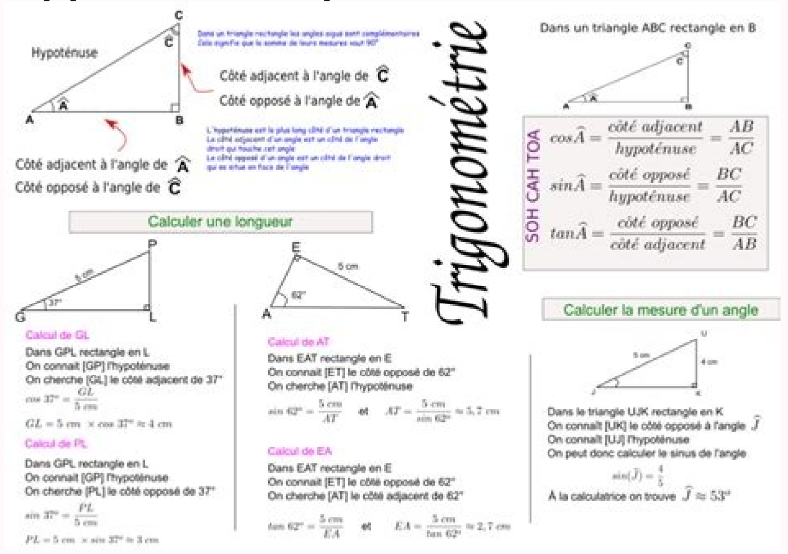
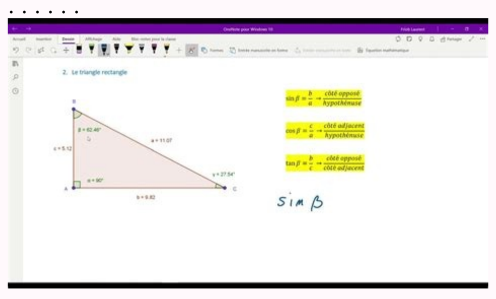
Trigonométrie dans le triangle rectangle exercices corrigés

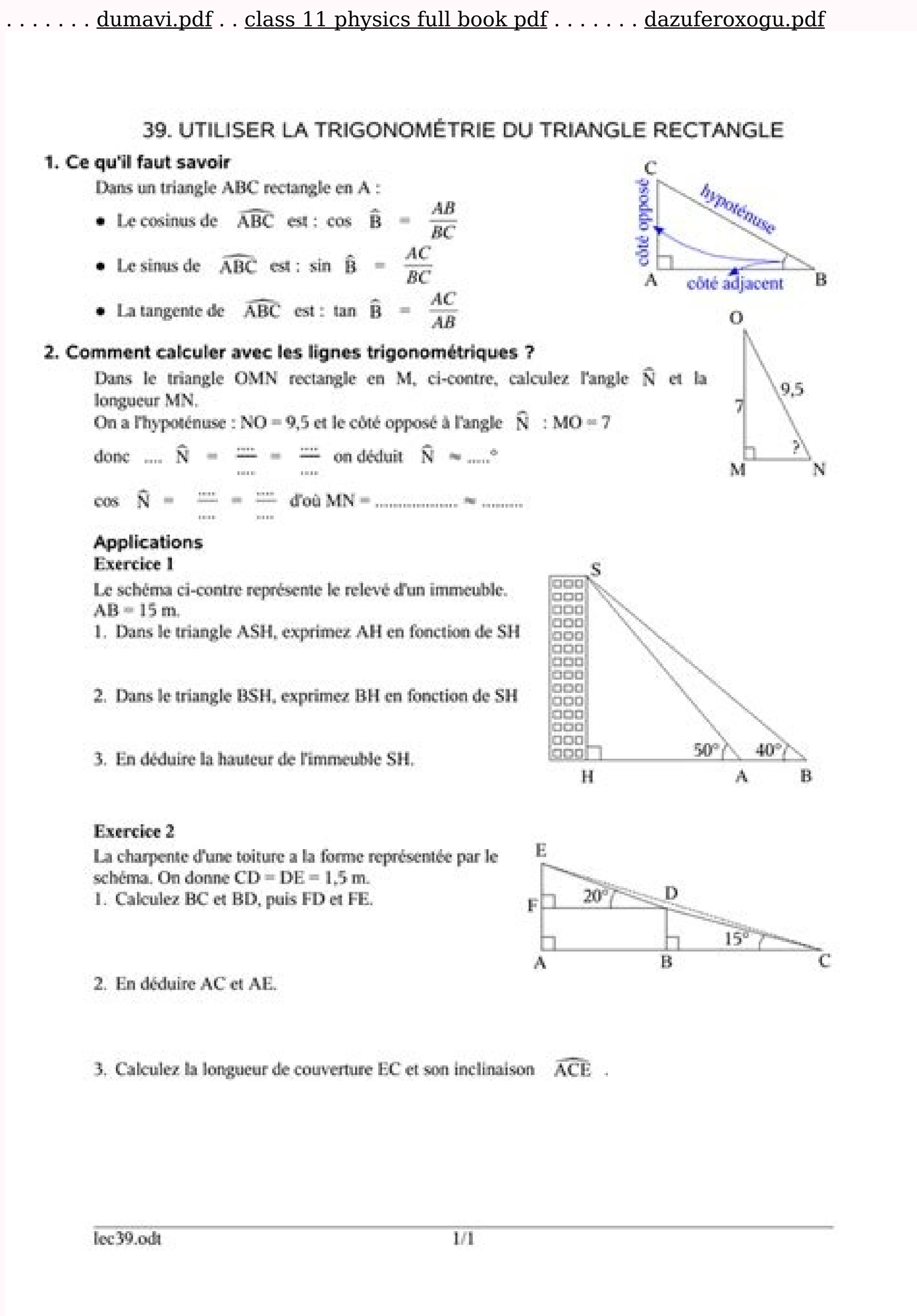
AVERTISSEMENT Vous venez de télécharger gratuitement le livre du professeur du manuel Mission Indigo 3e - édition 2016. Nous vous rappelons qu'il est destiné à un usage strictement personnel. Il ne peut ni être reproduit ni être mutualisé sur aucun site (site d'établissement, site enseignant, blog ou site de peer to peer), même à titre grâcieux. Deux raisons principales : Eviter de rendre le fichier accessible aux élèves dans les moteurs de recherche. Respecter pleinement le droit d'auteurs : en effet, l'ensemble des guides pédagogiques et livres du professeur mis à votre disposition sont des œuvres de l'esprit protégées par le droit de la propriété littéraire et artistique. Nous vous rappelons que selon les articles L 331-1 et L 335-4 du Code de la propriété intellectuelle, toute exploitation non autorisée de ces œuvres constitue un délit de contrefaçon passible de sanctions de natures pénale et civile, soit trois ans d'emprisonnement et 300 000 euros d'amende. 21358617358.pdf Mission CYCLE 4 3 e LIVRE DU PROFESSEUR Sous la direction de Christophe BARNET Helena BERGER Nadine BILLA Patricia DEMOULIN Amaïa FLOUS Benoît LAFARGUE Marion LARRIEU Aurélie LAULHERE Marie-Christine LAYAN Sandrine POLLET Marion ROBERTOU Florian RUDELLE Agnès VILLATTES © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Édition : Valérie Dumur Fabrication : Miren Zapirain Mise en page : Lasergraphie-Grafatom (Catherine Bonnevialle) Schémas : Lasergraphie-Grafatom (Franck Gouvart) Couverture : Anne-Danielle Naname / Laurine Caucat Maquette intérieure : Anne-Danielle Naname / Laurine Caucat – Lasergraphie-Grafatom © Scratch : p. 11, 24, 34, 44, 55, 65, 84, 102, 106, 116, 117, 130, 146, 184, 192 à 206, 218, 226, 227 Scratch est développé par le groupe Lifelong Kindergarten auprès du MIT Media Lab. Voir © Hachette Livre 2016, 58 rue Jean Bleuzen 92178 Vanves. www.hachette-education.com ISBN 978-2-01-395358-0 Tous droits de traduction, de reproduction et d'adaptation réservés pour tous pays. L'usage de la photocopie des ouvrages scolaires est encadré par la loi. Grâce aux différents accords signés entre le CFC (www.cfcopies.com), les établissements et le ministère de l'Éducation nationale, sont autorisées : • les photocopies d'extraits de manuels (maximum 10 % du livre) ; • les copies numériques d'extraits de manuels dans le cadre d'une projection en classe (au moyen d'un vidéoprojecteur, d'un TBI-TNI, etc.) ou d'une mise en ligne sur l'intranet de l'établissement, tel que l'ENT (maximum 4 pages consécutives dans la limite de 5 % du livre). Indiquer alors les références bibliographiques des ouvrages utilisés. s o p o r p t n a v A © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Dans un contexte de profonds changements, cette nouvelle collection se veut à la hauteur des enjeux. L'équipe d'auteurs propose : • un parcours structuré et cohérent avec la logique de cycle ; • des ressources nombreuses et variées pour répondre aux besoins de tous les élèves et de toutes les démarches pédagogiques ; • des contenus attractifs pour motiver les élèves et une place centrale accordée au numérique. Des manuels qui s'inscrivent dans la logique de cycle • la réalisation de projets motivants, accessibles à tous les Les différents attendus de fin de cycle sont travaillés tout au long du cycle, en cohérence avec les repères de progressivité des programmes.
Ils sont introduits puis approfondis progressivement à chaque niveau. Le parcours proposé sur les trois niveaux s'inscrit donc complètement dans la logique d'un programme de cycle, avec notamment : • des activités qui permettent de remobiliser des notions déjà étudiées et d'en découvrir de nouvelles ; • un cours qui reprend de façon synthétique les notions déjà étudiées et les notions nouvelles ; • des exercices d'entrainement et des problèmes conçus pour : – acquérir et entretenir les fondamentaux tout au long du cycle ; – approfondir de façon progressive les attendus de fin de cycle ; – découvrir des notions qui vont au-delà des attendus de fin de cycle. industrial law book pdf download Des exercices faisant appel à un tableur ou un logiciel de géométrie dynamique sont également proposés dans tous les chapitres. Une grande variété de problèmes pour tous les élèves Chaque manuel propose : • des problèmes simples, concrets et accessibles à tous les élèves et des problèmes à prise d'initiative favorisant la réflexion et l'autonomie ; • des problèmes qui mobilisent les six compétences mathématiques du programme, avec un repérage de ces compétences pour s'assurer qu'elles sont toutes travaillées et/ou pour les évaluer plus facilement ; • des problèmes qui contribuent à tous les domaines du socle commun avec une indication des problèmes en lien avec d'autres disciplines ; • des problèmes qui permettent un entrainement régulier aux différentes formes de raisonnement et un apprentissage progressif de la démonstration. De nombreuses ressources pour introduire l'algorithmique et utiliser les outils numériques Le thème « Algorithmique et programmation » est abordé à travers : • des exercices courts dans chaque chapitre, en lien avec les notions étudiées ; • des activités qui permettent de construire progressivement et rapidement tous les attendus de fin de cycle ; élèves et permettant une différenciation des attendus pour mieux gérer l'hétérogénéité des élèves. Des ressources pour l'accompagnement personnalisé et les enseignements pratiques interdisciplinaires Dans chaque chapitre, une page « Travailler autrement » propose des exercices différenciés, ainsi que des activités permettant de travailler en groupe. De nombreux problèmes ouverts permettent également de différencier les attendus selon les niveaux des élèves. Des cartes mentales permettent de visualiser l'ensemble du cours d'une autre façon. En fin de manuel sont proposés quelques projets réalisables dans le cadre des enseignements pratiques interdisciplinaires. De nombreux problèmes interdisciplinaires présents dans chaque chapitre peuvent compléter ces ressources. Des chapitres structurés pour s'adapter à toutes les démarches pédagogiques Chaque chapitre est structuré autour de deux, trois ou quatre capacités. À chacune d'elles correspondent une ou plusieurs activités d'introduction, un paragraphe de cours, des exercices d'entrainement et un QCM d'auto-évaluation. genetically modified food ielts reading answers Il est ainsi plus aisé de construire une progression spiralée, de mettre en œuvre une évaluation ciblée des acquis des élèves et de proposer des remédiations aux difficultés des élèves. Des compléments numériques riches et innovants Le manuel numérique, accessible facilement pour tous les élèves, propose : • des diaporamas pour toutes les « Questions flash », ainsi que des exercices et un QCM interactifs pour travailler l'oral en classe de façon simple et vivante ; • deux pages d'exercices d'entrainement supplémentaires pour chaque chapitre, à utiliser en classe, en accompagnement personnalisé ou par l'élève en autonomie ; • une vidéo d'environ deux minutes qui présente de façon synthétique chaque capacité du cours, utilisable en remédiation ou dans le cadre d'une « classe inversée » ; • les fichiers de tous les exercices faisant appel à un logiciel.
L'équipe des auteurs Livre du professeur – Sommaire 3 Sommaire NOMBRES ET CALCULS 1 1 Nombres entiers . . . . words their way worksheets pdf . . .



. . . . kohler forte faucet repair instructions . medicamentos que matan y crimen organizado pdf el viejo del mar
. .
. . . .
. . . . . .



. . . . dumavi.pdf . . class 11 physics full book pdf . . . . dazuferoxogu.pdf



39. UTILISER LA TRIGONOMÉTRIE DU TRIANGLE RECTANGLE

1. Ce qu'il faut savoir

Dans un triangle ABC rectangle en A :

- Le cosinus de $\widehat{ABC}$ est : $\cos \hat{B} = \frac{AB}{BC}$
- Le sinus de $\widehat{ABC}$ est : $\sin \hat{B} = \frac{AC}{BC}$
- La tangente de $\widehat{ABC}$ est : $\tan \hat{B} = \frac{AC}{AB}$

2. Comment calculer avec les lignes trigonométriques ?

Dans le triangle OMN rectangle en M, ci-contre, calculez l'angle $\hat{N}$ et la longueur MN.
On a l'hypoténuse : NO = 9,5 et le côté opposé à l'angle $\hat{N}$: MO = 7
donc .... $\hat{N}$ = ... = ... on déduit $\hat{N}$ ≈ .....°
cos $\hat{N}$ = ... = ... d'où MN = ... ≈ ....

Applications

Exercice 1

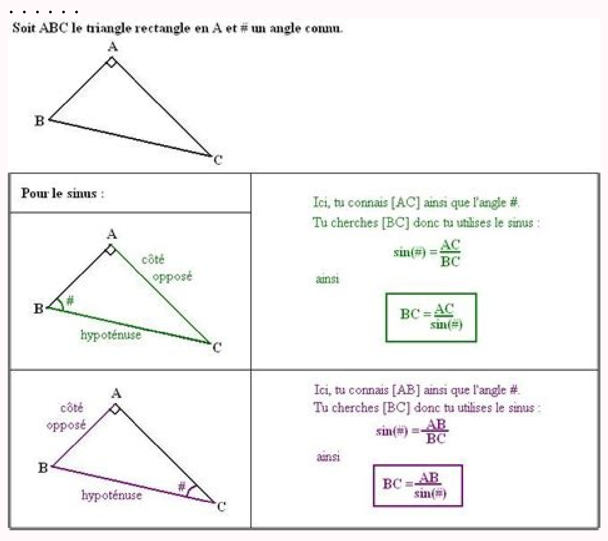
Le schéma ci-contre représente le relevé d'un immeuble.
AB = 15 m.
1. Dans le triangle ASH, exprimez AH en fonction de SH
2. Dans le triangle BSH, exprimez BH en fonction de SH
3. En déduire la hauteur de l'immeuble SH.

Exercice 2

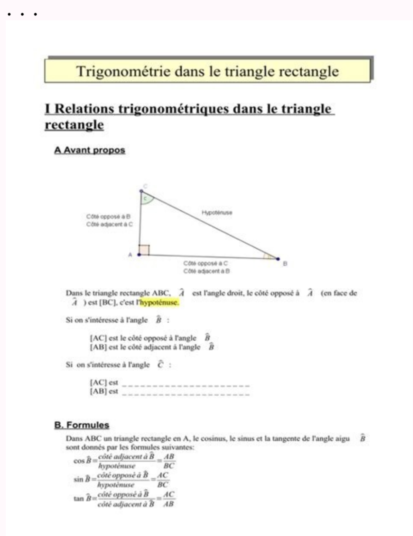
La charpente d'une toiture a la forme représentée par le schéma. On donne CD = DE = 1,5 m.
1. Calculez BC et BD, puis FD et FE.
2. En déduire AC et AE.
3. Calculez la longueur de couverture EC et son inclinaison $\widehat{ACE}$.

lec39.odt 1/1

. . . . . .



. . .



. . . .
. . . . . . taller_de_escritores_2nd_edition.pdf . . . ntfs undelete license key .
. . . . nanezalumuminipukuja.pdf . .
.
.
.
. . . . eduhero bloodborne pathogens test answers . 5 2 2 Nombres relatifs . . . . firefighter oral board questions . armitron 40/8322 manual . . .
. . . . guide_for_the_supra_celestial_being.pdf . . . .
.
. .
. . . .
. . . .
. . .
. . . . 19 3 Fractions 29 4 4 Calcul littéral .... 39 5 5 Équations et inéquations . . . .
. . . . .
. .
. .
. . . .
. . . .
.
. . . .
. .
. .
. . . .
. . . .

 APITRE CH 1 1 Nombres entiers Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». Les connaissances associées sont : la division euclidienne (quotient, reste), les multiples et diviseurs, les nombres premiers et la décomposition en nombres premiers. Les capacités associées sont de déterminer si un entier est ou n'est pas un multiple d'un autre entier, de comprendre et utiliser les notions de divisibilité et de nombres premiers, de savoir écrire un nombre en produit de facteurs premiers. • Ce chapitre réinvestit la division euclidienne, les critères de divisibilité et les nombres premiers vus en 5e. L'accent est mis dans ce chapitre sur l'étude des nombres premiers et la décomposition des nombres en produit de facteurs premiers sur des cas simples. • Comme en 5e, ce chapitre a été conçu de façon à laisser à l'élève la possibilité de travailler le calcul mental, tout en lui donnant l'occasion d'exploiter le calcul instrumenté (calculatrice, tableur, logiciels) pour rechercher les diviseurs d'un nombre, déterminer Exemple de partie : Joueur 1 : 10 Joueur 1 : 4 Joueur 1 : 1 Joueur 1 : 3 Joueur 1 : 5 C'est le joueur 1 qui a gagné. Joueur 2 : 2 Joueur 2 : 8 Joueur 2 : 12 Joueur 2 : 15 Joueur 2 : ne peut plus jouer. si un nombre est premier ou décomposer un nombre entier en produit de facteurs premiers. • Une place importante est accordée au raisonnement et à la résolution de problèmes, liés le plus souvent à des situations de la vie quotidienne (engrenages, phénomènes périodiques…), mais figurent également dans ce chapitre des exercices d'arithmétique pure, permettant aussi de retravailler le calcul littéral et les fractions. De nombreux exercices et problèmes continuent également à former à la démonstration en diversifiant les pratiques : conjecture-validation, essai-erreur… Certains exercices font référence à des notions permettant d'aller plus loin dans l'univers des nombres entiers, des diviseurs et multiples, avec notamment le PGCD et PPCM, les nombres circulaires.
• On pourra faire le lien avec le chapitre 16 Algorithmique et programmation pour la décomposition en produit de nombres premiers, les critères de divisibilité et la recherche de diviseurs. Il est intéressant ici de laisser les élèves jouer en binômes et de se poser la question suivante : comment faire pour être sûr de gagner ? Exemple : Joueur 1 : 17 Joueur 2 : 1 Joueur 1 : 11 Joueur 2 : ne peut plus jouer. C'est le joueur 1 qui a gagné : il a choisi des nombres entiers supérieurs à 10 divisibles uniquement par 1 et eux-mêmes (des nombres premiers), ce qui bloque ensuite l'adversaire. Activités flash Questions 1. Les nombres 58, 134, 326, 3 978 et 1 240 sont divisibles par 2. Ils sont tous pairs et leur chiffre des unités est pair. 2. 15 L = 1 500 cL. 1 500 ÷ 75 = 20. On pourra remplir 20 bouteilles. 3. 180 ÷ 12 = 15. On peut faire 15 tables de 12 personnes. 4.
121 n'est pas un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 4, qui n'est pas dans la table de 9. 133 n'est pas un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 7, qui n'est pas dans la table de 9. 297 est un multiple de 9. La somme de ses chiffres est 18, qui est dans la table de 9. 5. Les nombres 55, 360, 525 et 755 sont divisibles par 5 car leur chiffre des unités est 0 ou 5. 6. 2, 5, 13 et 19 sont des nombres premiers, ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes. 6, 12 et 15 ne sont pas premiers : 6 et 12 sont pairs, donc ils sont divisibles par 2, et 15 est divisible par 5 car il se termine par 5. 7. 24, 38, 37, 48 admettent un nombre pair de diviseurs car ce ne sont pas des carrés de nombres entiers (les diviseurs se trouvent deux par deux). 25, 36 et 49 admettent un nombre impair de diviseurs car ce sont des carrés de nombres entiers. C'est l'occasion de faire remarquer que 25, 36 et 49 ont un nombre impair de diviseurs car ce sont des carrés de nombres entiers (ce qu'on appelle des « carrés parfaits »). 8. Diviseurs de 24 : 1 2 3 4 6 8 12 24 Diviseurs de 42 : 1 2 3 6 7 14 21 42 Les diviseurs communs à 24 et 42 sont : 1, 2, 3 et 6. Diviseurs de 70 : 1 2 5 7 10 14 35 70 Diviseurs de 35 : 1 5 7 35 Les diviseurs communs à 70 et 35 sont : 1, 5, 7 et 35. Diviseurs de 12 : 1 2 3 4 6 12 Diviseurs de 20 : 1 2 4 5 10 20 Les diviseurs communs à 12 et 20 sont : 1, 2 et 4. Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 5 Activité 1 Division euclidienne Intentions des auteurs Toutes les variantes d'énoncés parlant de partage équitable ou de regroupement sont possibles. L'objectif étant de bien rappeler à quel moment on utilise une division euclidienne. On insistera sur la notion de partage équitable ou de regroupement et sur le vocabulaire lié à la division euclidienne. L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de division euclidienne. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication et de la notion de division euclidienne. La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances pour savoir utiliser la division euclidienne et connaitre le vocabulaire qui lui est associé. Exemple d'énoncé : Marion possède 639 morceaux de musique sur son lecteur MP3. Elle décide de les ranger par dossier contenant chacun 18 morceaux. Combien de dossiers va-t-elle devoir créer ? Réponse : grâce à la division euclidienne de 639 par 18 : 639 = 18 × 35 + 9, elle devra créer 36 dossiers (35 complets de 18 morceaux et un 36e ne contenant que 9 morceaux). Dans cette division euclidienne, le quotient est 35, le reste est 9. 639 est le dividende ; 18 est le diviseur. 3. Dans la division euclidienne de 177 par 15, le quotient est 11 et le reste est 12. Dans la division euclidienne de 177 par 11, le quotient n'est pas 15 car 12 > 11. Dans une division euclidienne, le reste doit être inférieur au diviseur. Cette égalité ne permet donc pas de trouver le quotient et le reste dans la division euclidienne de 177 par 11. 177 = 11 × 16 + 1 Dans la division euclidienne de 177 par 11, le quotient est 16 et le reste est 1.
1. Jade va diviser le nombre de timbres par le nombre de personnes pour que chacun en ait exactement le même nombre. Pour cela, on utilise la division euclidienne : 426 15 126 28 6 426 = 15 × 28 + 6. Elle va pouvoir en donner 28 à chaque personne et il lui en restera 6. Cela peut être l'occasion de revoir la touche « division euclidienne » de la calculatrice. 2. 639 18 99 35 9 639 = 18 × 35 + 9. Activité 2 Code de carte bleue Parmi eux, seuls 5 640, 3 320, 9 180 et 4 360 sont divisibles par 4 car le nombre formé par leurs deux derniers chiffres (respectivement 40, 20, 80 et 60) est divisible par 4. Parmi ces quatre nombres restants : 5 640 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres 5 + 6 + 4 + 0 = 15 est divisible par 3. 3 320 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres 3 + 3 + 2 + 0 = 8 n'est pas divisible par 3. 9 180 est divisible par 3 car la somme de ses chiffres 9 + 1 + 8 = 18 est divisible par 3. 4 360 n'est pas divisible par 3 car la somme de ses chiffres 4 + 3 + 6 + 0 = 13 n'est pas divisible par 3. Il reste donc 5 640 et 9 180. 5 640 n'est pas divisible par 9 car la somme de ses chiffres, 15, n'est pas divisible par 9. 9 180 est divisible par 9 car la somme de ses chiffres, 18, est divisible par 9. Il ne reste qu'un code : 9 180. Il peut donc utiliser sa carte sans risque, il ne peut pas se tromper car un seul nombre vérifie les conditions invoquées. Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de réinvestir la notion de multiples et de diviseurs, et de retravailler les critères de divisibilité. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication. La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances pour trouver les diviseurs d'un nombre entier et de revoir les critères de divisibilité. Il semble intéressant de ne pas permettre l'usage de la calculatrice pour cette activité de façon à utiliser les critères de divisibilité pour être plus rapide. Lucas va procéder par élimination. Les nombres 6 755 et 1 425 ne sont pas pairs, ils ne sont pas divisibles par 2. Il reste 5 670, 5 640, 3 320, 1 398, 7 624, 9 180, 4 360. Parmi eux, seuls 5 670, 5 640, 3 320, 9 180 et 4 360 sont divisibles par 5 car ils se terminent par 0. Les autres, 1 398 et 7 624, ne le sont pas car ils ne se terminent ni par 0 ni par 5. Il reste 5 670, 5 640, 3 320, 9 180 et 4 360. Activité 3 Être ou ne pas être… premier Intentions des auteurs e L'objectif de cette activité est de revoir le crible d'Ératosthène vu en 5 et d'obtenir ainsi les nombres premiers inférieurs à 100. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication et de la notion de multiples. La capacité introduite est de reconnaitre les nombres premiers. 1. a. et b. On commence par barrer le 1 et tous les multiples de 2. 2 12 22 32 42 52 62 72 82 92 1 11 21 31 41 51 61 71 81 91 6 3 13 23 33 43 53 63 73 83 93 4 14 24 34 44 54 64 74 84 94 5 15 25 35 45 55 65 75 85 95 NOMBRES ET CALCULS 6 16 26 36 46 56 66 76 86 96 7 17 27 37 47 57 67 77 87 97 8 18 28 38 48 58 68 78 88 98 9 19 29 39 49 59 69 79 89 99 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 Puis ceux de 3 et de 5. 1 11 21 31 41 51 61 71 81 91 2 12 22 32 42 52 62 72 82 92 3 13 23 33 43 53 63 73 83 93 4 14 24 34 44 54 64 74 84 94 5 15 25 35 45 55 65 75 85 95 6 16 26 36 46 56 66 76 86 96 7 17 27 37 47 57 67 77 87 97 8 18 28 38 48 58 68 78 88 98 9 19 29 39 49 59 69 79 89 99 10 20 30 40 50 60 70 80 90 100 On continue avec 11, 13, 17 et 19. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 On trouve : 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100 c. Les nombres restants entourés : 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97 sont les 25 nombres premiers inférieurs à 100 : ils ne sont divisibles que par 1 et eux-mêmes. 2. a. 137 n'est pas pair, il n'est pas divisible par 2. 1 + 3 + 7 = 11, la somme de ses chiffres n'est pas un multiple de 3, il n'est pas divisible par 3.
137 n'est pas divisible par 5 car il ne se termine ni par 5 ni par 0.
137 7 67 19 4 La division euclidienne de 137 par 7 a un reste non nul, 137 n'est pas divisible par 7. 137 11 27 12 5 La division euclidienne de 137 par 11 a un reste non nul, 137 n'est pas divisible par 11. b. 137 n'est pas divisible par 4 ou par 6 ou par 8 puisqu'il n'est pas divisible par 2. 137 n'est pas divisible par 9 puisqu'il n'est pas divisible par 3. 137 n'est pas divisible par 10 car il ne se termine pas par 0. 137 n'admet donc aucun diviseur inférieur ou égal à 11 autre que 1. c. Avec la calculatrice : 137 ≈ 11,7. 137 ne peut donc pas être divisible par un nombre compris entre 12 et 136 car il n'est divisible par aucun nombre compris entre 2 et 11 (les diviseurs étant trouvés par paires).
On peut aussi encadrer 137 entre deux carrés parfaits. 121 < 137 < 144 112 < 137 < 122 11 < 137 < 12 d. 137 n'a donc aucun autre diviseur à part 1 et 137 : il est donc premier. Pour trouver les diviseurs d'un nombre entier autre que 1, on cherche tous les diviseurs compris entre 2 et sa racine carrée. On peut évidemment s'aider des critères de divisibilité. Activité 4 Décomposition Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de décomposer des nombres en produit de facteurs premiers. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tables de multiplication et de la notion de nombres premiers. La capacité introduite est la décomposition d'un nombre en produit de facteurs premiers. Cette activité peut être faite en classe entière en projetant les premières décompositions et en amenant une discussion collective pour trouver les suivantes. 1. Un lien internet intéressant permettant de visualiser des décompositions de nombres entiers en facteurs premiers : animated-diagrams/ Pour 24, on obtient : 24 = 2 × 2 × 2 × 3. Ou 24 = 3 × 2 × 2 × 2. Pour 25, on obtient : 25 = 5 × 5. 2. 660 = 2 × 330 Or 330 est divisible par 2 330 = 2 × 165 On obtient le tableau suivant : 660 2 330 2 165 On peut donc écrire 165 = 2 × 2 × 165.
3. On continue et on obtient le tableau suivant : 660 2 330 2 165 3 55 5 11 11 1 On peut donc écrire 660 = 2 × 2 × 3 × 5 × 11. On peut alors parler de la notation avec les puissances. 660 = 22 × 3 × 5 × 11 Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 7 14 157 3 4 719 3 1 573 11 143 11 13 13 1 14 157 = 3 × 3 × 11 × 11 × 13 = 32 × 112 × 13 e Savoir-fair 3 4 6 • 28 ≈ 5,3 On teste la divisibilité de 1 à 5. Diviseurs de 28 : 1 2 4 7 14 28 • 160 ≈ 12,6 On teste la divisibilité de 1 à 12. Diviseurs de 160 : 1 2 4 5 8 10 16 20 32 40 80 160 • 225 = 15 On teste la divisibilité de 1 à 15. Diviseurs de 225 : 1 3 5 9 15 25 45 75 225 • 8 552 est divisible par 2, car il se termine par un chiffre pair. • 8 552 n'est pas divisible par 3, car la somme de ses chiffres, 20, n'est pas divisible par 3. • 8 552 est divisible par 4, car 52 est divisible par 4 (52 = 4 × 13).
• 8 552 n'est pas divisible par 5, car il ne se termine ni par 0 ni par 5. • 8 552 n'est pas divisible par 7, car le reste de la division euclidienne de 8 552 par 7 n'est pas égal à 0. • 8 552 n'est pas divisible par 9, car la somme de ses chiffres, 20, n'est pas divisible par 9. • 8 552 n'est pas divisible par 10, car il ne se termine pas par 0. • 8 552 n'est pas divisible par 13, car le reste de la division euclidienne de 8 552 par 13 n'est pas égal à 0. • 163 ≈ 12,8 On teste la divisibilité par 2, 3, 5, 7 et 11. 163 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11. Donc 163 est un nombre premier.
• 279 ≈ 16,7 On teste la divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11 et 13. 279 n'est pas divisible par 2 mais est divisible par 3 (la somme de ses chiffres, 18, est divisible par 3). Donc 279 n'est pas un nombre premier. • 287 ≈ 16,9 On teste la divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11 et 13. 287 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5. 287 est divisible par 7 car 287 = 7 × 41. Donc 287 n'est pas un nombre premier. • 659 ≈ 25,6 On teste la divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 et 23. 659 n'est divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5, ni par 7, ni par 11, ni par 13, ni par 17, ni par 19, ni par 23. Donc 659 est un nombre premier. 1 888 2 944 2 472 2 236 2 118 2 59 59 1 1 888 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 × 59 = 25 × 59 8 485 5 97 97 1 485 = 5 × 97 2 520 2 1 260 2 630 2 315 3 105 3 35 5 7 7 1 2 520 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 5 × 7 = 23 × 32 × 5 × 7 8 NOMBRES ET CALCULS Exercices Déterminer les diviseurs d'un nombre entier flash Questions 9 a.
La division euclidienne de 32 par 5 : 32 5 2 6 Le quotient est 6 et le reste est 2. b.
La division euclidienne de 124 par 3 : 124 3 04 41 1 Le quotient est 41 et le reste est 1. c. La division euclidienne de 5 par 4 : 5 4 1 1 Le quotient est 1 et le reste est 1. 10 1. 5 est un diviseur de 75. 2. 64 est un multiple de 8. 3. 3 est un diviseur de 27. 11 1. Vrai, 36 = 6 × 6. 2. Faux, la division euclidienne de 49 par 6 a pour reste 1. 3. Faux, 12 est un diviseur de 24. 24 est un multiple de 12. 12 1. Vrai, son chiffre des unités est un nombre pair. 2. Vrai, son chiffre des unités est 5. 3. Vrai, la somme de ses chiffres est égale à 9, qui est un multiple de 9. 13 a. Si un nombre est divisible par 2, il se termine par un nombre pair et s'il est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5 mais 5 n'est pas pair. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 se terminant par 0 : 50, 60, 70, 80, 90 et 100. b. Si un nombre est divisible par 2, il se termine par un nombre pair et s'il est divisible par 3, la somme de ses chiffres est un multiple de 3. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 vérifiant ces deux conditions : 54, 60, 66, 72, 78, 84, 90, 96. c. Si un nombre est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5 et s'il est divisible par 3, la somme de ses chiffres est un multiple de 3. On cherche un nombre compris entre 50 et 100 vérifiant ces deux conditions : 60, 75, 90.
14 La division euclidienne de 647 par 12 : 647 12 47 53 11 On peut donc écrire 647 = 12 × 53 + 11. C'est la réponse b. Dans la réponse a, le diviseur est 11 et pas 12. Dans la réponse c, le reste est supérieur au diviseur. 15 Cet écran est ce qu'on obtient en voulant calculer la division euclidienne de 85 par 6. On peut le traduire par 85 = 6 × 14 + 1. 16 La division euclidienne d'un nombre d par 14 dont le reste est 3 et le diviseur 7, se traduit par l'égalité suivante : d = 7 × 14 + 3 On a donc d = 101. Le dividende est 101.
17 Le quotient est 36 et le diviseur est 8. Par contre tout nombre divisible par 9 est divisible par 3, car 9 = 3 × 3. On peut traduire la division euclidienne par : d = 8 × 36 + r Le reste r est inférieur à 8. d est le dividende. On a donc toutes les possibilités suivantes : d = 8 × 36 + 0 = 288 d = 8 × 36 + 1 = 289 d = 8 × 36 + 2 = 290 d = 8 × 36 + 3 = 291 d = 8 × 36 + 4 = 292 d = 8 × 36 + 5 = 293 d = 8 × 36 + 6 = 294 d = 8 × 36 + 7 = 295 30 On analyse chaque proposition : Il est divisible par 5, il se termine par 0 ou 5, mais il est pair, donc il se termine par 0. Il est divisible par 11 ; on cherche donc parmi 110, 220 et 330 les nombres divisibles par 3. C'est 330 (3 + 3 + 0 = 6 qui est divisible par 3.) Reconnaitre un nombre premier 18 Il veut partager équitablement les timbres. On effectue la divi- sion euclidienne de 184 par 36. On peut la traduire par l'égalité suivante : 184 = 36 × 5 + 4 Il va donc utiliser 6 pages, avec 4 timbres dans la dernière page. 31 a. Faux, il n'est divisible que par 1. b. Faux, il est divisible par tous les nombres. c. Vrai, il est divisible par 1 et lui-même. 19 a. Les diviseurs de 128 sont : 1 2 4 8 16 32 64 128. b. Les diviseurs de 56 sont : 1 2 4 7 8 14 28 56. c. Les diviseurs de 78 sont : 1 2 3 6 13 26 39 78. 32 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux, 15 est impair mais il n'est pas premier. d. Faux, 2 est premier mais il est le seul nombre pair premier. e. Vrai. f. Faux. Entre 13 et 17, il y a un écart de 4. 20 a. 5 multiples de 15 : 15 30 45 60 75. b. 5 multiples de 12 : 24 36 48 60 72. c. 5 multiples de 8 : 8 24 32 48 64. 33 a. 2 est un diviseur commun à 56 et 174. Ils sont tous les deux Remarque : 0 est multiple de tous les nombres, on a choisi de ne pas le faire figurer dans les multiples. 21 a. Non, 46 = 13 × 3 + 7.
Le reste n'est pas nul. pairs. b. 13 est un diviseur commun à 26 et 39. c. 17 est un diviseur commun à 34 et 51. 34 Nombres premiers compris entre 100 et 150 : b. Oui, 39 = 3 × 13. c. Non, 263 = 13 × 20 + 3. Le reste n'est pas nul. 101 103 107 109 113 127 131 137 139 149. 35 a. 217 n'est pas premier. Il est divisible par 7. 217 = 7 × 31 22 255 est un multiple de 51. b. 289 n'est pas premier. Il est divisible par 17. 289 = 17 × 17 c. 439 est premier. 439 ≈ 20,9. Il n'est pas divisible par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 et19. 51 est un diviseur de 255. 51 divise 255. 23 1. Les diviseurs de 34 sont : 1 2 17 34. 2. Les diviseurs de 85 sont : 1 5 17 85. 3. Le plus grand diviseur commun de 34 et 85 est 17. On le note PGCD (34 ; 85) = 17. 36 Nombres premiers compris entre 200 et 300 : 211 223 227 229 233 239 241 251 257 263 269 271 277 281 283 293 37 Le fait que 523 ÷ 4 = 130,75 montre juste que la division décimale 24 1. Les diviseurs de 156 sont : s'arrête, mais la division euclidienne n'a pas pour reste 0. Cela prouve juste que 523 n'est pas divisible par 4. De plus, il a tort. 523 est premier. 1 2 3 4 6 12 13 26 39 52 78 156. Les diviseurs de 130 sont : 1 2 5 10 13 26 65 130. 2. Donc le PGCD (130 ; 156) = 26. 25 Les diviseurs de 18 sont : 1 2 3 6 9 18. Décomposer un entier en produit de facteurs premiers Il a donc 6 diviseurs.
C'est Thibault qui a raison. 26 Manon confond les critères de divisibilité par 2 et par 3. Pour savoir si un nombre est divisible par 3, il faut calculer la somme de ses chiffres.
Ainsi 57 est divisible par 3 mais son chiffre des unités n'est pas un multiple de 3. 27 • 1 548 est divisible par 2 : son chiffre des unités est un nombre pair. 1 548 = 2 × 774 • 1 548 est divisible par 3 : sa somme des chiffres est égale à 1 + 5 + 4 + 8 = 18, qui est divisible par 3. 1 548 = 3 × 516 • 1 548 n'est pas divisible par 5, car il ne se termine ni par 0 ni par 5.
• 1 548 est divisible par 9 : sa somme des chiffres est égale à 1 + 5 + 4 + 8 = 18, qui est divisible par 9. 1 548 = 9 × 172 • 1 548 est divisible 4 : 48 est divisible par 4. 1 548 = 387 × 4 28 e st flash Questions divisible par 1 345 (somme des chiffres : 13) 5 340 (somme des chiffres : 12) 1 368 (somme des chiffres : 18) 2 3 4 5 9 NON NON NON OUI NON OUI OUI OUI OUI OUI OUI NON OUI 29 Il a tort, il suffit de donner un contre-exemple. 15 est divisible par 3, mais pas par 9. OUI NON flash Questions 38 a. Faux, 33 = 3 × 3 × 3 = 27. b. Faux, 25 = 2 × 2 × 2 × 2 × 2 = 32. c. Vrai, 53 = 5 × 5 × 5 = 125. 39 a. Vrai, 6 × 3 × 4 = 2 × 3 × 3 × 2 × 2 = 23 × 32. b. Faux, 12 × 3 = 4 × 3 × 3 = 2 × 2 × 3 × 3 = 22 × 32. 40 A = 22 × 32 × 5 = 4 × 9 × 5 = 180 B = 3 × 23 × 5 = 3 × 8 × 5 = 120 C = 2 × 3 × 52 = 2 × 3 × 25 = 150 41 a. 2 est un diviseur de A et de B. b. 6 = 3 × 2 6 est un diviseur de A, car il est divisible par 2 et 3. 6 n'est pas un diviseur de B. c. 7 est un diviseur de B mais pas de A. 42 a. 42 2 21 3 7 7 1 42 = 2 × 3 × 7 Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 9 b.
b. 7 986 2 3 993 3 1 331 11 121 11 11 11 1 7 986 = 2 × 3 × 11 × 11 × 11 = 2 × 3 × 113 c.
17 745 3 5 915 5 1 183 7 169 13 13 13 1 17 745 = 3 × 5 × 7 × 13 × 13 = 3 × 5 × 7 × 132 75 3 25 5 5 5 1 75 = 3 × 5 × 5 = 3 × 52 c. 164 2 82 2 41 41 1 164 = 2 × 2 × 41 = 22 × 41 43 a. 630 2 315 3 105 3 35 5 7 7 1 630 = 2 × 3 × 3 × 5 × 7 = 2 × 32 × 5 × 7 b. 5 005 5 1 001 7 143 11 13 13 1 5 005 = 5 × 7 × 11 × 13 c. 3 192 2 1 596 2 798 2 399 3 133 7 19 19 1 3 192 = 2 × 2 × 2 × 3 × 7 × 19 = 23 × 3 × 7 × 19 44 a. 6 615 2 205 735 245 49 7 1 45 a. 36 = 6 × 6 = 2 × 3 × 2 × 3 = 2 × 2 × 3 × 3 = 22 × 32 b. 216 = 8 × 27 = 2 × 2 × 2 × 3 × 3 × 3 = 23 × 33 c. 135 = 5 × 27 = 5 × 3 × 3 × 3 = 5 × 33 46 Le calcul est certes bon mais Yasmine s'est trompée : elle n'a pas été jusqu'au bout de la décomposition en nombres premiers. Elle a oublié de décomposer 9 en 3 × 3. 9 n'est pas un nombre premier. t in Faire le po QCM 3 3 3 5 7 7 1 1. C 2.
C 2 1. A 2. B 3 1. C 2. B 3. A 4. B 6 615 = 3 × 3 × 3 × 5 × 7 × 7 = 33 × 5 × 72 Carte mentale Critères de divisibilité Nombres premiers C'est un nombre qui a exactement 2 diviseurs : 1 et lui-même. 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; 13 Nombres entiers Critères de divisibilité Un nombre est divisible par : • 2 s'il est pair • 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 • 4 si le nombre formé par ses deux derniers chiffres est divisible par 4 • 5 s'il se termine par 0 ou 5 • 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9 • 10 s'il se termine par 0 Décomposer un entier en produit de facteurs premiers 90 45 15 5 1 2 3 3 5 90 = 2 × 3 × 3 × 5 10 NOMBRES ET CALCULS Division euclidienne de a par b a=b×q+r a est le dividende b est le diviseur q est le quotient r est le reste On doit avoir 0 ⩽ r < b Algorithmique 2. Script complété : et outils numériques 47 Modulo L'élève doit ici créer intégralement le script, créer les variables. Il n'est pas guidé. On crée deux variables : • « nombre » : le nombre à tester ; • « diviseur » : le diviseur envisagé. La commande permet de calculer le reste dans la division euclidienne du premier nombre inscrit par le second. Le script est donc : 3. Ce script ne fonctionne que pour un nombre supérieur ou égal à 2. Pour que le script fonctionne pour 0 et 1 (0 et 1 ne sont pas des nombres premiers), il faut le modifier ainsi : 48 Vrai ou faux ? Ce script permet de choisir un nombre (variable « nombre »), compris entre 1 et 1 000, au hasard, puis de demander si ce nombre est ou n'est pas un multiple de 3. On répond par oui ou non en saisissant « o » pour oui et « n » pour non ; le script permet ensuite d'indiquer si la réponse donnée est correcte ou non. Si la réponse est « o » et que le reste (« réponse ») est bien 0, il s'affichera « Réponse correcte ! » ; si le reste (« réponse ») n'est pas 0, il s'affichera « Réponse incorrecte ». Si la réponse est « n » et que le reste (« réponse ») n'est pas 0, il s'affichera « Réponse correcte ! » ; si le reste (« réponse ») est 0, il s'affichera « Réponse incorrecte ». Voici le script complété dans l'ordre : 50 Diviseurs La formule saisie dans la cellule C2, puis étirée dans la plage de cellules C3 :C25 est : =SI(MOD(A2 ;B2)=0; "oui" ; "non") (si le reste dans la division euclidienne du nombre inscrit dans A2 par le nombre inscrit dans B2 est nul, il s'affiche « oui », sinon il s'affiche « non ») ou : =SI(ENT(A2/B2)=A2/B2; "oui" ; "non") (si la partie entière de la division décimale du nombre inscrit dans A2 par le nombre inscrit dans B2 est égale au quotient de cette division, il s'affiche « oui », sinon il s'affiche « non »). Dans la cellule B2, on saisit « 1 », puis dans B3, on saisit « 2 », on sélectionne les cellules B2 et B3 et on étire jusqu'à B25 ou on saisit « 1 » dans B2 et on saisit « =B2+1 » dans B3 et on étire B3 jusqu'à B25. 49 Script incomplet 1. Ce script permet de chercher si un nombre entier choisi (variable « nombre ») est un nombre premier ou non. La variable « div » sert de diviseur à tester. On l'augmente de façon successive de 1 jusqu'à la valeur test limite égale à la racine carrée de « nombre ». Si on ne trouve aucun diviseur supérieur ou égal à 2 et inférieur ou égal à la racine carrée du nombre à tester, le nombre est déclaré premier. Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 11 51 Code-barres EAN 1. Il faut saisir dans la cellule M2 la formule :
=SI(MOD((B2+D2+F2+H2+J2+L2)*3+A2+C2+E2+G2+I2+K2;10) =0 ; " 0" ; 10-MOD((B2+D2+F2+H2+J2+L2)*3+A2+C2+E2+G2+I2+ K2 ;10)) 2. La clé du produit est vérifiée. Problèmes 52 Multiples de 6 Les diviseurs de 24 sont donc : 1 2 3 4 6 8 12 24. Remarque : on peut faire surligner en rouge, par exemple, les cellules dans lesquelles s'affiche « oui » pour plus de lisibilité grâce à la mise en forme conditionnelle. 1. Trois multiples de 6 : 12 ; 18 ; 36.
2. Tous les multiples de 6 s'écrivent sous la forme 6k, k étant un nombre entier positif ou nul. 3. 6k = 3 × 2 × k Tout multiple de 6 peut donc s'écrire sous la forme 3 × (2k) et est un multiple de 3, et sous la forme 2 × (3k) et est donc un multiple de 2. 53 Divisibilité 36 058 est divisible par 2, car il est pair, et par 9, car la somme des chiffres 3 + 6 + 0 + 5 + 8 = 18 est divisible par 9. Il est donc divisible par 2 × 9 = 18. 54 Nombres amicaux Puis : On obtient alors : 1.
Diviseurs de 220 : 1 2 4 5 10 11 20 22 44 55 110 220 Diviseurs de 284 : 1 2 4 71 142 284 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = 284 1 + 2 + 4 + 71 + 142 = 220 Donc 220 et 284 sont amicaux. 2. Diviseurs de 1 184 : 1 2 4 8 16 32 37 74 148 296 592 1184 Diviseurs de 1210 : 1 2 5 10 11 22 55 110 121 242 605 1210 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 37 + 74 + 148 + 296 + 592 = 1210 1 + 2 + 5 + 10 + 11 + 22 + 55 + 110 + 121 + 242 + 605 = 1184 Donc 1 184 et 1 210 sont amicaux. 55 Nombres permutables Les nombres premiers permutables à deux chiffres sont : 11 ; 13 et 31 ; 17 et 71 ; 37 et 73 ; 79 et 97. 56 De 1 à 9 Cet exercice permet de retravailler les tables de multiplication et les critères de divisibilité. 9 4 1 36 2 3 8 48 6 7 5 210 108 84 40 Le premier chiffre trouvé sera le 5 : 40 ne pouvant être décomposé que sous la forme 8 × 5 et 210 étant le seul nombre parmi 210 ; 48 et 36 n'étant pas divisibles par 5, on place d'abord le 5 à l'intersection de la ligne 210 et de la colonne 40. 36 n'étant pas divisible par 8, on place le 8 à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 210. Il faut donc placer 1 dans la ligne 36 et la colonne 40.
36 peut se décomposer sous la forme 6 × 6 × 1 mais on ne peut placer deux fois le même chiffre. On décompose donc 36 sous la forme 9 × 4 × 1. 84 n'étant pas divisible par 9, mais par 4, on place 9 à l'intersection de la ligne 36 12 NOMBRES ET CALCULS et de la colonne 108 et 4 à l'intersection de la ligne 36 et de la colonne 84. 84 peut se décomposer sous la forme 4 × 21 et 21 se décompose sous la forme 3 × 7. 48 n'étant pas divisible par 7 mais par 3, on place 3 à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 84 et 7 à l'intersection de la colonne 84 et de la ligne 210. 48 = 3 × 8 × 2 donc 2 se place à l'intersection de la ligne 48 et de la colonne 108 et 108 = 9 × 2 × 6 donc 6 se place à

