su totalidad. Ello es así, debido a que el desarrollo del estudio de las relaciones de preferencias en la literatura estándar ha sido motivada por la teoría del consumo y el análisis de la demanda, las cuales no necesariamente son útiles para evaluar los problemas de escogencia colectiva/ social.

d. El criterio de Pareto.

El criterio de comparación empleado en la economía del bienestar para la optimización del bienestar social según el criterio de Pareto. Bajo este enfoque se consideran las siguientes reglas: primero, si *todo el mundo en la sociedad es indiferente frente a dos situaciones (x,y) sociales alternativas, entonces la sociedad debería ser también indiferente. La sociedad es indiferente según Pareto entre (x) e (y); y segundo, si al menos un individuo prefiere estrictamente (x) a (y) y todo individuo considera a (x) al menos tan buena como (y), entonces la sociedad preferiría (x) a (y). La opción (x) es mejor según Pareto que la opción (y).*

Ante una situación de elección social, definida para un conjunto de alternativas X entre las cuales debe tomarse una decisión, el criterio de Pareto permite definir situaciones de optimalidad, de la siguiente forma: primero, una alternativa (x) perteneciente al conjunto X, se describe como óptima de Pareto si no hay otra alternativa en X que sea mejor que (x) según Pareto. Segundo, la alternativa (x) es un óptimo paretiano si no podemos elegir una alternativa que todo el mundo considere al menos tan buena como (x) y que al menos una persona considere estrictamente mejor que (x).

En la teoría de la economía del bienestar, la optimalidad de una política que induce un cambio económico, se juzga por el criterio de si se alcanza o no la optimalidad de Pareto. Sin embargo, el criterio presenta una limitación fundamental: si un individuo de la sociedad prefiere (x) a (y), pero otro individuo tiene preferencias opuestas es decir prefiere (y) sobre (x), entonces el criterio de Pareto no permite compararlos, con independencia de las preferencias de los otros individuos de la sociedad por esas alternativas. La relación de preferencia social derivada de las preferencias individuales según el criterio de Pareto, aún cuando se puede argumentar que es reflexiva y transitiva (siempre que cada individuo tenga una cuasi ordenación) podría no ser completa, ello aunque todos los individuos que constituyen la sociedad tengan ordenaciones de preferencias completas.

e. Relaciones de Elección Colectiva y Relación de Pareto.

Una regla de elección colectiva es una relación funcional (f) tal que para cualquier conjunto de (n) ordenaciones individuales R_i (una ordenación para cada individuo) se determina una y solamente una relación de preferencia social R . Es una regla decisiva si y solamente si su alcance está restringido a relaciones de preferencia completas R . Se considera que si cada individuo tiene una ordenación R_i (reflexiva, transitiva y completa) definida en el conjunto X de estados sociales, entonces R es una relación de preferencia social que agrupa a todas las R_i individuales.

Se define la regla de elección colectiva como una cuasi-ordenación para toda combinación lógicamente posible de preferencias individuales; esta regla no es necesariamente una ordenación ya que puede infringir la condición de completitud. En este contexto, se considera que aún cuando la economía del bienestar ha sido definida como esencialmente paretiana; las reglas de elección colectiva presentan condiciones más débiles pero son reglas de elección inclusivas de Pareto. En consecuencia, las relaciones de Pareto pueden considerarse como subrelaciones de R , lo cual significa que para todo conjunto de preferencias individuales (R_i) sobre cualquier conjunto finito de estados sociales (S), hay al menos un estado óptimo de Pareto.

La regla de Pareto puede ampliarse para incorporar "tests de compensación" bajo el enfoque Scitovsky. Ello supone que si todos los estados sociales $S(x)$ pueden alcanzarse mediante redistribución, partiendo desde (x) y siendo parte de $S(x)$; ello nos permite alcanzar decisiones según la regla de unanimidad.

f. La función de bienestar de Bergson-Samuelson.

Una forma racional y sistemática de pensar sobre el bienestar social es tratar de definir una ordenación para la sociedad en todas las situaciones alternativas posibles. Bergson propuso que "***el bienestar social puede considerarse como una función de bienestar W de valores reales, cuyo valor se entiende que depende de todas las variables que afectan al bienestar***". Su definición es simple: primero, no está especificada y responde a una estructura de pensamiento racional; segundo, nada dice quién proporciona sus fines (un moralista, una mayoría, una oligarquía, un dictador, una clase social, la tradición) es decir no se especifica la génesis de la ordenación social. Puede incluir la relación de Pareto si así se desea, aun cuando ello no es obligatorio, dado que puede definirse de diversas formas y empleando distintos criterios.

Si la función de bienestar es inclusiva de Pareto como generalmente se supone, entonces la indiferencia social bajo Scitovsky implica eso mismo en el sentido de Bergson, pero no viceversa. Lo anterior significa que la cuasi-ordenación de Pareto está incluida en una ordenación social inclusiva de Pareto.

Bajo una perspectiva técnica, el método particular de representación de W es restrictivo para elegir entre situaciones sociales alternativas. No es en realidad necesario que exista una función W de valores reales; pues **lo que falta es definir una ordenación social completa R sobre todas las alternativas posibles, la cual es independiente de una función de bienestar de valores reales**. Sobre este particular, Sen señala que "lo que se precisa para la elección, es una relación de preferencia que especifique una mejor alternativa en cada situación de elección".

Sen apunta que la especificación de la función de bienestar fue operacionalizada posteriormente por Samuelson (1947) lo cual permitió eliminar varios obstáculos para el pensamiento racional sobre elección social. Arrow se planteó los siguientes interrogantes: que debería determinar a W ; como dependería de las ordenaciones de preferencias individuales y cual debería ser la regla de elección colectiva.

Sen argumenta que el concepto de función de bienestar social (FBS) de Arrow supone "ordenaciones para la sociedad" o su representación de valores reales (fbs) bajo el enfoque de Bergson; de lo cual se infiere que "una (FBS) de Arrow determina una (fbs) de Bergson. En consecuencia la (FBS) es de un tipo particular de regla de elección colectiva en el que cada preferencia social que esté determinada, es una ordenación (reflexiva, transitiva y completa).

En este contexto, se concluye que el análisis de Arrow es exclusivo para la FBS y de sus problemas, los cuales son propios de todas las reglas de decisión colectiva; aún cuando algunos de ellos como el famoso "Teorema de la Imposibilidad" es específico de la FBS.

Sen considera que una FBS o una regla de decisión colectiva además de su concepción lógica y consistencia debe responder a ciertas condiciones de sensatez. Se puede argumentar que la sensatez es una cuestión de opinión, lo cual sugiere que su interpretación de las condiciones de sensatez deben ser suaves, para evitar restricciones excesivas en la concepción de la FBS.

g. El Teorema General de Posibilidad³, Reglas de Decisión Colectiva y la Función de Decisión Social.

Como método de pasar de las preferencias individuales (R_i) a una preferencia social (R), Arrow estableció que una función de bienestar social (FBS) debe tener el suficiente alcance para poder trabajar con cualquier conjunto lógicamente posible de ordenaciones individuales. En su teorema general de posibilidad para la función de bienestar social consideró que la misma debe cumplir las siguientes condiciones:

Condición de dominio no restringido (U). Una función de bienestar social siendo una regla de decisión colectiva debe ser válida para toda configuración lógicamente posible de ordenaciones de preferencia individual.

Condición Principio de Pareto Débil (P) Debe satisfacer el principio de Pareto en su forma débil, si todos prefieren (x) a (y) entonces la sociedad debe también preferir (x) a (y).

Condición de independencia de alternativas irrelevantes (I), la cual establece que la elección social entre un conjunto de alternativas debe depender de las ordenaciones de los individuos solamente sobre esas alternativas y no de otra cosa.

Condición de no dictadura (D), es decir debe cumplir la condición de que no debe haber un individuo tal que siempre que prefiera (x) a (y), la sociedad deba preferir (x) a (y), con independencia de la preferencia de todos los demás.

Sin embargo, Arrow demostró que no hay ninguna función de bienestar social (FBS) que pueda satisfacer simultáneamente estas cuatro condiciones⁴ que aparecen suaves en forma independiente pero que integradas tienen una implicación significativa para la economía del bienestar social.

³ K. Arrow. Social Choice and Individual Values. New York: Wiley 1951. Rational Choice Functions and Orderings, *Economica*, N.S., 26, 1959.

⁴ A. K. Sen. Op. Cit. La demostración correspondiente denominada el Teorema de Imposibilidad se presenta en el capítulo tercero, páginas 59 a 64.

En su interpretación de este resultado, Sen argumenta que permite evaluar el método de combinar las preferencias sociales en preferencias sociales que conducen a inconstancias. Así, **la regla de la mayoría presenta la condición de intransitividad y es contradictoria**. La regla de mayoría satisface la condición P, la condición I y la condición D, pero no satisface la condición U del teorema de posibilidad de Arrow y por lo tanto no es una función de bienestar aceptable bajo dichas condiciones. Para Sen la importancia del teorema radica en que muestra que este problema se presenta no solamente para el método de decisión de la mayoría, que es después de todo solamente un método de elección social, sino para todo método conocido o desconocido que pueda concebirse. No debe olvidarse que las funciones de bienestar social de Arrow constituyen una clase particular de reglas de elección colectiva, las cuales requiere que todas las preferencias sociales sean ordenaciones (reflexiva, transitiva y completa).

Sen señala que lo importante es que haya una función de elección, (una mejor alternativa en cada subconjunto) y para ello es indispensable que se cumplan las condiciones de reflexividad y la completitud, no así la transitividad. Sin embargo, ello requiere que la relación de preferencia, cumpla no solo esas dos condiciones de reflexividad y completitud sino también de una condición adicional denominada aciclicidad. Bajo esta nueva condición, la relación de preferencia debe cumplir que si (x_1) es preferida a (x_2) ; y (x_2) es preferida a (x_3) ; y así sucesivamente hasta (x_n) ; entonces (x_1) debe ser considerada al menos tan buena como (x_n) ; y esta condición es más débil que la transitividad.

Sen concluye afirmando que el resultado de la imposibilidad de Arrow es aplicable únicamente a las funciones de bienestar social del tipo Bergson Samuelson. Pero **si el objetivo es sólo asegurar que partiendo de un entorno cualquiera habrá una alternativa elegida, entonces eso puede garantizarse exigiendo únicamente la condición de aciclicidad de la preferencia social sin requerir transitividad.** Después de todo, las funciones de decisión social son las reglas de elección colectiva que generan relaciones de preferencia que son suficientes para la existencia de funciones de elección y que cumplen a su vez las condiciones de Arrow.

PARTE SEGUNDA RELACIONES DE PREFERENCIA, UNANIMIDAD Y ELECCION COLECTIVA ⁵

En la primer sección de esta segunda parte, se considera una traducción libre de Sen en lo relativo a la terminología de "*relaciones binarias*". La sección segunda ofrece una interpretación esquematizada de la relación binaria y sus propiedades. En la sección tercera se ofrece de igual manera un esquema del análisis de Sen de la función de bienestar social y del teorema de Arrow. Cuarto, presenta un resumen de la "paradoja del voto" tal como lo propone Sen en su capítulo cuarto. Finalmente, se discute el "teorema de la posibilidad", que permite solventar la crítica de Sen para la elección social. Se incluye en el anexo, un esquema gráfico del planteamiento completo de la interpretación de Sen sobre la escogencia social.