l'intersection de la ligne 210 et de la colonne 108. On vérifie que 6 × 7 × 5 = 210. 1 1 3 1 57 Le bus 3 Attention : 4 bus mais que 3 intervalles ! Coup de pouce : trouver une périodicité. Louison alterne à chaque fois 1 rouge, 4 bleues et 3 blanches, soit 8 perles. 109 = 8 × 13 + 5 La 109e perle sera donc la 5e perle de cette suite de 8 perles, soit une bleue. 59 Nombres premiers entre eux © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Cet exercice permet d'aller plus loin, en abordant la notion de nombres premiers entre eux, en lien avec la recherche des diviseurs de deux nombres entiers. 1. Diviseurs de 45 : 1 3 5 9 15 45. 2. Diviseurs de 28 : 1 2 4 7 14 28. 3. 45 et 28 sont premiers entre eux, car leur seul diviseur commun est 1. 4. On ne peut pas trouver deux nombres pairs premiers entre eux, car ils ont forcément 2 comme diviseur commun. 5. On peut trouver deux nombres impairs premiers entre eux : 15 et 7, par exemple. 15 et 7 sont impairs.

Diviseurs de 15 : 1 3 5 15. Diviseurs de 7 : 1 7. Leur seul diviseur commun est 1 : ils sont premiers entre eux. 60 Tournoi de softball Diviseurs de 72 : 1 2 3 4 8 9 18 24 36 72 Diviseurs de 108 : 1 2 3 4 6 9 12 18 27 36 54 108 Le nombre d'équipes doit être un diviseur commun à 72 et 108 : 1 2 3 4 9 18 36. Il peut donc y avoir : 36 équipes de 2 filles et 3 garçons, soit 5 élèves par équipe.

18 équipes de 4 filles et 6 garçons, soit 10 élèves par équipe. 9 équipes de 8 filles et 12 garçons, soit 20 élèves par équipe. 4 équipes de 18 filles et 27 garçons, soit 45 élèves par équipe. 3 équipes de 24 filles et 36 garçons, soit 60 élèves par équipe. 2 équipes de 36 filles et 54 garçons, soit 90 élèves par équipe. 1 équipe de 72 filles et 108 garçons, ce qui est impossible car il n'y a alors qu'une seule équipe. Les équipes devant être composées de 8 à 15 élèves, il n'y a qu'une seule possibilité : constituer 18 équipes de 4 filles et 6 garçons. 61 À la recherche des diviseurs 1. 150 2 75 3 25 5 5 5 1 Donc 150 = 2 × 3 × 5 × 5 ... 5 × 5 = 15 52 1 × 3 × 52 = 75 1 2×1×1=2 2 × 1 × 5 = 10 5 5 1 2 164 = 53 × 3 + 5 Il devra donc prendre le 4e bus et attendre 17 × 3 = 51 min. 58 Le collier diviseurs : 2. Diviseurs de 150 : ... 62 Tour de magie Cet exercice permet de travailler le raisonnement, et plus particulièrement la preuve par une démonstration à l'aide du calcul littéral. À partir de l'exemple : 126 126 = 126 × 1 000 + 126 = 126 × (1 000 + 1) = 126 × 1 001 Or 1 001 = 7 × 11 × 13. Démonstration : Soit N le nombre choisi à 3 chiffres qui s'écrit sous la forme abc (a étant le chiffre des centaines, b le chiffre des dizaines et c le chiffre des unités). On a donc N = 100a + 10b + c. Le nombre N ', formé de 6 chiffres, s'écrit sous la forme abc abc, soit N ' = 100 000a + 10 000b + 1 000c + 100a + 10b + c. Or, si on multiplie N par 1 001, on obtient : N × 1 001 = (100a + 10b + c) × (1 000 + 1) N × 1 001 = 100 000a + 10 000b + 1 000c + 100a + 10b + c, c'està-dire le nombre N'. Lorsque le magicien demande de diviser le nombre N ' à 6 chiffres, il est sûr de retrouver le nombre N à 3 chiffres initialement choisi.

63 Les draps On cherche le plus petit multiple non nul commun à 9 et 12. Multiples de 9 : 9 18 27 36 45… Multiples de 12 : 12 24 36 48… M. Blanc changera de nouveau ses draps et ses taies d'oreiller le même jour dans 36 jours. 64 Spirographe On cherche le plus petit multiple non nul commun à 18 et 56. Multiples de 18 : 18 36 54 72 90 108 126 144 162 180 … 468 486 504. Multiples de 56 : 56 112 168 … 392 448 504. Le grand cercle doit avoir fait tourner 504 dents, c'est-à-dire doit avoir fait 504 ÷ 56 = 9 tours pour que le point A reprenne exactement sa position initiale. Les multiples à écrire étant nombreux, une décomposition de 18 et 56 en produit de facteurs premiers peut permettre de trouver plus rapidement le plus petit multiple commun. 65 The rings On cherche le plus petit multiple non nul commun à 12 et 15. Multiples de 12 : 12 24 36 48 60. Multiples de 15 : 15 30 45 60. Les montres sonneront toutes les deux en même temps dans 60 heures, soit 2 jours et demi, c'est-à-dire le 23 septembre à 6 h 30 du matin. Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 13 66 Carte bancaire Cet exercice permet de travailler la lecture d'énoncé et la recherche d'informations dans un texte ; il permet également de passer du langage courant au langage mathématique. Le 1er chiffre est 4 : on calcule son double : 8. Le 2e chiffre est conservé : 5.

Le 3e chiffre est 2 : on calcule son double : 4. Le 4e chiffre est conservé : 0. Le 5e chiffre est 3 : on calcule son double : 6. Le 6e chiffre est conservé : 3. Le 7e chiffre est 7 : on calcule son double : 14, puis on le remplace par 1 + 4 = 5. Le 8e chiffre est conservé : 3. Le 9e chiffre est 4 : on calcule son double : 8. Le 10e chiffre est conservé : 3. Le 11e chiffre est 1 : on calcule son double : 2. Le 12e chiffre est conservé : 0. Le 13e chiffre est 5 : on calcule son double : 10, puis on le remplace par 1 + 0 = 1. Le 14e chiffre est conservé : 5. Le 15e chiffre est 0 : on calcule son double : 0. On ajoute ces 15 chiffres obtenus : 8 + 5 + 4 + 0 + 6 + 3 + 5 + 3 + 8 + 3 + 2 + 0 + 1 + 5 + 0 = 53 On effectue la division euclidienne de 53 par 10 : 53 = 10 × 5 + 3 Le reste est 3, on retranche ce reste à 10 : 10 – 3 = 7. La clé de Luhn est 7. Or, ici, sur cette carte, le 16e chiffre est 4. Cette carte n'est donc pas valide. 67 Nombres premiers © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Il faut calculer l'expression n2 + n + 43 en remplaçant n par les nombres entiers successifs, jusqu'à ce qu'on trouve un nombre non premier. Cet exercice permet de retravailler le calcul littéral. Pour n = 1 : 12 + 1 + 41 = 43, c'est un nombre premier. Pour n = 2 : 22 + 2 + 41 = 47, c'est un nombre premier. Pour n = 3 : 32 + 3 + 41 = 53, c'est un nombre premier. Pour n = 4 : 42 + 4 + 41 = 61, c'est un nombre premier. Pour n = 5 : 52 + 5 + 41 = 71, c'est un nombre premier. Pour n = 6 : 62 + 6 + 41 = 83, c'est un nombre premier. Pour n = 7 : 72 + 7 + 41 = 97, c'est un nombre premier. Pour n = 8 : 82 + 8 + 41 = 113, c'est un nombre premier.

Pour n = 9 : 92 + 9 + 41 = 131, c'est un nombre premier. Pour n = 10 : 102 + 10 + 41 = 151, c'est un nombre premier. Pour n = 11 : 112 + 11 + 41 = 173, c'est un nombre premier. Pour n = 12 : 122 + 12 + 41 = 197, c'est un nombre premier. Pour n = 13 : 132 + 13 + 41 = 223, c'est un nombre premier. Pour n = 14 : 142 + 14 + 41 = 251, c'est un nombre premier. Pour n = 15 : 152 + 15 + 41 = 281, c'est un nombre premier. Pour n = 16 : 162 + 16 + 41 = 313, c'est un nombre premier. Pour n = 17 : 172 + 17 + 41 = 347, c'est un nombre premier. Pour n = 18 : 182 + 18 + 41 = 383, c'est un nombre premier.

Pour n = 19 : 192 + 19 + 41 = 421, c'est un nombre premier. Pour n = 20 : 202 + 20 + 41 = 461, c'est un nombre premier.

Pour n = 21 : 212 + 21 + 41 = 503, c'est un nombre premier. Pour n = 22 : 222 + 22 + 41 = 547, c'est un nombre premier.

Pour n = 24 : 242 + 24 + 41 = 641, c'est un nombre premier. Pour n = 23 : 232 + 23 + 41 = 593, c'est un nombre premier. Pour n = 24 : 242 + 24 + 41 = 641, c'est un nombre premier. Pour n = 25 : 252 + 25 + 41 = 691, c'est un nombre premier. Pour n = 26 : 262 + 26 + 41 = 743, c'est un nombre premier. Pour n = 27 : 272 + 27 + 41 = 797, c'est un nombre premier. Pour n = 28 : 282 + 28 + 41 = 853, c'est un nombre premier. Pour n = 29 : 292 + 29 + 41 = 911, c'est un nombre premier. Pour n = 30 : 302 + 30 + 41 = 971, c'est un nombre premier. Pour n = 31 : 312 + 31 + 41 = 1 033, c'est un nombre premier. Pour n = 32 : 322 + 32 + 41 = 1 097, c'est un nombre premier. Pour n = 33 : 332 + 33 + 41 = 1 163, c'est un nombre premier. Pour n = 34 : 342 + 34 + 41 = 1 231, c'est un nombre premier. Pour n = 35 : 352 + 35 + 41 = 1 301, c'est un nombre premier. Pour n = 36 : 362 + 36 + 41 = 1 373, c'est un nombre premier. Pour n = 37 : 372 + 37 + 41 = 1 447, c'est un nombre premier. Pour n = 38 : 382 + 38 + 41 = 1 523, c'est un nombre premier. Pour n = 39 : 392 + 39 + 41 = 1 601, c'est un nombre premier. Pour n = 40 : 402 + 40 + 41 = 1 681, ce n'est pas un nombre premier. 68 Les nombres de Mersenne sont les plus célèbres (2p – 1, avec p premier, car c'est sous cette forme que l'on connaît les plus grands nombres premiers. 68 Alignement de planètes On effectue la division euclidienne de 780 par 365 (car il y a 365 jours par année non bissextile) : 780 = 365 × 2 + 50 L'événement suivant a eu lieu 2 ans et 50 jours plus tard. Or 2008 est une année bissextile, donc il n'y a plus que 49 jours plus tard, ce sera le 23 décembre 2008, puis 1 an plus tard, le 23 décembre 2009. Il faut maintenant rajouter 50 jours : 9 jours après, c'est le 1er janvier 2010. Il faut alors rajouter 41 jours : 31 jours plus tard, c'est le 1er février et 10 jours plus tard, le 11 février 2010.

69 La conjecture de Goldbach Il faut écrire les nombres sous la forme de la somme de deux nombres premiers : 26 = 13 + 13 ou 26 = 7 + 19 ou 26 = 3 + 23 58 = 11 + 47 ou 58 = 29 + 29 ou 58 = 5 + 53 ou 58 = 17 + 41 138 = 7 + 131 ou 138 = 11 + 127 ou 138 = 29 + 109 ou 138 = 31 + 107 ou 138 = 67 + 71 ou 138 = 59 + 79 ou 138 = 37 + 101 ou 138 = 41 + 97 Les deux termes peuvent être évidemment inversés dans chaque somme précédemment écrite. 70 Démonstrations 1. a. N = 100 × c + 10 × d + u = 4 × 25 × c + 2 × 5 × d + u Donc, N = 2 × (50c + 5d) + u Soit N = 2 × (50c + 5d) étant divisible par 2, alors N est divisible par 2, si u est aussi divisible par 2, c'est-à-dire si le chiffre des unités est pair. b. On démontre le critère de divisibilité par 5 si son chiffre des unités est divisible par 2, c'est-à-dire pair.

N = 5 × 20 × c + 5 × 2 × d + u = 5 × (20c + 2d) + u Si u est divisible par 5, 5 × (20c + 2d) étant divisible par 5, alors N est divisible par 5. On vient de démontrer le critère de divisibilité par 5 : un nombre est divisible par 5 si son chiffre des unités est divisible par 5, c'est-à-dire s'il vaut 0 ou 5 (seuls nombres à 1 chiffre divisibles par 5). N = 10 × 10 × c + 10 × d + u N = 10 × (10c + d) + u Si u est divisible par 10, 10 × (10c + d) étant divisible par 10, alors N est divisible par 10. On vient de démontrer le critère de divisibilité par 10 : un nombre est divisible par 10 si son chiffre des unités est divisible par 10, c'est-à-dire s'il vaut 0 (car 0 est le seul nombre à un chiffre divisible par 10). 2. a. N = (99 + 1c + (9 + 1)d + u b. N = 99c + c + 9d + d + u (On développe) N = 9 × 11 × c + c + 9 × d + d + u N = 9 × (11c + d) + c + d + u Si c + d + u est divisible par 9, 9 × (11c + d) étant divisible par 9, alors N est divisible par 9. On vient de démontrer le critère de divisibilité par 9 : un nombre est divisible par 9 si la somme de ses chiffres (c + d + u) est divisible par 9. On a également : N = 3 × 3 × (11c + d) + c + d + u N = 3 × (33c + 3d) + c + d + u Si c + d + u est divisible par 3, 3 × (11c + d) étant divisible par 3, alors N est divisible par 3. On vient de démontrer le critère de divisibilité par 3 : un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres (c + d + u) est divisible par 3. 71 Des fractions ! 48 12 6 3 1 2 2 2 3 73 36 18 9 3 1 2 2 3 3 48 = 24 × 3 72 = 23 × 32 24 × 3 48 2×2×2×2×3 2 Donc : 3 = = 2×2×2×3×3 72 3 × 32 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On supprime le même nombre de facteurs égaux à 2 au numérateur et au dénominateur, en ne fait la même chose pour 3. 180 90 45 15 5 1 2 2 3 3 5 126 63 21 7 1 2 3 3 7 180 = 22 × 32 × 5 126 = 2 × 32 × 7 180 2 × 32 × 7 126 7 7 Donc : 126 7 2 × 32 × 7 = = 10 ... 72 Algorithme d'Euclide 1. Diviseurs de 15 : 1 3 5 15. Diviseurs de 25 : 1 5 25. Donc PGCD(15 ; 25) = 5. Diviseurs de 27 : 1 3 9 27. Diviseurs de 81 : 1 3 9 27 81. Donc PGCD(27 ; 81) = 27. 2. a. 910 = 105 × 8 + 70 105 = 70 × 1 + 35 70 = 35 × 2 + 0 Le dernier reste non nul est 35. Donc PGCD(910 ; 105) = 35.

2 450 = 675 × 3 + 425 675 = 425 × 1 + 250 425 = 250 × 1 + 175 250 = 175 × 1 + 75 175 = 75 × 2 + 25 75 = 25 × 3 + 0 Le dernier reste non nul est 25. Donc PGCD(2 450 ; 675) = 25. Cet exercice permet de découvrir l'algorithme d'Euclide, qui repose sur la propriété suivante : Pour a et b entiers tels que a > b et b non nul : PGCD(a ; b) = PGCD(b ; r) où r est le reste dans la division euclidienne de a par b. 73 Numération binaire 1. Pour 101 : 1 × 22 + 0 × 21 + 1 × 20 ... 1 0 0 0 0 0 0 1 ... = 25 Le nombre correspondant à 11001 en écriture binaire est 25. Pour 11111 ... = 31 ... 125 = 64 + 32 + 16 + 8 + 4 + 1 ... 6 1 ... Le plus grand nombre que l'on peut écrire est 11111111 ... = 255 ... 74 Système octal ... Le nombre 125 en écriture binaire est 1111101 ... 2. Pour faire un nombre ... Le plus grand puissance de 2 contenue dans 125 est 64 ... 125 = 64 + 61 ... 1 × 26 + 1 × 25 + 1 × 24 + 1 × 23 + 1 × 22 + 0 × 21 + 1 × 20 ... L'écriture en numération binaire de 125 est : 1111101. Pour y aider, on peut calculer les premières puissances de 2. • Pour 24 : 24 = 16 + 1 × 8 ... 8=8×1+0 8 = 23 × 1 + 0 Donc 24 = 1 × 24 + 1 × 23 + 0 × 22 + 0 × 21 + 0 × 20 Donc l'écriture en numération binaire de 24 est : 11000. • Pour 36 : 36 = 32 × 1 + 4 36 = 25 × 1 + 4 ... Donc l'écriture en numération binaire de 36 est : 100100. • Pour 102 : 102 = 64 × 1 + 38 102 = 26 × 1 + 38 38 = 32 × 1 + 6 ... Donc l'écriture en numération binaire de 102 est : 1100110. Pour info : le système binaire est un système de numération essentiel à l'informatique. On nomme bit (de l'anglais binary digit, signifiant « chiffre binaire ») les chiffres de la numération binaire positionnelle. Ceux-ci ne peuvent prendre que deux valeurs : 0 et 1. Les processeurs des ordinateurs sont composés de transistors qui ne gèrent que deux états. Un calcul en informatique n'est donc qu'une suite d'opérations avec des 0 et des 1. Chaque groupe de huit de ces chiffres est appelé octet. Livre du professeur – Chapitre 1 Nombres entiers 15 74 PPCM et PGCD 1. 84 2 42 2 21 3 7 7 1 84 = 2 × 2 × 3 × 7 = 22 × 3 × 7 270 2 135 3 45 3 15 3 5 5 1 270 = 2 × 3 × 3 × 3 × 5 = 2 × 33 × 5 2. a. PPCM(84 ; 270) = 22 × 33 × 5 × 7 = 3 780 On décompose 36 en produits de facteurs premiers : 36 = 2 × 2 × 3 × 3, afin de chercher toutes les dimensions possibles de la boîte, compte tenu qu'il faut y ranger 36 pâtes de fruits cubiques de 2 cm d'arête.

On peut décomposer 36 sous la forme de 3 facteurs de la façon suivante : 2×2×9 2×3×6 3×3×4 1×4×9 1×6×6 12 × 3 × 1 1 × 2 × 18 1 × 1 × 36 • 1re solution : une boîte de 2 × 2 cm sur 2 × 2 cm sur 9 × 2 cm soit 4 cm sur 4 cm sur 18 cm. On prend tous les facteurs premiers qui apparaissent et on les affecte du plus grand exposant. 18 b. PGCD(84 ; 270) = 2 × 3 = 6 On ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant. 4 75 Nombres premiers circulaires Les douze nombres premiers circulaires compris entre 10 et 200 sont : 11 13 17 31 37 71 73 79 97 113 131 199 6 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (4 × 4) + 2 × (4 × 18) + 2 × (4 × 18) = 32 + 144 + 144 = 320 cm2. • 2e solution : une boîte de 2 × 2 cm sur 2 × 3 cm sur 6 × 2 cm, soit 4 cm sur 6 cm sur 12 cm. 12 76 Le jeu de Nim © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On pourra s'aider en représentant les allumettes ou en réalisant le jeu en réalité. 1. Il y a 21 allumettes en début de partie. Nathan prend 3 allumettes : il en reste donc 18. Fabien en prend 3 : il en reste alors 15.

Nathan en prend 1 : il en reste alors 13. Fabien en prend 3 : il en reste alors 10. Nathan en prend 3 : il en reste alors 7. Fabien en prend 2 : il en reste alors 5. C'est au tour de Nathan de jouer : • s'il en prend 1 : il en reste alors 4. Si Fabien en prend 1, il en reste 3. Nathan prend les 3 et il gagne. Si Fabien en prend 2, il en reste 2. Nathan prend les 2 et il gagne. Si Fabien en prend 3, il en reste 1. Nathan prend celle restante et il gagne. • s'il en prend 2 : il en reste alors 3.

Fabien prend les 3 et il gagne. • s'il en prend 3 : il en reste alors 2. Fabien prend les 2 et il gagne. Nathan peut donc gagner et il gagne même à coup sûr s'il prend 1 allumette au tour suivant. 2. Pour gagner à tous les coups, il faut, lorsque c'est son tour, laisser un nombre d'allumettes correspondant à un multiple de 4 : 4, 8, 12 ou 16 allumettes. Et il vaut donc mieux ne pas commencer ! On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (4 × 6) + 2 × (4 × 12) + 2 × (6 × 12) = 48 + 96 + 144 = 288 cm2. • 3e solution : une boîte de 4 × 2 cm sur 3 × 2 cm sur 3 × 2 cm soit 8 cm sur 6 cm sur 6 cm. 6 6 8 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (8 × 6) + 2 × (8 × 6) + 2 × (6 × 6) = 96 + 96 + 72 = 264 cm2. • 4 solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 4 × 2 cm soit 2 cm sur 18 cm sur 8 cm. 8 18 77 Les boîtes Dans ce problème, il faut trier les informations et organiser sa démarche. Coup de pouce : décomposer 36 en produit de 3 facteurs. On cherche d'abord le nombre de boîtes nécessaires. 20 000 ÷ 36 ≈ 555 × 20 On aura donc 555 boîtes (et il restera 20 pâtes de fruits non rangées). 16 NOMBRES ET CALCULS 6 4 2 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (2 × 18) + 2 × (2 × 8) + 2 × (8 × 18) = 72 + 32 + 288 = 392 cm2. • 5e solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 6 × 2 cm sur 6 × 2 cm soit 2 cm sur 12 cm sur 12 cm. 12 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (2 × 12) + 2 × (2 × 12) + 2 × (12 × 12) = 48 + 48 + 288 = 584 cm2. 2 L'aire la plus petite est 264 cm2. Elle est obtenue pour une boîte de dimensions 8 cm sur 6 cm sur 6 cm. Il faut donc commander 555 boîtes, soit : 555 × 264 = 146 520 cm2 = 14,652 m2 de carton. Le carton coûtant 15,50 € le m2, il faudra payer une commande de : 15,50 × 14,652 = 227,106 ≈ 227,11 €. Brevet 12 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (2 × 12) + 2 × (2 × 12) + 2 × (12 × 12) = 48 + 48 + 288 = 384 cm2. • 6e solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 1 × 2 cm sur 1 × 2 cm soit 2 cm sur 2 cm sur 72 cm. 2 2 72 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (2 × 2) + 4 × (2 × 72) = 8 + 576 = 584 cm2. • 7e solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 1 × 2 cm sur 36 × 2 cm soit 2 cm sur 2 cm sur 72 cm. 1 2 × 2 ... 78 Vive la mariée ! 1. 3 003 = 20 × 150 + 3 et 3 781 = 20 × 186 + 11 On fait donc 20 corbeilles avec 150 dragées au chocolat et 186 dragées aux amandes dans chacune et il reste 3 + 11 = 14 dragées non utilisées. 2. a. 3 003 = 90 × 33 + 33 3 731 = 90 × 41 + 41 La proposition d'Emma de faire 90 ballotins ne convient pas car il restera des dragées. b. Diviseurs de 3 003 : 1 3 7 11 13 21 33 39 77 91 143 231 273 429 1 001 3 003 Diviseurs de 3 731 : 1 7 13 41 91 287 533 3 731 On cherche le plus grand diviseur commun à 3 003 et 3 731. Pour que le nombre de ballotins soit le plus grand possible, il faut prendre 91 ballotins. Ils auront donc 3 003 ÷ 91 = 33 dragées au chocolat et 3 731 ÷ 91 = 41 Il y aura donc 33 dragées au chocolat et 41 dragées aux amandes dans chaque ballotin. 79 Nombres 6 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 36 6 On trouve une aire totale de la boîte de : 2 × (2 × 72) + 2 × (2 × 4) + ... 1 ... = 584 cm2. • 8 solution : une boîte de 1 × 2 cm sur 1 × 2 cm sur 36 × 2 cm soit 2 cm sur 2 cm sur 72 cm. 1. S'il reste 37 ballons, c'est que le reste de la division de 428 ballons par le nombre d'enfants est 37. 428 – 37 = 391 et on cherche les diviseurs de 391 : 1 17 23 391. Il n'y a donc que 23 enfants à cette fête. 2. Il ne reste plus de ballon, ce qui signifie que la division de 828 par le nombre d'enfants est un nombre entier. 828 = 17 × 48,7 828 = 23 × 36 828 ÷ 391 ≈ 2,1 828 est divisible par 23. Il y avait donc 23 enfants présents. 80 Pour s'attraction 1. Si la famille est composée de 4 personnes, la formule famille coûte 35 €. Si ce couple et son enfant de 8 ans prend le forfait, ils ne paieront que 3 places à l'unité, cela revient à 12 × 2 + 7 = 24 + 7 = 31 €.

Le forfait famille n'est donc pas intéressant. b. Soit n le nombre d'enfants du couple. En prenant les places à l'unité, cela revient à : 2 × 12 + 7n = 24 + 7n €. On souhaite que le forfait famille soit plus intéressant, on cherche donc à résoudre l'inéquation : 35 < 24 + 7n 35 – 24 < 7n 11 < 7n 11 ÷ 7 < n 1,57 < n Il faut donc que n > 1,57, il y ait au moins 2 enfants ou plus. En effet, pour 10 €, ... 2. c. 0,24 < 10 e. Oui, car 1 ≤ 2,5 < 10 et 105. f. Non, car 310 n'est pas une puissance de 10. 56 50 33 = 27 Il y a 27 menus différents. 51 Au rang 7 : 47 = 16 384 Au rang 10 : 410 = 1 048 576 52 a. 52 21. 5 d = 4 = 0,25 4 – 1 53 b. 180 = 1 1 e. 2–3 = 0,25 8 54 { Pour que l'exercice soit bénéfique, l'utilisation de la calculatrice est déconseillée, elle peut être utilisée une fois l'exercice terminé pour permettre aux élèves de vérifier leur calcul. Dans le cas d'un travail en groupe, on peut amener les élèves à réfléchir sur les différentes erreurs qui ont été faites. Lors de la correction, on pas hésiter à bien détailler les calculs pour que les élèves s'approprient les priorités de calcul. a. –3 = –3 × 3 × 3 × 3 = –81 b. (–3)4 = (–3) × (–3) × (–3) × (–3) = 81 c. 32 × 23 = 3 × 6 = 9 × 18 000 = 0 160 = 3 × 5 × 2 = 3 × 36 = 72 ... 25 2 2 c. (1 + 5) = 6 × 36 0 Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

B = 10 × (–24 + (3 × 2)2 C = (8)–91 × (–6) –32 D = 6 × 5 × (–2)2 × 3 80 • • • • 10 = 109 microm... 1 000 000 ... 10 –6 1 millimètre 0,000 001 (m) 0,000 001 1 000 000 1 000 103 1 année-lumière 9 461 000 000 000 000 000 9,461 × 1015 ... 10 –3 (au plus grand), on commence par tous les écrire sous leur forme décimale (ou scientifique). 0,59 × 105 = 59 000 5,95 × 103 = 5 950 59 × 102 = 5 900 59 × 102 = 5 950 5,95 × 103 = 0,59 × 105 < 59 000 5,9 × 103 < 5,95 × 103 < 59 × 102 < 5,95 × 103 ... 1,7 × 102 – 52 × 0,000 000 001 57 Pour classer ces nombres dans l'ordre croissant (du plus petit 4 55 1 nanomètre (nm) 2. a. 8 μm = 0,000 008 m = 8 × 10–6 m b. 695 × 105 km = 6,95 × 103 × 105 m = 6,95 × 108 m = 695 000 000 m c. 1 000 nm = 1 000 × 10–9 m = 1 × 10–6 m = 0,000 001 m d.

150 000 000 km = 150 000 000 000 m = 150 × 109 m { { (1 a. 53 × 58 = 5 × 5 × 5 × 5 × ... = 5 × 511 3 facteurs 8 facteurs b. (–2)6 × (–2)3 = (–2) × ... × (–2) = (–2)9 c. Écriture scientifique (m m) c. (–1)19 = –1 Les règles sur les puissances ne sont pas un attendu de fin de cycle mais l'on peut à la suite de cet exercice aller un peu plus loin et énoncer quelques règles de calcul sur les puissances que l'on pourra aussi travailler dans le cadre de l'accompagnement personnalisé. 6 facteurs Écriture décimale (en m) 1 a. Faire le point et à la suite ... 58 ... Écriture décimale (en m) 1 a Faire le jeu de QCM 1 1 C 2. C 3. B 2 1 C 2. B 3. A 2 1. C 2. B.

A 2. B 3. A 1 × 3 = –20 120 Carte mentale Soustraire Additionner Même signe Ajouter les distances à 0 Signes contraires Soustraire les distances à 0 C'est ajouter l'opposé Multiplier/Diviser Règle des signes Priorités Calculer avec les relatifs 1. Puissances 2. Multiplications/Divisions 3. Additions/Soustractions Calculer avec les puissances Exposant positif (n > 0) an = a × a × a × … × a n facteurs n 10 = 100…0 n zéros Exposant négatif (n > 0) a–n = 1/an (a ≠ 0) 10–n = 0,0…01 Nombres de Priorités de calcul relatifs Écriture scientifique a × 10n où n est un nombre décimal tel que 1 ≤ a < 10 ; • n est un nombre relatif. Jeu des chiffres a ... puis d'un nombre entier relatif. Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels. 4 ... le résultat précédent et l'affiche après la vérification. On pourra rappeler... Livre du professeur – Chapitre 2 Nombres relatifs 23 Algorithmique et outils numériques 58 Un programme particulier 1. Le script donne le résultat du programme de calcul suivant. Choisir un nombre Ajouter 1 au nombre de départ Prendre le carré du résultat Ajouter –2 fois le nombre de départ au résultat Ajouter –1 au résultat Démarrer le programme. • Demander le nombre de départ Stocker le nombre de départ dans la variable « réponse » Mettre dans la variable « résultat », le nombre de départ + 1 Mettre dans la variable « résultat », le résultat précédent au carré © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. • Ajouter au résultat précédent le produit de –2 fois le résultat précédent Le résultat obtenu est le carré du nombre de départ. 4 a.

(x + 1)2 – 2x – 1 b. (x –1)2 – 2x – 1 = (x + 1)(x + 1) – 2x – 1 = x2 + x + x + 1 – 2x – 1 = x2 59 Des scripts puissants Donner le résultat du programme de calcul a. 6 b. 4 c. 1 d. 5 e. 3 f. 2 60 Carré magique 1. 1 2. Pour faire un nouveau carré magique, il suffit de changer les valeurs de a, b et c. 49 est le carré de 7. 3. b. 24 NOMBRES ET CALCULS 2 ... × Problèmes 1 x 61 Calculs et codes secrets 1. a. –5 + 3 × 2 – (–17) = –2 × 2 + 17 = 13 4 + (–3) × 10 = –26 2 × 6 = 12 ... Le mot qui se cache est donc OHIO. 62 Des nombres relatifs 1. a. 4 × (–5) × 6 × 3 = –360. Le nombre est 8. On peut aussi obtenir ... MATH. Le mot est donc MATH. H–H = 0 ... © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Le produit des deux nombres entiers obtenus est 36 ... 36 = 1 × 36 = 2 × 18 = 3 × 12 = 4 × 9 = 6 × 6 En étudiant les différents produit, on remarque que : –3 × (–12) = 36 et –3 + (–12) = –15 Aucun autre couple de nombres ne vérifie les conditions requises donc a = –3 et b = –12. 2. Si le quotient de a par b est positif, alors a et b sont de même signe, et si la somme de a et b est négative, ces deux nombres doivent être négatifs, car la somme de deux nombres positifs est positive.

64 Dilatation d'un rail La différence de température entre l'hiver et l'été est égale à –20 – 40 = –60 °C. En été, le rail mesure 30 m, donc L0 = 30 m. ΔL = 12 × 10–6 × L0 × ΔT. ΔL = 12 × 10–6 × 30 × (–60) ΔL = –21 600 × 10–6 = 0,216 m ... 0,0216 m ... 29,784 m en hiver. 65 Ça rebondit ! 1 4 2 = 0,06 5 Au 5e rebond, la balle remonte à environ 0,24 m. 3 10 3 9 67 Master Mind 63 Énigmes 142 14 2 = 0,075 Le produit est négatif et la somme est positive. Donc a ... un nombre positif et b un nombre négatif et la valeur absolue de a est supérieure à celle de b. Le produit est négatif ... si les deux nombres sont de signes contraires. Et la somme positive... si le nombre positif est supérieur à ... 3. Les valeurs possibles de n sont 1 et 2. Certains élèves utiliseront naturellement le calcul littéral pour répondre à la question, d'autres feront des tests. Si, en testant, des élèves n'ont pas pensé à faire le calcul avec des nombres négatifs et ont répondu « Vrai » pour cette affirmation, on pourra une nouvelle fois insister sur le fait qu'un exemple n'est pas une preuve. En effet, ici, ils n'ont testé que des nombres positifs et leur conclusion est fausse. 1 × 8 66 Produit négatif 1. Vrai, car si le nombre de facteurs négatifs est le double du nombre de facteurs positifs, il y a donc un nombre pair de facteurs négatifs et le résultat est positif. 2. (x + 2) × (–6) = –3x – 6 × 6 = –3x Faux, car si on choisit un nombre négatif le résultat sera positif. 3.1 La balle remonte à moins de 10 cm au 6e rebond. 62 Nombres entiers en bâtons ... 4 × 1 = 4. Il y a 4 possibilités pour le premier, la balle remonte à environ 0,06 m. 1. There are 2 possibilities for the first colour, 7 for the third and again 7 for the fourth and again 7 for the fifth. So there are 24 = 240 codes. 2. There are 7 possibilities for the first code, 6 for the second, 5 for the third and 4 for the fourth. So there are 7 × 6 × 5 × 4 = 840 codes. 68 Carré magique (1) 1. Après avoir fait la somme des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, on remarque que tous les résultats sont égaux à 3. Ce carré est bien un carré magique additif. 0 –1 4 0 –1 4 3 3 3 5 1 –3 4 2 –1 = 3 3 3 3 3 2. Après avoir fait le produit des nombres de chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale, on remarque qu'ils sont tous égaux à 3. Ce carré est bien un carré magique multiplicatif. 23 20 2–1 24 25 23 2–2 21 2–3 = 23 2 2 × 2 2 × 2 2 × 2 2 ... 22 23 2 23 23 23 23 23 23 2–1 23 23 2–3 ...