I. RELACIONES DE PREFERENCIA.

2. Las Relaciones Binarias.

Sen plantea una discusión de conceptos de lógica matemática para analizar las reglas de decisión de las personas y de la colectividad. Define la relación binaria $(x R y)$ sobre un subconjunto (R) del conjunto (S) . Ese subconjunto está definido en relación con el cuadrado de S , a saber $(S \times S)$, formado de todos los pares ordenados (x,y) , lo cual permite establecer que (x,y) pertenece a S , así como a R . En este caso, el estudio de las relaciones binarias de S no difiere esencialmente del estudio de los subconjuntos de $(S \times S)$.

Ejemplos de relaciones binarias $(x R y)$:

- (x) es al menos tan bueno como (y)
- (x) es mayor que (y)

Este análisis considera el uso de la siguiente notación:

⁵ Estas notas constituyen un resumen de los capítulos 1 y 2 del libro Elección Colectiva y Bienestar Social (A.K. Sen. Madrid. Alianza, Editorial S.A. 1976).

cuantificador existencial, para algún
 cuantificador universal, para todo
 condicional, si entonces
 equivalencia, si y solamente si
 \sim negación, no
 alternación, el o inclusivo
 $\&$ conjunción, y
 $=$ identidad, lo mismo que
 elemento de, pertenece a
 subconjunto de, está contenido en
 intersección de, elementos pertenecientes a
 ambos conjuntos.
 unión de elementos pertenecientes a uno u otro
 conjunto.

Las propiedades que una relación binaria puede o no satisfacer son las siguientes:

- 1) Reflexividad:
- 2) Completitud:
- 3) Transitividad:
- 4) Antisimetría:
- 5) Asimetría: \sim
- 6) Simetría:

Considere como ejemplo la siguiente relación binaria, “*al menos tan alto como*”. Aplique esta relación al conjunto de todos los picos de montaña de altura conocida. Se obtienen los siguientes resultados:

- Reflexiva, ya que un pico es tan alto como él mismo.
- Completa, ya que si el pico A no es al menos tan alto como el pico B, entonces el pico B será al menos tan alto como (de hecho más alto que) el pico A
- Transitiva, puesto que el pico A, siendo al menos tan alto como el pico B, que es al menos tan alto como el pico C, tiene que ser al menos tan alto como el pico C.
- No antisimétrica, puesto que los picos [A y B pueden tener la misma altura sin ser el mismo pico.
- No asimétrica, puesto que si A es al menos tan alto como B, no se excluye la posibilidad de que B sea tan alto como B
- No simétrica, puesto que al ser A al menos tan alto como B, no impone en absoluto que B deba ser al menos tan alto como A.

La terminología de Sen así como la empleada por otros economistas se presentan en forma organizada en el siguiente cuadro

<u>Propiedades Satisfechas Económica</u>	<u>Nombre Ordenamiento</u>	<u>Nombres en Literatura</u>
Reflexividad y transitividad	Cuasi-ordenación	Pre-ordenación
Reflexividad, transitividad Y completitud	Ordenación	Pre-ordenación completa, Cuasi-ordenación completa, Ordenación débil
Reflexividad, transitividad Y antisimetría.	Ordenación parcial	Ordenación
Reflexividad, transitividad, Completitud y antisimetría.	Cadena	Ordenación lineal, Ordenación completa, Simplemente ordenación.
Transitividad y asimetría.	Ordenación parcial estricta	

La terminología que emplean los economistas en sus trabajos muestra diferentes terminologías para el análisis de la racionalidad en las decisiones económicas individuales. Se dan los siguientes casos:

- Arrow en 1951 definió una ordenación, con las siguientes características: es reflexiva, transitiva y completa (con independencia de la antisimetría).
- Debrew en 1959 definió una ordenación, como reflexiva, transitiva y altimétrica (con independencia de la completitud).

3. Conjuntos de elección y elementos maximales.

Defínase una relación binaria R (*al menos tan buena como*) de preferencia débil en un conjunto S , a partir de la cual se definen las relaciones P (*preferencia estricta*) e I (*indiferencia*), tales que:

- **Definición Preferencia estricta:** $(x P y)$ implica que: $(x R y) \ \& \ \sim (y R x)$
- **Definición Indiferencia:** $(x I y)$ implica que: $(x R y) \ \& \ (y R x)$

El elemento maximal. Dada una relación binaria R , a los elementos de un conjunto S que no son dominados por ningún otro elemento del conjunto se denominan elementos maximales del conjunto.

El conjunto maximal. A su vez, el conjunto de elementos maximales en S se llama su conjunto maximal $M(S, R)$.

El elemento mayor. Un elemento (x) es un mejor elemento "mayor", en el contexto de relaciones de tamaño de S , si es al menos tan bueno (grande) como cada uno de los demás elementos de S , con respecto a la relación de preferencia relevante (R) . En notación formal, un elemento (x) en S es un mejor elemento de S con respecto a R , si y solamente si:

Existe un (y) : y pertenece a S ; lo cual implica que $x R y$.

El conjunto de elección. Además, el conjunto de los mejores elementos en S , se denomina su conjunto de elección $C(S, R)$ el cual está contenido en el conjunto maximal $M(S, R)$.

4. Cuasi-ordenaciones.

Dadas las relaciones para conjuntos de elementos maximales y conjuntos de elección, se pueden establecer algunos resultados fundamentales que permiten definir cuasi-ordenaciones y los casos especiales: ordenaciones parciales, cadenas y ordenaciones

Definición de cuasi-ordenación. Se define una "Cuasi-ordenación R " para todo (x, y, z) en el conjunto S : si existe R , tal que,

- | | |
|------------------------|--|
| ○ Propiedad II: | $(x I y) \ \& \ (y I z)$ implica que $(x I z)$ |
| ○ Propiedad PI: | $(x P y) \ \& \ (y I z)$ implica que $(x P z)$ |
| ○ Propiedad IP: | $(x I y) \ \& \ (y P z)$ implica que $(x P z)$ |
| ○ Propiedad PP: | $(x P y) \ \& \ (y P z)$ implica que $(x P z)$ |

Esas propiedades (II, PI, IP y PP) tienen las siguientes implicaciones:

- Cualquier conjunto finito cuasi-ordenado tiene al menos un elemento maximal. Se puede probar que (x) es el único elemento del conjunto de elección (x, y) si y solamente si (x) es preferido a (y) .
- Si R es reflexiva entonces (x) es el único elemento del conjunto de elección de (x,y) si y solamente si (x) es preferido a (y) .
- Cualquier conjunto finito cuasi-ordenado, si $C (S , R)$ es un conjunto no vacío, entonces el conjunto de elección $C (S , R)$ es igual al conjunto maximal $M (S, R)$
- Para cualquier conjunto cuasi-ordenado R sobre un conjunto finito S , se tiene que si (x,y) pertenecen al conjunto maximal $M(S,R)$, y que (x,y) pertenecen al conjunto de elección $C(S,R)$, de forma que xRy a la vez que yRx , ello conlleva que (x) es indiferente a (y) .

5. Subrelaciones y Compatibilidad.

Definición de subrelación: considere dos cuasi-ordenaciones (Q_1, Q_2) , de forma que (Q_1) es una subrelación de (Q_2) si y solamente si para todo (x, y) pertenece a X , se tiene que :

- $(x Q_1 y)$ implica que $(x Q_2 y)$
- $(x Q_1 y)$ y $\text{no } (y Q_1 x)$, implica que $\text{no } (y Q_2 x)$

Ello significa que siempre que (x) sea "*al menos tan bueno como*" o alternativamente "*mejor que*" (y) según la cuasiordenación Q_1 , también lo es según la cuasiordenación Q_2 , pero no necesariamente a la inversa.

Definición de compatibilidad. Si una cuasiordenación (Q) es una subrelación de una ordenación R , se dice entonces que R es compatible con (Q) . Además, cualquier cuasiordenación puede ser completada consistentemente con una ordenación de un subconjunto sobre el cual la cuasiordenación en cuestión es incompleta para cada par.

Dos cuasiordenaciones Q_1 y Q_2 son compatibles si y sólo si hay una ordenación compatible con cada una.

En la elección social esto es importante pues permite el uso de una serie de principios de preferencia independientes.

6. Funciones de elección y cuasi-transitividad.

Definición de función de elección: Una función de elección $C(S,R)$ definida en X es una relación funcional tal que el conjunto de elección $C(S,R)$ es no vacío para todo subconjunto no vacío S de X . Ello significa que hay un mejor elemento en cada subconjunto no vacío de X .

Definición de ordenación. Si una relación de preferencia infringe las condiciones de completitud y de reflexividad, entonces no existirá la función de elección. Sin embargo, si a la completitud y la reflexividad existe la transitividad, se logra entonces una ordenación.

Si R es una ordenación definida sobre un conjunto finito X , queda definida entonces una función de elección $C(S,R)$ en X .

Sin embargo, la condición suficiente para la existencia de una función de elección definidas por la reflexividad, completitud y transitividad en un conjunto finito, no es una condición necesaria.

Se puede encontrar una condición de suficiencia más débil.

Condición cuasi-transitiva de R : si para todo (x,y,z) en X ; $(xPy) \& (yPz)$ implica que (xPz) , la ordenación R es cuasi-transitiva.

Si la ordenación R es reflexiva, completa y cuasi-transitiva en un conjunto finito X , queda entonces definida una función de elección $C(s,R)$.

Se destaca que aunque la cuasi-transitividad es suficiente, no es necesaria para que exista una función de elección para un conjunto finito. De hecho se demuestra que ninguna condición definida sobre ternas solamente puede ser una condición necesaria para la existencia de funciones de elección.

Condición acíclica de la ordenación. R es acíclica en X si y solamente se cumple lo siguiente condición:

**Si x^1, x^2, \dots , pertenecen al conjunto finito (X)
 $x^1 P x^2 \& x^2 P x^3 \& \dots$ y sucesivamente.. $x^1 P$**

Ello significa que **si la ordenación R es reflexiva y completa, entonces una condición necesaria y suficiente para que $C(S,R)$ esté definida en un conjunto X finito, es que R sea acíclica en X** . Esta condición es necesaria para la existencia de funciones de elección y la existencia de una función de elección es importante para la elección racional.

7. Preferencia y elección racional.

El análisis de Sen define una función de elección sobre la base de una relación de preferencia binaria, de modo que la existencia de un conjunto de elección no vacío es equivalente a la existencia de alguna alternativa que se considera al menos tan buena como cualquier otra en el conjunto. Esta es una propiedad de racionalidad,

Arrow define ciertas condiciones de racionalidad en términos de las propiedades de la función de elección. Dada una función de elección $C(S)$ definida en algún conjunto X , no derivada necesariamente con respecto a alguna relación de preferencia binaria. Lo importante de estas funciones es que puede elegir y que la elección es racional. Bajo este enfoque se pueden derivar las dos propiedades de racionalidad, alfa y beta.

Propiedad alfa: si algún elemento de un subconjunto $S1$ contenido en $S2$ es mejor en $S2$, entonces es mejor en $S1$.

Propiedad beta: si (x,y) son ambas mejores en $S1$, un subconjunto de $S2$, una de ellas no puede ser mejor en $S2$ sin que la otra lo sea también en $S2$.