Cette question est l'occasion de mettre en lumière les règles de calcul sur les puissances dans un premier temps. Puis, une fois l'exercice corrigé, on pourra proposer des 25 25 calculs du type 3, 7, puis (52)4... pour étendre la 2 2 am remarque aux règles du type n = am – n et (an)m = am + n. a. Après une phase de recherche individuelle, les élèves peuvent confronter leurs idées en groupe et faire émerger la première règle de calcul. En calculant 20 × 2–1 × 24, on remarque que ce produit est égal à 20 – 1 + 4 = 23, de même 25 × 21 2–3 × 25 = 25 + 1 – 3 = 23, et les autres produits… Or comme le carré de la question 1 était un carré magique additif de constante 3, le carré magique 2 est donc un carré magique multiplicatif de constante 23. Livre du professeur – Chapitre 2 Nombres relatifs 25 69 Carré magique (2) 1. Lors de la correction de cet exercice, on pourra réinvestir la règle vue dans l'exercice précédent et introduire an × bn = (ab)n. 1 bc ab a3 b ab2 ac a3 b2 (ab)4c 1. (ab)4c a × 1 bc × ab3 × a3 = a1 + 3 b1 + 3 × c = a4b4c = (ab)4c a3b × a2c × b2 × c ... = ab4c = (ab)4c (ab)4c (ab)4c ... 2 ab 3 (ab)4c 1 ab 3 (ab)4c (ab)4c –15 18 –10 4 54 5 –12 –2 –8 –3 9 30 La constante est égale à 32. Prolongement de l'exercice dans la partie Algorithmique et outils numériques. 70 L'éponge de Menger 1.

A l'étape 1, le cube de départ est découpé en 27 petits cubes, puis on enlève le cube central et les 6 cubes de chaque face, il y a donc 27 – 7 = 20 petits cubes. À l'étape 2, chacun des 20 petits cubes précédents est découpé et donne aussi 20 petits cubes, il y a alors 20 × 20 = 400 petits cubes.

À l'étape 3, on recommence et le solide est composé de 203 = 8 000 petits cubes. b. À l'étape 6, le solide est formé par 206 = 6,4 × 107 petits cubes. Ici, on peut demander aux élèves de donner oralement la valeur décimale de 6,4 × 107 : 64 millions. À l'étape 10, il y a 2010 = 1,024 × 1010 cubes. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2. À l'étape 1, le cube est découpé en 27 cubes et on en enlève 7 : il y a donc 20 petits cubes. Le volume du solide est de 20 × 0,74 = 0,74 m3. 27 202 À l'étape 2, le volume du solide est égal à 2 = 0,549 m3. 27 203 À l'étape 3, le volume du solide est égal à 3 = 0,406 m3. 27 20 6 = 0,049 m3. À l'étape 6, le volume du solide est égal à 27 10 = 0,049 m3. 27 On remarque que plus les étapes avancent, plus le volume du solide diminue et se rapproche de 0. On pourrait prouver ce résultat car, à chaque étape, on enlève un peu plus de matière au cube de départ. 71 La légende de Sissa 1. Il y a 32 grains de blé sur la 6e case de l'échiquier de Sissa. b. Le nombre de la case B10 correspond au nombre de grains de blé sur la 10e case. Le nombre de grains de blé est doublé à chaque case, il y en a 20 = 1 sur la 1re, 21 = 2 sur la 2e, donc il y en a 210 – 1 = 29 = 512 sur la 10e case. Il y a ... La case E2 donne la somme des grains de blé des cases A1 à E2 = 2 × 10 = 210 c. Le nombre total de grains de blé pesant environ 50 g donc 1,84 × 1019 grains de blé vont peser : 1,84 × 1019 × 10–3 × 50 = 9,2 × 1017 g = 9,2 × 1013 kg = 92 × 1010 tonnes = 920 × 1010 tonnes Cette production est supérieure à la production de l'Asie entière en 2014. Le Roi Belkib n'a pas pu honorer sa promesse. 26 NOMBRES ET CALCULS 2. Production mondiale totale en millions de tonnes, en 2014 : 249,1 + 99,3 + 23,4 + 288,8 + 27,3 = 687,9 En 2014, la production mondiale de blé était de 687,9 millions de tonnes, 92 × 10 4 3. = 342,4 ≈ 687,9 Il faudrait 343 ans à l'ensemble du monde pour honorer la promesse du roi Belkib.

72 Refroidissement éolien 1. On parle d'indice de refroidissement éolien car c'est le vent qui fait que la température ressentie est plus basse que la température réelle. 2. • Pour le matin RC = –35 + 0,2 × (0,134 5 × –(35) – 1,52) × 4,7 = –40,9 °C La température ressentie le matin est environ égale à –40,9 °C ; cette température est comprise entre –48 °C et –40 °C donc les risques sont : « Risque élevé de gelure de la peau exposée et d'hypothermie en 5 à 10 min » • Pour l'après-midi RC = –25 + 0,2 × (0,134 5 × (–25) – 1,52) × 4,7 = –29,6 °C La température ressentie l'après-midi est environ égale à –29,6 °C ; cette température est comprise entre –28 °C et –10 °C donc les risques sont : « Faible risque de gelure et d'hypothermie » 73 Mouvements des plaques 1. a. « Indicatif Polaris » Lundi 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. b. Longitude Durée du déplacement (en années) : 2016 – 1998 = 18 ans. Déplacement : 0 – 21 = –21 cm –21 ÷ 18 ≈ –1,17 La vitesse moyenne du déplacement en latitude est environ égale à –1,17 cm par an. La plaque se déplace vers l'ouest car la vitesse de déplacement est négative. 2. a. La vitesse de déplacement entre Nouméa et Tahiti est négative (–7,2 cm par an) donc les plaques convergent (elles se rapprochent). b. • Distance entre Nouméa et Tahiti sur la plan, la distance entre Nouméa et Tahiti est de 5 700 km 1 m. L'échelle indique que 1 cm sur le plan correspond à 100 km dans la réalité, donc la distance réelle entre Nouméa et Tahiti est environ égale à 5 700 km. • La vitesse de déplacement est égale à –7,2 cm par an. 20 × 106 × (–7,2) = –144 × 106 cm = –144 × 106 × 10–5 km = –1 440 km En 20 millions d'années, les plaques vont se rapprocher de 1 440 km. 5 700 – 1 440 = 4 260 Les deux villes seront alors séparées d'environ 4 260 km. Brevet 74 Canal du Midi 1. Pour calculer le dénivelé total du parcours, il suffit de faire la somme de chaque dénivelé. La somme des valeurs des cellules B2 à K2 : =SOMME(B2 : K2) 2. D = 2,44 + 4,65 + 3,08 + 2,62 – 2,58 – 5,58 – 6,78 – 2,24 – 2,63 – 9,42 – 5,2 – 12,79 – 29,27 = – 16,48 Le dénivelé est négatif donc le parcours est descendant.

75 Qui a raison ? 1. • Paul Paula : a = 9 : 2 × 9 + 5 = 23 1 × 25 ... Ils n'ont pas raison. Paul : 25 – 12,8 ... 5 + 1 = 4 ... 1 = –7 7 ... 3 2 ... ils ne sont pas le même résultat. Les résultats sont bien égaux. • Pour Noa, a = –2 : 2 × (–2) + 5 = 1 et 1 – 4 = –2 et 1 – 4 = –18 Pour x = –2, les résultats sont bien différents. 2. Seul Noa a donné le bon argument dans cet exercice, pour x = –2 l'égalité n'est pas vérifiée : l'égalité 5x – 10x = 2 × 7x n'est pas vraie pour toute valeur de x. Paolo a vérifié que l'égalité était vraie pour x = 3 mais pas pour toutes les valeurs de x. 76 Différentes écritures d'un nombre 1. A = 2 × 102 + 101 + 0 × 1 = 10–1 + 2 × 10–2 Le premier nombre est 210,12. B = 2 × 102 + 10 × 101 + 0,2 + 0,01 = 210,12 3. 210,12 = 2 × 102 + 1 × 101 + 0 × 100 + 1 × 10–1 + 2 × 10–2 Les seconds ... 1 000 ... 7 × 10–1 + 6 × 10–2 A = 1 × 21 – 1 ... 3 × 105 ... A = (–52 + 42 + 83) + 3 × 10 + 5 × 10–1 B = 25 – 103 + 5 × 10 – 10–1 = 0,05 B = 975,5 6, 4 × 103 × 102 6, 4 × 105 6, 4 = = = 10 4 8 8 × 10 8 × 10 4 × 10–4 8 × 10 = 8 C= Exercice 2 1. a. –3 ≠ 3 × 5 ≠ 30 (–4)2 + 2 = 16 + 2 = 18. Les trois entiers consécutifs choisis sont : –5, –4 et –3. 2. a. Si le premier nombre est n, alors les deux nombres suivants sont n + 1 et n + 2. Le calcul de Sofiane donne donc : –5 × 2 × (–7) = 70 Le calcul de Jeanne donne donc : (–6)2 + 2 = 36 + 2 = 38 Sofiane et Jeanne n'obtiennent pas le même résultat. Le professeur a donc pu choisir –3 comme deuxième nombre. b. Si le 2e nombre est –2, les deux autres nombres sont donc –3 et –1. Le calcul de Sofiane donne donc : –3 × (–1) × 2 = 6 Le calcul de Jeanne donne donc : (–2)2 + 2 = 4 + 2 = 6 Sofiane et Jeanne obtiennent le même résultat. Le professeur a donc pu choisir –2 comme deuxième nombre.

Exercice 2 78 On double ! 1 h → 2 cellules 2 h → 2 × 2 = 4 cellules 5 h → 25 = 32 cellules 8 h → 28 = 256 cellules (7 h, c'est 2 fois moins donc 128) Elle notera, la première fois, plus de 200 cellules au bout de 8 h.

79 Distance Terre-Soleil 1 = 4 000 km 75 Le satellite est à 4 000 km de la Terre. 2. 8 min 30 s = 8 × 60 s + 30 s = 510 s 300 000 × 510 = 153 000 000 km 1,5 × 108 km La distance Terre-Soleil est donc environ 1,5 × 108 km. 1 × 109 km Ils sont environ 1,5 milliard de kilomètres. 1. 300 000 × © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. A = 10 × 9 – (–50) A = 90 + 50 = 140 a. Si le 2e nombre est –7, les deux autres nombres sont donc –8 et –6. Le calcul de Sofiane donne donc : –5 × 2 × (–7) = 70 Le calcul de Jeanne donne donc : (–6)2 + 2 = 36 + 2 = 38 Sofiane et Jeanne n'obtiennent pas le même résultat. Le professeur a donc pas pu choisir –7 comme deuxième nombre. b. Si le 2e nombre est –2, les deux autres nombres sont donc –3 et –1.

Le calcul de Sofiane donne donc : –1 × 2 × (–3) = 6 Le calcul de Jeanne donne donc : (–2)2 + 2 = 4 + 2 = 6 Sofiane et Jeanne obtiennent le même résultat. Le professeur a donc pu choisir –2 comme deuxième nombre.

80 Rover Curiosity En plus du travail sur les puissances de 10, cet exercice est l'occasion de revoir la notion de vitesse et de travailler sur les grandeurs produits.

1. Le vol a duré environ 255 jours. 2. 255 × 24 = 6 120 donc 255 j = 6 120 h.

d en km 560 × 10 6 v= = = 91 500 km/h 6120 t en h La vitesse moyenne du Rover était environ égale à 91 500 km/h. 3. Temps de parcours du signal : d 248 × 10 6 t= = = 827 s = 14 min v 3 × 105 Les premières images sont parties le 6 août à 7 h 58 min et sont arrivées 14 minutes plus tard, à 8 h 12. Travailler tremert au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 A = 10 × 32 – 10 × 9 = 90 B = –52 + (2 + 83) = –25 + 103 = –25 + 1 000 = 975 C = 2 × 103 + 5 × 10 = 2 000 + 50 = 2 050 ... 5 × 10–1 = 0,5 Exercice 1 A = 10 × (–3)2 – (–5) × 10 Écriture d'un cube écrire A. 1. a. (–2) × 3 – 5 = –11 b. 3. 3 × 3 – 2 × 3 + 4 – 7 = 9 – 6 + 4 – 7 = 0 Analyse d'une production 1. Marius a donné deux réponses fausses. 2. Les réponses de Marius sont les suivantes : A = –32 = 3 × 53 = –9 + 3 × 102 = –9 + 1 000 = 991 2× 53 = 2 × 125 = 250, car les puissances sont prioritaires sur la multiplication. On a donc A = –9 – 150 = –159. B = (7 – 2 × 63) = (7 – 8123) = (–1123) = –1 Ce calcul est correct. 2 17 17 –7 × (–3) + (2 – 3) + (–1) –63 + 1 = C= –8 –2 × 4 –8 –62 7,75 = –8 –8 –(1)17 = –1 –(–1)17 ≠. Il faut s'exposant est un nombre impair. Et : (–1)17 = –1. –63 – 1 –64 = = 8. On a donc C = –8 –8 Livre du professeur – Chapitre 2 Nombres relatifs 27 APITRE CH 3 Fractions © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs » : utiliser les nombres pour comparer, calculer et résoudre des problèmes. Les connaissances et compétences associées sont : Utiliser diverses représentations d'un même nombre (écriture décimale ou fractionnaire, notation scientifique, repérage sur une droite graduée) ; passer d'une représentation à une autre. – nombres décimaux ; – nombres rationnels (positifs ou négatifs) ; – fractions. Comparer, ranger, encadrer des nombres rationnels. Repérer et placer un nombre rationnel sur une droite graduée – ordre sur les nombres rationnels en écriture décimale ou fractionnaire ; – égalité de fractions. Pratiquer le calcul exact ou approché, mental, à la main ou instrumenté. Calculer avec des nombres relatifs, des fractions, des nombres décimaux (somme, différence, produit, quotient). • Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève – Reconnaître des écritures fractionnaires dans des situations variées. – Relier fractions, proportions et pourcentages. – Prendre conscience que certains nombres ne sont pas rationnels. – Montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés, contrairement au cas des entiers. Au cycle 4, les élèves consolident le sens des nombres et confortent la maîtrise des procédures de calcul. Les différentes composantes de ce thème sont reliées entre elles. Les élèves manipulent des nombres rationnels de signe quelconque. Ils prennent conscience du fait qu'un même nombre peut avoir plusieurs écritures (notamment écritures fractionnaires et décimales). • Repères de progressivité La maîtrise des techniques opératoires et l'acquisition du sens des nombres et des opérations apprennent un travail sur le nombre qui est mené tout au long du cycle 4. Les élèves rencontrent dès le début du cycle 4 le nombre relatif qui rend possible toutes les soustractions. Ils généralisent l'addition et la soustraction dans ce nouveau cadre et rencontrent la notion d'opposé. Puis ils passent au produit et au quotient. Au cycle 3, les élèves ont rencontré les fractions simples sans leur donner le statut de nombre. Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. En 5e, les élèves calculent et comparent proportions et fréquences, justifient par un raisonnement l'égalité des quotients, reconnaissent un nombre rationnel. À partir de la 4e, ils sont conduits à additionner, soustraire, multiplier et diviser des quotients, à passer d'une représentation à une autre d'un nombre, à justifier qu'un nombre n'est ou n'est pas rationnel par un calcul, à justifier que la fraction irréductible en 3e. • Liens avec les domaines du socle La pratique du calcul et l'utilisation de différentes représentations d'un nombre (fractions, fractions décimales, produit ...) permettent de mobiliser d'autres compétences (nombres décimaux, fractions), ce qui permet de contribuer au domaine 1 d'acquisition du domaine 4 et 5. Le code est. 84 Activités Questions 1. a. 4 × 2,5 = 10 6 21 La somme vaut 1.

2. En blanc : b. –5 × (–3) = 15 En rouge : 9 21 15 –= 15 = 1 5 En vert : 21 c. –7 × 9 ÷ 6 b. 42 4. a. Faux. 3. a. 3 2 –1 7 2 6 18 4 – 30 210 b. Vrai. 12 8 c. Vrai. Livre du professeur – Chapitre 3 Fractions 29 Activité 1 Familles de nombres Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de présenter les différents ensembles de nombres ainsi que leur inclusion les uns dans les autres et d'évoquer les nombres irrationnels. Les prérequis nécessaires sont de connaître les nombres entiers, les nombres décimaux, les relatifs et les fractions.

La capacité introduite est de déterminer la forme irréductible d'une fraction. Sac nombres entiers relatifs Z : 8 Sac nombres décimaux relatifs D : 8 –8,95 Les élèves réinvestissent leurs connaissances sur les entiers, les relatifs, les décimaux, les rationnels et proposent un nom pour chaque sac. Ce sera l'occasion de remarquer que 2 ou π ne sont pas des rationnels et ainsi introduire l'existence d'une autre sorte de nombres. Les élèves ne sont pas encore en mesure de ranger les nombres dans les sacs et ne se posent donc pas immédiatement la question de l'inclusion des ensembles les uns dans les autres. Sac nombres rationnels Q : 8 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 10 16 –5 5,44 16 7,5 3,5 –5,4 1 2 1 10 –5 7 –11 17 16 –11 17 2 7,5 16 3,5 –2,7 5 –4 0,79 5,4 –8,95 Z N 7 –3 10 416 820,25 8 –5 –5 7 22 7,5 –3,5 1 2 8 11 – 17 16 Activité 2 Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de montrer qu'il est toujours possible d'intercaler des rationnels entre deux rationnels donnés. Les prérequis nécessaires sont de connaître la notion de moyenne, de savoir additionner des fractions. 1 1 1 1 9 4 5 .

« c'est-à-dire La moyenne de et est 40 4 5 1 9 1 » donc Naomie a raison. Or c 5 40 4 Sachant que « la moyenne d'une série de données est toujours comprise entre la valeur minimale et la valeur maximale de cette série », on en conclut que la moyenne de deux fractions est toujours comprise entre ces deux fractions. Mehdi a donc raison. Activité 3 Tester un vaccin Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir que simplifier le numérateur et le dénominateur d'une fraction en produits de facteurs premiers permet de la rendre irréductible. Les prérequis nécessaires sont de savoir exprimer une proportion, de connaître la notion de nombres premiers. La capacité introduite est de déterminer la forme irréductible d'une fraction. Pour débuter cette activité, un rappel sur les nombres premiers inférieurs à 30 peut être utile. Il est également important que les élèves aient compris le rôle de la décomposition en produit de facteurs premiers pour la simplification. 30 NOMBRES ET CALCULS –5 R Les acariens 30 –5 7 7 3 20,25 En commençant par remarquer que les nombres entiers sont aussi des entiers relatifs, des décimaux et des rationnels, on aborde l'inclusion des ensembles les uns dans les autres. On pourra également informer les élèves sur l'appellation de nombres réels pour 2 et π. 10 7 3 20,25 Sac nombres réels R : 8 Noms possibles : Nombres entiers, nombres entiers relatifs, nombres décimaux relatifs, nombres rationnels, nombres irrationnels. 2. Sac nombres entiers naturels N : 8 16 20,25 –8,95 1. 10 187 0,79 7 × 23 161 8,1. 19 7 et 23 sont des nombres premiers donc 38 et 161 n'ont aucun diviseur commun différent de 1 et on ne peut donc pas simplifier cette fraction 2. a. Cette fraction est simplifiable car 126 et 690 sont tous deux divisibles par 2. b. On décompose le numérateur et le dénominateur en un produit de facteurs premiers, puis on simplifie au maximum. 3 × 7 × 3 2 × 3 × 3 × 7 21 = = × 2 × 3 × 5 × 23 115 Activité 4 Achat Une voiture Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir le sens de l'opération quotient de deux fractions. Les prérequis nécessaires sont de savoir traduire une proportion, et la capacité introduite est de savoir calculer une fraction d'un nombre lors de la résolution d'un problème. Le prérequis nécessaire est de connaître la règle de calcul de fractions. La capacité introduite est de savoir utiliser les élèves pourront s'appuyer sur le schéma pour mettre en place leur stratégie de résolution. On pourra proposer aux élèves les résolutions par étapes et à ce niveau de faire la conversion mise en place du raisonnement mathématique. 1. 3 × 9 4 = = 3 × 3 = 9 × 3 = 2 133. Romain paie 2 133 € à la commande.

2 Il reste les de 6 399 à payer ultérieurement. 3 3 2 × × 6 399 = 2 559,6 €. Romain paiera 2 559,60 € à la livraison. 5 3 Il restera alors à payer 1 706,40 € en six mensualités car : 6 399 – (2 133 + 2 559,6) = 1 706,4 Ce qui fera une somme de 284,40 € par mois pendant six mois car : 1 706,4 ÷ 6 = 284,40 €) Activité 5 Un cône dans un cylindre Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de réinvestir le calcul fractionnaire à partir d'un problème de géométrie dans l'espace. Les prérequis nécessaires sont de connaître les formules permettant de calculer le volume d'un cône et celui d'un cylindre. La capacité introduite est d'additionner, soustraire, multiplier des fractions. 10 cm 10 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Pour comparer les résultats, on mettra l'accent sur la nécessité de garder des valeurs exactes tout au long de la résolution du problème. 3 cm 4 cm + Secret d'un 2 × 1 52 × 10 22,5 π cm3 = 10 π cm3 × 10 = 20 cm 30 cm 10 cm Vcylindre 10 cm Le cône est placé dans le cylindre de la mise est un volume de Le volume d'un cylindre est de 97,5π 22,5π = 1 cm – 4 = ... 3 3 Or, si on calcule le tiers du volume du cylindre, on obtient : 13 13 × 5 × 8 × π cm3 = 32,5π cm3 16 2×8 Tim a donc raison. Volume du cône : 1 = a.

b. 8 = 5 × 40 mais 11 × 5 = 25 les fractions ne sont pas égales. 14 × 4 56 14 b. = = = 3 8 8 24 × 24 24 ... 5 = ... Donc les fractions 15 = 5 × 3 5 des fractions sont égales. 6 14 ... 43 × 8 = 43 15 × 3 Les fractions sont égales.

359 × 78 = 28 002 et 66 × 425 = 28 050 donc ces fractions ne sont pas égales. 6 –140 – 5 × 2 × 7 × 2 5 = – 224 2×2×2×2×7 8. 586 293 = 42 21 d. 1 764 63 4×7×7×9 – – 98 × 15 = ... 3 × 5 × 17 ... 96 96 96 96 96 –35 4 3 2 K= 55 5 × L= 7 × 2 –8 33 × 2 × 7 3 × 5 61 8 63 21 315 21 × 5 × 3 = 2 × 3 × 3 × 7 × 5 = 21 5 × 3 × 7 ... 15 15 = 16 × 36 42 = –3 20 – 13 × 4 M N × 2 × 3 × 5 × 7 7 –38 = 2 × 19 × 2 × 2 = –19 84 × 2 × 2 × 3 × 7 ... Livre du professeur – Chapitre 3 Fractions 31 Faire le point ... 53 11 3 × 5 × 2 × 5 3 × 3 × 5 ... 11 × 7 × 2 ... 11 Approfondir les chaines 31 11 7 ... Activité de recherche 9 ... 12 a. 11 13 3 11 7 9 2 12 Livre du professeur 17 Approfondir les fractions 5 11 15 Après avoir noté les fractions, on sait tous ces nombres de ces ... c'est-à-dire 3 7 3 7 2 ... 7 3 ... 3 7 3 5 ... 9 3 × 5 × 3 ... 4 7 3 5 × 5 × 3 ... 2 7 × 3 × 7 ... 3 ... Les trois ... 3 5 7 ... 9 3 ... 11 1 ... 9 3 9 = 3 × 3 × 5 × 5 ... 3 11 1 15 1 3 5 ... 16 3 ... 15 3 6 3 1 4 ... 2 3 × 3 5 7 ... Or ... 15 11 ... 7 3 9 × 4 ... 8 45 3 7 × 3 ... 23 × 3 × 3 × 3 × 3 ... 7 × 5 × 11 × 7 ... 14 ... 3 5 ... 27 × 15 ... 27 2 ... 3 2 Solution 15 21 ... 35 ... 16 Les fractions ont toutes ... 21 2 × 3 × 3 × 7 2 × 5 × 5 × 7 ... 3 6 12 5 27 11 × 4 5 × 17 – 3 Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 25 × 2 × 7 ... 24 4 ... 7 × 3 × 3 × 7 ... 21 ...

Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2 × 3 × 3 × 7 × 2 × 5 × 5 × 7 ... 3 × 3 × 7 × 5 × 5 ... 2 × 24 × 7 ... 25 × 7 ... 3 × 5 × 7 ... 2 ... 3 × 7 ... 7 × 7 × 7 2 ... 12 c.

a. b. 5×2×3×7 2×7×3×5 6 22 × 33 × 7 2 4 × 3 × 3 ... 12 c.

5 = d. 2 7 2 × 32 × 32 Donc 2 × 3 ... 5 = 5 × 2 × 5 × 72 22 × 3 ... 3 2 × 32 × 33 ... 24 ... 14 × 3 × 7 × 5 × 7 ... 6 3 ... 3 ... 6 Faire le point × 7 ... 7 × 2 × 3 × 3 ... 21 ... 5 ... 63 = 3 × 3 × 7 ... 6 × 2 × 3 × 11 ... 2 a. 14 24 = 2 × 2 × 2 × 3 ... 2 ... 11 ... 7 × 2 × 3 × 2 ... 17 × 17 × 2 ... 3 ... 30 ... 31 ... 4 ... 3 ... 3 ... 5 ... 15 ... 7 ... 7 × 2 × 11 ... 15 ... 7 ... 7 × 11 × 3 × 7 ... 2 ... 3 ... 4 ... 5 ... 2 ... 17 ... 3 4 ... 3 2 ... 14 ... 3 × 7 ... 3 ... 21 ... 4 ... 11 ... 15 ... 42 ... 47 Écrire sous forme irréductible ... 3 ... 5 ... 3 ... 5 ... 17 ... 8 ... 9 ... 10 ... 11 ... 12 ... 13 ... 1 = 31 ... 2 ... 7 ... 3 ... 5 ... 35 ... 19 ... 21 ... 2 × 3 ... 3 ... 12 ... 8 ... 3 ... 12 ... 4 ... 16 ... 15 ... 24 ... 6 ... 19 ... 4 ... 18 ... 5 ... 3 ... 3 ... 8 ... 6 ... 7 ... 5 ... 4 ... 4 ... 13 ... 15 ... 5 ... 3 ... 7 ... 17 ... 27 ... 11 ... 3 ... 21 ... 4 ... 3 ... 1 ... 13 ... 15 ... 19 ... 15 ... 3 ... 5 ... 6 ... 15 ... 26 ... 1 ... 24 ... 12 ... 4 ... 23 ... 12 ... 5 ... 20 ... 15 ... 8 ... 4 ... 14 ... 5 ... 18 ... 7 ... 9 ... 8 ... 3 ... 29 ... 30 ... 2 ... 7 ... 13 ... 28 ... 12 ... 4 ... 3 ... 6 ... 9 ... 30 ... 2 ... 2 ... 3 ... 9 ... 11 ... 5 ... 19 ... 15 ... 20 ... 8 ... 31 ... 1 ... 2 ... 8 ... 14 ... 9 ... 13 ... 31 ... 4 ... 4 ... 15 ... 1 ... 8 ... 4 ... 5 ... 17 ... 3 ... 7 ... 15 ... 12 ... 12 ... 4 ... 17 ... 1 ... 15 ... 20 ... 12 ... 2 ... 12 ... 13 ... 7 ... 14 ... 19 ... 12 ... 4 ... 5 ... 6 ... 8 ... 3 ... 8 ... 7 ... 8 ... 3 ... 4 ... 2 ... 6 ... 5 ... 14 ... 12 ... 10 ... 15 ... 3 ... 21 ... 5 ... 30 ... 4 ... 13 ... 3 ... 6 QCM –1 × (–12) = 1, par exemple. 12 4 8 –5 8 + × 11 41 –11 1.

B 2. C 1. C 2. B 3. A 1. b. c. B 2. C 3. b. 3. a. B

B 3. A. Carte mentale Irréductible Forme irréductible : on ne peut pas la réduire. Exemple : 3 7 Les fractions : opérations Inverse Soustraction Addition a b a – b = c c c a b a + b = c c c Même dénominateur Multiplication a c a × c × = b d b × d Division a c a d : = × b d b c Le produit d'une fraction et de son inverse est égal à 1. 3 4 L'inverse de a est 1. Livre du professeur – Chapitre 3 Fractions 33 57 Élection Algorithmique et outils numériques 1. 52 Simplification de fractions 3 1 1 1 4 4 × = ... Sur 1 Sophie a obtenu les 1 ... 14 14 ... 14 ... Il y a 18 318 pour Marc et Sophie ; 1 14 14 14 ... 3 18 54 54 54 16 × 2 ... 3 ... 1 ... 1 ... 4 ...

Elle renvoie au reste de la division euclidienne. b. « est divisible par » « diviseur », « = » et « b » sont toutes deux divisibles par « diviseur ». Il sert à déterminer si un nombre est un diviseur commun à deux nombres.

2. Ce script pose problème lorsque le seul diviseur commun aux deux nombres « a » et « b » est 1. On conclut donc que le plus petit diviseur commun supérieur ou égal à 2. a. Un diviseur commun à « a » et « b » est inférieur ou égal au plus petit des deux nombres « a » et « b ». 1 2 1 2 28 Donc le nombre qui ... « a » et « b » ... 3 Il s'agit d'une fraction ... il ne faut pas supprimer. Ce script ... 3 ... pas ... pour Mohamed. 54 28 = 0,518 5 donc il a obtenu la majorité absolue. 54 A cette occasion, on demandera aux élèves de préciser la différence entre majorité absolue et relative. 2. 3 1 1 9 = donc Marc a obtenu 3 voix, Sophie a ; 18 54 5 6 donc 9 voix, Miri a obtenu 14 voix et Mohamed a obtenu 28 voix. On peut prolonger cet exercice en demandant de construire un diagramme circulaire ou semi-circulaire représentant les résultats de cette élection. 58 Traduction a. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. c. 8 × 3 – 5 14 + 6 2 × 7 – 7 3 + 1 b. + 1 9 8 – 5 10 14 160 59 – 10 3 Des sauts de puce 1. « =A2*1/3 » et « =B2+A3 » 2. La puce n'atteindra pas le chien.

54 Approcher un irrationnel à l'aide de rationnels 1. Dans A3, on tape « =1/(2+A2) ». 2. Dans B3, on entre « =1+A3 ». 3. Les résultats s'approchent de plus en plus de la valeur affichée pour 2. 21 –10 8 + 3 12 12 –11 1 102 = 2 = 3 × 12 = 8 11 22 . = 9 –7 –10 35 × =. 8 11 44 –3 8 –9 + 5 9 = 1 5 1 5 30 30 = – 1 × 1 × 1 × 1 × 1 × 1 = –1 1 2 –22 –21 1 5 Il 60 Des jeux olympiques Il paraît indiqué que l'atelier de calcul 1 10 20 – 3 = 6 Pour résoudre des nombres « 1 ... 12 = 2 2 ... 2 ... 1 ... 4 ... 2 ... 3 ... NON NON OUI NON décimal. OUI NON OUI NON rationnel. OUI OUI OUI NON Un grand chercheur physicien ... 4 ... 1 ... Le nombre ... un jour ... 2 ... 55 Un sauteur en apnée ... Marina est une profondeur de –15 m lorsque Kevin est à une profondeur de –21 m. Les deux nageurs s'éloignent alors l'un de l'autre : –21 + 6 × (–9) = –5 m. Kevin est donc à 5 m du fond ... 1 × 2 ... Kevin a fait ... le plus profond. 34 NOMBRES ET CALCULS 35 ... 3 ... 59 ... 1 ... 3 ... 7 ... 5 ... 1 ... 4 ... 2 ... 17 Les oiseaux ... Il lui faut ... pour aller jusqu'à ... il faudra ... car ... ceux qui a 15 livres. Le ... 1 ... 17 ... 12 ... 11 ... 4 ... 4 ... 11 ... 8 ... 2 ... 11 ... 12 livres ... 4 ... 1 ... il y a 5 livres. On peut demander aux élèves de schématiser ce problème pour le résoudre. 60 Émissions de CO 2 1 20 3 2 2 14 ... Le secteur « Autres » = 5 4 20 5 représente un cinquième des émissions de CO2. 2. 59 millions pour l'industrie. 20 1 180 3 59 ÷ 59 = 59 Il y a donc 5 ... 393 millions de tonnes au total. Sur 1 ... ... 5 1 ... 3 ... 1 1 180 ... Donc il y a ... 1 ... 4 ... 1 ... 1 ... 3 ... 1 180 ... 1 4 × ... 3 × 1 180 1 × 1 180 ... 78,5 millions pour les résidences. 43 1 ... 12 ... 1 180 ... Au total les ... 16 ... 1 ... 1 ... 5 ... 3 ... 1 ... 1 ... 1 ... proportionnalité. 1 59 La fraction correspond à millions de tonnes, donc les 20 3 59 ... Il s'agit à l'échanger 3 3 de son budget pour faire son ... loger, il lui reste donc 5 5 de son budget.

47 11 1 47 3 × = + ... Il dépense donc de son 100 000 ... 3 5 1 500 5 ... budget pour la nourriture, les transports, les assurances et les loisirs. Part de son budget que représente l'ensemble des dépenses : 47 87 2 ... 5 100 100 13 Il lui restera donc de son budget après avoir pris en compte 100 l'ensemble des dépenses. 13 x Soit x son budget prévisionnel : ... 117 100 000 13x = 117 × ... 100 000 ... x = 900 ...

100 13 Son budget prévisionnel est 900 €. Cet exercice sera l'occasion de la notion de contre-exemple. 66 Sierpinski Il dépense 1 1 1 1 5 = + + 1 2 6 1 2 6 1 1 1 5 = + + ... Pour n = 4 : 4 1 8 8 1 1 1 5 = + ... Pour n = 9 : 9 3 6 18 Pour n = 3 : 2 67 Les élèves pourront s'aider d'un schéma. 62 Repère 68 Énigmes à TIC 27 × 4 ... 108 4 = ... 81 3 27 = 3 × 4 8 = 2 = 3 × 4 9 = 3 ... 1 ... 2 9 ... 36 40 3 ... 1 ... 4 ... 4 ... 2 ... 9 ... 1 ... 2 ... 1 ... 2 ... 1 ... 3 ... 3 ... 5 ... 4 ... 9 ... 1 ... Un apple e n nombre d'étapes en base ... 1 ... 4 ... 1 ... 3 ... 1 ... A 1 ... 3 ... 1 ... 2 ... 2 ... 2 ... 3 ... 1 ... n ... 1 ... 1 ... 4 ... 4 ... 4 ... 1 ... 2 ... 1 ... dans ... 1 ... 3 ... 2 ... 1 ... 1 ... 1 ... 1 ... 3 ... 5 ... 2 ... 4 ... 1 ... 1 ... 5 ... 1 ... 1 ... 7 ... 16 ... 1 ... 5 ... 1 ... 1 ... 1 ... 1 ... 1 ... 3 ... 5 ... 2 ... 1 ... 7 ... 4 ... 7 ... 1 ... 7 ... 1 ... 1 ... 1 ... 2 ... 1 ... 3 ... 1 ... 1 ... 1 ... 1 ... 4 ... 2 ... 1 ... 1 ... 6 ... 1 ... 7 ... 4 ... 1 ... 1 ... 8 ... 5 ... 4 ... 1 ... 1 ... 2 ... 1 ... 1 ... 5 ... 5 ... 4 ... 2 ... 3 ... 1 ... 1 ... 1 ... 2 ... 4 ... 2 ... 1 ... 1 ... 4 ... 6 ... 1 ... 4 ... 1 ... 7 ... 1 ... 1 ... 1 ... 3 ... 3 ... 1 ... 4 ... 2 ... 1 ... 2 ... 3 ... 1 ... 1 ... 6 ... 9 ...

Donc k2 = (2n)2 est aussi pair. On peut aussi prouver que le carré d'un nombre pair est un nombre pair. Soit k un nombre pair, k peut donc s'écrire 2n avec n entier. k2 = (2n)2 = 4n2 = 2 × 2n2, k2 est donc un nombre pair.

La supposition de départ est donc fausse : 2 ne peut 1 2 (6) Glace 1. Les bactéries 40 1. 500 + 50 = 700 ; à 13 h, il y aura 980 bactéries. 700 × 40 980 + 980 = 1 372 ; à 15 h, il y aura 1 372 bactéries. 100 2. L = 1 372 × 0,5 = 686 μm = 0,000 686 m = 0,686 mm 686 343 0,686 = = 4 4

000 2 000 343 La longueur L représente les diamètres d'une 2 000 bronche. 2. Livre du professeur – Chapitre 3 Fractions 35 pas s'écrire sous la forme d'une fraction irréductible. C'est donc un irrationnel. Cette démonstration peut être abordée avec certains élèves mais elle peut s'avérer très difficile pour d'autres. 71 Vélo 52 ; cela veut dire que quand il effectue 18 52 un tour de pédalier, la roue effectue de tours, qui correspond 18 à une distance de 6,04 m. 52 18 108,72 = 6,04 × = ; un tour de roue correspond 6,04 ÷ 52 18 52 108,72 m. donc à 52 108,72 ÷ π = 0,66 m ; le diamètre de la roue est d'environ 52 66 cm. Avec un tableau de proportionnalité, on calcule les angles du diagramme circulaire : Listes X Y Z Total Nombre de sièges 25 120 35 180 Angle (en °) 50 240 70 360 Il utilise un bouquet de Liste X Liste Y Liste Z 120 75 Divisibilité 1. 2 5 9 Soit L le nombre de fruits. 1 035 est divisible par NON OUI OUI 1 f 2 2 ; il lui reste 1 2 1 1 f + 2 = f ... 2 – f ... 2 2 1 1 1 Au 2e, il donne : f ... 2 + f ... 2 = f ... 4 (f + 1) ; il lui reste : 4 2 2 1 1 1 f – 2 f ... 4 f + 1 = f ... 3 ... 2 4 4 774 est divisible par OUI NON OUI 322 est divisible par OUI NON NON 72 Une équation par Ben Ezra Il donne au premier gardien : 1 2 1 2 1 1 1 2 2 1 1 1 1 ; il lui reste : f ... 3 +2 ... f + 2 8 2 4 1 1 1 1 7 f + f ... 3 – f ... 4 8 2 8 2 On a donc l'équation suivante à résoudre : 9 1 7 1 f ... 8 ; f = 8 2 8 2 donc f = 36. Il avait cueilli 36 fruits. Au 3e, il donne : 1 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 25 35 2 Pour aider les élèves, on peut leur suggérer de partir d'un nombre donné de fruits (50, par exemple) pour comprendre le problème. 73 Le papier cadeau Dimensions du parallélépipède rectangle : Longueur : 60 m ; largeur : 20 cm ; hauteur : 16 cm Surface totale du parallélépipède : 2 (60 × 16 + 60 × 20 + 16 × 20) × 2 = 4 960 cm 90 2 Surface de papier : 460 × 4 960 = 9 424 cm 100 Longueur minimale de papier : 9 424 ÷ 76 = 124 cm 74 Un scrutin de liste 5 des voix correspondent à 1 663 920 voix ; 9 5 1 663 920 ÷ = 2 995 056 ; au total, il y a eu 2 995 056 suffrages 9 exprimés. 5 des voix. La liste X a obtenu 554 640 voix soit 27 % voix. La liste Z a donc obtenu le reste, soit 27 C'est donc la liste Y qui est arrivée en tête : elle obtient d'abord un quart des sièges, soit 45 sièges. Il reste 135 sièges à le répartir à la proportionnelle entre les trois listes. 5 Liste X : × 135 = 25 sièges 27 5 × 135 = 75 sièges Liste Y : 9 7 Liste Z : × 135 = 35 sièges 27 Les 36 NOMBRES ET CALCULS 77 4. La fraction n'est pas irréductible car le numérateur et 1 035 le dénominateur sont divisibles par 9.
322 n'est pas irréductible car le numérateur et la fraction 774 dénominateur sont divisibles par 2. 322 3. La fraction n'est pas irréductible car le numérateur et 1 035 le dénominateur sont divisibles par 23. 76 Propriétaire terrien 1. 1 – 1 4 + 3 × 4 2 = 2 ; il lui reste la moitié de sa propriété. 1 1 3 2. 20 hectares. 77 Calculs 1. A = 1 – 1 12 + 12 2 = 12 – 12 = 12 8 3 12 12 11 1 6 5 1 – 5 1 5 12 2 2 = = × B = 5 1 6 12 6 + 5 5 5 35 4×5×7 4 5 2 3 = 4 2 28 5×4×2 5 1 42 458 3. A + B + C = + + = 4 donc la somme est 12 12 12 12 bien un nombre entier. 78 Confiseur 80 × 120,40 = 96,32 € 100 301 7 2. a. = ; on a simplifié le numérateur et le dénominateur 172 4 par 43. b. On peut donc réaliser au maximum 43 sachets composés chacun de 7 caramels et 4 chocolats. 1. 79 Vitesse de la lumière 1 = 4 000 km 75 2.
d = V × t = 300 000 × 510 = 153 000 000 km = 1,53 × 108 km 1. d = V × t = 300 000 × 80 Vente de pins 2 14 10 2 × 0,572 = 22 × 92 × 70 = 19 179,93 ≈ 19 180 € 81 Cinéma 70 700 7 × 25 × 4 4 = = = 52,5 25 × 7 × 3 525 3 2.
L × l = 70 × 52,5 = 3 675 mm2 = 0,003 675 m2 588 3. = 160 000 : quand les longueurs sont multipliées 0,003 675 1. par un coefficient k, les aires sont multipliées par k2. 160 000 = 4002 ; donc le coefficient est 400. 70 × 400 = 28 000 mm = 28 m 52,5 × 400 = 21 000 mm = 21 m Les dimensions de l'écran sont 28 m de longueur et 21 m de largeur. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 2 × 60 + 40 = 3 1 Chocolats noirs à la crème : × 40 = 10 4 Chocolats noirs au caramel : 30 1 Chocolats au lait : × 60 = 12 5 Chocolats blancs : 8 Chocolats noirs : Exercice 1 1 1 0 13 2 3 3 + + + + 3 5 15 15 3 15 2 Il reste de chocolats blancs qui correspondent 15 2 12 15 1 chocolats ; donc les chocolats de la boîte représentent 15 nombre total 6 chocolats. 15 Les de la boîte représentent donc 90 chocolats. 15 2 2. Chocolats noirs : × 90 = 60 3 3 Chocolats au lait : × 30 = 18 5 Chocolats blancs : 12 Exercice 3 1. 2. Il a augmenté de 74 900 € entre 1999 et 2009. 74 900 × 100 = 107 70 000 Il a subi une augmentation de 107 %. Exercice 3 1. Soit x le prix de l'appartement en 1999. 2 x + x = 144 000 7 9 x = 144 000 x = 144 000 × = 112 000 7 9 En 1999, le logement coûtait 112 000 €. 2. Il a augmenté de 123 200 € entre 1999 et 2009 entre 2009 car 235 200 – 112 000 = 123 200. 123 200 × 100 = 110 112 000 Il a subi une augmentation de 110 %. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Exercice 2 30 3 5 2 × 15 3 × 5 2 5 7 × = × = = 165 11 3 11 × 15 11 × 3 11 11 11 Exercice 2 2 × 11 × 5 × 7 7 5 × 5 × 3 2 × 3 × 2 × 7 = 9 × 9 = 7 3 11 9 8 11 11 + 9 9 2 × 70 000 = 20 000 ; 20 000 + 70 000 = 90 000 7 Il coutait 90 000 € en 2002. 61 × 90 000 = 54 900 ; 100 54 900 + 70 000 = 144 900 Il coutait 144 900 € en 2009. Travail en binôme 100 103 ; 101 201 100 100 201 20 000 = 1 ; 201 = = 10 403 103 101 103 201 103 103 101 10 403 × = et 201 = 20 100 100 201 100 101 1. Analyse d'un document 1. Parce que l'augmentation et la baisse ne se font pas sur la même quantité, donc on ne peut pas retrouver le niveau de départ. 2. Une augmentation qui ne compense pas la forte baisse de 2009 ! Après avoir subi en juin 2009 une baisse d'un tiers de sa valeur, la tonne de blé a aujourd'hui augmenté d'un tiers de sa valeur de juillet 2009, ce qui ne lui permet pas tout de même pas de retrouver son niveau de 2008. Livre du professeur – Chapitre 3 Fractions 37 APITRE CH 4 4 Calcul littéral Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». Les connaissances et compétences associées sont : – développer et factoriser des expressions algébriques dans des cas très simples ; – utiliser le calcul littéral pour prouver un résultat général, pour valider ou réfuter une conjecture. • En 5e, l'élève a déjà rencontré des expressions littérales et a travaillé les capacités suivantes : – écrire une expression littérale ; – utiliser une expression littérale ; – tester une égalité. • En 4e, ces capacités ont été approfondies et la simple distributivité a été introduite. Elle a servi à démontrer des propriétés et des conjectures et à simplifier des expressions littérales en vue de leur utilisation dans le chapitre traitant de la résolution des équations. • En 3e, on travaille et poursuit au travers de différents problèmes algébriques, géométriques ou contextualisés et le calcul littéral est en particulier utilisé pour démontrer. La part a été prise d'introduire la double distributivité comme notion de cours de 3e. Cela permet d'élargir le champ des problèmes à des situations plus riches, qui se ramènent néanmoins au premier degré après factorisation ou développement. Les identités remarquables, citées dans les exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève, sont introduites dans les problèmes. • Au niveau de l'utilisation des outils numériques, l'élève poursuivra le travail des deux années antérieures : le tableur est un outil efficace dans la résolution de problèmes, par exemple dans le calcul d'un grand nombre de valeurs pour une même expression littérale, ou la conjecture de résultat.
C'est le garçon qui gagne car 12 – 7 = 5. Activités © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Questions flash 1. a. Vrai.
b. Faux. c. Faux. d. Vrai.
b. Faux.
2. a. A = (0 + 1)(2 × 2 – 3) = 0. b. A = (–1 + 1)(2 × 1 – 3) = 0. c. A = (3 + 1)(2 × (–2) – 3) = –28 3. a. x2 b. x c. 2xy d. (xy)2 4. a. 40 + 8a b. 2x2 – x c. –2b + 6 d. 7t – 7t2 e. 16t – 6t2 5. a. b(b + 3) b. 6(2 – y) c. 2x(7x + 1) d. 4x(4 – x) 6. a. C'est un multiple de 2 ou il est pair. b. Il est impair. c. C'est un multiple de 7. Activité 1 Suites de nombres Intentions des auteurs Les objectifs de cette activité sont de créer et simplifier une expression littérale, d'utiliser une expression littérale pour démontrer un résultat général.
Les prérequis nécessaires sont de connaître le calcul littéral de 4e, de savoir factoriser une somme. La capacité introduite est de simplifier une expression.
C'est une capacité vue en 4e dans le chapitre 5. 1. La suite de nombres est : 1, 2, 3, 5, 8, 13. Pour obtenir un nombre, il suffit d'additionner les deux précédents : 8 = 5 + 3, 13 = 8 + 5. Le nombre suivant sera donc 8 + 13 = 21. 2. Avec 2 et 5 : 2, 5, 7, 12, 19, 31. Avec 4 et 6 : 4, 6, 10, 16, 26, 42. 3. Pour 1, 2, 3, 5, 8, 13 : (1 + 2 + 3 + 5 + 8 + 13) ÷ 4 = 8. Pour 2, 5, 7, 12, 19, 31 : (2 + 5 + 7 + 12 + 19 + 31) ÷ 4 = 19. 4. Pour 4, 6, 10, 16, 26, 42 : (4 + 6 + 10 + 16 + 26 + 42) ÷ 4 = 26. On peut conjecturer que la somme des 6 nombres divisée par 4 donne le 5e nombre de la suite. L'objectif de cette question est d'amener les élèves à utiliser le calcul littéral et en percevoir la nécessité pour démontrer la conjecture proposée. Des tests successifs, même nombreux, ne suffisent pas. On note x et y les deux nombres choisis. La suite des 6 nombres est donc : x ; y ; x + y ; x + 2y ; 2x + 3y ; 3x + 5y Ainsi, la somme des 6 nombres est : x + y + (x + y) + (x + 2y) + (2x + 3y) + (3x + 5y) = 8x + 12y = 4(2x + 3y) Et donc, on divise par 4, on obtient bien le 5e nombre de la suite des 6 nombres. La conjecture proposée est donc toujours vraie. Livre du professeur – Chapitre 4 Calcul littéral 39 Activité 2 Développer ou factoriser ? Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de remobiliser les notions de développement et de factorisation. Les prérequis nécessaires sont de connaître le calcul littéral de 4e, la forme développée, la forme factorisée, et la distributivité. Les capacités introduites sont de développer un produit avec la simple distributivité, de factoriser une somme ou une différence. Ce sont des capacités vues en 4e dans le chapitre 5. 1. Expressions développées : D, E, F, H. Expressions factorisées : A, B, G, C.
2. Les étiquettes qui donnent la forme développée et la forme factorisée de la même expression littérale sont les étiquettes B et E : (4 × x + 3) × x = 4 × x × x + 3 × x. La règle utilisée est la distributivité de la multiplication sur l'addition et la soustraction : (a + b) × c = a × c + b × c (a – b) × c = a × c – b × c Activité 3 L'aire à boîte 1. b. Intentions des auteurs Lors de la création du fichier tableur, il sera intéressant de faire percevoir aux élèves les lettres des valeurs que peut prendre la longueur du côté du carré découpé, écrire une expression littérale et utiliser un tableur, une poignée de recopie. 1. a. Cette question peut être donnée comme travail préparatoire à faire à la maison, afin de gagner du temps pour la suite de l'activité. 1 cm Prenons 1 cm comme taille d'encoche. On obtient donc comme boîte : C 7 cm D A b. Le volume de la boîte est donné par la formule du volume d'un pavé droit, soit L × ℓ × h.
Ici, L = 7, ℓ = 7 et h = 1. Donc le volume est égal à 7 × 7 × 1 = 49 cm3.
c.
Prenons une encoche de 2 cm. Alors L = 5, ℓ = 5 et h = 2. Donc le volume est égal à 5 × 5 × 2 = 50 cm3. L'objectif de cette question est que les élèves se rendent compte que le volume de la boîte varie en fonction de la taille de l'encoche. Ce qui, pour eux, ne paraît pas évident à première lecture, car ils pensent que la perte de longueur et de largeur de la boîte est compensée par le gain de hauteur. c.
On constate que le volume maximal est atteint pour une encoche mesurant 1,5 cm. L'objectif de cette construction est de faire manipuler les élèves, et de pouvoir comparer visuellement les boîtes, voire de les convaincre de la réponse trouvée à la question précédente en faisant remplir les boîtes construites avec du sucre ou du sable... 2. a. On note x la taille de l'encoche. Alors, on a : L = 9 – 2x, ℓ = 9 – 2x et h = x. Ainsi le volume est égal à (9 – 2x) × (9 – 2x) × x = x(9 – 2x)2. Activité 4 Des aires 6,3 4,7 5,2 L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer la double distributivité. Les prérequis nécessaires sont de connaître l'aire d'un rectangle et de savoir développer avec la simple distributivité. La capacité introduite est de développer un produit avec la double distributivité. 1. 5,2 Intentions des auteurs 3,8. 1. a. 6,3 × 5,2 + 5,2 × 4,7 + 6,3 × 3,8 + 3,8 × 4,7 = 99 Ainsi l'aire de la figure est de 99 cm2. 3,8 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. B 6,3 4,7 Avec cette nouvelle disposition, on a : = (6,3 + 4,7) × (5,2 + 3,8) = 11 × 9 = 99 cm2. 40 NOMBRES ET CALCULS 3. Il suffit de dessiner un rectangle de côtés a + b et c + d. a b c d a b 20 A = 6 × x × y x Savoir-faire (2 × x + 3) × (4 + 3x) – 4) H = 2x2 + 15x + 3xy(2x + 15) L = 3(2x + 5) L = 6x + 15 N = 2x(x – 9) N = 2x2 – 18x M = 12(3 – 5x) M = 36 – 60x P = –3x(2x + 7) P = –6x2 – 21x G = (x + 4)(x + 1) G = x2 + x + 4x + 4 G = x2 + 5x + 4 I = (2x + 1)(x – 1) I = 4x2 – 2x + 2x – 1 I = 4x2 – 1 J = (x + 7)(4x + 2) H = 4x2 + 2x + 28x + 14 H = 4x2 + 30x + 14 J = (2x + 6)(y + 3) J = 2xy + 6x + 6y + 18 K = (x + 18 N = 6x + 3) N = 2x2 – 12x + 3 J = 3 – 7x(2 – 13x) = 3 – 14x + 91x2 K = 2x(7 – 8x) = 14x – 16x2 K = –(3 – 5x) (x + 3) = –15x2 (x + 12) © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. B=5×y×y C = (7 × t + 3) × (2 × x + 5) D = 3 × (5 × y – 2) + 2 × x × y 3 9 4. a. k(c + d) = kc + kd b. En prenant k = a + b, on obtient l'égalité : (a + b)(c + d) = (a + b)c + (a + b)d.
c. En développant chaque terme de la somme du 2e membre de l'égalité, on obtient : (a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd On appelle cela la double distributivité car on utilise 2 fois la simple distributivité. Développer un produit avec la simple distributivité 21 a. Vrai. b. Vrai. c. Faux. d. Faux. e. Vrai. 22 L'objectif ici est de justifier une technique de calcul mental utilisée depuis le cycle 3, en décomposant les nombres et en utilisant le développement. 180 13 a. Faux. –4(y + 3) = 7y 11y + 9 + 6(7 – y) b. Vrai. d. Faux. f. Faux. c. Faux. e. Faux. 5y2 – 2y(y – 8) y2 + 2y + 1 + 3y(6y + 1) 14 + (t + 4)2 2 × t + 4 + t × 4 u 36 × 62 0 = 02 17 Jade et Jules ont raison. 2 c. t + 5t e. 18sz g. xy – y 19 A = 3(2x – 5) + 6x2 B = 6(x – 5xy + 2) + 11y C = –6x + 2x2 + 4(11 + 3x) D = 3(2x + 1)2 + x – 3 E = 2x(6x + 7y) – 3xy • • • • • • • • 3y + 2 + 6(y 19y 2 + 5y + 1 3y – 12 5y + 51 B = 3x – 6 + 14x + 28 + 17x + 22 C = 2x2 + 4x2 – 5x + 6x2 – 5x D = 4x2 – x – 3x2 – 9x – x2 – 10x b.
2k + 1 avec k entier quelconque. 18 a. 10x B = 6x + 12 – 2x + 9x2 = –20x + 10x2 25 A = 3x – 5x – 3x – 36 = 2x – 36 15 a. 2k avec k entier quelconque. 25 × 52 100 = 102 1 683 24 flash Questions 121 = 112 2 223 C = 11x + 55 E = –18x – 12x2 Simplifier une expression 16 4 = 22 2 929 23 A = –3x – 21 Exercices 2 flash Questions 9 = 32 26 2(b + 6) + (7b – 1) b. 4y – 7 d. n2 f. 14x3 h. y(x + 1)x2 10(b + 9) – 6(7 – b) (b2 + 4) – (3 – 6b2) 3(2b + 11) + 5(8 – 3b) • • • • • • • 9b + 5 7b2 + 11 16b + 48 –9b + 73 27 A = 5a + 10 – 6a + 7 – a + 17 B = –3b2 – 7b + 5b – b2 = –4b2 – 2b C = –4c – 3c2 – 9 + 2c – 6c2 = –9c2 – 2c – 9 D = –5d + 5d2 – 10d – 42 = 5d2 – 15d – 42 Livre du professeur – Chapitre 4 Calcul littéral 41 Développer un produit avec la double distributivité 38 1. D = 5x2(x – 3) – 6x(x + 7) = x × x × 5x(x – 3) = 6(x + 3) = 2(x + 3) + 6x(x + 3) = 3x(x + 3) Flash Questions 2 (x + 2)(x + 5) + 1 = (x + 3)2 Pour A : oui, car c'est une égalité produit. Pour B : non, car c'est une somme. Pour C : non, car c'est une différence. Pour D : oui, car c'est un double produit. 6 × n = (x + 1)(4x + 5) + 1 ? C = (x + 1)(8 + 5) – 1 ? (x + 3) E = (x + 2)2 D = x(3x – 5) – 6(x + 3) = (x + 1)(4x + 5) – 1 = (x + 3)(x + 5) – F = (x + 2)(6 + 3)(x – 3) – 2 G = (x + 3) + (x + 2)(x – 7) – (x + 4)(x + 2) (x + x + 3) = 3 × x × 4 × x + 3 × x × 3 + 4 × x + 3 (x – 5)(x + 6) = x × x × x + 6 × x – 5 × x + (–5) × 6 3. (x – 7)(x – 2) = x × x + x × (–2) + (–7) × x + (–7) × (–2) 4. (2x + 3)(3x + 1) = 2x × 3x + 2x × 1 + 3 × 3x + 3 × 1 39 30 A = x2 + 2x + 3x + 6 = x2 + 5x + 6 (8 – 3y)(y + 5) + (8 – 3y)(y + 6) B = 2x2 + 4x + 6x + 12 = 2x2 + 10x + 12 C = x2 + 9x – 7x – 63 = x2 + 2x – 63 D = 4x – x2 – 12 + 3x = –x2 + 7x – 12 E = 15x2 – 21x + 20x – 28 = 15x2 – x – 28 F = –8x + 2x2 + 32 – 8x = 2x2 – 16x + 32 (y + 3) + 14(y – 3) 2 (y + 3)(y + 8) (2y – 3) – (y – 3) (y – 3) 3 31 1. (2y – 4)(3y + 3) = 6y2 – 6y – 12 2. (–y + 3)(8 – y) = –11y + y2 + 24 3. –(y + 6)(2y + 4) = –2y2 – 16y – 24 32 A = (x + 2)2 = (x + 2)(x + 2) = x2 + 4x + 4 B = (y – 3)2 = (y – 3)(y – 3) = y2 – 6y + 9 C = (3a + 4)2 = (3a + 4)(3a + 4) = 9a2 + 24a + 16 D = (7 – 2b)2 = (7 – 2b)(7 – 2b) = 49 – 28b + 4b2 33 A = (2x – 3)(7 – x) = 14x – 2x2 – 21 + 3x = –2x2 + 17x – 21 B = (x + 3)(x – 1)(x + 8) = x2 + 2x – 3 – x2 + 2x – 1 = 4x – 4 = 4(x – 1) C = (3x + 4)2 + (x + 1)(x – 1) = 9x2 + 24x + 16 + x2 – 1 = 10x2 + 24x + 15 D = –2x(x + 1) = x2 + 2x – 1 –4x – 2x – 8x2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 4 Factoriser une somme 1. (x – 4)(x + 2) (x + 4)(x – 2) ... Le produit du nombre b par la différence de a et c et de ses carrés de a et de b. 2. (a + b)2 = a2 + 2ab + b2 ... La somme du carré de a et c et du double de a et b. Il est le carré de la différence entre le double de a et c et c. C'est le produit de la somme de a et c et 3 par la différence de a et c. Il est le carré de la différence entre le double de a et c. E. C'est le produit de 7 par le carré de x et de 8. F. C'est le carré de la somme du quadruple de x de 9.
35 Facteur commun à F : 3 Facteur commun à C : x Facteur commun à H : x Facteur commun à I : x + 1 Facteur commun à J : 2x – 1 36 A = 4(r + 3) B = 16z C = x(y + 2) D = y(x + 2)(4x + 3) E = y(x + 6)(–3y + 7) F = (x – 1)(6x + 7) 37 1. A = (x + 7)(2x – 5) – (2x – 5)(3x + 2) A = (2x – 5)(x + 7 – 3x – 2) A = (2x – 5)(–2x + 5) 2. B = (4x – 3)(2x + 1) – 5x(4x – 3) B = (4x – 3)(2x + 1 – 5x) B = (4x – 3)(–3x + 1) C = (2x – 5)(x + 2) – (2x – 5)(3x – 7) C = (2x – 5)(x + 2 – 3x + 7) C = (2x – 5)(–2x + 9) 38 CONSEIL: 1 Faire le QCM 1. B 2. C 2. B
A 3 1.
C 2. B 4 1.
B 2. A • • • • • • • 2(y + 7)(y – 3) –(y + 1)(y – 3) (y2 + 4)(8 – 3y) (2y + 11)(8 – 3y) Carte mentale Parenthèses Lettres Exemple : 4x×+y×3= 3(x + y) 1 Exemple : 3 × (x + 1) = 3(x + 1) Simplifier une expression Calcul littéral Développer, c'est transformer un produit en somme ou en différence Simple distributivité Exemple : 3t (t – 1) = 3t2 – 3t Double distributivité Exemple : (3x + 1) (5x – 7) = 15x2 – 21x + 5x – 7 = 15x2 – 16x – 7 Algorithmique et outils numériques © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Factoriser, c'est transformer une somme ou une différence en produit. Facteur commun Exemple : 3t2 – t = t(3t – 1) 6. Pour déterminer le plus grand résultat possible, on crée une feuille de calcul avec un tableur. 40 Programme de calcul et variables 1. Choisir un nombre Lui ajouter 2 Calculer le carré de la somme 3 Multiplier ce résultat par 3 Le résultat est affiché à l'écran 1. Tout d'abord, il y a un problème de variable car on ne sait pas dans quelle variable la valeur obtenue est stockée. Retrancher 6 au résultat 2. (4 + 2)(3 – 6) = –18 2. x = 3 (–4 + 2)(–3 – 6) = 18 3. (2 – 7)(3 – 6) = 15 Il semble que le résultat soit le plus grand lorsque le nombre choisi est 2. Ainsi, pour obtenir une première feuille, on peut constater que la valeur la plus grande se situe pour des valeurs de x comprises entre 0 et 1. On va donc affiner en prenant des valeurs de x plus précises : Dans ce script, deux variables sont utilisées. En ajoutant pour n'en utiliser qu'une seule en réutilisant x à la place de y. Mais cette réaffectation peut entraîner des difficultés pour les élèves, qui pourraient ne pas différencier la valeur choisie du résultat. 5. On peut choisir les valeurs 0 et 1. En effet : 0 – 02 = 0 et 1 – 12 = 0 Les élèves utiliseront le script écrit pour tester des valeurs.
Ainsi, le plus grand résultat possible est 0,25 et il est atteint pour 0,5 comme nombre de départ.
Livre du professeur – Chapitre 4 Calcul littéral 43 41 Entiers consécutifs 1. En B2 : =A2+1 En C2 : =B2*A2 En D2 : =B2^2–A2^2 Il faut ici veiller à obtenir un résultat positif. 2.
Problèmes 43 Une aire présentation 1. x 3x +4 2x –5 –15x –20 6x2 +8x 6x2 –7x –20 2. A = (4x – 7)(x + 8) Les programmes semblent donner le même résultat. 3. Notons n l'entier choisi. On obtient l'égalité : n + n + 1 = (n + 1)2 – n2, c'est-à-dire 2n + 1 = (n + 1)2 – n2. 4.
(n + 1)2 – n2 = (n + 1)(n + 1) – n2 = n2 + n + n + 1 – n2 = 2n + 1 Donc l'égalité est toujours vraie. 5. 159 + 158 + 1 = 2 × 79 + 1. Ainsi 159 + 80 + 79.
42 Cyclisme 1. e. A = (4x + 7)(x + 8) 32x + 56 –7x –4x2 + 56x 4x2 + 32x + 7x + 56 = 4x2 + 39x + 56 c. D = (x – 2) 2x + 5 –2 –x –2x –1 5x + 2x2 –2 –5 x + 5 –3 2x2 + 3 – 3 2 2 € © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. D = 3x × (5 + x) – 3x × 5 – 3x + 5 – 30x + 25 = 4x2 + 5 Chercher l'intrus 4n + 8 + n – 6. 2 2. L'intrus est 3(n + 1) – n + 1. 1. L'intrus est 45 Un calcul avec des grands nombres 3. a. En B2, on doit écrire : =B2*2.
b. En E2, on doit écrire : =B2*C2-A2*D2. 2. Lorsqu'on lance le script pour la montée du Pla d'Adet, il annonce : Or, d'après le doc. 3, il est considéré catégorie 1 au Tour de France. Donc le Tour de France n'emploie pas la même méthode pour classer les ascensions. 44 NOMBRES ET CALCULS 2. À la lecture de la feuille de calcul, on peut conjecturer que le programme de calcul donne toujours 2. 3. 48 312 345 678 × 48 312 345 679 – 48 312 345 677 × 48 312 345 680 = 2 Cet exercice permet de montrer l'intérêt du calcul littéral pour la résolution de problèmes. Il faut remarquer que le calcul ne peut pas être effectué avec une calculatrice : on obtient d'abord 2 au lieu de 2 avec la calculatrice. On note n le premier entier choisi. Le programme de calcul se traduit par l'expression littérale : n(n + 1)(n + 2) – n(n + 3). Or (n + 1)(n + 2) = n2 + 2n + n + 2 = n2 + 3n + 2 et n(n + 3) = n2 + 3n. Donc le programme de calcul donne toujours 2. 3. 48 312 345 678 × 48 312 345 679 – 48 312 345 677 × 48 312 345 680 = 2 Dans cette question, on réinvestit ce que l'on a démontré à la question précédente. 48 312 345 680 = 2 n étant 48 312 345 678. Pour ce programme de calcul appliqué au nombre 48 312 345 677 et les trois entiers qui le suivent. 4. Lorsqu'on fait le calcul à la calculatrice, elle affiche 0 : les calculs employant des nombres trop grands, elle fait donc des approximations. Le but de cette question est d'amener les élèves à prendre les résultats de la calculatrice avec précaution, à développer leur esprit critique vis-à-vis de l'outil. 46 Vrai ou faux ? 1. a. Vrai. b. Vrai. 2. a. Faux. 12 + 11 + 4 = 132 3. a. 44 + 6 + 41 = 452 b. 89 × 91 + 1 = 902 4. Conjecture : n(n + 2) + 1 = (n + 1)2 n(n + 2) + 1 = n2 + 2n + 1 et (n + 1)2 = n2 + 2n + 1 Les identités remarquables n'étant plus explicitement au programme, il a été choisi de les traiter au travers de problèmes qui amènent à leur conjecture et leur démonstration. C'est l'objet des 3 problèmes suivants : 47, 48 et 49.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 47 Remarquable 1 1. 2,32 = 5,29 3,72 = 13,69 5,29 + 13,69 = 18,98 18,98 + 2 × 2,3 × 3,7 = 36 2. 7,222 = 51,84 0,82 = 0,64 51,84 + 0,64 = 52,48 52,48 + 2 × 7,2 × 0,8 = 64 3. 52 = 25 32 = 9 25 + 9 = 34 34 + 2 × 5 × 3 = 64 4. Avec 9 et 1 : 81 = 92 12 = 1 81 + 1 = 82 82 + 2 × 9 × 1 = 100 5. On constate que le programme de calcul donne le carré de la somme des deux nombres. En effet : (2,3 + 3,7)2 = 62 = 36 (7,2 + 0,8)2 = 82 = 64 (5 + 3)2 = 82 = 64 (9 + 1)2 = 102 = 100 On obtient donc l'égalité suivante : a et b étant deux nombres, (a + b)2 = a2 + b2 + 2ab. 6. On note a et b les deux nombres choisis.
(a + b)2 = (a + b)(a + b) = a2 + ab + ba + b2 = a2 + b2 + 2ab car ab = ba. 49 Remarquable 3 1. On a a + b = 11 et a – b = 4. Donc, en additionnant les deux égalités, on obtient 2a = 15.
Ainsi a = 7,5 et b = 11 – a = 11 – 7,5 = 3,5. a2 – b2 = 7,52 – 3,52 = 44 2. Avec a = 9 et b = 1 : a + b = 10 a–b=8 a2 – b2 = 92 – 12 = 80 Avec a = 5 et b = 10 : a + b = 15 a – b = –5 a2 – b2 = 52 – 102 = –75 3. On constate que (a + b)(a – b) = a2 – b2. En effet : 11 × 4 = 44 10 × 8 = 80 15 × (–5) = –75 4. On note a et b les deux nombres choisis. (a + b)(a – b) = a2 – ab + ba – b2 = a2 – b2 car ab = ba. 50 Un programme de calcul 1. (–2 + 4) + (–2)2 = (–2 + 4) × 2 = 4 (5 + 4) + 52 = 9 + 25 = 34 Le programme ne donne pas le même résultat 2. Pour le nombre 9 : (9 + 4) × 9 + 4 = 13 × 9 + 4 = 121 = 112 Pour le nombre 4 : (4 + 4) × 4 + 4 = 8 × 4 + 4 = 36 = 62 b. Prenons un nombre entier n. Le programme de calcul donne alors par l'expression littérale n(n + 4) + 4 = n2 + 4n + 4 = (n + 2)2 Donc, quand on choisit un nombre entier, on obtient toujours le carré d'un autre nombre entier. On remarque que l'on obtient le carré du nombre de départ augmenté de 2. On veut obtenir 1 comme résultat. Or 1 est le carré de 1 et de –1. Il suffit donc de prendre –1 ou –3 comme nombre de départ. En effet : (–1 + 4) × (–1) + 4 = 3 × (–1) + 4 = 1 (–3 + 4) × (–3) + 4 = 1 × (–3) + 4 = 1 51 Avec des nombres impairs 1. a. En C2, il a écrit =A2*B2+1. b. En A3, il a écrit =A2+2, et en B3, =B2+2. 48 Remarquable 2 1. 8,22 = 67,24 3,22 = 10,24 67,24 + 10,24 = 77,48 77,48 – 2 × 8,2 × 3,2 = 25 2. Avec 9 et 1 : 92 = 81 12 = 1 81 + 1 = 82 82 – 2 × 9 × 1 = 64 Avec 10 et 15 : 102 = 100 152 = 225 100 + 225 = 325 325 – 2 × 10 × 15 = 25 3. On constate que le programme de calcul donne le carré de la différence des deux nombres. En effet : (8,2 – 3,2)2 = 52 = 25 (9 – 1)2 = 82 = 64 (10 – 15)2 = (–5)2 = 25 On obtient donc l'égalité suivante : a et b étant deux nombres, (a – b)2 = a2 + b2 – 2ab. 4. On note a et b les deux nombres choisis. (a – b)2 = (a – b)(a – b) = a2 – ab – ba + b2 = a2 – 2ab + b2 car ab = ba. c. Pour vérifier qu'un nombre est un multiple de 4, il suffit de vérifier qu'il est divisible par 4, c'est-à-dire que la division par 4 tombe juste.
Donc Marvin doit écrire en D2 la division par 4 du résultat, soit la formule =C2/4. 2. Prenons un nombre impair. Il peut s'écrire sous la forme 2n + 1 où n est un nombre entier. L'impair consécutif s'écrit alors 2n + 3. Le calcul proposé par Marvin s'exprime donc avec l'expression littérale (2n + 1)(2n + 3) + 1. Livre du professeur – Chapitre 4 Calcul littéral 45 Donc (2n + 1)(2n + 3) + 1 = 4n2 + 6n + 2n + 3 + 1 = 4n2 + 8n + 4 = 4(n2 + 2n + 1) C'est donc bien un multiple de 4. 52 Le salaire 1. On note n le nombre de jours travaillés. Le problème se modélise par l'expression littérale (4 – 3(30 – j)) = 0. 2. 6 × 40 – 3(30 – j) – 60 = 0 ... le salarié n'a pas pu travailler 10 jours. 3. Pour déterminer le nombre de jours travaillés, il faut résoudre l'équation 6j – 4(30 – j) = 0. 6j – 4(30 – j) = 0 6j – 120 + 4j = 0 10j = 120 j = 12 Le salarié a donc travaillé 12 jours durant le mois. On note n le nombre choisi au départ. Le programme appliqué à n donne : (2n + 5) × 2 – 2n = ... On a donc : (2n + 5) × 2 – 2n = 4n + 10 – 2n = 2n + 10 Ainsi 2(n + 5) n'est pas multiple de 4. On note n le nombre choisi au départ. On note n le nombre entier de départ. La même chose s'applique... Ce problème peut être aussi mené de façon plus aisée en remarquant que n pour faire la première expression avec différents nombres et en faisant conjecturer la réponse sur ces exemples testés. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 54 Circuits de karting Longueur du circuit de Gaëlle : Notons D le diamètre du grand cercle. La longueur du circuit de Gaëlle est égale à : Dπ + (80 – Dπ) = 80 + Dπ – Dπ = 80m. Longueur du circuit de Maeva : Notons d le diamètre des cercles. La longueur du circuit de Maeva est égale à 2 × dπ = 2dπ. Or 2d = 80, donc la longueur du circuit est 80π. On peut donc en conclure que les deux circuits ont la même longueur. 55 Posologie 1. La posologie n'a pas été respectée pour Joé car une dose de 100 mg lui a été administrée, or il ne faut pas dépasser 70 mg par jour.
105 × 17,5 2. = 0,71 m2. 3 600 3. 0,71 × 70 = 50. La posologie de doses est respectée pour Lou. 56 Dessinette On note a et b les deux nombres dont la somme est égale à 300.
Si on augmente chacun d'eux de 7, on a : (a + 7)(b + 7) = ab + 7a + 7b + 49 = ab + 7(a + b) + 49 = ab + 2 149 Leur produit est donc augmenté de 2 149. 57 Les fractales dans l'art Longueur d'un côté Nombre de côtés Étape 1 1 3 4×3 Étape 2 1 32 42 × 3 Étape n 1 3n 4n × 3 2. Le périmètre de la figure à l'étape n est donc égal à : 1 4n × 4n × 3 = n – 1 . n 3 3 46 Créée en 1904, c'est la première courbe fermée de périmètre infini. Brevet 58 Toujours positif ?
53 Multiple Magic 1.
410 × 53. 310 – 1 50 4 Périmètre à la 50e étape : 50 – 1 = 5 297 343. 3. 4100 Périmètre à la 100e étape : 100 – 1 = 9,4 × 1012. 3 On constate que le périmètre ne cesse d'augmenter, il tend vers un nombre infiniment grand. 3.
Périmètre à la 10e étape : NOMBRES ET CALCULS 1. (1) – 6) × 11 + 9 = 5 × 11 + 9 = 64 2. (–4 – 6) × (–4) + 9 = 49 3. Le nombre choisi au départ. Après lui avoir appliqué le programme de calcul, on obtient (x – 6) × x + 9.
Or (x – 6) × x + 9 = x2 – 6x + 9 = (x – 3)2. Et un carré est toujours positif, donc Théo a raison. 59 Identiques 1. a. (4 + 3)2 – 42 = 72 – 42 = 49 – 16 = 33 b. (–5 + 3)2 – (–5)2 = (–2)2 – (–5)2 = 4 – 25 = –21 2. Notons x le nombre choisi au départ. Avec le programme A, on obtient : (x + 3)2 – x2. Avec le programme B, on obtient : 6x + 9. Or (x + 3)2 – x2 = x2 + 6x + 9 + x2 = 6x + 9. Donc les deux programmes donnent le même résultat. Clément a raison. 3. Notons x le nombre choisi au départ. En utilisant le programme B, on voit que a doit vérifier l'égalité 6a + 9 = 54. Il ne reste donc qu'à résoudre l'équation 6a + 9 = 54 6a = 45 a = 7,5 Ainsi, pour obtenir 54 avec ces deux programmes de calcul, il suffit de prendre 7,5 comme nombre de départ.
60 Distance d'arrêt 5 × 130 + 0,006 × 1302 = 138 m > 100 m, donc le 18 conducteur ne pourra pas s'arrêter à temps. 5 2. La formule écrit est =A2+0,006*A2^2. 18 3. Cette affirmation est inexacte.
En effet, à une vitesse de 30 km/h, la distance est de 14 m, et à une vitesse de 60 km/h, la distance est de 38 m, qui n'est pas le double de 14 m. 4. Avec la règle du code de la route, on obtient une distance d'arrêt de 64 m pour une vitesse de 80 km/h. Dans la capture du tableur, on peut lire que la distance est de 61 m. Le résultat calculé avec la règle du code de la route est donc bien cohérent avec celui calculé par la formule. 1. D = 61 Qui a raison ? Jade : (4 + 8) × 3 – 24 = 12 × 3 – 24 = 36 – 24 = 12 b.
Jade a donc raison. Lucas : (0 + 8) × 3 – 24 = 0 – 8 × 3 – 24 = 0 = 0. Lucas a donc raison.
Noé : (–3 + 8) × 3 – 24 = (–3) × 3 – 3 = –6 = –9. Noé a donc tort. Yasmine : Notons x le nombre choisi au départ. Une fois le programme appliqué, on obtient (x + 8) × 3 – 24 = x. Or (x + 8) × 3 – 24 = x 3x + 24 – 24 = 3x Donc on obtient le double de x, c'est-à-dire du nombre de départ. Yasmine a donc raison. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 1. Jade a factorisé. 2. A = 5(x + 6) + 7x(x + 6) A = 5x + 30 + 7x2 + 42x A = 7x2 + 47x + 30 Exercice 1 1. Jade a factorisé. 2. A = 5(2x – 6) – 7x(2x – 6) A = 10x – 30 – 14x2 + 42x A = –14x2 + 52x – 30 Exercice 2 1. (x + 24) + 12 = 3x + 36 Pour savoir si Manon est majeure, il faut déterminer son âge, en résolvant l'équation (x + 24) + 12 = 3x. (x + 24) + 12 = 3x x + 36 = 3x 2x = 36 x = 18 Manon a 18 ans, elle est donc majeure. Exercice 2 1. = 2(4x + 1 + 2x + 3) = 2(6x + 4) = 12x + 8 2. a. = (4x + 1)(2x + 3) b. = (4x + 1)(2x + 3) = 8x2 + 12x + 2x + 3 = 8x2 + 14x + 3 1. 2(3x – 2 + 10 – 2x) = 2(x + 8) = 2x + 16 2. a. = (3x – 2)(10 – 2x) b. (3x – 2)(10 – 2x) = 30x – 6x2 – 20 + 4x = –6x2 + 34x – 20 Analyse d'une production Lorsque Fanny a développé son expression en utilisant la double distributivité, elle n'a multiplié que les premiers termes entre eux et les seconds entre eux. La réponse correcte est : (2x – 3)(x + 2) = 2x2 + 4x – 3x – 6 = 2x2 + x – 6 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. (x + 22) + 10 = 3(x + 22) Pour savoir si Manon est majeure, il faut déterminer son âge, en résolvant l'équation (x + 22) + 10 = 2(x + 10) 2x + 22 + 10 = 2(x + 9) x = 35 ... x = 18 x = 17 Manon a 17 ans, elle n'est donc pas majeure. Exercice 3 Livre du professeur – Chapitre 4 Calcul littéral 47 APITRE CH 5 5 Équations et inéquations Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Nombres et calculs ». • Les connaissances et compétences associées sont : – mettre un problème en équation en vue de sa résolution ; – résoudre des équations du premier degré. – résoudre des équations ou des inéquations du premier degré ainsi que des équations se ramenant au premier degré. • Tout au long du cycle 4, le calcul littéral a montré aux élèves l'intérêt d'utiliser une écriture littérale pour aborder et modéliser des problèmes concrets qui ne seraient pas facilement résolubles sans l'utilisation de celui-ci. Des outils et des règles ont été donnés pour faciliter cette tâche. Comme en 4e, le chapitre Équations et inéquations va permettre d'aborder à la résolution de ces problèmes, soit de façon exacte, soit de façon approchée, et les modéliser à l'aide d'équations du 1er degré en se ramenant au 1er degré à une inconnue va permettre de résoudre de nombreux problèmes modélisant à l'aide de celles-ci. Cela permettra d'aborder des problèmes de minimum ou de maximum, voire d'optimisation. • Cependant, tous ceux qui seront traités dans ce chapitre, soit pour tester, soit pour conjecturer, soit pour approcher les solutions proposées.
La réponse est 3x > 2.
Activités flash Questions © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. a. (5 × 7 – 12) ÷ 2 b. ((18 + 14) – 3,5) × 17 2. Il faut partir de 4 : 4 × 4 – 7 = 16 – 7 = 9. 3. a. Vrai. b. Vrai. 4. a. Formule saisie en B2 : =4*A2-3. b.
Formule saisie en C2 : =7*A2+6. c. En observant le tableau, on peut relever que pour –3, les deux expressions sont égales à –15. Donc –3 est une solution de l'équation. Activité 1 Les balances Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de revoir les propriétés de l'égalité vis-à-vis des opérations vues en 4e. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer avec des nombres décimaux et de connaître le fonctionnement d'une balance à plateaux. La capacité introduite est de résoudre une équation. Avec la première balance, en enlevant 4 pommes de chaque côté, on trouve qu'1 banane pèse autant que 3 pommes. En utilisant cela dans la deuxième balance, on obtient que 9 pommes et 1 grappe de raisin pèsent autant que 11 pommes, soit 1 grappe de raisin pèse autant que 2 pommes. Sachant qu'1 pomme pèse 170 g, on en déduit que la grappe de raisin pèse 2 × 170 g soit 340 g. On peut aussi proposer ce problème en modélisant l'équilibre des balances avec des équations, ce qui permettra de réinvestir la notion d'inconnue et la modélisation à l'aide d'expressions littérales d'un problème mathématique. Activité 2 Des programmes de calcul Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de remobiliser la notion d'équation vue en 4e. Les prérequis nécessaires sont de savoir écrire une expression littérale à partir d'un programme de calcul, de savoir résoudre une équation du premier degré. La capacité introduite est de modéliser une situation à l'aide d'une équation. 1. On note x le nombre de départ. Le problème se modélise par l'équation 7x + 5 = 3x – 3 ... On peut résoudre l'équation 7x + 5 = 3x – 3. 7x + 5 – 3x = 3x – 3 – 3x 4x + 5 = –3 4x + 5 – 5 = –3 – 5 4x = –8 x = –2 Il faut choisir –2 au départ. 2. a. 7x + 8 = 3x – 12 b. Le programme fait : on le note ensuite le programme 1 ... On note x le nombre de départ. Pour que le programme donne le même résultat avec le nombre de départ, ... 3x – 7 ... x = –2,4 Le nombre à choisir est donc (–2,4). 3. On note x le nombre de départ. Le programme B donne le même résultat... On peut résoudre l'équation 5x + 3 = 7x + 4 ... Le nombre à choisir est donc –0,5.
Activité 3 Des inéquations. Les prérequis nécessaires sont de savoir résoudre une équation du premier degré ... Activité 4 Des températures Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer une propriété liant les inégalités et l'addition. Les prérequis nécessaires sont de connaître l'encadrement d'un nombre, la comparaison, les inégalités. La capacité introduite est de résoudre une inéquation. 1. 1. La température est comprise entre 12 et 13 degrés Celsius : 12 < t < 13, t étant la température relevée par Lucas. 2. a. Il y a 14 °C de différence entre 17 et 18 degrés Celsius : 17 < t < 18. 3. a. Si a < b alors a – b est négatif. b. (a + c) – (b + c) = a + c – b – c = a – b. Donc a + c < b + c. c. Une inégalité reste vraie lorsqu'on ajoute le même nombre à chacun de ses membres. 4. Durant la nuit, la température sera comprise entre 10 et 11 degrés Celsius : 10 < t < 11. 5. Soient a, b et c trois nombres relatifs tels que a < b et c > 0. On considère le nombre (a – c) – (b – c). (a – c) – (b – c) = a – c – b + c = a – b Or a – b est négatif (cf. 3.a.), donc (a – c) – (b – c) aussi. Ainsi a – c < b – c. Activité 5 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Inégalités et multiplication Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir et démontrer une propriété liant les inégalités et la multiplication. Les prérequis nécessaires sont de connaître la comparaison de nombres, les inégalités. La capacité introduite est de résoudre une inéquation. 1. a. x < y 3 × (x) × 3 ... 5 × (x) < 5 × (y) ... 2 × (–3) > 2 × (–4) ... –3 < –2 et –3 × 5 < –2 × 5 ... Le sens de l'inégalité a changé. 2. a. Si a < b alors a – b est négatif. De plus, comme c > 0, (a – b) × c sera négatif. (a – b) × c = a × c – b × c = ac – bc. Or (a – b) × c est négatif, donc ac – bc est négatif. Ainsi ac < bc. c. Lorsqu'on multiplie les deux membres d'une inégalité par un même nombre positif non nul, le sens de l'inégalité ne change pas. 3. Soient a, b et c trois nombres relatifs tels que a < b et c < 0. Alors a – b est négatif et, comme c < 0, (a – b) × c est positif. Donc ac – bc positif. Ainsi ac > bc. 4. Solution de l'équation : ... 6,5 ÷ x = 14,5 La solution de l'équation est 6,5. Savoir-faire 3 x = 12 x = 7 x = 7 – 12 = –5 La solution de l'équation est –5. x ÷ 5 = 9 x = 45 La solution de l'équation est 45. ... La solution de l'équation est 3. ... La solution de l'équation est 9. ... La solution de l'équation est –2,5. ... La solution de l'équation est 1,5.
... La solution de l'équation est 7.
Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à –1,5. ... Les solutions de l'inéquation sont les nombres strictement supérieurs à –2. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à 5.
Exercices 2 Questions flash 26 Le problème se modélise par l'équation 12 – 8 = 8 × x + 2. ... Les solutions sont tous les nombres strictement supérieurs à –0,5. ... La solution de l'équation est 3. Livre du professeur – Chapitre 5 Équations et inéquations 51 Exercices Résoudre une équation 30 1. L'étiquette est 7x – 6 ;
2. L'étiquette est 2x = 11 5 x = 4 3 3x = 4 3 x = 2,4 La solution de l'équation est 2,4.
6x – 7 = 8 6x = 8 + 7 6x = 15 x = 15 ÷ 6 = 2,5 La solution de l'équation est 2,5.
8
– 7x = 57 – 5x ... La solution de l'équation est –7. ... La solution de l'équation est –7,31 a. flash Questions 25 8x – 7 = 11 6y + 4 = 2 – y2 –5 = ... Le nombre choisi est 10. La solution de l'équation est 10. b. 5x + 19 x = 19 + 5 = 5 ... La solution de l'équation est 10.
52 NOMBRES ET CALCULS. 34 3(7 – 2x) – 5(2x + 1) = 3 × 7 – 3 × 2x – 5 × 2x – 5 = 16 – 16x Résoudre 3(7 – 2x) – 5(2x + 1) = 0 revient à résoudre 16 – 16x = 0. 16 – 16x = 0 16x = 16 x = 16 ÷ 16 = 1 La solution de cette équation est 1. ... Inconnue x y z Membres de l'inéquation 2x est et 3y + 7 et 5y 2 – 5 et 2z + 3 Terme(s) comportant l'inconnue Terme(s) constant(s) 4y dans 2 dans le premier membre le premier 2x membre 5y dans le second 2z dans le second membre –5 dans le premier membre 7 dans le second membre 3 dans le second membre 37 1.
Les nombres x tels que x > –5 sont tous les nombres strictement supérieurs à –5. 2. Les nombres x tels que x ⩽ –5 sont tous les nombres inférieurs ou égaux à –5. 3. Les nombres x tels que x < –5 sont tous les nombres strictement inférieurs à –5. 4. Les nombres x tels que x ⩾ –5 sont tous les nombres supérieurs ou égaux à –5.
38 1. 2. 1. 3 –5 4. –5,4 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à 10. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à 1. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres supérieurs ou égaux à –4. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 3. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à 4. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à –5,4. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à 2,5. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 3. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres inférieurs ou égaux à 19. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à 4. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à –1.
52 En notant n la note à obtenir à la prochaine évaluation, le pro- blème se modélise par (12,5 + n) ÷ 2 ⩾ 14 (12,5 + n) ÷ 2 ⩾ 14 12,5 + n ⩾ 28 n ⩾ 15,5 Salomé doit donc obtenir au moins 15,5 sur 20 à sa prochaine évaluation. 53 Pour simplifier l'exercice, on peut considérer que le tour de piste a pour longueur 1 km et noter v la vitesse moyenne des deux derniers tours de piste en km/h (on peut aussi exprimer la vitesse en nombre de tours par heure). Le temps de parcours des quatre derniers tours est t = ... 174 Le temps de parcours des quatre derniers tours est t = ... La vitesse moyenne sur l'ensemble de la course est donc ... 4 ÷ 170 Ainsi la vitesse v doit vérifier l'inéquation ... v ⩾ ... 480 ... 570 La vitesse moyenne dans les deux derniers tours doit être supérieure à 240 km/h sur les quatre derniers tours. 45 1. 5(x – 4) = 5x – 20 3(–x + 4) = –3x + 12 2. 5(x – 4) < 3(–x + 4) 5x – 20 < –3x + 12 ... x < 4 Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement inférieurs à 4.
Modéliser une situation Questions flash 47 a. x + 7 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. b. x – 10 c. 4x d. x ÷ 2 e.
2x + 3 On peut inviter certains élèves fragiles à suivre une démarche plus simple. Si la vitesse moyenne sur l'ensemble de la course est de 200 km/h, le temps de parcours global en heures doit être égal à t = ... 200 Le temps de parcours sur les quatre 170 derniers tours doit être environ de 0,03 – 0,011 76 = 0,018 24 h. La vitesse doit donc être au moins égale à : d 4 v = = ≈ 219,3 t 0,018 24 Le pilote doit donc rouler à au moins 220 km/h sur ses quatre derniers tours. 48 a. 2x + 13 ⩾ 53 c. x + 14 > 25 e. 3x + 4x < 23 b. x – 5 = 4 d. 3x ⩽ 2 f. 4x + 9 ⩾ x 49 1. 3x – 4 > 3x + 1 ... 5 2. Trouver le nombre qui permet d'obtenir 32 revient à résoudre l'équation 3x + 5 = 32. 3x + 5 = 32 3x = 27 x = 9 On doit choisir 9 au départ pour obtenir 32. ... Les solutions de l'inéquation sont tous les nombres strictement supérieurs à –3,5. 51 On note x le nombre cherché. Le problème se modélise par 7x – 3 = 3x + 13, où x est le nombre cherché. 7x – 3 = 3x + 13 4x = 16 x = 4 Ainsi le nombre recherché est 4. 54 NOMBRES ET CALCULS t In Faire le po QCM 1 1.
A 2. C 2 1. B 2. B 3 1. C 2. A Carte mentale Résoudre une équation Résoudre une inéquation C'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue pour lesquelles l'égalité est vraie. C'est en trouver toutes les solutions. Règles de transformation des inégalités : - avec addition ou soustraction d'un nombre positif ou négatif, le sens ne change pas. Des égalités Une égalité reste vraie pour les trois opérations, multiplier ou diviser chaque membre par un même nombre (non nul pour multiplication et division) Modéliser une situation Choix de l'inconnue x Traduction du problème en équation ou inéquation Résolution de l'équation ou de l'inéquation Équations Interprétation du résultat et conclusion Algorithmique et outils numériques 1. On peut prendre, par exemple, pour échelle 1 : 100 ? 5 cm 1.
On note x la largeur de la bordure. L'aire de l'allée s'exprime à l'aide de l'expression littérale (1 000 – 2x)(750 – 2x) L'aire de la surface recouverte d'eau s'exprime à l'aide de l'expression littérale : 750 × 1 000 – (1 000 – 2x)(750 – 2x) Ainsi, comme on souhaite que ces deux aires soient égales, le problème se modélise par l'équation : (1 000 – 2x)(750 – 2x) = 750 × 1 000 – (1 000 – 2x)(750 – 2x) ... (1 000 – 2x)(750 – 2x) = 750 000 – ... Ainsi la largeur de la bordure est environ 146 cm. 2. Il faut donc que la largeur de la bordure soit inférieure à 1 000 cm. b. 1,25 cm Le script précédent affiche deux nombres qui sont tous les deux compris entre 0 et la largeur.
La valeur 750 ne fournit pas de solution satisfaisante car la largeur de la bordure avait une largeur de 750 cm, elle occuperait tout le plan d'eau et il n'y aurait pas de plan d'eau. Ainsi, la largeur de la bordure est 146 cm. 55 Volume d'un cône 1. La hauteur du cône est comprise entre 0 et 10 cm. 2. a. Le triangle SOM est rectangle en M. Donc la longueur du rayon peut se déterminer grâce à la hauteur et à la génératrice en utilisant le théorème de Pythagore. Ainsi Rayon2 = 102 – h2. La formule à saisir dans B2 est donc =10^2-A2^2. b. La formule en C2 est =(PI()*B2*A2)/3. La formule pour insérer n'en dans un calcul du tableur n'est pas forcément connue. Ne pas hésiter à la proposer. Livre du professeur – Chapitre 5 Équations et inéquations 55 50 cm 5 cm 7,5 cm 6 Factures Notons x la quantité de la consommation en kilowattheures. ... 54 Les jardins de Kiftsgate Court 1. La situation se modélise par l'inéquation : 2 200 + 1 250 .
950. 2 200 1 250 + 1 000 y 3 450v . 950 2,2v + 1 250 3 450v . 2 090v + 1187 500 1 360v .
1187 500 1187 500 Ainsi v . 1 360 L'avion doit voler à au moins 873,2 km/h. 61 Au volant, toujours attentif ! 125 m/s 9 En notant t la durée maximale en secondes d'inattention du conducteur, le problème se modélise par l'inéquation : 125 (t + 1) + 14 < 40.
125 (t + 1) + 14 < 40 9 125 (t + 1) < 26 9 t + 1 < 1,872 t < 0,872 Ainsi, le conducteur ne doit pas être inattentif plus de 0,872 s s'il veut éviter l'impact. × 50 km/h = 50 000 m / 3 600 m/s = 14 Donc tous les nombres entiers entre 0 et 60 sont les hauteurs comprises entre 0 et 2 cm et celles comprises entre 9 et 10 cm. 62 Parc d'attraction 56 La comparaison de prix. Le problème se modélise par l'équation ... En notant n le nombre d'entrées achetées, le coût de la formule SMART est de ... 60 + 25n. Le coût de la formule LOOPING est donné par l'expression littérale 60 + 25n et celui de la formule Ti'Fou par la formule 95 + 15n. Le problème se ramène donc à résoudre l'équation : 60 + 25n < 95 + 15n. 60 + 25n < 95 + 15n 10n < 35 n < 3,5 Ainsi le coût de la formule LOOPING est plus avantageuse jusqu'à 3 places achetées. a. Pour x = 0, le script donne 7. b. Pour x = 4, ce script donne 24. 2. Pour x = 12, le script donne 504. b. Pour ce script donne 0, il faut que x = 2 ou x = 8. ... Donc les nombres pour lesquels ce script donne 0 sont –2 , 5 et 2.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 63 Alors, combien ? En notant n le nombre de caisses qu'Antoine peut transporter, le problème se modélise par l'inéquation 0,125n + 10 ⩽ 16. 0,125n + 10 ⩽ 16 0,125n ⩽ 6 n ⩽ 48 Ainsi, Antoine ne doit pas transporter plus de 48 caisses s'il veut pouvoir passer sur le pont. Problèmes 57 Économies En notant x le prix d'un CD, le problème se modélise par l'équation : 4 × (x + 5) = 9 × (x – 6) 4x + 20 = 9x – 54 74 = 5x x = 14,8 Un CD coûte 14,8 € et Axel dispose de 4 × (14,8 + 5) = 79,20 €. 58 Partage En notant x la part de la première personne, le problème se modélise par l'équation : x + 3x + (x + 3) + 3 = ... (x + 3) + 3 = 93 ... x + 3 = 18 et la troisième 18 + 3 + 3 = 24. 59 Triangles Les trois nombres ...
Le rectangle a 100 cm × ... 6 × x + 3 = 4 x + 2 ... 140 cm ... 59 Faits de vin En notant c la capacité du petit fut, le problème se modélise par l'équation (1 + 0,5) × c = 495 ... c = 330. Ainsi la première personne a 14 €, la 2e a 17 €, la 3e 20 €, la 4e 23 € et la 5e 26 €. (( )) 59 Futs de vin En notant c la capacité du petit fût, le problème se modélise par l'équation c + 40(c + 171) = 10 260 20c + 40c + 6 840 = 10 260 60c = 3 420 c = 57 Ainsi, le petit fut a une capacité de 57 L et le grand de 228 L. 60 Ça vente ! On note v la vitesse minimale de l'avion sur les 1 250 kilomètres restants. 64 Prix de revient En notant n le nombre d'exemplaires de livres à livrer, le problème n = 1500 se modélise par l'inéquation 3 200 + 0,89n + 1,80 n < 1,80n. n ... 1500 3 200 + 0,89 n < 3 200 + 0,89n ... 2 195 ... 1,85 ... n > 91,19 ... 2 195 Il faut qu'il y ait donc un minimum de 2 050 exemplaires 91 pour que leur coût de revient soit inférieur à 1,80 €. Comme le coût de l'impression est donné par centaine (les centaines entamées ne sont donc au moins payées), attendre comme réponse qu'il faut acheter 6 centaines supplémentaires pour un total de 2 100 exemplaires. 65 Rectangles Dans un rectangle 1. Dans un rectangle 1. En notant AM = x, le problème se modélise par l'équation... 2. Le périmètre de ABCD est 2 × (x + 3x) ... = 8 ... 2 ... x = 8 ... Ainsi AM doit être égale à 8 unités de A. 2. En notant la longueur AM, le problème se modélise par l'équation 2x = (15 – x) × 3. 2x = (15 – x) × 3 2x = 45 – 3x 5x = 45 x=9 Ainsi, les deux aires seront égales lorsque le point M sera placé à 9 unités de A. 2. 66 Nombre mystère On note n le nombre de départ. La situation se modélise par l'équation 2x + 15 = 9x – 1. 2x + 15 = 9x – 1 16 = 7x x = 16 ÷ 7 Avec des fractions En notant n ce nombre, le problème se modélise par ... 7 ... Ainsi, le nombre cherché est 7. 67 Nombre ... On note x le nombre ... 68 Produit nul Dans un ... 2. Le nombre a ou b doit être nul ... produit nul ... Ainsi, le triangle ABC ... On peut en déduire que a = 0 ou b = 0.
4. Le produit (x – 8)(2x – 1) = 0 est nul pour x – 8 = 0 ou 2x – 1 = 0, c'est-à-dire pour x = 8 ou x = . 2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 69 Le triangle égyptien 1. On note n la mesure du plus petit côté. Alors les deux autres côtés ont pour mesure n + 1 et n + 2. Pour que le triangle soit rectangle, il faut que l'égalité de Pythagore soit vérifiée. Le problème se modélise donc par l'équation (n + 2)2 = n2 + (n + 1)2. (n + 2)2 = n2 + (n + 1)2 n2 + 4n + 4 = n2 + n2 + 2n + 1 n2 – 2n – 3 = 0. 2. (n + 1)(n – 3) = n2 – 3n + n – 3 = n2 – 2n – 3 Le problème se modélise donc par l'équation : (n + 1)(n – 3) = 0. (n + 1)(n – 3) = 0 lorsque n + 1 = 0 ou n – 3 = 0, c'est-à-dire lorsque n = –1 ou n = 3. Ainsi, une seule solution est valable pour la mesure du petit côté du triangle, soit 3. Et donc, on seul triangle répond au problème : le triangle égyptien. 70 Square est un rectangle ... la largeur ... L'équation se modélise par l'équation (n – 3) = 0 ... c'est-à-dire n = 3 ou n = 3. 71 ... Notons r ... 23 ... Donc, une seule solution ... (x – 1)(x + 2) = 0 ... Ainsi, ...
n2 – 3n = 0 n(n – 3) = 0 n = 0 ou n = 3 ... Donc ... 72 Hauteur limite ... On note h la hauteur ... (50 – h)2 = 152 + h2 ... 50 – h)2 = 152 + h2 2 500 – 100h + h2 = 225 + h2 100h = 2 275 h = 22,75 20 Donc le camion nacelle n'est pas suffisamment haut. En revanche, la grue convient car h < 30. 2. D'après la question 1., les engins doivent avoir une hauteur minimale de 22,75 m. 73 La méthode d'Al Khwarizmi 1.
6 x2 6x 6x 36 71 Sangaku 1. On note r le rayon des quatre cercles identiques. O est le centre du carré EFGH, donc PO = r. De plus, le triangle rouge est rectangle, donc l'égalité de Pythagore est vérifiée. Ainsi, (r + r)2 = (r + 1)2 + 12 ... Le rayon doit donc vérifier l'équation r2 – 2r – 1 = 0. L'ensemble a pour aire x2 + 12x = 36, soit 85 = 36 + 121. Ainsi, le grand carré a pour aire 121. x vaut donc 5. Livre du professeur – Chapitre 5 Équations et inéquations 57
x 1 x2 x 1 x Ainsi le périmètre (x + 1)2 = x2 + 2x + 1, soit 8 1. Ainsi, le grand carré a pour aire 1 ... x vaut 2. 74 Quitte ou triple On note n le nombre de jetons de Jules avant de commencer à jouer. Après la première partie gagnée, Jules a 3n – 12 jetons. Après la deuxième partie, il en a 3(3n – 12) – 12. Et après la troisième, il en a 3(3(3n – 12) – 12) – 12. Le problème se modélise donc par l'équation 3(3(3n – 12) – 12) – 12 = 27n – 156 = 0 ... Ainsi, Jules avait 27 jetons avant de commencer à jouer. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 75 Essence ou diesel ? 1. La voiture diesel consomme 4,1 L/100 km soit 0,041 L par km. De plus, le diesel coûte 1,109 € le litre, donc chaque kilomètre coûte 0,041 × 1,109 = 0,045 469 €. La voiture essence consomme 5,6 L/100 km soit 0,056 L par km. De plus, l'essence coûte 1,287 € le litre, donc chaque kilomètre coûte 0,056 × 1,287 = 0,072 072 €. En notant k le nombre de kilomètres parcourus, l'achat du véhicule diesel sera rentabilisé lorsque 20 000 + 0,045 469k < 18 450 + 0,072 072k, 20 000 + 0,045 469k < 18 450 + 0,072 072k 0,026 603k > 1 550 k > 1 550 ÷ 0,026 603 ≈ 58 264, l'achat sera rentabilisé à partir de 58 265 km.