La propiedad alfa es un requisito básico en la elección racional y se le denomina la condición de "independencia de alternativas relevantes". Sen utiliza el siguiente ejemplo para explicar ambas propiedades:

La propiedad alfa afirma que si el campeón mundial de cierto juego es pakistaní, entonces debe ser también el campeón de Pakistán. La propiedad beta afirma que si algún pakistaní es un campeón mundial, entonces todos los campeones de Pakistán deben ser campeones del mundo.

Sen plantea en este contexto, las siguientes propiedades:

- Toda función de elección $C(S,R)$ generada por una relación binaria R , satisface la propiedad alfa pero no necesariamente la propiedad beta. Sugiere una estrecha relación
- Una función de elección $C(S,R)$ generada por una relación binaria R satisface la propiedad beta si y solamente si R es PI-transitiva
- En general las propiedades (PP) y (PI) son completamente independientes entre sí.
- Las propiedades (PP) y (PI) juntas implican la transitividad, dada la completitud de R .
- Una función de elección $C(S,R)$ derivada de una relación binaria R satisface la propiedad beta si y solamente si R es una ordenación.
- Si R es completa entonces se tiene que: primero, propiedad (PI) implica en ambas direcciones (IP); segundo, propiedad (PI) implica propiedad (II); y finalmente propiedad (PP) y propiedad (II) implican la propiedad (PI).

Además, propone dos diagramas gráficos que muestran las relaciones principales entre estas propiedades y la transitividad (T) del ordenamiento R , la existencia de la función de elección $C(S,R)$ en un conjunto S finito y el cumplimiento de las condiciones de racionalidad alfa y beta.

II. RELACIONES DE UNANIMIDAD.

1. El criterio de Pareto.

El criterio de comparación empleado en la economía del bienestar para la optimización del bienestar social según el criterio de Pareto. Bajo este enfoque se consideran las siguientes reglas:

- **Regla 1. Si todo el mundo en la sociedad es indiferente frente a dos situaciones (x,y) sociales alternativas, entonces la sociedad debería ser también indiferente. La sociedad es indiferente según Pareto entre (x) e (y) .**
- **Regla 2. Si al menos un individuo prefiere estrictamente (x) a (y) y todo individuo considera a (x) al menos tan buena como (y) , entonces la sociedad preferiría (x) a (y) . La opción (x) es mejor según Pareto que la opción (y) .**
-

El criterio es atractivo pues al cumplirse la primer regla a nadie le importará cual de las dos opciones (x,y) elija la sociedad. El cumplimiento de la segunda regla señala que no está en el interés de nadie elegir (y) por lo que parece razonable argumentar que la sociedad prefiere (x) sobre la opción de (y) .

Optimalidad Paretiana. Asuma una situación de elección social, definida para un conjunto de alternativas X entre las cuales debe tomarse una decisión.

- 1) Una alternativa (x) perteneciente al conjunto X , se describe como óptima de Pareto si no hay otra alternativa en X que sea mejor que (x) según Pareto.
- 2) La alternativa (x) es un óptimo paretiano si no podemos elegir una alternativa que todo el mundo considere al menos tan buena como (x) y que al menos una persona considere estrictamente mejor que (x) .

En la teoría de la economía del bienestar, la optimalidad de una política que induce un cambio económico, se juzga por el criterio de si se alcanza o no la optimalidad de Pareto. Sin embargo, el criterio presenta una limitación fundamental: si un individuo de la sociedad prefiere (x) a (y) , pero otro individuo tiene preferencias opuestas es decir prefiere (y) sobre (x) , entonces el criterio de Pareto no permite compararlos, con independencia de las preferencias de los otros individuos de la sociedad por esas alternativas.

La relación de preferencia social derivada de las preferencias individuales según el criterio de Pareto, aún cuando se puede argumentar que es reflexiva y transitiva (siempre que cada individuo tenga una cuasi ordenación) podría no ser completa, ello aunque todos los individuos que constituyen la sociedad tengan ordenaciones de preferencias completas.

El grado de incompletitud del criterio de Pareto dependerá precisamente de la que reine entre los individuos. Se dan los siguientes casos:

- 1) En un extremo. El caso en el cual todos los individuos tienen la misma ordenación de preferencias y la ordenación social será de hecho completa. No tiene que ser estrictamente la misma, con tal de que siempre que (x) sea preferida a (y) por algún individuo, y todos los demás consideren que (x) es al menos tan buena como (y).
- 2) En el otro extremo, el caso en el que dos individuos tienen preferencias estrictamente opuestas y no es posible comparar ningún par de alternativas bajo el criterio de Pareto. En forma más explícita, cada uno de los dos individuos tiene una ordenación fuerte sobre la gama completa de alternativas y siempre que uno prefiere una alternativa a otra, el otro individuo prefiere la última a la primera.

Parece claro entender que ambos casos por ser extremos no son los frecuentes en la sociedad humana. También puede argumentarse que existen casos intermedios para los cuales pueden hacerse comparaciones mediante el criterio de Pareto y ello es bueno para el análisis económico a pesar de no ser completo. Sin embargo, habrá casos intermedios en una amplia gama, para los cuales no pueden hacerse esas comparaciones, razón por la cual no es apropiado centrarse únicamente en el empleo del criterio Pareto.

Se argumenta esta situación de la siguiente forma **“Una economía puede ser óptima en este sentido aún cuando unos estén nadando en la abundancia y otros bordeen la indigencia, con tal de que no pueda mejorarse a los indigentes sin recortar los placeres de los ricos... Una economía puede ser óptima según Pareto y ser no obstante perfectamente indignante.”**

2. Reglas de elección inclusivas de Pareto.

Se define como regla de elección colectiva (CCR) a todo método que permite transformar las ordenaciones individuales a un ordenamiento de preferencia social.