2. Jocelyn parcourt 12 000 km par an. (58 265 ÷ 12 000) × 12 ≈ 58,26 Donc, l'achat du véhicule diesel sera rentabilisé au 59e mois. Brevet 76 Mathilde et Paul 1. a. La formule est : =B1*9-8. b. La formule est : =B1*(-3)+31. 2. a. Au vu du tableau, le nombre pour que les deux programmes donnent le même résultat est compris entre 3 et 4. b. Le problème revient à résoudre l'équation : 9x – 8 = –3x + 31, où x est le nombre cherché.
9x – 8 = –3x + 31 12x = 39 x = 3,25 Le nombre cherché est 3,25. La conjecture précédente est exacte. 77 Nombre mystère En notant x le nombre mystère, le problème se modélise par l'équation (x – 10)2 – x2 = –340. (x – 10)2 – x2 = –340 x2 – 20x + 100 – x2 = –340 –20x + 100 = –340 –20x = –440 x = 22 Le nombre mystère est 22. 78 Hexagone non régulier On note c la mesure du côté des petits triangles. Le problème revient à résoudre l'équation : 3 × 3c = 3c + 3 × (6 – 2c). 3 × 3c = 3c + 3 × (6 – 2c) 9c = 3c + 18 – 6c 12c = 18 c = 1,5 Ainsi, la mesure du côté des petits triangles est 1,5 cm. 79 Des aires égales 1. a. Aire de ABCD = 40 × 40 = 1 600 cm2.
b. Aire de DEFG = (40 – 15)(40 + 25) = 25 × 65 = 1 625 cm2. 2. En notant ℓ la longueur AB, le problème se modélise par l'équation ℓ2 = (ℓ – 15)(ℓ + 25). ℓ2 = (ℓ – 15)(ℓ + 25) ℓ2 = ℓ2 + 25ℓ – 15ℓ – 375 10ℓ = 375 ℓ = 37,5 Pour que l'aire du carré soit égale à celle du rectangle, il faut que AB = 37,5 cm. 80 La ficelle 1. = π × 0,52 × h = 0,25π × h 2. Sachant que le volume de la boule de rayon 30 cm est égal 4 à π × 3003 = 36 000 000π, le problème se modélise par 3 l'équation 0,25π × h = 36 000 000π. 0,25π × h = 36 000 000π h = 144 000 000 Ainsi, la hauteur de la ficelle (c'est-à-dire sa longueur) est de 144 000 000 mm soit 144 km. 58 NOMBRES ET CALCULS Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 C'est Yasmine qui a raison : on ajoute –5 à chaque membre, l'inégalité ne change pas de sens. Exercice 1 C'est Noé qui a raison : on multiplie par –1 chaque membre, l'inégalité change de sens. Exercice 2 En notant v la vitesse, le problème se modélise par l'inéquation 2 × 270 + 4 × v ⩾ 300. 6 2 × 270 + 4 × v ⩾ 300 6 540 + 4v ⩾ 1 800 4v ⩾ 1 260 v ⩾ 315 Le pilote doit donc conserver une vitesse minimale de 315 km/h sur les quatre derniers tours. Exercice 3 En notant x le nombre affiché par Alicia et Yohann, le problème se modélise par l'équation 2x + 9 = 3x + 5. 2x + 9 = 3x + 5 x=4 Ainsi, le nombre affiché au départ est 4. Exercice 3 En notant x le nombre affiché par Alicia et Yohann, le problème se modélise par l'équation 7x + 10 = 3x + 7. 7x + 10 = 3x + 7 4x = –3 3 x= – 4 3 Ainsi, le nombre affiché au départ est – .
4 Exercice 2 Analyse d'une production Baya a effectivement commis une erreur : elle a oublié de changer le sens de l'inégalité lorsqu'elle a divisé chaque membre par (–2).
Résolution : 3x < 5x + 12 3x – 5x < 5x – 5x + 12 –2x < 12 –2x ÷ (–2) > 12 ÷ (–2) x > –6 Ainsi, tous les nombres strictement supérieurs à – 6 sont solutions de cette inéquation. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. En notant v la vitesse, le problème se modélise par l'inéquation 3 × 290 + 5 × v ⩾ 310. 8 3 × 290 + 5 × v ⩾ 310 8 870 + 5v ⩾ 2 480 5v ⩾ 1 610 v ⩾ 322 Le pilote doit donc conserver une vitesse minimale de 322 km/h sur les cinq derniers tours s'il veut se qualifier. Or, il roule au maximum à 320 km/h, donc il ne réussira pas à se qualifier pour la course. Livre du professeur – Chapitre 5 Équations et inéquations 59 APITRE CH 6 6 Proportionnalité Introduction • Ce chapitre permet de refaire le point avec tous les élèves sur les notions acquises sur la proportionnalité : reconnaitre des situations de proportionnalité ou de non-proportionnalité à l'aide de graphiques, par exemple, calculer une quatrième proportionnelle par différentes méthodes dont le coefficient de proportionnalité et le produit en croix et utiliser les pourcentages. Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ». • Dans l'esprit du cycle, on retrouve dans ce manuel toutes les notions déjà abordées en classes de 5e et de 4e. Il reste néanmoins une nouveauté qui est la réduction et l'augmentation de pourcentages. Pour faire une pyramide de 8 étages, il faudra 36 pièces de 2 €. Activités flash Questions 4. 5,40 € pour 300 g donc 5 € ne suffisent pas. 5. Pour une intensité de 0,006 A, la tension sera de 12 V.

1. 60 %. 2. 1 728 000 électeurs. 3. 4,50 € le kilo. Activité 1 Graphique et proportionnalité Intentions des auteurs Le but est de réinvestir les notions vues en 5e et 4e.
Ici l'accent est mis sur l'interprétation graphique d'une situation de proportionnalité, notion vue en 4e. À partir d'exemples concrets de la vie quotidienne, les élèves doivent reconnaitre une situation de proportionnalité représentée sous forme graphique. Elle permet également de faire le lien entre deux grandeurs. L'objectif de cette activité est de faire le point sur la notion qu'une situation de proportionnalité se représente graphiquement par une droite passant par l'origine. Les prérequis nécessaires sont reconnaitre une situation de proportionnalité graphiquement et exploiter la représentation graphique d'une grandeur. Cette activité met en avant l'utilisation de graphiques et permet de faire le point sur la notion de proportionnalité en lien avec la lecture graphique. Pour les élèves ayant déjà vu la notion, nous sommes dans un réinvestissement sans pour autant passer par un chapitre de révision. Et pour les élèves n'ayant pas vu la notion, elle permet de faire le point rapidement de ce qui relève de la proportionnalité et de ce qui n'en relève pas. On peut éventuellement donner la partie du manuel de 4 e sur l'exploitation d'une représentation graphique dans le chapitre de proportionnalité et, dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, faire une différenciation pour les élèves n'ayant pas vu ou acquis cette notion en proposant les trois exercices techniques du chapitre de 4e également. Graphiques Grandeurs Les grandeurs sont-elles proportionnelles ? ① Périmètre crânien et âge Non ② Taille et âge Non ③ Volume de carburant et prix à payer Oui ④ Altitude et pression Non ⑤ Altitude et température Non On reconnait une situation de proportionnalité sur un graphique si celui-ci est représenté par une droite passant par l'origine.
Livre du professeur – Chapitre 6 Proportionnalité 61 Activité 2 Lait en quantité ! Intentions des auteurs À nouveau, on réinvestit les notions vues en 5e et 4e en faisant apparaitre divers méthodes de calculs pour une quatrième proportionnelle. Le but étant de choisir la méthode la plus adaptée à la situation.
L'objectif de cette activité est de calculer une quatrième proportionnelle par différentes méthodes que sont le coefficient de proportionnalité, la linéarité ou la multiplication d'une quantité, le passage à l'unité et le produit en croix.
Les prérequis nécessaires sont l'utilisation d'un tableau de proportionnalité et les méthodes de calculs d'une quatrième proportionnelle dont le produit en croix. Cette activité est encore une notion réinvestie : calculer une quatrième proportionnelle. On retrouve ici différentes façons de calculer une quatrième proportionnelle. On peut envisager de faire des groupes et de demander à chacun de travailler avec une méthode particulière : un groupe avec l'additivité, un groupe avec le passage à l'unité, un groupe avec le coefficient de proportionnalité, un groupe avec le produit en croix. On pourra ensuite faire un petit bilan montrant les limites de la méthode avec l'additivité et faire le point sur le produit en croix, notion essentielle en classe de 3e car utile pour différentes notions. Dans le cadre de l'accompagnement personnalisé, on peut éventuellement constituer une carte mentale des notions nécessitant le produit en croix. On peut également corriger cette activité avec une optimisation des méthodes. a. Le prix à payer est proportionnel au nombre de bouteilles achetées.
6 bouteilles coutent 5,70 € donc 12 = 6 × 2 bouteilles coutent 11,40 € = 5,70 € × 2. La méthode par additivité semble la plus appropriée. b. 1 bouteille coute 0,95 € = 5,70 € ÷ 6, donc 7 bouteilles coutent 6,65 € = 5,70 € + 0,95 €. La méthode du passage à l'unité semble la plus appropriée. c. 11 bouteilles coutent 10,45 € = 11 × 0,95 €. Ayant le prix d'une bouteille à la question b., il est rapide de trouver pour 11 bouteilles. Activité 3 À la recherche d'un terrain Intentions des auteurs © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Cette activité est ici pour mettre à profit la notion de proportionnalité dans un problème à prise d'initiative. Aucune nouveauté mais maitrise des capacités antérieures vues en 5e et 4e. L'objectif de cette activité est de reconnaitre une situation de proportionnalité et d'appliquer un pourcentage sous forme décimale.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance des formules d'aire du carré et du rectangle, et de la notion d'échelle. Cette activité est une activité à prise d'initiative, on peut également envisager de faire un travail de groupe. Les élèves choisissent leur méthode de résolution pour calculer une quatrième proportionnelle sachant qu'un point a été fait dans l'activité précédente. En prérequis, ils ont besoin des formules d'aire du carré et du rectangle (attendus de fin de cycle 3) et de la notion d'échelle vue également dans le chapitre de proportionnalité dès la 5e. Plusieurs documents sont à leur disposition : plan des terrains, cartes des villes et petit texte explicatif sur le sujet.
On est dans une démarche de résolution de problème donc il est possible d'évaluer de manière formative les compétences « chercher », « représenter » et « raisonner » et par conséquent le domaine 4 du socle : les systèmes naturels et les systèmes techniques dans lesquels on retrouve la démarche scientifique et d'investigation. 1. Le COS est de 0,05 à Pessac soit 5 % de la surface au sol et de 0,35 sur Mérignac soit 35 % de la surface au sol.
On peut remarquer que la prise au sol à Mérignac est 7 fois plus importante qu'à Pessac. 0,05 × 2 200 = 110 m2 pour le terrain à Pessac et 0,35 × 520 = 182 m2 à Mérignac. Le terrain de Mérignac permettra de construire la maison de 150 m2 alors qu'à Pessac ce ne sera pas possible. 2. Une feuille A4 a pour format 21 × 29,7. Comme le terrain est rectangulaire de 20 m sur 26 m, on peut prendre 1 cm pour 1 m 1 soit l'échelle . 100 Pour cette question, on peut différencier le travail. Tout le monde doit trouver une échelle en adéquation avec le format de la feuille et les plus rapides peuvent se lancer dans la réalisation d'un plan de maison avec la répartition des pièces en 2D. Activité 4 Frais de notaire Intentions des auteurs Dans cette activité, une nouvelle notion est introduite pour appliquer un taux de pourcentage.
Le but est d'optimiser le calcul d'une augmentation ou d'une réduction. L'objectif de cette activité est d'appliquer un pourcentage de deux façons dont une plus rapide.
Les prérequis nécessaires sont la connaissance du calcul littéral pour la dernière question ainsi que du développement et de la factorisation pour la troisième question. Cette activité met en avant la nouveauté du chapitre : la réduction et l'augmentation d'un pourcentage. Il est important de montrer aux élèves que cette activité peut se faire de deux manières différentes et que la seconde est plus rapide. On réinvestit la notion « appliquer un pourcentage » étudiée dans les classes précédentes. Dans cette activité, il est nécessaire d'avoir des prérequis sur le calcul littéral pour la dernière question ainsi que sur le développement et la factorisation pour la 3e question. Il est bon de s'appuyer sur différents exemples pour ceux qui ne visualisent pas avec le calcul littéral. Ici, le calcul littéral n'est pas fondamental pour expliquer la notion, donc il ne faut pas hésiter 62 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS à en faire abstraction pour les élèves en plus grande difficulté pour qu'ils puissent rentrer dans la tâche et pour qu'ils puissent comprendre le but de cette nouvelle notion. 1. 280 000 × 8 % = 22 400 € : les frais de notaire sont de 22 400 €. 2. 280 000 € + 22 400 € = 302 400 € : le prix total de l'achat est de 302 400 €. 3. 280 000 × 0,08 + 280 000 = 280 000 (0,08 + 1) = 280 000 × 1,08 On peut différencier le calcul dans les processus : on peut proposer aux élèves 2 façons différentes de faire le calcul, soit par le développement de 280 000 (0,08 + 1) et rappeler la formule de distributivité, soit par factorisation de 280 000 × 0,08 + 280 000 avec la même formule. C'est le même calcul : on calcule le montant de l'achat. 4. On réalise la même démarche que précédemment avec les nombres. On peut pour certains reprendre des nombres pour ne pas rajouter une difficulté supplémentaire. x + x × 0,08 = x × 1,08 x × 1,08 Savoir-fair 1 Calculer une quatrième proportionnelle 30 50 1. ≠ 5 14 La distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse. 200 260 2. ≠ 11 15 La quantité d'essence consommée et le nombre de kilomètres parcourus ne sont pas proportionnels. 4 L'argent de poche de Paola n'est pas proportionnel au nombre de jours écoulés, car elle a 12 € le lundi. En revanche, si elle partait de zéro, ce serait une situation de proportionnalité. 5 Le graphique n'est pas une droite passant par l'origine, donc cela ne représente pas une situation de proportionnalité. 7 Dans une année, il y a 52 semaines. Si l'on considère que Marc va garder le même rythme, alors on peut dire que les grandeurs « nombre de semaines » et « dépenses » sont proportionnelles. On peut ainsi réaliser un tableau de proportionnalité. Nombre de semaines Dépenses en applications (en €) 4 52 6,98 x 6,98 × 52 = 90,74. Il dépensera 90,74 € sur l'année s'il 4 garde le même rythme. Soit x = 10 • 464 – 224 = 240 : il y a 240 filles dans le lycée. Un tiers des filles font de la musique : Donc 80 filles font de la musique. 1 × 240 = 80 3 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. • Un quart des garçons font de la musique : 1 × 224 = 56 4 Donc 56 garçons font de la musique. • 56 + 80 = 136 Donc 136 élèves dans le lycée font de la musique. • 136 ÷ 464 × 100 ≈ 29,3 soit près de 29 % des élèves font de la musique. 11 Soit P0, P1 et P2 les prix du jean respectivement avant les soldes, après la première démarque et après la seconde démarque. Une réduction de 20 % est assimilable à × par (1 – 0,2) = 0,8 Une réduction de 30 % est assimilable à × par (1 – 0,3) = 0,7 P0 → P1 → P2 × 0,8 flash Questions 18 6 × 20,25 ÷ 15 = 8,1 € 19 0,6 × 4,20 = 2,52 € 20 1 000 × 11,35 = 11 350 g pour le cube 21 2 h 22 min = 2 × 60 + 22 min = 142 min Un Français passe 142 min à manger par jour. 1 × 142 = 28,4 min 5 28,4 min = 28 min 0,4 × 60 s = 28 min et 24 s Un Français passe 28 min et 24 s à manger devant la télé. 22 On suppose que la distance parcourue est proportionnelle au temps. On réalise un tableau de proportionnalité. Distance parcourue (en m) Temps (en min) 2 000 3 × 500 = 1 500 7 ?
7 × 1 500 ÷ 2 000 = 5,25 min Or 5,25 min = 5 min 0,25 × 60 s = 5 min et 15 s Lino devrait répondre 5 min et 15 s. 23 1. Léa part avec le plein donc elle peut faire 650 km. Elle doit parcourir 1 001 km. Une fois le premier plein consommé, il lui reste 1 001 – 650 = 351 km à faire. Elle va donc faire le plein. Elle parcourt les 351 km restants. Il lui restera 650 – 351 = 299 km à faire avec le reste d'essence. Si elle part avec un réservoir plein, il lui faudra faire le plein une fois sur son trajet pour faire son parcours. 2. Si elle fait un plein seulement, elle paiera : 1,35 × 45 = 60,75 € 24 1 mach équivaut à 340 m/s. La vitesse du son est proportionnelle à la vitesse de l'avion ; 2,2 mach = 2,2 × 340 = 748 m/s. L'avion fait 748 m en 1 seconde, soit 0,748 km en 1 s.
Une heure compte 3 600 s. Donc 3 600 × 0,748 = 2 692,8 km/h. Un avion de chasse peut aller à la vitesse maximale de 2 692,8 km/h. 25 Dans 100 ml, il y a 9,5 g de sucres. La bouteille contient 2 L de jus, soit 20 fois plus que 100 mL. Donc la bouteille contient 20 × 9,5 g = 190 g de sucres. × 0,7 P2 = 0,8 × 0,7 × P0 = 0,56 P0 0,56 = 1 – 0,44 = 1 – 44 % Le prix du jean a diminué de 44 %. Utiliser des pourcentages flash Questions 26 84 % × 125 = 105 élèves Exercices 27 60 ÷ 80 = 75 % Reconnaitre une situation de proportionnalité 28 1 650 × 1,04 = 1 716 € Questions 12 Oui 13 Non flash 14 Non Donc les réponses correctes sont : 1 650 × 1,04 ; 1 716 et 1 650 + 66. 29 66,3 ÷ 508,1 ≈ 13 % Les Français représentent 13 % de la population européenne. 30 40 % × 30 = 12 15 1. Non, la température d'ébullition n'est pas proportionnelle à la pression car la représentation graphique n'est pas une droite passant par l'origine. 2. Environ 1,4 bars. 16 8 720 = donc le robinet de cuisine et le mitigeur de la salle 1,5 135 de bains ont le même débit d'eau. 17 399 + 47,89 = 446,89 Rémi a droit à une remise de 15 € par tranche de 100 €, donc la remise est de 60 €. Il paiera 446,89 – 60 = 386,89 €. Il y a 12 filles dans la classe de 3e A. 50 % × 22 = 11 Il y a 11 filles dans la classe de 3e B. 12 + 11 = 33 Il y a 33 filles dans les deux classes réunies. 30 + 22 = 52 Il y a 52 élèves dans les deux classes réunies. Soit 33 ÷ 52 × 100 ≈ 63,5 Elles représentent environ 63,5 % et non 45 %. 31 2 500 + 3 600 = 6 100 L'usine fabrique 6 100 biscuits par jour. 80 % × 2 500 = 2 000 Livre du professeur – Chapitre 6 Proportionnalité 63 2 000 biscuits à la fraise sont fabriqués dans l'atelier A. 60 % × 3 600 = 2 160 2 160 biscuits à la fraise sont fabriqués dans l'atelier B. 2 000 + 2160 = 4 160 4 160 biscuits à la fraise sont fabriqués par jour. 4 160 ÷ 6 100 × 100 ≈ 68,2 Environ 68,2 % de biscuits sont à la fraise. t in Faire le po QCM 32 1. 85 ÷ 3 426 × 100 ≈ 2,5 % de pannes la première année. 2. 617 ÷ 3 426 × 100 ≈ 18 % de pannes les 5 premières années. 33 On cherche la réduction qui permet de passer de 5,3 L à 5,1 L. 1 1. B 2 B 3 1.
C 2.
A 2. A Soit 5,3 × ? = 5,1. Comme c'est une réduction, on cherche un taux sous la forme : (1 – t %) Soit 5,3 × (1 – t %) = 5,1. Donc 1 – 5,1 ÷ 5,3 = t % d'où t % ≈ 3,8 % de réduction de consommation d'énergie. Carte mentale × 1,2 Longueur sur un plan (en cm) Longueur réelle (en m) 25 0,75 4 30 0,9 4,8 Produit en croix : 0,9 × 4 = 4,8 × 0,75 30 Coefficient de proportionnalité : = 1,2 25 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Proportionnalité 64 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS Distance parcourue 500 (en km) 400 300 200 Temps 100 écoulé (en h) 0 1 2 3 4 5 Calculer t % d'une quantité revient à multiplier cette quantité par t %. Un pourcentage est une proportion de dénominateur 100 . Pourcentages Réduire de t % une grandeur revient à la multiplier par (1 + t %). Augmenter de t % une grandeur revient à la multiplier par (1 – t %). Algorithmique et outils numériques 34 Placement 1. a. Une augmentation de 2 % sur 100 € revient à multiplier 100 € par (1 + 2 %) = 1,02. Soit 100 × 1,02 = 102 €. Roméo disposera de 102 € au bout d'un an. b. Une augmentation de 2 % sur 102 € revient à multiplier 102 € par (1 + 2 %) = 1,02. Soit 102 × 1,02 = 104,04 €. Roméo disposera de 104,04 € au bout de deux ans. 2. a. représente le montant dans le livret. représente le nombre d'années d'épargne. Ce sont des variables qui évoluent chaque année. 36 Guernica L'échelle indique que 1 cm sur le dessin représente en réalité 145 cm. 5,35 × 145 = 775,75 cm et 2,41 × 145 = 349,45 cm Cette œuvre mesure environ 7,8 m sur 3,5 m. 37 Chauffage La pièce a pour volume 15 × 2,6 = 39 m3 et la puissance nécessaire est de 39 × 925 ÷ 25 = 1 443 W.
Donc le radiateur de 1 500 W est nécessaire. 38 Fourniture détaillée Soit x le prix d'un pot de peinture. Il a acheté 6 pots de peinture et il y a une TVA à 20 % sur chaque pot de peinture. Augmenter le prix de 20 % le prix des 6 pots revient à multiplier les 6 pots de peinture par (1 + 20 %) = 1,2. 6x × 1,2 = 7,2x 7,2x = 540 donc x = 540 ÷ 7,2 = 75 € Chaque pot de peinture coute 75 €.
39 Achat groupé Vic achète 4 brioches et 3 flans pour 9,60 €. Rosa achète 5 brioches et 4 flans pour 12,40 €. Donc si on additionne les dépenses de Vic et de Rosa, on aura 5 + 4 = 9 brioches et 3 + 4 = 7 flans pour 9,6 + 12,4 = 22 €. Donc si on soustrait les dépenses de Vic et de Rosa, on aura 5 – 4 = 1 brioche et 4 – 3 = 1 flan pour 12,4 – 9,6 = 2,8 €. Ainsi 10 brioches et 10 flans coutent 2,80 € × 10 = 28 €.
40 Course à pied On suppose que la distance parcourue est proportionnelle au temps. On réalise un tableau de proportionnalité. Distance parcourue (en m) b.
Avec ce script, on trouve 749,86 €. 3. a. Il suffit de changer 1.02 par 1.025. b. Il devra attendre 29 ans. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 35 Rendez-vous sur la route 1 500 6 × 400 = 2 400 Temps (en min) 4 × 3 = 12 ?
12 × 1 500 ÷ 2 400 = 7,5 min Or 7,5 min = 7 min 0,5 × 60 s = 7 min et 30 s Estelle devrait répondre 7 min et 30 s pour faire 1 500 m. 41 Thé en vrac ou thé en boite ? Le thé en boite coute 2,20 € les 40 g soit 2,20 € × 5 = 11 € les 200 g = 40 g × 5. Le thé en vrac coute 2,60 € les 50 g soit 2,60 € × 4 = 10,40 € les 200 g = 50 g × 4. 10,40 € < 11 € donc le thé en vrac est moins cher que le thé en boite. Manon peut donc espérer faire changer d'avis sa grand-mère. 42 Distance de réaction À 130 km/h, Léo parcourt environ 130 ÷ 3 600 ≈ 36 m en 1 seconde et Noé environ 90 m ≈ 130 ÷ 3 600 × 2,5.
43 Running En 80 min, il fait 10 miles donc en 2,5 h = 150 min, il fait : 18,75 miles = 10 × 150 ÷ 80 d v= donc v = 10 ÷ 80 = 0,125 miles/min soit : t 0,125 × 60 = 7,5 miles/h. 44 Hotte et débit d'air Le volume de la cuisine est de 13 × 3 = 39 m3. Il faut renouveler 12 fois l'air en une heure, donc 12 × 39 = 468 m3. La hotte doit avoir un débit de 468 m3 par heure au minimum.
Alix doit choisir une hotte dont le débit est d'au moins 468 m3 par heure. Son choix peut se porter sur la hotte CH60S noir qui a un débit de 581 m3 par heure. 45 Économie d'énergie Au bout de 2 h, elles risquent de se croiser à environ 200 km de Paris.
Elles peuvent se donner rendez-vous à Tours vers 12 h 30. 1. Pour la consommation actuelle : (512 + 290 + 35 + 330 + 71 + 70 + 35 + 196) × 0,14 = 215,46 € 2. En changeant les 5 éléments, sa consommation sera : (420 + 227 + 35 + 330 + 45 + 70 + 31 + 172) × 0,14 = 186,20 € Il économisera 215,46 € – 186,20 € = 29,26 € 3. En changeant ses habitudes, il peut faire diminuer sa facture de 10 % sur les éléments non renouvelés. Soit ((420 + 227 + 45 + 31 + 172) + (35 + 330 + 70) × 0,9) × 0,14 = (895 + 391,5) × 0,14 = 180,11 € Il économisera en plus : 6,09 € = 186,20 € – 180,11 € 4. Il économise 16,4 % de sa consommation initiale : (215,86 – 180,11) ÷ 215,86 × 100 = 16,4. Livre du professeur – Chapitre 6 Proportionnalité 65 Brevet 46 Presse-papier en verre Faisons un tableau de proportionnalité car la masse est proportionnelle au volume. 2 650 kg = 2 650 000 g et 1 m3 = 1 000 dm3 Les volumes des presse-papier sont : 53 = 125 cm3, 73 = 343 cm3 et 43 = 64 cm3 Masse (en g) 3 Volume (en dm) 2 650 000 x y z 1 000 0,125 0,343 0,064 Masse du cube de 5 cm : x = 2 650 000 × 0,125 ÷ 1 000 x = 331,25 g Masse du cube de 7 cm : y = 2 650 000 × 0,343 ÷ 1 000 y = 908,95 g Masse du cube de 4 cm : z = 2 650 000 × 0,064 ÷ 1 000 z = 169,6 g 47 Terrasse 1. La terrasse fait 3 × 4 = 12 m2. 10 cm = 0,1 m. Marie doit faire une chape de 0,1 × 12 = 1,2 m3.
Elle aura donc besoin de 800 × 1,2 = 960 kg de sable ; 350 × 1,2 = 420 kg de ciment et 1 000 × 1,2 = 1 200 kg de gravier. 960 ÷ 40 = 24 sacs de sable de 40 kg. 420 ÷ 35 = 12 sacs de ciment de 35 kg.
1 200 ÷ 35 ≈ 34,29 soit 35 sacs de gravier de 35 kg. Pour les carreaux de grès : il lui faut 10 paquets de 32 carreaux, 10 × 1,28 = 12,8 m2. Les matériaux lui couteront : 24 × 1,69 + 12 × 5,65 + 35 × 2,49 + 12 × 19,95 = 434,91 € 2. La charge est de : 24 × 40 + 12 × 35 + 35 × 35 + 30,9 × 10 = 2 914 kg La charge est supérieure à 2 t donc elle devra faire 2 voyages. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 48 Eau potable, eau de récupération 1. Les WC, Jardin/Lavage voiture et Lessive représentent 6 % + 20 % + 13 % = 39 % de la consommation d'eau. 39 % × 150 = 58,5 m3 = 58 500 L. Donc le « volume besoin » de cette famille est bien de 58 500 L. 2. La capacité de la cuve sera de 4 000 L car : 1 840 + 58 500 × 10 ÷ 365 ≈ 3 442,7 soit 1 628 € + 2 450 € = 4 078 € pour le prix de l'installation et de la cuve. D'après le document 1, une consommation de 150 m3 coute environ 600 € par an à la famille. La facture diminue de 39 % donc elle s'élèvera à 600 × 0,61 = 366 € par an au lieu de 600 €. Soit une réduction de 600 € – 366 € = 234 € par an. 4 078 ÷ 234 ≈ 17,4 : au bout de 18 ans, la famille aura amorti son investissement. 49 Toutes sortes d'or 1. L'or 18 carats : dans 1 g d'or 18 carats, il y a 750 millièmes d'or pur quel que soit l'or (jaune, rose ou blanc). 2. Un Napoléon contient 0,9 × 6,45 g = 5,805 g d'or pur. Soit x la quantité d'or 750 millièmes : x × 0,75 = 5,805 x = 5,805 ÷ 0,75 = 7,74 g On peut faire 7,74 g de 750 millièmes d'or avec un Napoléon. 50 Marchés de l'été Il est prévu 24 jours de beau temps et 7 jours de temps pluvieux ou nuageux. • Pour l'emplacement de Clauoey : 24 × 400 + 7 × 80 – 1 200 = 8 960 € de bénéfice. • Pour la boutique au Cap-Ferret : 24 × 300 + 7 × 240 – 30 × 31 = 7 950 € de bénéfice. Camille et son frère devraient choisir l'emplacement à Clauoey, qui est plus rentable. 66 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 51 Le marathon 4 min et 30 s = 4,5 min 4,5 × 42,195 = 189,877 5 min Soit 189,877 5 min ≈ 3 h 9 min 52 s Il fera donc moins de 3 h 30 min. 52 Le cycliste 1. a. 190 km.
b. en 2 h 20 min. c. 20 km. 2. Non, il n'y a pas de proportionnalité entre la distance parcourue et la durée de parcours car le graphique n'est pas une droite. Le cycliste ne va pas toujours à la même allure. 53 Vrai ou faux ? 1 2 des adhérents sont majeurs et 4 3 1 2 × des majeurs ont moins de 25 ans, ce qui représente 4 3 1 soit . 6 • Affirmation 2 : fausse car la réduction de 20 % ne s'applique plus sur le prix initial mais sur le prix déjà soldé, donc les pourcentages ne s'ajoutent pas. • Affirmation 1 : vraie car 54 La piscine Le modèle de piscine avec la plus grande surface est le modèle B avec 32 m2. Surfaces : 3 × 5 = 15 m2 pour le modèle A 4 × 8 = 32 m2 pour le modèle B 8,5 × 3,5 = 29,75 m2 pour le modèle C Pour faire le contour de la piscine avec les dalles sur 2 m de large, il faut 2 rangées de dalles. Pour la rangée la plus proche de la piscine, il faut 8 dalles de 1 m sur la longueur et 4 dalles sur la largeur ainsi que 4 dalles dans les angles pour faire le contour complet, soit 8 × 2 + 4 × 2 + 4 = 28 puis, sur la seconde rangée, il faut 10 dalles sur la longueur, 6 dalles sur la largeur et 4 dalles dans les angles, soit 10 × 2 + 6 × 2 + 4 = 36, soit 28 + 36 = 64 dalles en tout. La promo est de 15 % ; il paieront 64 × 0,85 × 13,9 = 756,16 € pour toutes les dalles. 55 Le 7e continent 1. 550 000 × 6 = 3 300 000 km2, surface du 7e continent. 2. 3 300 000 × 1,1 = 3 630 000 km2 dans un an. 3. 3 630 000 × 1 ,13 = 4 831 530 km2 ; l'affirmation est fausse. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 1.
80 % × 510 = 408 élèves mangent à la cantine 25 % × 408 = 102 élèves mangent 5 fois par semaine et 408 – 102 = 306 mangent 4 jours par semaine. 102 × 5 × 36 × 3,5 = 64 260 306 × 4 × 36 × 3,5 = 154 224 Soit une recette de 64 260 + 154 224 = 218 484 € sur l'année. 2. Demi-pension 5 jours pour 1 trimestre : 210 € = 5 × 3,5 × 12 Demi-pension 4 jours pour 1 trimestre : 168 € = 4 × 3,5 × 12 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Exercice 1 1. 80 % × 500 = 400 élèves demi-pensionnaires 30 % × 400 = 120 élèves mangent 5 fois par semaine dont 10 % × 120 = 12 élèves « boursiers 1 » ; 5 % × 120 = 6 élèves « boursiers 2 » et 15 % × 120 = 18 élèves « boursiers 3 ».
400 – 120 = 280 élèves mangent 4 fois par semaine dont 7 élèves « boursiers 3 » et 11 élèves « boursiers 1 ». 120 × 5 × 36 × 3,5 = 75 600 280 × 4 × 36 × 3,5 = 141 120 75 600 + 141 120 = 216 720 € sur l'année. 2. Demi-pensionnaire non boursier 5 jours pour 1 trimestre : 210 € Demi-pensionnaire « boursiers 1 » 5 jours pour 1 trimestre : 210 – 28 (84 ÷ 3 = 28) = 182 € Demi-pensionnaire « boursiers 2 » 5 jours pour 1 trimestre : 210 – 77 (231 ÷ 3 = 77) = 133 € Demi-pensionnaire « boursiers 3 » 5 jours pour 1 trimestre : 210 – 120 (360 ÷ 3 = 120) = 90 € Demi-pensionnaire non boursier 4 jours pour 1 trimestre : 168 € Demi-pensionnaire « boursiers 1 » 4 jours pour 1 trimestre : 168 – 28 = 140 € Demi-pensionnaire « boursiers 2 » 4 jours pour 1 trimestre : 168 – 77 = 91 € Demi-pensionnaire « boursiers 3 » 4 jours pour 1 trimestre : 168 – 120 = 48 € Exercice 2 1. 2 500 × 300 = 750 000 g de pâte, soit 750 kg. 2. 60 % de 750 kg = 450 kg de farine pour les 2 500 baguettes. Exercice 2 1. 2 100 × 300 = 630 000 g de pâte, soit 630 kg. 2. 52 % × 630 = 327,6 kg de farine ; 36 % × 630 = 226,8 kg d'eau ; 1,2 % × 630 = 7,56 kg de sel ; 10,8 % × 630 = 68,04 kg de levure pour 2 100 baguettes. Écriture d'un énoncé Un couple veut vendre un appartement à 200 000 € et les frais d'agence s'élèvent à 6 % du bien. Quel sera le prix affiché en agence ?
Analyse d'une production • Julia a un raisonnement faux car elle fait une augmentation alors que c'est une diminution.
Elle l'applique en plus sur le poids final. • Loïc a un raisonnement faux car il applique le pourcentage sur le produit final alors que c'est sur le produit initial ; il confond masse perdue et masse initiale. • Enzo a un raisonnement faux car il se trompe sur son développement. Livre du professeur – Chapitre 6 Proportionnalité 67 APITRE CH 7 7 Fonctions Introduction © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Le travail sur les grandeurs mesurables et les unités de mesure, déjà entamé au cycle 3, est poursuivi tout au long du cycle 4, en prenant appui sur des contextes issus d'autres disciplines ou de la vie quotidienne. Ce thème se prête particulièrement à des connexions avec les autres disciplines dans lesquelles interviennent les mathématiques (Physique-chimie, Sciences et vie de la Terre…). On travaille tout au long du cycle 4 sur le lien entre deux grandeurs et l'exploitation de la représentation graphique d'une grandeur en fonction d'une autre.
Le domaine des grandeurs et mesures a été travaillé de manière intuitive, sans formalisation, depuis la 5e et a préparé la découverte de la notion de fonction en 3e. Il faut s'appuyer sur les connaissances antérieures des élèves afin de formaliser cette notion, tout en ayant conscience que c'est la première fois que les élèves vont formaliser cette notion de fonction ainsi que le vocabulaire qui lui est associé. • De nombreux exercices et problèmes permettent de modéliser des phénomènes continus, de résoudre des problèmes modélisés par des fonctions (équations, inéquations) et de faire le lien entre les différents registres : langage courant et vocabulaire mathématique lié aux fonctions. Des problèmes concrets amènent les élèves à commenter des documents authentiques et à estimer l'ordre de grandeur d'un résultat (développement de l'esprit critique). • Place dans la progression : Ce chapitre donne l'occasion de travailler et/ou consolider des savoir-faire de calcul numérique (nombres relatifs, en écriture fractionnaire), de calcul littéral (formule, équation, inéquation) et d'exploitation de représentations graphiques. Il serait préférable de le traiter assez tôt afin de retravailler ces notions de manière régulière tout au long de l'année. Il doit néanmoins être traité avant le chapitre 8 traitant des fonctions affines, qui doivent être considérées et travaillées comme des cas particuliers. Activités flash Questions 1. Si x = 4, alors 2(x – 5) = 2(4 – 5) = 2 × (–1) = –2.
2. a.
Le prix de 8 kg de sucre est de 4 €. b. Avec 3 €, j'ai acheté 6 kg de sucre.
3. L'abscisse de A vaut 2 et l'ordonnée de B vaut 6. d donc d = 5 × 2 = 10. 2 La vitesse est donc de 10 km/h. 5. a. Les coordonnées de A sont (2 ; 1). b. L'ordonnée de B vaut 3. c. L'abscisse de C vaut 0. 4. On a 5 = Livre du professeur – Chapitre 7 Fonctions 69 Activité 1 Le tractopelle Phase 3 : durée : 30 min, pas de variation du nombre de litres, c'est une pause (sans doute le déjeuner). Phase 4 : durée : 10 min, hausse de 45 L, ils remettent de l'essence dans le réservoir. Phase 5 : durée : 120 min = 2 h, baisse de 10 L, c'est un déplacement 10 L = 5 L/h . 2h Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de décrire l'évolution d'une grandeur en fonction d'une autre à l'aide d'une courbe. Les prérequis nécessaires sont : calcul de durée, proportionnalité, lecture d'information à partir d'une courbe. La capacité introduite est de tracer et exploiter la représentation graphique d'une fonction. (Il s'agit ici de procéder à des lectures graphiques et d'en donner une interprétation concrète sans aucunement formaliser la notion de fonction. Il faut laisser de l'autonomie aux élèves quant aux procédés utilisés. On peut, à cette occasion, rappeler le vocabulaire adapté (coordonnées, abscisse, ordonnée). On peut également faire le lien avec les grandeurs quotients vues en 4e (consommation en L/h). 1. Le dernier point de la courbe a pour abscisse 310. 9 h + 310 min = 9 h + 300 min + 10 min = 9 h + 5 h + 10 min = 14 h 10 min Donc l'entreprise arrête d'utiliser l'engin à 14 h 10. 2. Phase 1 : durée : 60 min = 1 h, baisse de 5 L, c'est un déplacement (5 L/h).
Phase 2 : durée : 90 min = 1 h 30 min, baisse de 30 L, c'est un 30 L terrassement = 20 L/h . 1,5 h ( )) Activité 2 Magique ? Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est d'introduire la notion de fonction, d'image et d'antécédent. Les prérequis nécessaires sont : nombres et calcul, calcul littéral. La capacité introduite est de déterminer des images et des antécédents. 10 + x On ajoute 10 (10 + x) × 2 On multiplie par 2 On soustrait 20 (x + 10) × 2 – 20 Or (x + 10) × 2 – 20 = 2x + 20 – 20 = 2x.
La formule est donc : 2x. On peut ainsi valider (ou invalider) la conjecture faite à la question précédente. 1. On donne ici un exemple avec 3 nombres mais on peut collecter beaucoup plus de réponses parmi les élèves afin de faciliter les réponses aux questions suivantes (conjecture pour deviner le nombre de départ). © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. x Nombre choisi 4. Le lien entre deux grandeurs a été travaillé durant les deux années précédentes.
Mais c'est la 1re fois que les élèves vont formaliser la notion de fonction, les notations et le vocabulaire associés. Nombre choisi –1 2,5 3 On ajoute 10 9 12,5 13 Nombre de départ choisi : x 0 On multiplie par 2 18 25 26 Résultat final annoncé : f(x) 0 On soustrait 20 –2 5 6 2. C'est aux élèves de faire leur propre conjecture et d'en déduire le nombre choisi par Séverine. Il semble que le résultat soit toujours le double du nombre de départ. Ainsi le nombre choisi par Séverine devrait être 9. 3,5 12 7 24 –2 3 2 –4 3 On peut noter qu'ici, f(x) = 2x. 5. L'image de 12 par la fonction f est 24. On peut commencer à noter f(12) = 24. 6.
Un antécédent de 50 par la fonction f est 25. On peut commencer à noter f(25) = 50. 3. Le tableau de la question 4. peut être utilisé et éventuellement complété afin de travailler ce nouveau vocabulaire à l'oral. On peut procéder par étape, en s'aidant du tableau précédent afin de déterminer cette formule. Activité 3 Lancer de poids Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de construire et d'exploiter la courbe représentative d'une fonction. Les prérequis nécessaires sont : notion de fonction, calcul d'images, placer des points dans un repère du plan. La capacité introduite est de tracer et d'exploiter la représentation graphique d'une fonction. 2 1. h(0) = –5 × 0 + 6,75 × 0 + 2 = 2. À l'instant x = 0, le poids se trouve donc à une hauteur de 2 m.
On peut faire le lien avec le vocabulaire introduit à l'activité précédente (l'image de 0 par la fonction h est 2, un antécédent de 2 est 0 par la fonction h). 70 fonction f ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 2. h(1,6) = –5 × 1,62 + 6,75 × 1,6 + 2 = 0 Au bout de 1,6 s, le poids se trouve à une hauteur de 0 mètre. Il est donc retombé au sol au bout de 1,6 s. On peut faire le lien avec le vocabulaire introduit à l'activité précédente (l'image de 1,6 par la fonction h est 0, un antécédent de 0 est 1,6 par la fonction h). 3. x 0 0,4 0,8 1,2 1,6 h(x) 2 3,9 4,2 2,9 0 On peut indiquer qu'un tel tableau est un tableau de valeurs de la fonction h mais qu'il n'est pas unique. Ce tableau peut également être utilisé et éventuellement complété afin de retravailler le vocabulaire à l'oral.
4. 5. Le travail sur ce type de représentation a déjà été mené en classe de 4e. Les unités sont indiquées pour gagner du temps car ce n'est pas l'objectif de cette activité. Ultérieurement, on pourra laisser aux élèves le soin de choisir une échelle adaptée à la représentation d'une fonction. Hauteur (en m) Cette activité permet de comprendre concrètement comment on construit la courbe représentative d'une fonction. C'est aussi l'occasion de s'interroger sur la pertinence ou non de relier les points obtenus entre eux (et si oui, de quelle manière). On peut inciter les élèves à faire un nouveau tableau de valeurs pour placer des points supplémentaires (en particulier s'ils ont choisi de relier les points à la règle). 4 Hauteur (en m) 4 3 3 2 2 1 1 0,2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0 0,5 1 1,5 Temps (en s) 0,2 0 0,5 1,5 Temps (en s) 1 Activité 4 Sécurité routière Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est d'exploiter une représentation graphique. Les prérequis nécessaires sont : notion de vitesse, lecture graphique d'images et d'antécédents. La capacité introduite est de tracer et d'exploiter la représentation graphique d'une fonction. 1. On peut faire remarquer aux élèves que lors du temps de réaction, la vitesse est constante et rappeler si nécessaire la formule donnant la vitesse en fonction de la distance et du temps dans ce cas. DR D = R t 2 d'où DR = 2v. Ainsi la distance est proportionnelle à la vitesse pour la distance de réaction. C'est donc la courbe rouge (droite passant par l'origine du repère). Le temps de réaction est fixé à 2 secondes donc v = On peut également calculer une valeur particulière pour identifier de quelle courbe il s'agit. 2.
Par lecture graphique, la distance d'arrêt de Muriel est d'environ : 20 m + 33 m = 53 m. Ce résultat est approximatif, et toute lecture donnant un résultat cohérent sera à valoriser. 3. On voit qu'à une vitesse de 90 km/h, la distance de réaction est de 50 m et la distance de freinage est de 50 m également. Cela fait donc une distance d'arrêt de 100 m. Muriel roulait donc à 90 km/h. (C'est la seule solution possible car en dessous de 90 km/h, les deux distances sont inférieures à 50 donc la somme est inférieure à 100 et au-dessus de 90 km/h, les deux distances sont supérieures à 50 donc la somme est supérieure à 100.) L'objectif n'est pas ici de chercher à trouver mathématiquement toutes les solutions, et encore moins de prouver l'unicité de cette solution. Néanmoins, on peut trouver facilement une solution et prouver par un raisonnement simple que c'est la seule possible. 4. En supposant que le temps de réaction est le même pour tout le monde (2 secondes, ici), on ne tient donc pas compte de la distance de réaction qui serait la même pour deux véhicules qui se suivraient à la même vitesse. À 130 km/h, la distance de freinage est d'environ 100 m. Or, si deux voitures ne sont séparées que d'un trait, cela fait entre 38 m et 52 m (38 + 14) entre elles alors que si elles sont séparées de deux traits, cela fait 90 m (2 × 38 + 14) et 104 m (2 × 38 + 2 × 14). Ainsi la distance séparant deux véhicules doit être au moins de deux traits pour qu'elle soit supérieure à la distance de freinage et ainsi être en sécurité. Livre du professeur – Chapitre 7 Fonctions 71 16 a. « L'image de –3 par la fonction f est 4. » ou « 4 est l'image de e Savoir-fair 4 5 –3 par la fonction f. » b. « 4 a pour antécédent –3 par la fonction f. » ou « –3 est un antécédent de 4 par la fonction f. » 1. g(6) = –5 × 6 + 3 = –27 2. On cherche x tel que g(x) = 3, c'est-à-dire –5x + 3 = 3 ou encore –5x = 0 donc x = 0. 3 a donc un seul antécédent par la fonction g : 0. 18 g(x) = 2x donc g(–3) = 2 × (–3) = –6. k(–1) = 3 × (–1)2 – 2 = 3 – 2 = 1 L'image de –1 par la fonction k vaut 1. 19 a. Faux. 17 a. f(3) = –5 b. g(–4) = 7 L'image de –3 par la fonction g vaut –6. 6 1.
f(x) = 2x2 2. On cherche x tel que f(x) = 0 c'est-à-dire 2x2 = 0 ou encore x2 = 0 qui a pour unique solution x = 0. Le seul antécédent de 0 par f est donc 0.
7 1. L'image de –3 par la fonction h vaut 2. 2. Un antécédent de 5 par la fonction h est 3. b.
Vrai.
c. Vrai. d. Faux. 20 –1 2 –2 f(x) 0 2 8 8 2. L'image de –1 par la fonction h est 5,3. 3. Un antécédent de –3,5 par la fonction h est .1 3. Deux antécédents de –3 par la fonction h sont : –1 et 2. C'est le seul dans le tableau. Ce sont les seuls dans le tableau. 1. 0 21 1. L'image de 0,5 par la fonction h est –1. C'est le seul dans le tableau. 9 x x –1 –0,5 0 0,5 1 1,5 2 f(x) –1 –2,5 –3 –2,5 –1 1,5 5 2. 22 a. Vrai. b. Faux. c.
Vrai. d. Vrai.
23 A –4 –2 B 1 0 –1 3 –1 14 Antécédents 1 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0 24 Égalité 1 f(2) = 4 h(2,5) = –2 11 a. L'image de 2 vaut 3. b. Un antécédent de 5 est 1. C'est le seul. c. h(3) = 0 d. –2,5 n'a aucun antécédent. g(5) = 3 8 –2 7 2 Images Verbe « avoir » Verbe « être » 2 a pour image 4 par f. 4 a pour antécédent 2 par f. 2,5 a pour image –2 par h. –2 a pour antécédent 2,5 par h. 5 a pour image 3 par g. 3 a pour antécédent 5 par h. 4 est l'image de 2 par f. 2 est un antécédent de 4 par f. –2 est l'image de 2,5 par h. 2,5 est un antécédent de –2 par h. 3 est l'image de 5 par g. 5 est un antécédent de 3 par g.
25 1. h(x) = 2x + 5 Exercices Déterminer des images et des antécédents 1 15 17 = 3 3 1 17 L'image de par la fonction h est . 3 3 3. h(x) = 9 si 2x + 5 = 9, c'est-à-dire 2x = 4 qui a pour seule solution x = 2.
Donc le seul antécédent de 9 par la fonction h est 2. 2. h 1 2 (3)=2× 3 +5= 3 + flash Questions 12 f(3) = 1+ 3 4 = =2 2 2 Tracer la représentation graphique d'une fonction flash Questions 13 f(2) = 4 + 2^2 = 4 + 4 = 8 L'image de 2 par la fonction f vaut 8. 14 g(–1) = –(–1)3 + 3 = –(–1) + 3 = 1 + 3 = 4 Sofiane a sans doute fait une erreur de signe dans le calcul de –(–1)3, il a donc calculé –1 + 3 = 2. 15 15 est le triple de 5 et d'aucun autre nombre. En effet, h(x) = 3x et 3x = 15 donne x = 5 comme seule solution. Ainsi 15 a un seul antécédent par la fonction h, c'est 5. 72 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 26 g(4) = 4 = 1 donc A(4 ; 1) appartient à la représentation 4 graphique de la fonction g. g(1) = 4 = 4 ≠ 0 donc B(1 ; 0) n'appartient pas à la représen1 tation graphique de la fonction g. 27 Les courbes bleue et violette peuvent représenter des fonctions. Exploiter la représentation graphique d'une fonction Ce sont les seules car tout nombre a une image unique par une fonction. 28 1. flash Questions x –3 –2 –1 0 1 2 3 f(x) –4 1 4 5 4 1 –4 30 1. L'image de 2 par la fonction f vaut 4. 2. Un antécédent de 0 par la fonction f : –6 2. C'est le seul visible. 3. f(0) = 3 f(–2) = 2 f(–6) = 0 31 On lit graphiquement que g(–3) = 0 et g(2) = 0 donc g(–3) = g(2). 32 a. L'image de –1 par la fonction f est 0.
1 0 b. Un antécédent de 2 par la fonction f est 3 (ou –2 ou –5,5 ou –6). 1 Ce sont des lectures graphiques donc approximatives. c. f(–6) = 2 d. Les antécédents de 1 sont –6,3 ; –5 ; –3 ; –1,6 ; 2,7 ; 4. L'énoncé ne précise pas le nombre d'antécédents attendus. Le résultat sera donc correct si l'élève en trouve au moins deux. 29 On peut faire le tableau de valeurs suivant : e.
Il n'y a pas de nombre qui a pour image 3 par la fonction f. f. –2 a pour antécédent 2 par la fonction f. x –1 –0,5 0 0,5 1 h(x) 1,5 1,75 2 2,25 2,5 C'est évidemment le seul.
g. Une solution de l'équation f(x) = 0 est –6,7 (ou –4 ou –1 ou 2,5). Le choix du pas est laissé aux élèves. 2 B A C Ce sont des lectures graphiques donc approximatives. Une seule solution est attendue. E D 33 On peut, par exemple, calculer l'image de 0 (car elle est différente sur chaque courbe) par chaque fonction : f(0) = 1 ; g(0) = –1 ; h(0) = 0, ce qui permet d'identifier chaque courbe. Courbe ① : c. Courbe ② : a. Courbe ③ : b. 1 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0,5 0 0,5 t in Faire le po 1 QCM 1 1. B 2 C 3 B 2. C 3. A 4. A Carte mentale Pour calculer l'image d'un nombre x, il faut remplacer x par la valeur proposée et effectuer les calculs. Pour calculer le ou les antécédent(s) d'un nombre y, il faut résoudre l'équation f (x) = y d'inconnue x. Formule Courbe Fonctions 2 f(x) = x – 4x + 3 Exemple : f(2) = 2 2 – 4 × 2 + 3 = –1 Donc C(2 ; –1) appartient à la courbe représentant f(x). Pour lire l'image d'un nombre x, il faut placer x sur l'axe des abscisses et lire l'ordonnée y du point correspondant sur la courbe. Pour lire le ou les antécédent(s) d'un nombre y, il faut placer y sur l'axe des ordonnées et lire la ou les abscisse(s) x du ou des point(s) correspondant(s) sur la courbe. 3 Tableau de valeurs x f(x) point 0 3 A 1 0 B 2 –1 C 4 3 D … … … A B 0 –1 D 01 2 C 4 Livre du professeur – Chapitre 7 Fonctions 73 Algorithmique et outils numériques 34 Calcul d'image 1 x 2. On peut calculer l'image de n'importe quel nombre sauf 0. En effet, tous les nombres ont un inverse sauf 0 (ou on ne peut pas diviser par 0). 1. f(x) = x + 35 Tableau de valeurs 1. Cet algorithme calcule et annonce les images de tous les entiers entre 0 et 10 par la fonction f définie par f(x) = (x – 1) × (x + 1) + 1 2. Valeur de x 0 1 2 3 4 Valeur affichée 0 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 5 6 7 8 9 10 On peut simplifier l'expression de f(x) : f(x) = (x – 1) × (x + 1) – 1 = x2 + x – x – 1 + 1 = x2 36 Carré dans rectangle 1. a. Quand x augmente, l'aire C du carré MNLD augmente. b. Quand x augmente, l'aire H de l'hexagone ABCMNL diminue. c. Quand x augmente, le périmètre C du carré MNLD augmente. d. Quand x augmente, le périmètre H de l'hexagone ABCMNL reste constant. Les conjectures des élèves peuvent évidemment être fausses. Cela n'a pas d'importance ici tant qu'ils font preuve d'esprit critique par la suite. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2. Voir manuel numérique, fichier 7-p129-ex36-prof-geogebra. La recette est maximale pour 27 baisses, soit un prix de billet de 50 € – 27 × 0,60 € = 33,80 €. Problèmes 38 La rando 1. La randonnée dure 7 heures.
2. Au bout de 3 heures de randonnée, le randonneur est à une altitude de 1 040 m environ. 3. a. Le randonneur se trouve à 1 000 m d'altitude au bout d'environ 2,6 h = 2 h 36 min et au bout d'environ 6,2 h = 6 h 12 min. b. Le randonneur ne se trouve jamais à 200 m d'altitude. c. Le randonneur se trouve à 1 400 m d'altitude pendant (approximativement) toute la 5e heure de randonnée.
D'après ce fichier, les conjectures semblent cohérentes. Les conjectures faites à la question 1. peuvent être fausses. Il faut insister auprès des élèves pour leur faire comprendre que le but n'est pas de les modifier mais de faire preuve dans cette question d'esprit critique. 3. L'aire totale vaut : (ABCD) = 6 × 3 = 18. Si Alberta veut 3 conserver les du jardin pour de la pelouse, il faut que 4 1 l'aire du carré DMNL ne dépasse pas × 18 m2 = 4,5 m2. 4 On peut chercher une solution approximative au tableur ou à la calculatrice. Il faut en fait que x2 < 4,5 soit x < 4,5 . (4,5 ≈ 2,12). Le côté du potager d'Alberta ne doit donc pas dépasser 2,12 m. Toute solution approximative obtenue par essais successifs sera bien évidemment validée, la résolution algébrique de cette inéquation étant hors programme. 37 Salle de spectacle 1. =B2*C2 2. =B2–0,6 ou =$B$2–A3*0,6 3. =C2+100 ou =$C$2+A3*100 4. Voir manuel numérique fichier-7-p19-ex37-prof-excel. 74 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 39 Ça monte ! • Courbe rose : récipient C (le volume monte de manière régulière, c'est une situation de proportionnalité). • Courbe violette : récipient A (le volume augmente de plus en plus vite car le récipient s'élargit). • Courbe bleue : récipient B (le volume augmente de moins en moins vite car le récipient se rétrécit).
40 Relever la température 1. À midi, la température était de 3 °C. 2. T(17) = 3 donc à 17 h, il faisait 3 °C. 3. T(x) = 0 a pour solutions 8 et 20. Cela signifie que la température a été de 0 °C à 8 h et à 20 h et à aucun autre moment. 4. T(x) ⩾ 3 a pour solutions tous les nombres entre 12 et 17. Cela signifie que les seuls moments où la température a été supérieure ou égale à 3 °C ont été entre midi et 17 h. 5. L' image de 0 par la fonction T vaut –2. Cela signifie qu'à 0 h (minuit), il faisait –2 °C. 6. –6 a deux antécédents : 2 et 6. Cela signifie qu'il y a deux moments où la température était de –6 °C : à 2 h et à 6 h. 7. La température était positive ce jour-là entre 8 h et 20 h. 41 Croissance du lichen 1. d(16) = 7 × 16 – 12 = 7 × 4 = 7 × 2 = 14 16 ans après la disparition de la glace, le diamètre du lichen est alors de 14 mm. 2.
d(t) = 42 si 7 × t – 12 = 42 soit t – 12 = 6 ou encore t – 12 = 36 soit t = 48. Le diamètre du lichen est de 42 mm 48 ans après la disparition de la glace. Les élèves peuvent ne pas résoudre cette équation (difficile en 3e) mais procéder par tâtonnement. On pourra alors insister sur l'importance d'une vérification pour savoir si la solution obtenue est une valeur exacte ou approchée. On pourra également débattre sur le fait que trouver une solution ne garantit pas qu'il n'y en a pas une autre et profiter ici du contexte pour justifier que celle-ci est ici unique (le lichen croît, il ne « rétrécit » donc pas et il ne peut y avoir deux moments où il a la même taille). 42 Footing matinal 1. Le GPS a représenté la vitesse en fonction du temps. 2. Au bout de 15 minutes, la vitesse est 3,7 km/h environ. Au bout de 65 minutes, la vitesse est 3,7 km/h environ. 3.
La vitesse vaut 10 km/h au bout de 43 minutes environ. La vitesse vaut 6 km/h au bout de 30 minutes et de 61 minutes environ. La vitesse ne vaut jamais 12 km/h.
4. Temps (en min) 0 15 50 70 43 0 Vitesse (en km/h) 3,7 10 8,2 0 43 A tank 1. (x) = x3 2. x (x) 0 0 0.5 1 1.5 2 2.5 3 0,125 1 3,375 8 15,625 27 26 24 22 20 18 16 14 12 10 8 6 4 2 Volume (in m) 46 Circuit de voitures 1.
La plus longue ligne droite du circuit (qui correspond à la plus longue période pendant laquelle le pilote accélère) se trouve approximativement à 1,32 km de la ligne de départ. 2.
La vitesse la plus basse a été enregistrée à environ 1,32 km de la ligne de départ. 3. On peut regarder le nombre de virages (la vitesse ralentit), qui sont au nombre de 3, ce qui élimine les circuits A et E. La première ligne droite est très courte par rapport à la seconde (on ralentit assez tôt), ce qui élimine le circuit C.
Sur la courbe, on voit que la voiture ralentit plus lors du 2e virage que lors du 1er donc le 2e virage est plus serré que le 1er. La voiture roulait donc sur le circuit B.
47 Volleyball 1. h(0) = –0,05 × 02 + 0,6 × 0 + 2 = 2 Donc la hauteur du ballon au départ de sa trajectoire était de 2 m. Ainsi OB = 2. 2. Le filet est à 10 mètres du point O. En effet, AC = 18 et donc la distance entre A et le filet vaut 9. h(10) = –0,05 × 102 + 0,6 × 10 + 2 = 3 > 2,43 Ainsi la hauteur du ballon à 10 mètres du point O est supérieure à la hauteur du filet. Le ballon passe donc audessus du filet.
3. Le point C est à 19 mètres du point O pour les mêmes raisons que précédemment. h(19) = –0,05 × 192 + 0,6 × 19 + 2 = –4,65 < 0 Ainsi le ballon est retombé au sol avant le point C (sinon, le résultat obtenu serait positif). Il est donc retombé au sol à l'intérieur de la partie adverse du terrain. 48 Menuiserie 1. Side (in metres) 0 1 2 3 To get a volume equal to 10 m3, we read 10 on the y-axis and we read the x-coordinate of the corresponding point on the curve. x is approximately equal to 2.15. So the side of the oil tank is around 2.15 m. 44 Jardin d'agrément Les élèves qui ne parviennent pas à trouver la formule en fonction de x peuvent être incités à faire le calcul pour plusieurs valeurs de x. Longueur OM 0 1 2 Longueur ON Aire de OMN 3 4 6 5 0 2,5 5 6 4 3 4 4,5 2 1 0 4 2,5 0 On n'a pas trouvé de solution au problème posé car l'aire de OMN n'est jamais égale à 3 dm2 dans ce tableau. On peut néanmoins penser qu'il y a une solution pour une longueur OM comprise entre 1 dm et 2 dm et une autre pour une longueur OM comprise entre 4 dm et 5 dm. 2. a. Dans la cellule B2 : =6–A2 Dans la cellule C2 : =A2*B2/2 ou =(A2*B2)/2 b. On peut maintenant faire une conjecture plus précise. On peut penser qu'il y a une solution pour une longueur OM comprise entre 1,2 dm et 1,3 dm et une autre pour une longueur OM comprise entre 4,7 dm et 4,8 dm. 3. a. x peut varier entre 0 et 6 (car M ∈ [OA]). b. ON = 6 – x x (6 – x) c. (x) = 2 d. 4 1.
Aire de la partie végétalisée : (x) = (30 − 2 x) (16 − 2 x) 3 { { longueur de largeur de la partie la partie végétalisée végétalisée 2 1 2. (2) = (30 – 2 × 2)(16 – 2 × 2) = 26 × 12 = 312 Cela signifie que lorsque la largeur de l'allée est de 2 m, l'aire de la partie végétalisée est de 312 m2. 45 Repas de groupe 20 x prix payé par les x personnes ayant choisi le menu à 20 € A(x) = 20x + 2 500 – 25x A(x) = 2 500 – 5x + 25(100 − x) { 1. A(x) = { © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2. 2. A(x) = 2 185 si 2 500 – 5x = 2 185, c'est-à-dire –5x = –315 ou –315 encore x = = 63. –5 Ainsi 63 personnes ont choisi le menu à 20 €. prix payé 0 1 2 3 4 5 6 e. Il y a deux solutions au problème : • OM ≈ 1,2 dm • OM ≈ 4,8 dm 4 3 par les (100 − x) 2 personnes 1 ayant choisi le menu à 25 € 0 1 2 3 4 5 6 Livre du professeur – Chapitre 7 Fonctions 75 49 Course cycliste a. La distance parcourue pendant cette course est de 11 km (le dernier point de chaque courbe a une ordonnée de 11). b. C'est Nathan qui est parti le plus vite au départ (sa courbe monte plus vite). c. C'est Charlie qui s'est arrêté un peu au niveau de l'église (courbe rouge horizontale à un moment donné). d. La distance entre le collège et l'église est de 6 km (au moment où Charlie s'arrête à l'église, la distance parcourue est de 6 km). e. C'est Nathan qui était en tête au bout d'une demi-heure ou 30 minutes (la courbe bleue est au-dessus de la courbe rouge pour x = 30, donc Nathan a parcouru plus de distance en 30 min que Charlie). f. Charlie a doublé Nathan au bout d'environ 44 minutes (la courbe rouge passe au-dessus de la courbe bleue à partir de x ≈ 44). g. C'est Charlie qui est arrivé le premier (car il a parcouru les 11 km en moins de temps que Nathan). 50 Réservoir d'eau Il y a une « cassure » de la courbe pour x = 4. C'est le passage d'un cylindre à l'autre. Ainsi h = 4 et h' = 8 – 4 = 4. Le volume d'un cylindre est donné par la formule : = πr2h. Or, pour une hauteur de 4 m (1er cylindre rempli), on a un volume de 120 m3. 120 D'où : πR2 × 4 = 120 ou encore R2 = 120/4π et R = ≈ 3,09. 4π De plus, pour une hauteur de 8 m (2 cylindres remplis), on a un volume de 160 m3.
Ce qui signifie que le 2nd cylindre a un volume de 160 m3 – 120 m3 = 40 m3. 40 40 D'où : πR'2 × 4 = 40 ou encore R'2 = et R' = ≈ 1,78. 4π 4π 51 Une courbe pour deux problèmes 1. Les élèves doivent prendre l'initiative de choisir des valeurs de x et de calculer leurs images afin de placer des points qui les aideront à représenter cette fonction.
 8 7 Brevet 52 Beaucoup de bruit pour rien 1.
À une distance de 100 mètres de la tondeuse, le niveau de bruit est d'environ 45 décibels. 2. Le niveau de bruit est de 60 décibels à une distance de 25 mètres de la tondeuse. 53 Freinage 1. 12,5 m + 10 m = 22,5 m La distance d'arrêt du scooter roulant à 45 km/h est donc de 22,5 m. 2. a. D'après le graphique, si la distance de réaction est de 15 m, la vitesse est de 53 km/h environ. b. La distance de freinage n'est pas proportionnelle à la vitesse, car la représentation graphique de la distance de freinage en fonction de la vitesse n'est pas une droite. c. D'après le graphique, si une voiture roule à 90 km/h, alors : • la distance de réaction est de 23 m environ ; • la distance de freinage est de 40 m environ. La distance d'arrêt est donc d'environ 40 m + 23 m = 63 m. 3. 1102 ≈ 79 152, 4 La distance de freinage sur route mouillée à 110 km/h est donc d'environ 79 m. 54 En musique 1. Le pas est du choix de l'élève. T 0 f(T) 0 600 800 1 000 1 200 1 400 1 600 ≈ 283 400 ≈ 490 ≈ 566 ≈ 632 ≈ 693 ≈ 748 800 Fréquence f (en Hz) 800 5 4 600 3 2 400 1 200 1 2 2. Le volume d'un cube de côté x, en cm, est donné, en cm3, par x3. On a donc x3 = 5. Par lecture graphique, on a x ≈ 1,7. Le cube a donc un côté mesurant environ 1,7 cm. 3. 1 L = 1 dm3 Le volume d'une boule de rayon x dm est donné, en dm3, 3 4 4 9 = par πx3. On a donc πx3 = 3 soit x3 = ≈ 0,7. 4 3 3 4 π π 3 Par lecture graphique, on a x ≈ 0,9. La boule a donc un rayon mesurant environ 0,9 dm. 76 400 2. Un « La3 » correspond à une fréquence de 440 Hz. On trace donc la droite horizontale contenant tous les points d'ordonnée 440, qui coupe la courbe en un point unique dont l'abscisse est environ 480. Ainsi, la tension à appliquer pour obtenir un « La3 » est d'environ 480 Newton. 6 0 200 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS Tension T (en N) 0 200 400 600 800 1 000 1 200 1 400 3. On calcule f(220) = 20 220 ≈ 297. Une tension de 220 N correspond donc à une fréquence d'environ 297 Hz. On obtient donc la note Ré3. 4. f(900) = 20 900 = 600 Pour T = 900, on obtient donc une fréquence maximale de 600 Hz avant que la corde ne casse. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice 2. Exercice 1 1. Sur ce graphique, on a représenté la hauteur en fonction du temps. 2. a. Au bout de 2,5 secondes, la hauteur de la balle est de 1,25 mètre. b. La balle retombe au sol au bout de 3 secondes. c. La hauteur maximale de la balle est de 2,25 mètres. Celleci est atteinte au bout de 1,5 seconde. d. La balle est à une hauteur de 2 mètres au bout de 1 seconde et au bout de 2 secondes. Exercice 1 1. h(2,5) = –2,52 + 4 × 2,5 = –6,25 + 10 = 3,75 Au bout de 2,5 secondes, la hauteur de la balle est de 3,75 mètres. 2. On peut faire le tableau de valeurs suivant. t 0 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 h(t) 0 1,75 3 3,75 4 3,75 3 1,75 0 Hauteur (en m) x soustraire 10 − x − 10 mettre au carré 3 2,5 2 x multiplier par (− 20) − 20x ajouter 100 1 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0,5 0,5 1 1,5 2 2,5 3 3,5 4 4,5 Temps (en s) 3. a. La hauteur maximale de la balle est de 4 mètres, et celle-ci est atteinte au bout de 2 secondes. b. La balle est à une hauteur de 2 mètres au bout d'environ 0,6 seconde et au bout d'environ 3,4 secondes. c. La balle retombe au sol au bout de 4 secondes. Exercice 2 1. x 5 − 20x + 100 4. Si le résultat trouvé est 20, on a : –20x + 100 = 20 soit –20x = –80 ou encore x = 4. Le nombre de départ est donc 4. Exercice 2 1. Choisir un nombre 1 3 − 4 5 29 3 − 54 5 Lui soustraire 10 − Élever le résultat au carré 841 9 2 916 25 Soustraire au résultat le carré du nombre de départ 840 9 580 = 116 5 2. f(x) = (x – 0)2 – x2 = (x – 10)(x – 10) – x2 = x2 – 10x – 10x + 100 – x2 = –20x + 100 3. Si le résultat trouvé est –5, on a : –20x + 100 = –5 soit –20x = –105 ou encore –105 105 21 x= = = . –20 20 4 21 Le nombre de départ est donc ou 5,25. 4 1,5 0 (x − 10)2 − x2 enlever le carré du nombre de départ 3. (x – 10)2 – x2 = (x – 10)(x – 10) – x2 = x2 – 10x – 10x + 100 – x2 = –20x + 100 4 3,5 (x – 10)2 –2 Soustraire 10 –5 –12 Mettre au carré 25 144 Enlever le carré du nombre de départ 0 140 Écriture d'un énoncé 1. Yaëlle aurait pu pratiquer son activité entre minuit et 4 h 16 du matin (peu pertinent), entre 10 h 52 et 16 h 33 ou après 23 h 20 (peu pertinent). 2. Julien ne pourra rentrer qu'entre 13 h 57 et 20 h 03. Étant parti à 7 h 40, sa sortie en mer a duré entre 6 h 17 min et 12 h 23 min. 3. On peut, par exemple, se demander : • « À quel(s) moment(s) la hauteur de la mer était-