- 1) **El método de decisión de la mayoría (MMD) es una regla de elección colectiva** por la que (x) se declara socialmente al menos tan buena como (y), si y solamente si, por lo menos tanta gente prefiere (x) a (y) como (y) a (x). Es una preferencia social intransitiva y decisiva para cada par, es decir produce ordenaciones de preferencias completas, es decir, (x) es socialmente al menos tan buena como (y) o (y) es socialmente al menos tan buena como (x)
- 2) **El criterio de Pareto es una regla de elección colectiva**, pero no es decisivo para cada par, debido a la posible falta de completitud de la regla paretiana. Los elementos óptimos en Pareto no guardan una jerarquía entre ellos.

Una regla de elección colectiva inclusiva de Pareto es aquella regla de decisión colectiva que incluye el criterio Pareto y que posiblemente tenga más alcance. Este es el caso de la regla de mayoría (MMD), para la cual si (x) es superior a (y) según Pareto, entonces debe estrictamente ganar a (y) en una votación por mayoría; aún cuando (x,y) no son comparables según Pareto y no obstante ganar una de ellas a la otra (o empatar indicando indiferencia social) en una votación por mayoría.

Debe señalarse que el criterio de Pareto está orientado hacia el logro de eficiencia en el uso de recursos y es neutral entre distribuciones de las rentas individuales. En consecuencia, una manera de obtener una mejor alternativa definida en un conjunto óptimo según Pareto, con más de un elemento es ordenar las alternativas óptimas de Pareto. Se argumenta que de esa forma se puede tener en cuenta consideraciones relativas a la distribución de las rentas, aún cuando ello entraña algunas dificultades.

Sen postula que una forma de extender el criterio de Pareto sería considerando indiferentes a todos los puntos óptimos según Pareto, lo cual significaría excluir del análisis las consideraciones de tipo distributivo. Este argumento es controversial y también conlleva algunos problemas

Es posible encontrar reglas de elección colectiva que no son decisivas, pero que permiten relaciones de preferencias más amplias que el criterio Pareto y que al mismo tiempo son inclusivas del criterio Pareto. Ejemplos de estas situaciones: criterios de bienestar agregados, soluciones de regateo y de justicia.

Sen argumenta que la mayoría de las reglas de elección colectiva son inclusivas de Pareto, al menos en una forma más débil. Plantea que (x) puede ser declarada socialmente mejor que (y), si todo el mundo prefiere estrictamente (x) a (y). Es débil en el sentido de que no se define acerca de que alguien prefiere (x) a (y) y de que el resto de los individuos considere a (x) tan buena como (y). Parece difícil entonces argumentar que (x) no sería

3. El consenso como una base de acción colectiva.

A pesar de que el criterio de Pareto es incompleto como cuasi-ordenamiento, se han propuesto argumentos (Buchanan, Tullock) para favorecer el consenso general o unanimidad como base de la acción social. Se argumenta que la unanimidad en las preferencias acerca de un tema, garantiza por lo general una base satisfactoria para la elección por parte de los individuos. Las dificultades surgen por la falta de unanimidad en muchas cuestiones que requieren decisiones de la sociedad.

Una forma de entender esta argumentación es plantear el *status quo* como referencia al cambio propuesto y que requiere de una decisión social bajo el principio de unanimidad. Como se plantea lógicamente el problema? Sen propone considerar la regla de unanimidad acerca de un cambio versus la alternativa de mantener el status-quo (no unanimidad). La regla para la elección social se resumiría de la forma siguiente:

Regla de elección social (conservadurismo puro):

Dado que algunos prefieren una alternativa (x) al status quo (y) y nadie considera a (x) peor que (y), entonces (x) es socialmente preferida a (y).

Cuando esa condición no se satisface, el status-quo (y) es preferido a (x).

Este método representa un conservadurismo supremo, pues una sola persona que se opone a la alternativa (x) puede bloquear la decisión social. De esta forma la regla de unanimidad equivale a la regla de minoría de uno (el poder de bloquear la acción). Sen sugiere que esta regla de decisión podría ser considerada como grotesca.

Finalmente, Buchanan y Tullock sugieren que los teóricos políticos modernos han desechado a priori el requisito de unanimidad en base a los conflictos de interés entre individuos y grupos sociales. En caso de no existir inicialmente la unanimidad sobre un estado o alternativa (x), las discusiones y el regateo (proceso de cabildeo) pueden llegar a conseguirla.

Sen apunta dos comentarios sobre el uso de la regla de unanimidad:

- 1) ***Las reglas de elección colectiva están basadas en ordenaciones individuales sobre descripciones completas de estados sociales (x, y, etc) que representan todas las combinaciones posibles de decisiones sobre cuestiones distintas incluyendo el cabildeo.***
- 2) ***Los compromisos que las personas están dispuestas a aceptar dependen mucho de su propia valoración del poder de regateo relativo.***

Sen señala que en algunas elecciones que impliquen compromisos (cabildeo) podría darse la unanimidad a pesar de los conflictos de intereses en distintas cuestiones. Sin embargo, ello no quiere decir que las ordenaciones individuales deban ser en general unánimes en su mayor parte. Además, el hecho de que todos los miembros de una comunidad acepten una cierta situación social (x) no significa necesariamente que sea preferida unánimemente a otras alternativas sociales. Concluye afirmando que ***“la aceptación general de una solución de compromiso no debería interpretarse como apoyo universal”***.

III. RELACIONES DE ELECCION COLECTIVA Y CRITERIO PARETO.

1. Elección y relación de Pareto.

Sen asume que cada individuo tiene una ordenación R_i (reflexiva, transitiva y completa) definida en el conjunto X de estados sociales y que R es la relación de preferencia social que agrupa a todas las R_i individuales. El análisis de R conlleva plantearse si efectivamente tienen o no esas características.

Definición de la regla de elección colectiva.

Es una relación funcional (f) tal que para cualquier conjunto de (n) ordenaciones individuales R_i (una ordenación para cada individuo) quede determinada una y solamente una relación de preferencia social R.

Es una regla decisiva si y solamente si su alcance está restringido a relaciones de preferencia completas R.

A partir de la relación de Pareto, Sen deriva la regla de elección colectiva como una cuasi-ordenación para toda combinación lógicamente posible de preferencias individuales. Esa regla no es necesariamente una ordenación ya que puede infringir la completitud.

Sen indica que la economía del bienestar tradicional ha sido esencialmente paretiana y que las reglas de elección colectiva empleadas en este análisis son reglas de elección inclusivas de Pareto, es decir las relaciones de Pareto son subrelaciones de R. Además, para todo conjunto de preferencias individuales (R_i) sobre cualquier conjunto finito de estados sociales (S), hay al menos un estado óptimo de Pareto.

2. Tests de Compensación.

Sen analiza la regla de Pareto ampliada para incorporar "tests de compensación". Define todos los estados sociales $S(x)$ que pueden alcanzarse mediante redistribución partiendo desde (x) , siendo parte de $S(x)$.

Bajo el enfoque de Kaldor (1939), (x) es superior a (y) , si y solamente si a partir de (x) podemos alcanzar mediante una redistribución un estado (z) tal que $(z P y)$ según el criterio de Pareto. Ello significa que "**si hay un paso de (y) a (x) , los ganadores pueden compensar a los perdedores y retener aún alguna ganancia**".

IV. RACIONALIDAD COLECTIVA.

1. La función de bienestar de Bergson-Samuelson.

Sen considera que "**una forma racional y sistemática de pensar sobre el bienestar social es tratar de definir una ordenación para la sociedad en todas las situaciones alternativas posibles**".

Bergson (1938) propuso que "**el bienestar social puede considerarse como una función de bienestar W de valores reales, cuyo valor se entiende que depende de todas las variables que afectan al bienestar**".

Esa función de bienestar social W puede incluir la relación de Pareto si así se desea, aun cuando ello no es obligatorio, dado que puede definirse de diversas formas y empleando distintos criterios (Samuelson, 1947).

Ejemplo de lo anterior. Se puede emplear la regla de indiferencia de Pareto como forma para definir la indiferencia social, lo cual requiere de asumir que todo el mundo en la sociedad sea indiferente (Scitovsky, 1942).

El uso de la función de bienestar social de Bergson permite ampliar este concepto:

- Aunque la persona 1 pueda salir mejor parada en (x) que en (y) , y la persona 2 mejor en (y) que en (x) , la sociedad podría no obstante ser indiferente, si el criterio social global es que la ganancia de uno compensa exactamente la pérdida de otro.
- Ello conlleva analizar la diferencia entre conservar constante el bienestar social en el sentido de Scitovsky y hacerlo en el sentido de Bergson.

Sen sugiere que si la función de bienestar de Bergson es inclusiva de Pareto como generalmente se supone, entonces la indiferencia social bajo Scitovsky implica eso mismo en el sentido de Bergson, pero no viceversa. Lo anterior significa que la cuasi-ordenación de Pareto está incluida en una ordenación social inclusiva de Pareto.

La definición de Bergson de función de bienestar es simple: primero, la función de bienestar no está especificada y responde a una estructura de pensamiento racional; segundo, nada dice quién proporciona sus fines (un moralista, una mayoría, una oligarquía, un dictador, una clase social, la tradición) es decir no se especifica la génesis de la ordenación social.

Bajo una perspectiva técnica, el método particular de representación de W es restrictivo para elegir entre situaciones sociales alternativas. No es en realidad necesario que exista una función W de valores reales; pues lo que falta es definir una ordenación social completa R sobre todas las alternativas posibles, la cual es independiente de una función de bienestar de valores reales. Sen sugiere que “lo que se precisa para la elección es una relación de preferencia que especifique una mejor alternativa en cada situación de elección”.

2. La función de bienestar de Bergson-Samuelson⁶.

Sen apunta que el concepto de función de bienestar W de Bergson (1938) y su posterior desarrollo por Samuelson (1947) permitió eliminar varios obstáculos para el pensamiento racional sobre elección social. Arrow (1951) se planteó sobre este tema las siguientes preguntas:

- Que debería determinar la función de bienestar social?
- Como dependería la función W de las ordenaciones de preferencias individuales?
- Cual debería ser la regla de elección colectiva?

Sen plantea los siguientes argumentos sobre este enfoque, a saber:

- 1) La pregunta segunda debería replantearse para evaluar la dependencia de la “ordenación social R ”, previamente especificada, en términos de las ordenaciones de preferencias individuales (R_i).
- 2) El concepto de función de bienestar social (FBS) de Arrow supone “ordenaciones para la sociedad” o su representación de valores reales (fbs), lo cual difiere del enfoque de Bergson.
- 3) Sugiere que “una (FBS) de Arrow determina una (fbs) de Bergson
- 4) La (FBS) es de un tipo particular de regla de elección colectiva en el que cada preferencia social que esté determinada es una ordenación (reflexiva, transitiva y completa).
- 5) El análisis de Arrow es exclusivo de FBS y de sus problemas, los cuales son propios de todas las reglas de decisión colectiva; aún cuando algunos de ellos como el famoso “Teorema de la Imposibilidad” es específico de la FBS.
- 6) Una FBS o una regla de decisión colectiva además de su concepción lógica y consistencia debe responder a ciertas condiciones de sensatez.

Se puede argumentar que la sensatez es una cuestión de opinión, lo cual sugiere que su interpretación de las condiciones de sensatez deben ser suaves, para evitar restricciones excesivas en la concepción de la FBS. Al respecto Arrow en su Teorema de Posibilidad demostró que un conjunto de condiciones relativamente suaves son en su conjunto restrictivas para la definición de toda posible FBS.