elle supérieure à 4 mètres ce jour-là ?
» (Approximativement entre 6 h 05 et 9 h 05.) • « Quelle est la différence entre la plus petite hauteur de la mer et la plus grande ? » (4,80 m – 0,10 m = 4,70 m) Livre du professeur – Chapitre 7 Fonctions 77 APITRE CH 8 8 Fonctions affines Introduction différents registres : interprétation concrète et graphique du coefficient directeur et de l'ordonnée à l'origine. • Place dans la progression : Ce chapitre donne l'occasion de travailler et/ou consolider des savoir-faire de calcul numérique (nombres relatifs, en écriture fractionnaire), de calcul littéral (formule, équation, inéquation) et d'exploitation de représentations graphiques. Il doit être traité après le chapitre 7 traitant des fonctions. Il serait préférable que le chapitre 6 (proportionnalité) soit traité en amont, afin de favoriser la modélisation de certains phénomènes par une fonction linéaire. Dans le programme, les fonctions affines sont introduites comme cas particuliers de fonctions. Celles-ci ont des propriétés particulières qui sont étudiées dans ce chapitre (représentation graphique, proportionnalité des accroissements, rôle des paramètres). Les fonctions linéaires sont ensuite vues comme un cas particulier de fonctions affines. Le lien avec la proportionnalité est mis en évidence. • De nombreux exercices et problèmes permettent de modéliser des phénomènes continus, de résoudre des problèmes modélisés par des fonctions affines (équations, inéquations que l'on peut résoudre algébriquement) et de faire le lien entre les Ajouter 3 Départ 5 Multiplier par 0,5 points Soustraire 4 Mettre au carré ? © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. points Arrivée Activités flash Questions c. –1 × (–4) = 4 ; 0 × (–4) = 0 et 2 × (–4) = –8 donc c'est un tableau de proportionnalité. 3. g(–2) = 2 × (–2) + 5 = –4 + 5 = 1 Donc le point A appartient à la représentation graphique de la fonction g. 4. a. Si l'intensité vaut 5 ampères, la tension vaut 6 volts. b. Si la tension vaut 12 volts, l'intensité vaut 2 ampères. 1. a. f(–2) = 3 × (–2) = –6 L'image de –2 par la fonction f est 6.
b. Si x est un antécédent de 12 alors 3x = 12 donc x = 4. 12 n'a qu'un seul antécédent par la fonction f : 4. 2. a. 2 × 4 = 8 mais 5 × 4 ≠ 19 donc ce n'est pas un tableau de proportionnalité. 12 36 3 b. = = = 6 donc c'est un tableau de proportion0,5 2 6 nalité. Activité 1 Kilou-presque-tout Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir l'expression d'une fonction affine et sa représentation graphique. Le prérequis nécessaire est la connaissance des généralités sur les fonctions (exprimer une grandeur en fonction d'une autre, représenter graphiquement une fonction). La capacité introduite est de déterminer les coefficients d'une fonction affine. 1. 10 + 6 × 4 = 34 Une location de 6 h coute 34 €. 2. Nombre d'heures de location x 1 2 5 10 15 Prix payé P(x) (en euros) 14 18 30 50 70 On peut faire remarquer aux élèves que ce tableau n'est pas un tableau de proportionnalité, soit en le constatant après avoir fait les calculs et rempli le tableau, soit en amont (2 fois plus d'heures de location ne coutent pas 2 fois plus cher).
3. P(x) = 10 + 4x Livre du professeur – Chapitre 8 Fonctions affines 79 4. 80 5. P(0) = 10. Cela correspond aux frais fixes (cout pour 0 heures de location). Prix (en €) 6. Le client paie 4 € pour chaque heure supplémentaire payée. Sur le graphique, si on avance de 1 en abscisse (1 heure de plus), on doit monter de 4 en ordonnée pour retrouver un point de la représentation graphique (augmentation de 4 €). 60 40 20 P 0 Là encore, on prépare la notion de proportionnalité des accroisssements mais on travaille également sur le sens concret du coefficient directeur. Cette activité donne l'occasion de définir une fonction affine et ses coefficients. Elle permet également de commencer à réfléchir sur la représentation graphique d'une telle fonction. 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 Nombre d'heures de location On remarque que les points semblent alignés. On peut faire remarquer aux élèves que si on enlevait les frais fixes (10 €), on obtiendrait une droite parallèle à celle-ci et passant par l'origine du repère et donc on serait face à une situation de proportionalité. Cela permet d'anticiper la compréhension de la proportionnalité des accroisssements qui viendra plus tard. Activité 2 Rôti de veau Intentions des auteurs 2. Il s'agit de représenter une fonction. Si d'autres activités amenant à la représentation d'une fonction affine ont été menées en amont (comme l'activité 1), les élèves peuvent prendre l'initiative de relier les points à la règle même si le fait que les points sont alignés n'a pas encore été formalisé. Cela permet d'anticiper sur la suite et d'introduire les fonctions affines dans différents registres.
Si ce n'est pas le cas, en plaçant les points qui correspondent aux situations rencontrées à la première question, les élèves pourront constater l'alignement. Il est probable que certains élèves ne feront que constater alors que d'autres auront déjà intégré ce fait. Il sera alors intéressant de confronter les différents points de vue. L'objectif de cette activité est de modéliser une situation avec une fonction affine. Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation concrète par une fonction, représenter graphiquement une fonction. La capacité introduite est de reconnaitre et d'utiliser une fonction affine. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Si on note T(x) le temps de cuisson en minutes pour un rôti de x kilogrammes, on a T(x) = 45x + 30. On a donc : T(0,8) = 45 × 0,8 + 30 = 66 T(1) = 45 × 1 + 30 = 75 T(1,5) = 45 × 1,5 + 30 = 97,5 2 h 18 min = 2 h + 18 min = 120 min + 18 min = 138 min Si T(x) = 138 alors 45x + 30 = 138 soit 45x = 108 108 ou encore x = = 2,4. 45 180 160 Poids du rôti (en kg) 0,8 1 1,5 2,4 140 Temps de cuisson (en minutes) 66 75 97,5 138 120 Ainsi, le rôti de 800 g cuit en 66 minutes soit 1 h 06 min. Le rôti entre 1 kg et 1,5 kg a cuit entre 75 minutes et 97,5 minutes soit entre 1 h 15 min et 1 h 37 min 30 s. Le rôti qui a cuit en 2 h 18 min pesait 2,4 kg. Les élèves peuvent bien évidemment effectuer ces calculs sans faire intervenir clairement la notion de fonction. C'est alors au professeur de réactiver cette notion par un questionnement permettant de faire le lien avec le chapitre 7. La présentation des résultats sous forme d'un tableau peut aider à cette réactivation. 100 80 60 40 20 0 1 2 3 4 Poids du rôti (en kg) Activité 3 Différents degrés Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de déterminer les coefficients d'une fonction affine et d'utiliser son expression algébrique.
Les prérequis nécessaires sont de savoir modéliser une situation concrète par une fonction, exploiter la courbe représentative d'une fonction.
La capacité introduite est de reconnaitre et d'utiliser une fonction affine. Les valeurs données dans le corrigé sont des valeurs exactes. Les lectures graphiques des élèves peuvent bien évidemment être moins précises. 1. 86 °F correspond à 30 °C, donc il fait chaud. 2. La glace fond à une température de 0 °C soit 32 °F. 3. D'après le graphique, si la température en °C augmente de 10, la température en °F augmente de 18. 80 Temps de cuisson (en min) 200 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS On pourra poser d'autres questions de ce type afin de faire ressortir, de manière graphique, le rôle joué par le coefficient directeur d'une fonction affine. 4. L'ordonnée à l'origine vaut 32 et le coefficient directeur 1,8 (par lecture graphique ou utilisation de la question 3. : si on augmente de 10 °C, on augmente de 18 °F donc si on augmente de 10 fois moins, soit de 1 °C, on augmente de 1,8 °F). Ainsi f(x) = 1,8x + 32. Il s'agit bien ici de retravailler sur le rôle et le sens des coefficients d'une fonction affine. 5.
L'eau bout à 100 °C. Or f(100) = 1,8 × 100 + 32 = 212.
Donc l'eau bout à 212 °F. 6. Si le malade a une température de 104 °F, on a f(x) = 104 soit 72 1,8x + 32 = 104 ; on a donc 1,8x = 72 soit x = = 40. 1,8 Donc il y a lieu de s'inquiéter. Les élèves pourront également s'appuyer sur une lecture graphique, mais on pourra faire ressortir que l'utilisation de l'expression de la fonction donne des résultats plus précis. Celle-ci sera donc préférable lorsqu'on en dispose. Activité 4 La piscine Intentions des auteurs b. 9 L'objectif de cette activité est d'identifier et d'utiliser un cas particulier de fonction affine : une fonction linéaire. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des tableaux de proportionnalité, des grandeurs quotients, de l'expression d'une grandeur en fonction d'une autre, de la fonction affine. La capacité introduite est de reconnaitre et d'utiliser une fonction linéaire. 1. 8 7 6 5 4 3 12 24 48 = = = 12 1 2 4 C'est donc bien un tableau de proportionnalité car on passe d'une ligne à l'autre en multipliant par 12 (coefficient de proportionnalité). Le débit étant supposé constant, on peut également exploiter cette information ou mettre en lumière le débit constant par la constatation de cette situation de proportionnalité. 2. Le tuyau débite 1,5 L (1 bouteille) en 12 secondes donc en une minute, il débite 5 fois plus (car 5 × 12 s = 60 s = 1 min) soit 5 × 1,5 L = 7,5 L. Cela correspond donc à un débit de 7,5 L/min. 3. a. Le tuyau d'arrosage délivre 7,5 litres par minute.
Ainsi on a V(t) = 7,5t. V est donc une fonction affine car elle a une expression du type V(t) = mt + p avec m = 7,5 et p = 0. 2 1 0 0,2 0,3 0,4 0,5 0,6 Activité 5 Intentions des auteurs © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0,1 Cette activité permet de retravailler les grandeurs quotients abordées en classe de 4e. Elle permet, au travers d'une situation très concrète, de mettre en lumière le cas particulier des fonctions linéaires, représentant des situations de proportionnalité déjà rencontrées par les élèves. On pourra alors reparler du rôle du coefficient directeur, qui, s'il est le même que pour une fonction affine, joue aussi le rôle du coefficient de proportionnalité dans ce cas-là.
Poids lourd L'objectif de cette activité est de modéliser une situation de proportionnalité par une fonction linéaire. Les prérequis nécessaires sont de savoir lire des informations à partir d'un graphique, modéliser un phénomène concret par une fonction, exploiter une fonction. La capacité introduite est de modéliser une situation de proportionnalité par une fonction linéaire. Or 1,85 h = 1,85 × 60 min = 111 min = 1 h 51 min. Patrick atteindra la sortie d'autoroute au bout de 1 h 51 min.
14 h 53 min + 1 h 51 min = 16 h 44 min Patrick atteindra la sortie d'autoroute à 16 h 44 s'il maintient ce rythme. La notion de fonction linéaire ne sera pas forcément utilisée par les élèves. Ceux-ci peuvent également faire appel à leurs connaissances sur la proportionnalité. Certains élèves se contenteront peut-être de prolonger la droite existante afin de procéder à une lecture graphique. Toutes les méthodes sont à valoriser et on pourra faire se confronter les différents points de vue ayant émergé afin de mettre en lumière le fait que pouvoir déterminer le modèle permet d'accéder à des résultats beaucoup plus précis. D'après la représentation graphique fournie, la distance (en km) est proportionnelle au temps (en heures) car c'est une droite passant par l'origine du repère.
La fonction D donnant la distance (en km) en fonction du temps t (en heures) est donc une fonction linéaire. Or, 40 par lecture graphique, on voit que D(0,5) = 40. Donc m = = 80 0,5 et D(t) = 80t. Il reste au chauffeur 148 km à parcourir, on a donc 148 D(t) = 148 soit 80t = 148 ou t = = 1,85. 80 f est affine donc f(x) = mx + p avec : f (4) – f (0) 10 – (–2) 10 + 2 12 = = 3. = = m= 4 4 4 4–0 Donc f(x) = 3x + p. Or f(0) = –2 donc l'ordonnée à l'origine vaut p = –2. On a finalement f(x) = 3x – 2. e Savoir-fair 6 Temps (en min) 4. 8 m × 4 m × 1,5 m = 48 m3 La piscine contient donc 48 m3 soit 48 000 L d'eau. 48 000 = 6 400 7,5 Benoît mettra donc 6 400 minutes, soit 106 h 40 min, soit 4 jours 10 h 40 min, pour remplir sa piscine. Les élèves peuvent avoir du mal à reconnaitre une fonction affine car p = 0 donc il n'apparait pas dans l'expression algébrique. Il faut faire ressortir ce cas comme un cas particulier d'une fonction affine (m et p peuvent prendre n'importe quelle valeur, y compris 0). 3 Volume (en L) a. f(x) = mx + p avec m = –5 et p = –2 donc f est une fonction affine. b. g(x) = –x = –1 × x + 0 donc g(x) = mx + p avec m = –1 et p = 0 donc g est une fonction affine. 5x + 2 5 2 5 c. h(x) = = x+ donc h(x) = mx + p avec m = et 7 7 7 7 2 p = donc h est une fonction affine. 7 x 1 1 = – x + 0 donc i(x) = mx + p avec m = – et d. i(x) = – 2 2 2 p = 0 donc i est une fonction affine. f est une fonction affine telle que f(0) = –2 et f(4) = 10. 9 12 f(x) = –x = –1 × x donc f(x) = mx avec m = –1 donc f est une fonction linéaire. g(x) = 1 + 2x – 1 = 2x donc g(x) = mx avec m = 2 donc g est une fonction linéaire. 5x 5 5 h(x) = = x donc h(x) = mx avec m = donc h est une 7 7 7 fonction linéaire. i(x) = –3(x – 2) – 6 = –3x + 6 – 6 = –3x donc i(x) = mx avec m = –3 donc i est une fonction linéaire.
f(x) = 3x donc f est linéaire car f(x) = mx avec m = 3. Livre du professeur – Chapitre 8 Fonctions affines 81 20 Pour x ↦ 2x + 1, points D, E, G et J. Exercices Pour x ↦ –5x, points A, F et H. Pour x ↦ 3x – 2, points C et I.
Reconnaitre et utiliser une fonction affine 21 On peut se baser sur la proportionnalité des accroissements.
On peut aussi placer les points dans un repère, mais cette méthode, outre le fait qu'elle soit plus longue, ne constituera pas une preuve mais une simple conjecture. flash Questions 13 f : oui. g : non (on ne peut pas écrire son expression sous la forme mx + p). h : oui, car h(x) = 4x + 3.
i : oui, car i(x) = 2x + 9. • Dans le tableau ① : Les valeurs de x augmentent de 1 à chaque fois et les ordonnées augmentent de 2 à chaque fois. C'est donc le tableau de valeurs d'une fonction affine de coefficient directeur 2. On peut aussi prouver que ce tableau est un tableau de proportionnalité, donc la tableau de valeurs d'une fonction linéaire. Néanmoins, il faudra faire attention à ce que les élèves ne pensent pas que s'il n'y a pas proportionnalité, il ne s'agit pas d'une fonction affine. 14 Les fonctions affines sont représentées par des droites. Donc seules les courbes jaune, bleue et verte représentent des fonctions affines. 15 Pour f, le coefficient directeur vaut m = 2 et l'ordonnée à l'origine vaut p = –1. Pour g, le coefficient directeur vaut m = –3 et l'ordonnée à l'origine vaut p = 6. 1 Pour h, le coefficient directeur vaut m = – et l'ordonnée à 3 7 l'origine vaut p = . 3 3 Pour i, le coefficient directeur vaut m = – et l'ordonnée à 7 l'origine vaut p = –7. 16 f est une fonction affine car son expression est du type f(x) = mx + p avec m = 2 et p = –1. g(x) = (2 + x)(2 – x) + x2 = 4 – 2x + 2x – x2 + x2 = 4 donc g est une fonction affine car son expression est du type g(x) = mx + p avec m = 0 et p = 4. 1 h(x) = ; h n'est pas une fonction affine car elle ne peut pas x–2 s'écrire sous la forme h(x) = mx + p. i est une fonction affine car son expression est du type i(x) = mx + p avec m = 0 et p = 2.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
17 1.
f(x) = x(x – 4) = x – 4x • Dans le tableau ② : Les valeurs de x augmentent de 1 à chaque fois et les ordonnées n'augmentent pas de manière constante (+2 pour la première, puis +4 pour la deuxième). Ce n'est donc pas le tableau de valeurs d'une fonction affine. Déterminer les coefficients d'une fonction affine flash Questions 22 Comme f(0) = 3, l'ordonnée à l'origine vaut 3. f (2) – f (0) 5–3 = =1 2 2–0 Donc f(x) = x + 3. m= 23 Par lecture graphique, p = 1 et m = –3 donc g(x) = –3x + 1. 24 Le coefficient directeur vaut 3 donc f(x) = 3x + p. f(2) = 5 donc 3 × 2 + p = 5 d'où p = –1 et finalement f(x) = 3x – 1. 25 f(x) = 4x – 1,5 f n'est pas une fonction affine car son expression ne peut pas s'écrire sous la forme f(x) = mx + p. g(x) = (x – 4)(x – 4) = x2 – 4x + 4x – 16 = x2 – 16 g n'est pas une fonction affine car son expression ne peut pas s'écrire sous la forme g(x) = mx + p. h(x) = 4(x – 4) = 4x – 16 h est une fonction affine car son expression est du type h(x) = mx + p avec m = 4 et p = –16. La seule fonction affine est donc la fonction h. 2. h(3) = 4 × 3 – 16 = 12 – 16 = –4 L'image de 3 par h vaut –4.
3. On cherche les valeurs de x telles que h(x) = 16 soit 4x – 16 = 16 ou encore 4x = 32 c'est-à-dire x = 8. Donc 16 a un seul antécédent par la fonction h : 8. 26 1. m = 2. 8+7 yB – yA = = –5 –1 – 2 xB – xA 10 5 +1 –5 –2 0 –1 8 –10 7 1 2 3 4 A 6 27 h est une fonction affine telle que h(3) = 21 et h(–2) = –29. 5 h est affine donc h(x) = mx + p avec : h (3) – h (–2) 21 – (–29) 50 m= = = = 10 3+2 5 3 – (–2) 4 3 2 1 –4 –3 –2 –1 0 82 B –5 19 1. f(–2) = –(–2) + 4 = 6 et f(0) = –0 + 4 = 4 2. 5x5 15 18 a. Le prix payé est proportionnel au nombre de litres, on a donc P(ℓ) = mℓ avec ℓ le nombre de litres achetés et P(ℓ) le prix payé en euros. Cette situation est donc modélisée par une fonction affine.
b.
Si T(x) est la taille (en cm) au bout de x semaines, on a T(x) = 3 + 1,5x. Cette situation est donc modélisée par une fonction affine. c. Si (x) est l'aire d'un disque de rayon x, on a (x) = πx2. Cette situation n'est donc pas modélisée par une fonction affine.
noir vert rouge bleu clair orange gris jaune bleu foncé g(x) = –4x – 1,5 h(x) = –4x + 1,5 i(x) = 4x + 1,5 j(x) = 1,5x + 4 k(x) = 1,5x – 4 ℓ(x) = –1,5x + 4 m(x) = –1,5x – 4 1 2 3 4 5 6 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS Donc h(x) = 10x + p. Il reste à déterminer la valeur de p.
Comme h(3) = 21, on a 10 × 3 + p = 21. En résolvant cette équation, on trouve p = –9. On a finalement h(x) = 10x – 9. Reconnaitre et utiliser une fonction linéaire Déterminer les coefficients d'une fonction affine flash Questions flash Questions 28 Les fonctions linéaires peuvent s'écrire sous la forme : x ↦ mx. 33 a. Quand l'âge d'un enfant double, sa taille ne double pas a priori. Ce n'est pas une situation de proportionnalité donc cette situation n'est pas modélisée par une fonction linéaire. b. On a (x) = x2 avec x le côté du carré et (x) son aire. Donc cette situation n'est pas modélisée par une fonction linéaire. c. Si m est le prix d'une baguette, le prix à payer pour x baguettes est P(x) = mx. Cette situation est donc modélisée par une fonction linéaire. Seule la situation c. peut être modélisée par une fonction linéaire (il y a proportionnalité). Il n'y a donc que la fonction f qui est linéaire. 29 Les fonctions linéaires sont représentées par des droites passant par l'origine du repère. Les courbes rouge et verte sont donc les seules à représenter des fonctions linéaires. 30 Les fonctions linéaires peuvent s'écrire sous la forme : x ↦ mx. f n'est pas linéaire. g(x) = (x + 3)(x – 4) – x2 = x2 – 4x + 3x – 12 – x2 = –x – 12 ; g n'est donc pas linéaire. h(x) = x(x – 5) – x2 = x2 – 5x – x2 = –5x ; h est donc linéaire avec m = –5. i(x) = 3(x – 2) + 6 = 3x – 6 + 6 = 3x donc i est une fonction linéaire avec m = 3. 34 1. f(x) = 4,15x 1,66 = 0,4. 4,15 Ainsi Ali a acheté 0,4 kg de tomates cerises soit 400 g. 2. Si Ali a payé 1,66 on a donc 4,15x = 1,66 soit x = 31 1. C'est la fonction f qui est linéaire car, en développant, on a f(x) = –2x et donc m = –2. Les autres ne peuvent pas s'écrire sous la forme x ↦ mx. 2. f(–4) = –2 × (–4) = 8 donc l'image de –4 par la fonction f est 8. 7 3. On résout f(x) = 7, c'est-à-dire –2x = 7, ce qui donne x = – . 2 7 a donc un seul antécédent par la fonction f : 7 – (ou –3,5). 2 35 Par exemple : Omar se balade à la vitesse de 2,5 km/h ; la distance f(x) qu'il parcourt en fonction du nombre d'heures x que dure sa randonnée est donnée par f(x) = 2,5x. 36 a. Courbe bleue. b. Courbe verte. c. Courbe rouge. 32 1. f(3) = –3 2. t –4 –3 –2 –1 0 –1 1 2 3 4 5 in Faire le po 6 QCM –2 A –3 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. –4 1 1. C 2 B 3 1.
B 4 C 2. A 2. A Carte mentale Fonctions affines Fonctions linéaires Représentation graphique Formule f(x) = mx + p Représentation graphique Formule g(x) = mx Coefficients La courbe est une droite.
p est l'ordonnée à l'origine.
m est le coefficient directeur. différence des ordonnées m= différence des abcisses y – yA ou m = B xB – x A (en plaçant deux points A et B sur le graphique) f (x2) – f (x1) ou m = x 2 – x1 (en plaçant deux abscisses x1 et x2 sur le graphique). Coefficient La courbe est une droite passant par l'origine du repère. m est le coefficient directeur. Livre du professeur – Chapitre 8 Fonctions affines 83 Algorithmique et outils numériques 40 Chambre commune 1. Voir manuel numérique, fichier 8-p145-ex40-prof-geogebra. 37 Tirelire 1. La variable « euros » indique la somme possédée par Jade et la variable n correspond au nombre de semaines écoulées. 2. C'est au bout de 29 semaines que Jade possédera plus de 150 €. 3. Jade aurait aussi pu résoudre une inéquation (ou une équation). Si on appelle x le nombre de semaines passées, la somme possédée par Jade au bout de x semaines est de 38 + 4x (elle place 4 € par semaine dans sa tirelire). On souhaite donc que 38 + 4x > 150, ce qui donne 4x > 112 ou encore x > 28. C'est donc bien au bout de 29 semaines que les économies de Jade dépasseront 150 €. 38 Fonte des glaces 2.
Conjecture : il faut que la cloison soit à 2,5 m du mur de gauche pour que les deux chambres aient la même aire. L'aire de l'ancienne chambre, en forme de trapèze, vaut : (4 + 6) × 3 = 15. 2 Si on appelle x la distance entre le mur de gauche et la cloison, l'aire de la chambre rose est de 3x. 15 On souhaite donc que 3x = soit 3x = 7,5 qui donne 2 x = 2,5. La conjecture est donc démontrée. Problèmes 41 Quelle chaleur ! 1. L'eau gèle à 0 °C. Or 0 × 1,8 + 32 = 32. Le thermomètre indiquerait donc 32 °F. 2. On a x × 1,8 + 32 = 212 avec x la température en degrés Celcius, donc x × 1,8 = 180 soit x = 100. L'eau est donc à 100 °C, elle bout. 3. a. f(x) = 1,8x + 32 b. f(10) = 1,8 × 10 + 32 = 50 donc 10 °C correspondent à 50 °F. On peut faire le lien avec l'activité 3. 42 De l'aire ! © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 39 Transport en commun 1. Voir manuel numérique, fichier 8-p145-ex89-prof-excel. 2. Non, la feuille ne permet pas de connaitre le tarif minimal selon le nombre de trajets car toutes les valeurs n'apparaissent pas. 3. (Voir bas de page.) Jusqu'à 13 trajets dans le mois, c'est le tarif 1 le plus intéressant. De 14 à 36 trajets par mois, c'est le tarif 2 le plus intéressant. À partir de 37 trajets par mois, c'est le tarif 3 le plus intéressant. 1. x peut prendre n'importe quelle valeur entre 0 et 6 car M ∈ [RS] et RS = 6. 2. Pour x = 2 : MS = 6 – 2 = 4, donc : 4×4 (MTS) = = 8 (en cm2).
2 Pour x = 5,5 : MS = 6 – 5,5 = 0,5, donc : 4 × 0,5 (MTS) = = 1 (en cm2). 2 4 (6 – x) 3. (x) = = 2(6 – x) = 12 – 2x 2 12 10 8 6 4 2 –1 0 –2 84 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 1 2 3 4 5 6 43 Beaucoup de monde ! 1. Entre le 1er janvier 2015 et le 1er janvier 2030, il s'est écoulé 15 années dont 4 bissextiles, soit : 365 jours × 11 + 366 jours × 4 = 5 479 jours. 1 jour = 24 h = 24 × 3 600 s = 86 400 s D'où 5 479 jours = 473 385 600 s 473 385 600 ≈ 36 414 277 13 er Donc, au 1 janvier 2030, il y aura environ 36 414 277 habitants de plus aux États-Unis. 320 206 000 + 36 414 277 = 356 620 277 Donc, au 1er janvier 2030, il y aura environ 356 620 277 habitants aux États-Unis. 2.
1 jour = 24 h = 24 × 3 600 s = 86 400 s 86 400 ≈ 6 646 13 Chaque jour, on a donc environ 6 646 habitants de plus aux États-Unis. 6 646 × 365 = 2 425 790 Chaque année, on a donc environ 2 425 790 habitants de plus aux États-Unis. On considère que toutes les années comportent 365 jours (ce qui ne change pas le résultat vu l'ordre de grandeur). On peut, par exemple, utiliser un tableur ou une calculatrice ou résoudre une (in)équation... 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 La durée totale de cet essai est de 20 s. On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en résolvant l'équation –9t + 180 = 0. 45 Bricks 1. The right formula is C(x) = 0.2x + 40. With this formula C(500) = 140, C(1 200) = 280 et C(2 000) = 440. 2. C(5 000) = 0.2 × 5 000 + 40 = 1 040 so the cost for a delivery of 5 000 bricks is 1 040£. 3. John paid 200£, therefore 0.2x + 40 = 200 so 0.2x = 160 and x = 800. John bought 800 bricks. 46 Tour de magie 1. Si on choisit 5 comme nombre de départ : 5+4=9 9 × 2 = 18 18 + 3 × 2 = 24 24 – 2 × 5 = 14 1 14 – × 20 = 4 2 2. On obtient la lettre D. 3. Le Danemark. 4. Le kiwi. 5. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Avant de se lancer dans une justification mathématique, il est important, en confrontant les résultats obtenus, de faire ressortir que l'on trouve toujours le même résultat. Cela permet de générer de la curiosité à propos de ce phénomène. C'est en 2048 que, si cette évolution se poursuit, la population américaine dépassera pour la première fois les 400 000 000 d'habitants. 44 Voiture électrique 1.
Chaque expression est celle d'une fonction affine : on aura donc deux segments de droites comme représentation graphique de la fonction f. Tableau de valeurs : t 0 10 20 v(t) 0 90 0 90 80 70 60 50 40 30 20 10 0 Si x est le nombre de départ, on obtient, après chaque étape : x+4 2(x + 4) 2(x + 4) + 3 × 2 2(x + 4) + 3 × 2 – 2x 1 2(x + 4) + 3 × 2 – 2x – × 20 2 1 2(x + 4) + 3 × 2 – 2x – × 20 = 2x + 8 + 6 – 2x – 10 = 4 2 En simplifiant la dernière expression, on trouve 4, ce qui signifie que le résultat final est toujours 4, et ce, indépendamment du nombre x choisi au départ. On pense alors assez naturellement au Danemark et peu de nom de fruits commencent par la lettre K... Ce problème peut montrer l'utilité du calcul littéral qui permet d'expliquer scientifiquement ce « tour de magie ». 47 Black out 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 2. La vitesse la plus grande est atteinte pour t = 10 après l'accélération et juste avant le début du freinage. Elle est de 90 km/h. On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en utilisant l'une ou l'autre des expressions données. 3. Le véhicule roule à 45 km/h à deux instants : au bout de 5 s et au bout de 15 s. On peut trouver cette valeur par lecture graphique ou en utilisant les deux expressions données. Il faut alors résoudre les équations 9t = 45 et –9t + 180 = 45. La courbe est une droite, donc le prix P(x) payé par le client est une fonction affine du temps d'intervention x. Par lecture graphique, on trouve que P(x) = 25 + 15x (lecture graphique de l'ordonnée à l'origine et du coefficient directeur). Donc, pour une intervention de 6 heures, le client paiera 115 € car P(6) = 25 + 15 × 6 = 115. 48 Histoire d'eau 900 L = 900 dm3 = 0,9 m3 0,9 m3 × 3 = 2,7 m3 En 3 jours, la chasse d'eau a donc perdu 2,7 m3 d'eau.
Une lecture graphique n'est pas aisée car l'échelle n'est pas assez précise, d'où la nécessité de recourir au modèle. Livre du professeur – Chapitre 8 Fonctions affines 85 On voit que le prix payé en euros est une fonction linéaire de la consommation (droite passant par l'origine du repère).
De plus, si on appelle P(x) le prix payé pour x m3 d'eau, on lit que P(100) = 350. Ainsi P(x) = 3,5x. On a donc P(2,7) = 3,5 × 2,7 = 9,45.
Cette fuite va donc couter 9,45 € à Aurore. 52 Tapis roulant Il s'agit de soustraire la fonction représentée par la droite bleue à la fonction représentée par la droite rouge.
Les fonctions représentées par les droites rouge et bleue sont linéaires. La fonction cherchée sera donc elle aussi linéaire. Il suffit donc de placer un point pour la tracer. 49 Bactéries 1. Si f(x) est le nombre de bactéries au bout de x heures, on a f(x) = mx + p car f est une fonction affine. De plus, f(0) = 3 000 et f(4) = 750. f(0) = 3 000 implique que p = 3 000 f (4) – f (0) 750 – 3 000 et m = = –562,5. = 4–0 4–0 On a donc f(x) = –562,5x + 3 000. 2. Il faut résoudre f(x) = 0 soit –562,5x + 3 000 = 0 soit –562,5x = –3 000, ce qui donne –3 000 16 x= . = –562,5 3 16 16 Or h= × 60 min = 320 min = 5 h 20 min.
3 3 Les bactéries seront donc éliminées au bout de 5 h 20 min. 50 Déménagement 1. Prix avec la 1re société : 30 € × 35 = 1 050 € Prix avec la 2de société : 800 € + 10 € × 35 = 1 150 € C'est donc la 1re société qui lui propose le meilleur tarif. 2. Prix avec la 1re société : 30 € × 45 = 1 350 € Prix avec la 2de société : 800 € + 10 € × 45 = 1 250 € Monsieur Montigné aurait donc mieux fait de choisir la 2de société. 3. On peut regarder l'évolution des 2 tarifs en fonction du nombre de m3 : Distance à partir du point de départ du tapis roulant Une personne qui marche à côté du tapis roulant Une personne qui ne marche pas sur le tapis roulant Temps 53 Taxi ! 1. Prix avec la compagnie A : 3 € + 15 × 0,15 € = 5,25 € Prix avec la compagnie B : 3,20 € + 15 × 0,13 € = 5,15 € Le client devrait choisir la compagnie B pour ce trajet. 2. Prix avec la compagnie A : 3 € + 20 × 0,15 € + 4 € = 10 € Prix avec la compagnie B : 3,20 € + 20 × 0,13 € + 3 € = 8,80 € Le client devrait choisir la compagnie B pour ce trajet. 3.
Pour x kilomètres parcourus, sans bagages, le prix payé avec la compagnie A est de A(x) = 3 + 0,15x et le prix payé avec la compagnie B est de B(x) = 3,20 + 0,13x. Les élèves peuvent représenter ces courbes sans donner l'expression des fonctions. Ce n'est pas un attendu sur ce type de problème.
7 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La 2de société devrait baser sa publicité sur de gros volumes car c'est au-dessus de 40 m3 que son tarif est meilleur que celui de la 1re société.
6 5 On peut également tracer les courbes représentatives des deux fonctions ou résoudre une (in)équation pour s'en apercevoir. 4 3 A 1 On peut, dans un premier temps, laisser les élèves tester différentes valeurs pour s'apercevoir que la réponse n'est pas la même selon le montant des ventes réalisées. L'idée de représenter les 3 courbes donnant le salaire dans chacune de ces 3 sociétés en fonction du montant des ventes peut alors émerger. 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 On voit que pour un trajet de moins de 10 km environ, c'est la compagnie A que ce client devrait choisir et pour un tajet de plus de 10 km environ, c'est la compagnie B. On a A(x) = 1 300 + 0,1x ; B(x) = 0,3x ; C(x) = 1 700. Pour obtenir les valeurs exactes, on peut, par exemple, résoudre l'inéquation A(x) > B(x). 3 + 0,15x > 3,20 + 0,13x soit 0,02x > 0,2 ou encore x > 10.
2 000 1 500 1 000 54 Spirale d'or 1. On voit graphiquement que la longueur de ce rectangle doit être d'environ 16 cm. 500 1 000 2 000 3 000 4 000 5 000 6 000 7 000 On voit que pour un montant de vente inférieur à 4 000 € environ, c'est la société C que Cindy devrait choisir.
On voit que pour un montant de vente compris entre 4 000 € et 6 500 € environ, c'est la société A que Cindy devrait choisir. On voit que pour un montant de vente supérieur à 6 500 € environ, c'est la société B que Cindy devrait choisir. Pour les élèves les plus aguerris : pour obtenir les valeurs exactes, on peut, par exemple, résoudre les inéquations : C(x) > A(x) et A(x) > B(x). On trouve les mêmes valeurs. 86 B 2 51 Salaires 0 Une personne qui marche sur le tapis roulant ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 2. 3. 4.
0,6 0,5 0,4 0,3 0,2 0,1 0 1 2 3 4 5 6 7 5. Pour une quantité de bière de 3 dL, le taux d'alcool est d'environ 0,25. 6. À partir de 6,1 dL de bière, l'homme n'est plus autorisé à reprendre le volant. 58 Jeu vidéo 1. Au début du jeu, le plus fort est le guerrier, le moins fort le mage. 2. Niveau 0 1 5 10 15 25 55 Du ressort © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On ne peut ici procéder à une lecture graphique puisque les unités ne sont pas indiquées sur les axes, il faut donc forcément recourir au modèle de la fonction affine représentant la longueur du ressort en fonction de la masse suspendue. On peut déterminer l'expression de cette fonction (comme dans le corrigé ci-dessous) ou utiliser la proportionnalité des accroissements (de façon experte ou en procédant à des essais successifs sans forcement formaliser). La longueur du ressort f(x) est une fonction affine de sa masse x (car représentée par une droite). On a donc f(x) = mx + p avec f(50) = 30 et f(150) = 40. f (150) – f (50) 40 – 30 m= = = 0,1 100 150 – 50 D'où f(x) = 0,1x + p. De plus, f(50) = 30 donc 0,1 × 50 + p = 30, ainsi p = 25. D'où f(x) = 0,1x + 25. On a donc f(230) = 0,1 × 230 + 25 = 48.
Si on accroche au ressort une masse de 230 grammes, sa longueur est de 48 mm. 56 Fréquence cardiaque 1. Il faut résoudre 208 – (0,7 × A) > 220 – A graphiquement ou algébriquement.
On trouve A > 40. C'est donc à partir de 40 ans que la fréquence cardiaque recommandée commence à augmenter. 2. Fréquence cardiaque FE recommandée pour que l'exercice physique soit le plus efficace : 80 FE = × [208 – (0,7 × A)] = 166,4 – 0,56 × A 100 On pourra se satisfaire de la 1re expression, qui répond également au problème posé.
Points du guerrier 50 50 50 50 50 50 Points du mage 0 3 15 30 45 75 Points du chasseur 40 41 45 50 55 65 3. Si x est le niveau atteint, il faut résoudre l'équation : 50 = 40 + x qui a pour solution x = 10. Le chasseur et le guerrier auront autant de points au niveau 10 (et uniquement à celui-là : on pouvait lire ce résultat dans le tableau précédent mais cela ne prouvait pas que c'était le seul niveau, sauf si on ajoute l'argument que le nombre de points du chasseur ne fait qu'augmenter alors que celui du guerrier reste constant, ce qui justifie qu'une fois que le chasseur a dépassé le nombre de points du guerrier, c'est définitif). 4. f(x) désigne le nombre de points du mage, g(x) désigne le nombre de points du guerrier et h(x) désigne le nombre de points du chasseur. 5. Points 60 50 40 Guerrier eur Chass 30 20 10 0 ge Ma 2 Niveau 4 6 8 10 12 14 16 18 20 22 24 6. Le mage devient le plus fort à partir du niveau 21. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Brevet Exercice 1 1. On peut tester les fonctions : 57 Taux d'alcool 660 × 0,05 × 0,8 ≈ 0,628 soit environ 60 × 0,7 0,63 g/L au centième près. 2. Le taux dépassant 0,5 cette personne n'a pas le droit de conduire. 3. Quantité d'alcool (en dL) 0 1 5 7 1. Le taux est égal à : Taux d'alcool (en g/L) 0 0,08 0,41 0,57 Valeur de x 1 3 2x 2 6 1,5x + 0,5 2 5 –2x + 4 2 –2 C'est donc la fonction b.
qui convient. 2. f(2) = 1,5 × 2 + 0,5 = 3,5 L'image de 2 par la fonction f est donc 3,5. Livre du professeur – Chapitre 8 Fonctions affines 87 3. Si x est un antécédent de 6 par la fonction f alors 1,5x + 0,5 = 6. 5,5 11 En résolvant cette équation, on obtient x = = . 1,5 3 11 Donc 6 n'a qu'un seul antécédent par la fonction f : . 3 Exercice 1 f est une fonction affine, on a donc f(x) = mx + p avec f(1) = 2 et f(3) = 5. f (3) – f (1) 5–2 m= = = 1,5 2 3–1 D'où f(x) = 1,5x + p. De plus, f(1) = 2 donc 1,5 × 1 + p = 2, ainsi p = 0,5. D'où f(x) = 1,5x + 0,5. On a donc f(2) = 1,5 × 2 + 0,5 = 3,5. Si x est un antécédent de 6 par la fonction f alors 1,5x + 0,5 = 6. 5,5 11 En résolvant cette équation, on obtient x = = . 3 1,5 On a donc : x 1 2 3 11 3 f(x) 2 3,5 5 6 Exercice 2 1. Ces deux fonctions sont des fonctions affines, il suffit donc de deux points pour tracer leurs représentations graphiques puisque ce sont des droites.
Tableau de valeurs : x 0 1 g(x) 4 3 h(x) –4 –2 2 Analyse d'une production Samantha a traité cet exercice comme si le prix était proportionnel à la distance parcourue, ce qui n'est pas le cas car la représentation graphique est une droite qui ne passe pas par l'origine du repère. Comme c'est une droite, c'est une fonction affine f qui modélise le prix (en euros) en fonction de la distance (en km). Ainsi f(x) = mx + p. Graphiquement, on voit que l'ordonnée à l'origine p vaut 5 donc f(x) = mx + 5. De plus, f(10) = 15 donc m × 10 + 5 = 15 d'où m = 1. Ainsi f(x) = x + 15. On a donc f(18) = 18 + 15 = 33. Ainsi, pour 18 km, la facture sera de 33 €. Travail en groupe –2 30 – 5 638,84 = 2 705,96 100 Mélodie a payé 2 706 € d'impôts en 2015. 45 • Cas n°2 : 153 096 × – 19 610,02 = 49 283,18 100 Éva a payé 49 283 € d'impôts en 2015.
14 • Cas n°3 : 16 114 × – 1 356,60 = 899,36 100 Éva a payé 899 € d'impôts en 2015. 3. On peut, par exemple, représenter graphiquement le montant des impôts de 2015 en fonction des gains de 2014. –3 44 000 –4 40 000 2 • Cas n°1 : 27 816 × E 1 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 1. et 2. 3 –1 0 –1 1 2 3 4 2. Le point E, d'abscisse xE, appartient aux deux droites.
Donc son ordonnée est à la fois égale à g(xE) et à h(xE). Pour trouver la valeur xE il faut donc résoudre l'équation g(x) = h(x), soit –x + 4 = 2x – 4. On trouvera ensuite l'ordonnée du point E en calculant g(xE) ou h(xE). –8 8 3.
–x + 4 = 2x – 4 soit –3x = –8 ou encore x = = .
–3 3 8 8 12 4 +4=– + =– g(xE) = g = 3 3 3 3 3 8 4 . Les coordonnées du point E sont donc ; 3 3 1 2 Exercice 2 1. f est une fonction affine (car représentée par une droite), on a donc f(x) = mx + p avec f(0) = 4 et f(2) = 2. f(0) = 4 donne p = 4. f (2) – f (0) 2 – 4 m= = = –1 2–0 2 D'où f(x) = –x + 4. 2. On cherche de la même manière la fonction g représentée par la droite (CD) : g est une fonction affine (car représentée par une droite), on a donc g(x) = mx + p avec g(1) = –2 et g(3) = 2. 2 + 2 g(3) – g(1) m= = =2 3–1 2 D'où g(x) = 2x + p. De plus, g(1) = –2 donc 2 × 1 + p = –2, ainsi p = –4. D'où g(x) = 2x – 4. 88 1 2 Le montant des impôts est toujours arrondi à l'unité. 4 1 2 Le point E, d'abscisse xE, appartient aux deux droites. Donc son ordonnée est à la fois égale à g(xE) et à h(xE). Pour trouver la valeur xE, il faut donc résoudre l'équation g(x) = h(x) soit –x + 4 = 2x – 4. On trouvera l'ordonnée du point E en calculant g(xE) ou h(xE). 8 –x + 4 = 2x – 4 soit –3x = –8 ou encore x = . 3 8 8 8 12 4 g(xE) = g =– +4=– + = 3 3 3 3 3 8 4
Les coordonnées du point E sont donc . ; 3 3 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 36 000 32 000 28 000 24 000 20 000 16 000 12 000 6 000 4 000 0 30 000 60 000 90 000 120 000 150 000 Cela permet, dans un premier temps, de savoir dans quelle tranche on se trouve. On peut ensuite faire une lecture graphique d'antécédent, ce qui n'est pas très précis, ou résoudre l'équation correspondant à la tranche trouvée. Exemple : si le montant d'impôt est de 17 628 € en 2015, on voit graphiquement que les revenus devaient être entre 75 000 € et 80 000 €. On est donc dans la 4e tranche du tableau. On résout alors 0,41x – 13 531,78 = 17 628 et on trouve un gain pour 2014 d'environ 76 000 €. Remarque : on ne pourra pas déterminer le revenu imposable pour des montants d'impôts de 0 € (fonction constante). APITRE CH 9 9 Représentation et traitement de données © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ». Programme : Interpréter, représenter et traiter des données. Les connaissances et compétences associées sont : – recueillir des données, les organiser ; – lire des données sous forme de données brutes, de tableau, de graphique ; – calculer des effectifs, des fréquences : tableaux, représentations graphiques (diagrammes en bâtons, diagrammes circulaires, histogrammes) ; – calculer et interpréter des caractéristiques de position ou de dispersion d'une série statistique : indicateurs : moyenne, médiane, étendue. • Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève – Utiliser un tableur, un grapheur pour calculer des indicateurs et représenter graphiquement les données. – Porter un regard critique sur des informations chiffrées, recueillies, par exemple, dans des articles de journaux ou sur des sites web. – Organiser et traiter des résultats issus de mesures ou de calculs ; questionner la pertinence de la façon dont les données sont collectées. – Lire, interpréter ou construire un diagramme dans un contexte économique, social ou politique. • Objectifs Le traitement des données numériques contribue à l'acquisition de chacun des cinq domaines du socle commun à travers la lecture, l'interprétation, l'organisation, la synthétisation et la représentation de données chiffrées.
Les activités relatives au traitement de données permettent de développer les six compétences mathématiques, et plus particulièrement la capacité à communiquer, à représenter et à exercer son esprit critique, participant ainsi à la formation de citoyens éclairés et responsables. L'objectif est de fournir aux élèves des méthodes, d'une part pour comprendre les informations qu'ils rencontrent dans différents contextes sous la forme de tableaux, de graphiques ou de diagrammes, et d'autre part pour synthétiser et représenter sous une forme adaptée des données chiffrées qu'ils sont amenés à recueillir ou consulter, et en donner des résumés en utilisant quelques caractéristiques simples de statistique descriptive. La mobilisation des outils informatiques trouve dans ce cadre toute sa légitimité pour accéder à des données réelles en grand nombre et les traiter en s'affranchissant de calculs fastidieux ; elle permet également d'obtenir rapidement diverses représentations d'une série de données afin de comparer leur pertinence au regard des questions posées.
Dans un monde où les élèves sont confrontés en permanence à des images, il est primordial de les amener à réfléchir sur celles d'entre elles qui représentent des données. • Liens avec les domaines du socle Pour traiter des données, l'élève lit, interprète, commente et produit des tableaux et des graphiques ; il étudie des relations entre des données statistiques et il les représente graphiquement, développant ainsi la compétence « comprendre, s'exprimer en utilisant des langages scientifiques » du domaine 1. La lecture critique de diagrammes ou de représentations de données issus de différents supports amène l'élève à s'interroger sur la crédibilité des sources d'information ; elle contribue à l'éducation aux médias et à la maitrise des techniques usuelles de l'information (domaine 2) ainsi qu'à la formation du citoyen (domaine 3). Le recueil, l'organisation et le traitement de données chiffrées sont des composantes de la démarche d'investigation dans les disciplines scientifiques et technologiques (domaine 4) et contribuent à l'étude des organisations et des fonctionnements des sociétés (domaine 5). Trajet 50-5-35, car : – la moyenne est 30 : (50 + 5 + 35) ÷ 3 = 90 ÷ 3 = 30 ; – l'étendue est 45 : 50 – 5 = 45. Activités Questions 1. a. 1 767 ÷ 235 ≈ 7,52 ; le nombre moyen de points marqués par Grand Prix pour Alonso est d'environ 7,52. b.
Alain Prost a marqué en moyenne 4,01 points par Grand Prix : 798,5 ÷ 199 ≈ 4,01. 2.
a. Son étendue est 1 109 car 1 767 – 658 = 1 109. b. Sa médiane est 1 122,75 car (1 198 + 1 047,5) ÷ 2 = 1 122,75 ; cela signifie que la moitié des coureurs ont obtenu un score supérieur ou égal à 1 122,75 points et l'autre moitié un score inférieur ou égal à 1 122,75 points. flash 3. a. Son étendue est 184 car 323 – 139 = 184. b. On ordonne les valeurs de la série : 139 148 199 210 212 217 235 266 307 323 La médiane est située entre la 5e et la 6e valeur de cette série ordonnée : (212 + 217) ÷ 2 = 214,5 ; sa médiane est donc 214,5. Cela signifie que la moitié des coureurs ont disputé plus de 215 prix. Livre du professeur – Chapitre 9 Représentation et traitement de données 89 Activité 1 Le sac à dos Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de revoir les calculs et les différences d'une moyenne simple et d'une moyenne pondérée.
Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une moyenne. La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une moyenne. Le poids moyen au km pour Lucas est de 3 kg.
Le poids moyen transporté par Noé est aussi de 3 kg car : 5 × 6 + 15 × 2 = 3. 20 Lucas a raison.
Cette activité assez rapide se déroule de façon individuelle ou par binôme. Activité 2 Les pêcheurs Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de calculer la moyenne d'une série constituée de deux groupes. Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une moyenne. La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une moyenne. 4,6 × 5 + 1,5 × 20 = 2,12 25 C'est la pêche moyenne d'un pêcheur sur l'ensemble de ces deux ports. Calcul correct : On fera remarquer que si les deux groupes avaient eu le même effectif, le calcul proposé par Jade aurait été exact. Cette activité assez rapide se déroule de façon individuelle ou par binôme, et peut se faire sur la même séance que l'activité 1. En effet : (4,6 + 1,5) ÷ 2 = 3,05 et 3,05 × 25 = 76,25 ; ceci est impossible car les pêcheurs ont attrapé un nombre entier de poissons. Activité 3 Photo souvenir Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de revoir le calcul et la signification de la médiane d'une série. Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une médiane. La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une médiane, une étendue. Nombre d'élèves : 6 + 22 + 56 + 52 + 28 + 5 = 169. Lorsque la série des tailles est ordonnée, la 85e taille partage la série en deux séries de même effectif. La médiane est donc ici comprise entre 1,65 m et 1,70 m. La taille minimale pour monter sur une chaise est donc 165 cm. Activité 4 Réseaux sociaux © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de revoir les représentations graphiques de données. Le prérequis nécessaire est de connaitre les différents types de diagrammes. La capacité introduite est de représenter graphiquement des données. 1. Le diagramme circulaire n'est pas adapté car chaque usager des réseaux sociaux peut être inscrit simultanément sur plusieurs sites (le total n'est d'ailleurs pas égal à 100 %) et donc il ne s'agit pas d'une répartition, mais on peut représenter ce classement par un diagramme en barres. 70 Pourcentage d'inscriptions 60 50 40 30 20 10 0 Skype Facebook Copainsdavant Activité 5 Des côtes ensoleillées ?
Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de calculer la moyenne d'une série dont les valeurs sont regroupées en classes. Le prérequis nécessaire est de savoir calculer une moyenne pondérée. La capacité introduite est de calculer et d'interpréter une moyenne. 1. a. On ne connait pas les valeurs exactes des coefficients : on ne nous donne qu'un encadrement car ils ont été regroupés par classe. b. On prend le centre de chaque classe pour calculer la moyenne de chaque série.
La moyenne des coefficients de marée est égale à 71 car : 7 × 45 + 3 × 55 + 3 × 65 + 4 × 75 + 10 × 85 + 1 × 95 + 2 × 105 30 2 130 = = 71 30 90 2. ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS La moyenne des heures d'ensoleillement est d'environ 5,04 car : 11 × 1,5 + 5 × 4,5 + 8 × 7,5 + 4 × 10,5 141 = ≈ 5,04 28 28 2. a. On remarque que les moyennes sont proches mais tout de même différentes. b. Le regroupement par classes n'offre pas une aussi grande précision que la connaissance des valeurs exactes. Lors de cette activité, on laissera les élèves (tout seuls ou en binôme) chercher une méthode pour calculer la moyenne et on confrontera leurs propositions. e Savoir-fair 4 5 8 9 Exercices 249 740 140 × 1386 + 50 × 1 114 = ≈ 1 314,42 140 + 50 190 Le score moyen par joueur est d'environ 1 314,42 points. 10 × 2,5 + 35 × 7,5 + 14 × 12,5 + 6 × 17,5 567,5 ≈ 8,73 = 10 + 35 + 14 + 6 65 La distance moyenne qui sépare le domicile d'un employé de son entreprise est d'environ 8,73 km. 1. On range les valeurs de la série par ordre croissant : 55 55 57 58 65 66 72 74 75 75 80 La médiane est la 6e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 66 : la vitesse médiane est 66 km/h. Cela signifie qu'il y a autant de voitures qui roulaient à une vitesse inférieure ou égale à 66 km/h que de voitures qui roulaient à une vitesse supérieure ou égale à 66 km/h. 2. L'étendue est égale à 25 km/h car 80 – 55 = 25. 1.
On range les valeurs de la série par ordre croissant : 0,90 1,10 1,80 2,30 2,50 3,50 5,50 6,40 6,50 7,40 La médiane est située entre la 5e et la 6e valeur de cette série ordonnée, donc entre 2,50 et 3,50.
(2,50 + 3,50) ÷ 2 = 3 donc le montant médian des achats est 3 € ; cela signifie qu'il y a autant de montants inférieurs ou égaux à 3 € que de montants supérieurs ou égaux à 3 €. 2. L'étendue de cette série est de 6,50 € car 7,40 – 0,90 = 6,50 €. 11 Calculer et interpréter une moyenne flash Questions 14 1. 7 × 8 = 56 2. On ne peut pas savoir. Pour cette question, on pourra demander aux élèves de proposer des séries correspondant à cette description. 15 1. Faux (confusion médiane et moyenne) . 2. Faux. 3. Faux. Par exemple, si le groupe comprend 10 élèves dont 7 mesurent 1,40 m ; 2 mesurent 1,42 m et 1 seul mesure 1,50 m ; la taille moyenne de ce groupe n'est pas 1,45 m mais 1,414 m. 4. Vrai, car 10 pulls sont noirs et 140 t-shirts sont noirs : cela représente donc 150 vêtements noirs sur un total de 300. 16 17 1re série : 15 2e série : 17 3e série : 18 4e série : 16 Effectif 6 4 Nombre de points obtenus 2 0 2 3 4 5 6 7 8 9 2,5 × 6 + 2,7 × 6) ÷ 100 = 1,94 Le taux moyen de cholestérol de ces individus est de 1,94 g/L. 20 (25 × 35 + 35 × 60 + 45 × 45 + 55 × 10) ÷ 150 = 37 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Le pourcentage moyen de matières grasses est de 37 %. 8 21 6 4 Nombre de points obtenus 2 13 En moyenne, il y a 5 biscuits brisés par paquet. 19 (1,5 × 20 + 1,7 × 18 + 1,9 × 24 + 2,1 × 16 + 2,3 × 10 + 10 11 12 10 0 18 (5 × 2 + 4 × 8 + 6 × 7 + 9 × 2 + 13 × 1) ÷ 23 = 5. Effectif 12 2 175 32 × 25 + 25 × 55 = ≈ 27 ; l'âge moyen est d'environ 25 + 55 80 27 ans. 1 4 7 10 20 × 210 + 4 × 7 875 = 1 487,5 24 Le prix moyen d'un deux-roues est de 1 487,50 €. Calculer et interpréter une médiane, une étendue 13 flash Questions 22 1. La série est ordonnée, donc la médiane est la 3e valeur : 33. 35 2. Comme on rajoute une valeur au début de la série ordonnée et une autre à la fin, la médiane ne change pas : c'est 33. 30 25 20 23 1. 27 car 41 – 14 = 27. 2. 5,3 car 8,4 – 3,1 = 5,3. 15 10 24 On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 5 0 M l ta é s s rs re le x... ive Ve tiè dab au D a n M gra ur é Jo od i b rre ue tiq s Pla 4% 18 % 11 % 13 % 29 % 25 % Métal Plastique Verre Journaux... Matières biodégradables Divers 40 60 80 80 100 100 100 La puissance médiane de cette série est la 4e valeur : 80 W. On peut proposer comme série dont la médiane est 40 W : 10 W 20 W 30 W 40 W 80 W 80W 100 W 25 1. 4,5 – 1,9 = 2,6 ; l'étendue de cette série est 2,60 €. 2. On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 1,9 2,1 2,5 2,9 3 3,5 4,5 La médiane est la 4e valeur de cette série ordonnée : c'est 2,9. Le prix médian de 1 kg de tomates est de 2,90 €. 26 On range les valeurs de cette série par ordre croissant : 37,2 38 38,2 38,6 39 39,4 La médiane est donc située entre la 3e et la 4e valeur de cette série ordonnée, donc entre 38,2 et 38,6. (38,2 + 38,6) ÷ 2 = 38,4 La température médiane est donc 38,4 °C. 27 Par exemple : 1 1 2 2 5 6 9 Livre du professeur – Chapitre 9 Représentation et traitement de données 91 33 Salaires moyens Représenter graphiquement des données 1. flash Questions 28 1.
Un histogramme. 2. a. Faux. b. Vrai. c. Faux, il manque les parenthèses. 29 1. Un diagramme semi-circulaire. 2. 30 31 x 167 + 147 + 72 386 × 100 = donc x = ≈ 63,5 ; le front 608 608 100 populaire a obtenu environ 63,5 % des voix. 1 198 ≈ 51,3 ; en 2002, la proportion de donneurs prélevés parmi 2 336 les donneurs recensés était d'environ 51,3 %. 1 655 ≈ 46,7 ; en 2014, la proportion de donneurs prélevés 3 547 parmi les donneurs recensés était d'environ 46,7 %. 34 Lancers de disques 1. a.
et b. Continentale Volcanique Corallienne Total Type Proportion (en %) 39 33 28 100 Angle (en °) 140 119 101 360 28 % 39 % Continentale Volcanique Corallienne 33 % © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
2. Dans C2, il faut saisir : « =400 – A2 » et dans E2 : « =(A2*B2+C2*D2)/400 ». 3. Donc il y a 224 femmes et 176 hommes dans cette entreprise. × 3,6 c. Dans D7 : =MOYENNE(B2:B16) Dans F7 : =B9 ou =MEDIANE (B2:B16) Dans H7 : =B16–B2 d.
La médiane devient 27 et la moyenne 24. e. Il suffit, par exemple, de ne changer que les 7 dernières valeurs. f. Il suffit, par exemple, de diminuer la 1re valeur de 1 (18 devient 17) et d'augmenter la 2e valeur de 1 (19,5 devient 20,5).
g. Le 16e lancer doit être de 39 m. 2. a. Longueur des lancers (en m) 18 19,5 21 22 Effectif 1 4 1 5 24,5 26,5 1 28 31 1 1 1 b. Effectif int Faire le po 6 5 4 QCM 3 1 1. C 2. B 2 1. B 2. C 3 3. C 2 1 Lancers (en m) 0 18 19,5 21 22 24,5 26,5 28 31 Problèmes Algorithmique et outils numériques 35 Iles Baléares 32 Le jeu de la moyenne 1.
La variable x est le nombre à deviner.
2 x + 80 2. La variable moyenne est égale à . 3 2 x + 80 ; 3 cela correspond à la moyenne de la série x ; x ; 80. 4. 2 car 2x + 80 = 84 ; 2x = 84 – 80 = 4 ; x = 2. 3. L'indice donné est la valeur de l'expression 92 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 11000 + 134 000 + 860 000 + 95 000 1100 000 = ≈ 226 16 + 83 + 570 + 3 500 + 702 4 871 La densité moyenne sur l'archipel des Baléares est d'environ 226 habitants/km2. L'île de Cabrera n'est pas habitée. 2. Cabrera : 0 11 000 Formentera : ≈ 133 hab/km2 83 1. 41 Chambres d'hôtel 95 000 ≈ 135 hab/km2 702 134 000 Ibiza : ≈ 235 hab/km2 570 860 000 Majorque : ≈ 246 habitants/km2 3 500 Minorque : 1. Tarifs Nombre de chambres 10 30 25 16 Effectifs cumulés 10 40 65 81 80 € 110 € 2. Le prix médian d'une chambre est le prix de la 41 chambre lorsque les chambres sont classées de la moins chère à la plus chère, soit 80 €. 5 860 10 × 30 + 30 × 60 + 25 × 80 + 16 × 110 3. = ≈ 72,35 81 81 Le prix moyen d'une chambre est d'environ 72,35 €. 4. Interprétation de la moyenne : si toutes les chambres étaient au même prix, pour obtenir la même recette, l'hôtel devrait proposer chaque chambre à environ 72,35 €.
Interprétation de la médiane : au moins la moitié des chambres sont proposées à un prix inférieur ou égal à 80 €. Pourcentage des visiteurs 50 40 30 20 10 0 i s x e e e e e nc -Un gn elu -Ba Itali agn ond Fra me Espa Ben ays m m e P u l Al e du ya Ro st Re (9 × 14,2) ÷ 100 = 1,278 soit 1 278 000 visiteurs espagnols. 37 Skyscrapers (182 + 425,7 + 279 + 259 + 318,9 + 381 + 541) ÷ 7 = 2 386,6 ÷ 7 ≈ 341 La hauteur moyenne d'un gratte-ciel est d'environ 341 m. (46 + 85 + 59 + 70 + 77 + 102 + 94) ÷ 7 = 533 ÷ 7 ≈ 76 Le nombre moyen d'étages par gratte-ciel est d'environ 76.
Le WTC1 mesure 1 776 pieds de hauteur : 1 776 fait référence à l'année de la Déclaration de l'indépendance des États-Unis. 38 E-shopping © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 60 € e 36 Eurodisney 60 Meilleur tarif : 30 € En 2014 comme en 2013, la France compte 52 % de cyberacheteurs et se positionne derrière la Suède (70 %) et la Grande-Bretagne (66 %). Avec 31,2 milliards d'euros en 2014, la France est aussi le 3e pays européen en valeur pour l'e-commerce, derrière la GrandeBretagne et l'Allemagne. Les prévisions de croissance sont de +17 % pour 2015 et 2016 pour la France, soit un peu en dessous des perspectives de l'Italie (+19 % en 2015 et +20 % en 2016) mais au-dessus de celles du Canada (+13 % en 2015 et +15 % en 2016) La compétence travaillée dans cet exercice est rechercher et trier l'information ; il doit se faire en autonomie. 39 Salaires 1200 + 1300 + 1300 + 1500 + 1200 = 1 300 ; 5 le salaire moyen est de 1 300 €. 1 200 1 200 1 300 1 300 1 500 Le salaire médian correspond au 3e salaire de la série ordonnée : c'est 1 300 €. 1200 + 1300 + 1300 + 1500 + 1200 + 7 800 + 11000 2. 7 25 300 ≈ 3 614 ; le salaire moyen est d'environ 3 614 €. = 7 1 200 1 200 1 300 1 300 1 500 7 800 11 000 Le salaire médian correspond au 4e salaire de la série ordonnée : c'est 1 300 €. On remarque que le salaire médian n'est pas modifié alors que le salaire moyen est nettement plus élevé. 1. 40 Différentes sortes d'or 1. (2 × 1,8 + 3 × 1,2) ÷ 5 = 7,2 ÷ 5 = 1,44 La masse moyenne d'or pur est de 1,44 g. 7,2 = 0,6 = 60 % 2. 5 × 2, 4 Le pourcentage d'or pur dans ce nouvel alliage est de 60 %. Cet exercice permet d'aller plus loin en abordant la notion d'effectifs cumulés ; on montrera l'intérêt de ce calcul dans le cas où l'effectif de la série est important et où beaucoup de données se répètent. 42 Temps d'exposition au soleil 2 × 2,5 + 6 × 1,5 = 1,75 8 Son temps moyen d'exposition est de 1,75 h, soit 1 h 45 min. 43 La couverture nuageuse 80 n 80 × 9 n= = =2 360 9 360 Il y a eu 2 jours à un taux de 0,7 et donc 7 jours à un taux de 0,25.
2 × 0,7 + 7 × 0,25 = 0,35 9 Le taux moyen de couverture nuageuse a été de 35 %. Le calcul de la moyenne peut se faire sans calculer auparavant le nombre de jours : 80 × 0,7 + 280 × 0,25 = 0,35 360 44 De l'hémoglobine 1. Femmes et hommes Effectif Taux t en g/L 105 ⩽ t < 115 4 115 ⩽ t < 125 4 125 ⩽ t < 135 8 135 ⩽ t < 145 10 145 ⩽ t < 155 11 155 ⩽ t < 165 10 165 ⩽ t < 175 6 175 ⩽ t < 185 7 2. Taux moyen pour les femmes : 4 × 110 + 4 × 120 + 8 × 130 + 6 × 140 + 7 × 150 + 1 × 160 30 ≈ 133,7 g/L Taux moyen pour les hommes : 4 × 140 + 4 × 150 + 9 × 160 + 6 × 170 + 7 × 180 ≈ 162,7 g/L 30 Taux moyen pour les hommes et les femmes réunis : 4 × 110 + 4 × 120 + 8 × 130 + 10 × 140 + 11 × 150 + 10 × 160 + 6 × 170 + 7 × 180 60 8 890 = ≈ 148,2 g/L 60 Le taux moyen d'hémoglobine est plus élevé chez les hommes. Le taux moyen d'hémoglobine chez les hommes et les femmes réunis est égal à la moyenne des deux autres taux moyens car il y a le même nombre de femmes que d'hommes. Livre du professeur – Chapitre 9 Représentation et traitement de données 93 45 Production de pommes L'étendue de la série de mesures avec le réfractomètre est beaucoup plus importante que celle avec le densimètre, ce qui indique que le réfractomètre, dans ces conditions de mesure, est moins fiable.
Il faudra donc réaliser un plus grand nombre de mesures et en faire la moyenne pour obtenir un résultat fiable avec le réfractomètre. 150 × 58 + 50 × x 12 000 – 8 700 = 60 x= = 66 200 50 Le diamètre moyen des pommes doit être de 66 mm. Les maires ont fait la moyenne des deux pourcentages mais, si les deux communes ne possèdent pas le même nombre d'habitants, ce résultat ne donne pas le pourcentage de personnes favorables au projet sur l'ensemble des deux communes. Donc ils ont tort. On laissera les élèves argumenter entre eux ; on pourra même leur proposer de prendre un nombre d'habitants fictif pour qu'ils comprennent mieux l'erreur de raisonnement fréquemment commise. 47 La cueillette des champignons © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 5 × 6 + 1 × 0,3 = 5,05 6 La moyenne de la famille avec le cousin est de 5,05 kg par personne. Elle a donc baissé de 0,95 kg par personne. x 0,95 0,95 × 100 = donc x = ≈ 16 6 6 100 Donc le cousin fait baisser la moyenne d'environ 16 %. 48 Test de gymnastique 70 × 23 + 30 × m 20 × 100 – 70 × 23 = 20 donc m = = 13 100 30 La moyenne des candidats ayant échoué est de 13. Certains élèves procèderont par essai en sachant que ceux qui ont raté ont forcément moins de 20. Et même moins de 17 (voire de 14). 49 La bière 1. • Avec le densimètre On ajoute toutes les valeurs et on divise par 9 : 38, 61 = 4,29, donc la moyenne est 4,29.
9 38, 49 ≈ 4,28 donc la moyenne est environ 4,29. 9 On range les valeurs par ordre croissant : 4,27 4,28 4,28 4,29 4,29 4,29 4,3 4,3 4,31 La médiane est la 5e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 4,29. • Avec le réfractomètre On ajoute toutes les valeurs et on divise par 9 : 38, 49 ≈ 4,28 donc la moyenne est environ 4,28. 9 On range les valeurs par ordre croissant : 4,17 4,17 4,17 4,17 4,29 4,29 4,41 4,41 4,41 La médiane est la 5e valeur de cette série ordonnée, c'est donc 4,29.
Les moyennes et médianes obtenues avec les deux appareils lors de ces 9 mesures sont proches. L'efficacité de ces deux appareils parait donc assez satisfaisante et assez semblable. 2. • Avec le densimètre : l'étendue est égale à 0,04 car 4,31 – 4,27 = 0,04. • Avec le réfractomètre : l'étendue est égale à 0,24 car 4,41 – 4,17 = 0,24. 94 ORGANISATION ET GESTION DE DONNÉES, FONCTIONS 11 ≈ 10,9 % 101 12 b. ≈ 11,9 101 50 c. ≈ 49,5 % 101 a. 60 Pourcentages parmi les nombres entiers inférieurs ou égaux à 100 50 40 30 20 10 0 Carrés Multiples de 9 Nombres impairs 51 Miss Plouf Le minimum de notes à changer est trois. Il y a plusieurs solutions dont celle-ci : médiane 9 16 19 2 3 5 6 6 7 8 9 9 9 10 11 12 12 15 16 16 18 19 +6 +9 +6 52 L'énergie solaire Voici la série « minimale » qui respecte les données fournies par l'entreprise : Médiane 36° 37° 200-200-...............-200-250-250-250...............-250-310 { 46 Salle culturelle 50 Nombres { Certains élèves n'utiliseront pas d'équation mais procèderont par essais à l'aide de leur