⁶ Bergson, A., *A Reformulation of Certain Aspects of Welfare Economics*, Quarterly Journal of Economics, 52, 1938. On the concept of Social Welfare, Quarterly Journal of Economics, 68, 1954.

3. El Teorema General de Posibilidad de Arrow⁷.

Sen argumenta que “**como método de pasar de preferencias individuales (R_i) a una preferencia social (R), la FBS debe tener el suficiente alcance para poder trabajar con cualquier conjunto lógicamente posible de ordenaciones individuales**”. Bajo este enfoque se pueden analizar los siguientes casos:

- El principio de Pareto como regla de elección ofrece una ordenación social correcta, si las preferencias individuales son unánimes, pero no conducirá a una ordenación social en otras situaciones, en las cuales dará relaciones de preferencias incompletas y no satisfará este requisito de Arrow.
- El método de decisión de mayoría genera intransitividad, a menos que las ordenaciones de preferencia individuales satisfagan ciertas condiciones o normas y también presenta fallas de completitud.

En este contexto Sen comenta las cuatro condiciones que usar Arrow en su teorema general de posibilidad para la función de bienestar social W :

- 1) La **condición de dominio no restringido (U)**. Una función de bienestar social siendo una regla de decisión colectiva debe ser válida para toda configuración lógicamente posible de ordenaciones de preferencia individual.
- 2) Debe satisfacer el principio de Pareto en su forma débil, si todos prefieren (x) a (y) entonces la sociedad debe también preferir (x) a (y), lo cual se denomina **condición Principio de Pareto Débil (P)**.
- 3) Debe satisfacer la **condición de independencia de alternativas irrelevantes (I)**, la cual establece que “la elección social entre un conjunto de alternativas debe depender de las ordenaciones de los individuos solamente sobre esas alternativas y no de otra cosa, como puede ser una clasificación de alternativas irrelevantes que no intervengan en la elección”.
- 4) La FBS no debe ser dictatorial, es decir debe cumplir la condición de que no debe haber un individuo tal que siempre que prefiera (x) a (y), la sociedad deba preferir (x) a (y), con independencia de la preferencia de todos los demás. Se denomina **condición de no dictadura (D)**.

Sen califica de sorprendente el análisis de Arrow al demostrar que no hay ninguna función de bienestar social (FBS) que pueda satisfacer simultáneamente estas cuatro condiciones⁸ que aparecen suaves en forma independiente pero que integradas tienen una implicación significativa para la economía del bienestar social.

⁷ K. Arrow. *Social Choice and Individual Values*. New York: Wiley 1951. *Rational Choice Functions and Orderings*, *Economica*, N.S., 26, 1959.

⁸ A. K. Sen. Op. Cit. La demostración correspondiente denominada el Teorema de Imposibilidad se presenta en el capítulo tercero, páginas 59 a 64.

En su interpretación de este resultado, Sen argumenta que permite evaluar el método de combinar las preferencias sociales en preferencias sociales que conducen a inconstancias. Así, **la regla de la mayoría presenta la condición de intransitividad y es contradictoria.**

La prueba es la siguiente: considere tres individuos (1,2,3) y tres alternativas (x,y,z). Asuma que 1 prefiere (x a y ; y a z), que 2 prefiere (y a z ; z a x) y que 3 prefiere (z a x ; x a y). Se comprueba que (x) puede vencer a (y) por dos votos a uno; que (y) puede vencer a (z) por dos votos a uno; de modo que por transitividad (x) debe vencer a (z), lo cual no es cierto pues (z) vence a (x) por dos votos a uno, lo cual es una contradicción.

La regla de mayoría satisface la condición P, la condición I y la condición D, pero no satisface la condición U del teorema de posibilidad de Arrow y por lo tanto no es una función de bienestar aceptable bajo dichas condiciones. Para Sen la importancia del teorema es la siguiente

radica en el hecho de que muestra que este problema se presenta no solamente para el método de decisión de la mayoría, que es después de todo solamente un método de elección social, sino para todo método conocido o desconocido que pueda concebirse. No hay posibilidad de obtener una función de bienestar social tal que las cuatro condiciones puedan cumplirse en forma simultánea.

No debe olvidarse que las funciones de bienestar social de Arrow constituyen una clase particular de reglas de elección colectiva, las cuales requiere que todas las preferencias sociales sean ordenaciones (reflexiva, transitiva y completa).

De manera especial Sen señala que lo importante es que haya una función de elección, (una mejor alternativa en cada subconjunto) y para ello es indispensable que se cumplan las condiciones de reflexividad y la completitud, no así la transitividad. En esta nueva situación, la relación de preferencia, cumpliendo esas dos condiciones requiere como condición necesaria y suficiente para la existencia de una función de elección de la condición de aciclicidad analizada previamente.

La condición de aciclicidad requiere que si (x1) es preferida a (x2); si (x2) es preferida a (x3); y así sucesivamente hasta (xn); entonces (x1) debe ser considerada al menos tan buena como (xn). Esta condición es más débil que la transitividad.

El "resultado de la imposibilidad de Arrow se aplica estrictamente a las funciones de bienestar social. Pero si el objetivo es sólo asegurar que partiendo de un entorno cualquiera habrá una alternativa elegida, entonces eso puede garantizarse exigiendo únicamente la condición de aciclicidad de la preferencia social sin requerir transitividad.

Sen concluye que las funciones de decisión social son las reglas de elección colectiva que generan relaciones de preferencia que son suficientes para la existencia de funciones de elección y que cumplen a su vez las cuatro condiciones de Arrow.

BIBLIOGRAFIA

A. K. Sen, "Collective Choice and Social Welfare". Cambridge: Holden-Day, Inc.. 1969.