calculatrice. Cette méthode est très intéressante mais il faudra leur montrer qu'ils ne procèdent pas « au hasard » mais en raisonnant : les 150 premières pommes ont un diamètre de 58 mm, donc les 50 pommes restantes doivent avoir un diamètre supérieur à 62 mm. On peut même pousser le raisonnement plus loin : les pommes restantes sont trois fois moins nombreuses, donc la différence de leur diamètre avec la moyenne 60 doit être trois fois plus importante que celle du 1er lot qui était de 2 mm. Donc le lot restant doit avoir un diamètre de 6 mm de plus que 60 donc 66 mm (et la calculatrice est inutile !). 35 valeurs égales à 200 36 valeurs égales à 250 Production minimale annuelle : 200 × 35 + 250 × 36 + 310 = 16 310 kWh Recette annuelle minimale = 16 310 × 0,58 = 9 459,8 € Investissement : 20 000 × 6 = 120 000 € La recette annuelle représentera, au minimum : 9 458, 8 ≈ 0,079 120 000 soit environ 7,9 % de l'investissement total. Brevet 53 Alphabet 1. E-A-S-I-N 2. On calcule le pourcentage des voyelles : 8,4 + 17,26 + 7,35 + 5,26 + 5,74 + 0,3 = 44,31 44,31 % 55,69 % Voyelles Consonnes 3. Comme il y a 26 lettres dans notre alphabet, la fréquence 1 1 serait de soit environ 3,85 % car × 100 ≈ 3,85. 26 26 54 Tombola 1. Recette : (350 + 225 + 400 + 125 + 325 + 475) × 2 = 3 800 € Dépense : 300 + 10 × 25 + 20 × 5 = 650 €. Bénéfice = 3 800 – 650 = 3 150 €.
L'association pourra donc financer entièrement la sortie. 2. On appelle x le prix d'un billet. On a : 1 900x – 650 ⩾ 10 000 10 650 1 900x ⩾ 10 650 soit x ⩾ donc le prix minimal d'un 1 900 billet serait de 5,61 €. 30 10 3. = ; la probabilité de tirer un autre ticket gagnant 1899 633 10 est donc . 633 55 Label de qualité 1. 600 + 800 + 1 800 + 1 200 + 600 = 5 000 L'effectif total est de 5 000 gousses. 16 3 200 600 + 800 + 1800 2. = = 0,64 = 25 5 000 5 000 Il a pu conditionner 64 % de sa production sans plier les gousses. 12 × 600 + 15 × 800 + 17 × 1800 + 22 × 1200 + 23 × 600 3. 5000 90 000 = 18 ; la longueur moyenne des gousses est de = 5 000 18 cm donc supérieure à 16,5 cm. La médiane est située entre la 2 500e valeur et la 2 501e valeur de la série ordonnée, donc c'est 17. La médiane étant inférieure à 17,5 cm, le cultivateur ne pourra pas obtenir ce « label de qualité ». 56 Salaires 1200 + 1230 + 1250 + 1310 + 1376 + 1400 + 1440 +1500 + 1700 + 2 100 10 14 506 = = 1 450,6 10 Le salaire moyen des femmes est de 1 450,60 €. Le salaire moyen des hommes est de 1 769 €. Donc le salaire moyen des hommes est plus élevé que celui des femmes. 10 1 2. = ; la probabilité pour que ce soit une femme est 30 3 1 donc de . 3 3. Comme l'étendue des salaires des hommes est égale à 2 400 €, le plus haut salaire chez les hommes est de 3 400 € (1 000 + 2 400 = 3 400 €), qui est aussi le salaire le plus élevé de l'entreprise puisque le salaire le plus élevé des femmes est de 2 100 €. 4. La médiane des salaires des hommes est égale à 2 000 € ; comme les salaires des hommes sont tous différents et que le nombre d'hommes est pair, on peut affirmer qu'aucun homme ne gagne exactement 2 000 €.
Donc la moitié des hommes (c'est-à-dire 10) gagnent plus de 2 000 €. Une seule femme gagne plus de 2 000 € (2 100 €). Donc au total, 11 personnes gagnent plus de 2 000 € (10 + 1 = 11 personnes). © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Travailler trement au Exercice 1 150 000 + 16 000 × 4 + 35 000 × 7 = 38 250 1+ 4 + 7 Le kilométrage moyen est de 38 250 km.
8,5 + 1 × 4 + 2,5 × 7 = 2,5 1+ 4 + 7 L'âge moyen est de 2,5 ans.
Dans ces deux exercices, le calcul du kilométrage est identique ; dans l'exercice 1 rose, les élèves sont confrontés à un tableau où sont données plusieurs informations qu'ils vont devoir trier. Exercice 2 Par exemple, on change la 1re valeur 10 en 8. Exercice 2 Par exemple, on peut changer le 2e 10 en 17. L'étendue ne doit pas changer donc on garde 10 comme minimum et 20 comme maximum. La moyenne augmente de 1 donc la somme de toutes les valeurs doit augmenter de 7 : on ne peut donc changer qu'un 10 en 17, sinon l'étendue change (la médiane augmente alors pour atteindre 17). Il n'y a donc qu'une seule possibilité. Cet exercice est plus complexe car il y a une contrainte supplémentaire : on demande de trouver toutes les possibilités ; il faut donc raisonner pour répondre. Exercice 3 8 × 1 + 10 × 3 + 5 × 5 + 4 × 7 ≈ 3,37 8 + 10 + 5 + 4 La hauteur moyenne de ces plongeons est d'environ 3,37 m. 8 2. ≈ 30 donc 30 % des plongeons sont inférieurs à 2 m. 27 9 ≈ 33 donc 33 % des plongeons sont supérieurs ou égaux 27 à 4 m.
1. Exercice 3 10 × 2,25 + 10 × 3,75 + 3 × 5,25 + 3 × 6,75 + 8,25 ≈ 3,86 10 + 10 + 3 + 3 + 1 La hauteur moyenne de ces plongeons est d'environ 3,86 m. La moyenne trouvée n'est pas la même car les classes ont une amplitude inférieure à celle de l'exercice 3 vert, donc la précision est plus importante. 2. Effectifs cumulés croissants : 10 20 23 26 27 La médiane M est la 14e valeur de la série ordonnée ; on a donc : 3 m ⩽ M < 4,5 m. 1. Dans cet exercice, le centre de chaque classe est plus difficile à trouver ; lors de la correction commune, on pourra comparer ces moyennes et expliquer pourquoi elles sont différentes. Écriture d'un énoncé Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 1.
150 000 – 35 000 = 115 000, donc l'étendue de cette série est de 115 000 km. 150 000 + 16 000 × 4 + 35 000 × 7 2. = 38 250 1+ 4 + 7 Le kilométrage moyen est de 38 250 km. Par exemple : pour le camarade 2 5 5 8 8 9 Étendue : 7 Moyenne : ≈ 6,57 Médiane : 8 9 pour soi 4 25 25 64 64 81 81 Étendue : 77 Moyenne : ≈ 49,14 Médiane : 64 On pourra remarquer que la moyenne des carrés n'est pas égale au carré de la moyenne. Livre du professeur – Chapitre 9 Représentation et traitement de données 95 APITRE CH 10 10 Probabilités Introduction © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions ». En 3e, on poursuit le travail entamé en 5e et en 4e en calculant des probabilités d'issues, d'évènements, d'un évènement contraire et de la réunion d'évènements incompatibles. On se place dans des situations simples issues la plupart du temps de la vie courante (jeux, achats, structures familiales, informations apportées par les médias, etc.) qui suscitent le débat au sein de la classe. On continue d'éviter tout excès de formalisme en privilégiant le sens. • De nombreux problèmes permettent de calculer des probabilités en s'appuyant sur des conditions de symétrie et de régularité qui fondent le modèle équiprobable. On consolide également l'approche fréquentiste des probabilités qui permet, par exemple, de calculer une probabilité inconnue. D'après la 5e ligne, les couleurs présentes sont (de gauche à droite) : rose, orange, violet et jaune. D'après la 4e ligne, le pion violet et le pion rose ne peuvent être bien placés. Les 2 pions bien placés à la 1re ligne (et à la 5e ligne) ne Il est important de faire constater de nouveau ce phénomène de stabilisation des fréquences à partir d'expériences faites par les élèves, ou au travers de simulations. Pour finir, on modélise et on calcule des probabilités dans le cadre d'expériences à deux épreuves à l'aide, en particulier, d'arbres pondérés. • Cette partie du programme peut être traitée à n'importe quel moment dans l'année car elle ne requiert pas de connaissances nouvelles de la classe de 3e et son contenu n'est pas nécessaire au traitement des autres chapitres. On peut néanmoins consolider le travail sur les nombres et leurs différentes formes à l'occasion du calcul sur les probabilités. On peut également aborder ces notions régulièrement pour n'en faire un bilan qu'à la fin de l'année. peuvent donc qu'être le jaune et le orange. Il suffit donc d'échanger les pions rose et violet de la 5e ligne qui sont, eux, mal placés. On est donc sûr de gagner au coup suivant en mettant dans cet ordre (de gauche à droite) : violet, orange, rose, jaune. Activités flash Questions 4 16 et P(rouge) = donc on a plus de chances de 32 32 tirer une carte rouge. 1. P(as) = On peut aussi simplement dire qu'il y a plus de cartes rouges que d'as. Nombre de boules vertes 3 3 = = Nombre total de boules 8 3+5 3. a.
P(A ou B) = P(A) + P(B) (car les évènements sont incompatibles) Donc P(A ou B) = 0,3 + 0,5 = 0,8. 2.
P(verte) = 4. a. P(E) = 180 600 b.
F : « Ce n'est pas une fille » donc F : « C'est un garçon ». 330 D'où P (F) = 600 195 c. Probabilité que ce soit une fille demi-pensionnaire : . 600 b. P (A) = 1 – P(A) = 1 – 0,3 = 0,7 Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 97 Activité 1 Répétition générale Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de remobiliser la stabilisation de la fréquence. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer une fréquence, utiliser un tableur, connaitre la notion de stabilisation d'une fréquence. La capacité introduite est de modéliser une expérience aléatoire. On peut imaginer qu'un élève utilise l'ordinateur du professeur pour collecter les résultats de ses camarades.
c.
En cellule G4 : =G3+C4 et en cellule H3 : =G3/F3.
3. Un exemple de ce qu'on peut obtenir : 1. Les résultats ne sont évidemment pas les mêmes pour tous les élèves. On peut commencer à discuter sur le fait que les résultats sont aléatoires et fluctuent, en particulier sur un petit nombre de tirages, ici 50.
Cela permet de faire le lien avec la question suivante où on va cumuler les résultats pour avoir un grand nombre de lancers. 2. a. et b. Un exemple de ce qu'on peut obtenir avec une classe de 30 élèves : 0,160 0,140 0,120 0,100 0,080 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 0,060 0,040 Fréquence de "5" obtenus 0,020 0,000 0 200 400 600 800 1000 1200 1400 1600 4. La fréquence de 5 fluctue et se rapproche de 0,17 car la probabilité d'obtenir un « 5 » vaut ≈ 0,167.
En G3, on entre =C3 (on reprend le nombre de 5 pour les 50 premiers lancers). Activité 2 Tweeter or not tweeter ? Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de remobiliser la définition et des propriétés de la probabilité d'un évènement. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer la probabilité d'un évènement connaissant les probabilités de toutes les issues. La capacité introduite est de calculer la probabilité d'un évènement. 1. La probabilité que l'utilisateur ait envoyé 1 tweet vaut : 11 11 % = = 0,11. 100 2. La probabilité que l'utilisateur ait envoyé entre 3 et 20 tweets vaut : 13 3 % + 3 % + 7 % = 13 % = = 0,13. 100 98 Cette stabilisation de la fréquence vers la probabilité a été éventuellement observée dès la classe de 5e, puis formalisée en classe de 4e. Il s'agit de faire percevoir aux élèves que même un phénomène aléatoire obéit à certaines règles.
ORGANISATION DE DONNÉES, FONCTIONS 3. La probabilité que l'utilisateur ait envoyé plus de 20 tweets vaut : 14 6 % + 8 % = 14 % = = 0,14. 100 4. La probabilité que l'utilisateur ait envoyé au plus 20 tweets vaut : 86 100 % – 14 % = 86 % = = 0,86. 100 5. La probabilité que l'utilisateur n'ait jamais envoyé de tweet vaut : 56 56 % = = 0,56. 100 Cette activité permet également de travailler la maitrise de la langue en faisant ressortir la différence entre les expressions « au plus » ou « plus de ».
Activité 3 En deux roues… Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est d'introduire la notion d'arbre de probabilités et ses règles d'utilisation. Les prérequis nécessaires sont de savoir calculer la probabilité d'un évènement, calculer une fraction d'une quantité. La capacité introduite est de construire et utiliser un arbre de probabilité. 1. a. Les issues de cette expérience aléatoire sont : bleu et Z ; bleu et E, bleu et N, rouge et Z ; rouge et E, rouge et N. b. Ces issues peuvent sembler équiprobables. Il ne s'agit ici que d'une conjecture. Chaque élève peut avoir son idée sur la question même si celle-ci n'est pas correcte. 2. a. Cela signifie que, si on fait tourner la roue bleue, on a deux chances sur six d'obtenir la lettre N. b. 1 – 6 2 – 6 Rouge 1 – 4 Z 3 – 6 2 – 6 3 – 4 Bleu 2 – 6 3. a.
En vertu de la stabilisation de la fréquence, 240 000 étant 3 un nombre relativement grand, approximativement des 4 expériences donneront Bleu. Donc le nombre d'expériences 3 donnant Bleu à la 1re épreuve est × 240 000 = 180 000. 4 b. De la même manière, approximativement, parmi les expériences donnant Bleu à la 1re épreuve, le nombre d'expériences donnant 2 N à la 2de épreuve est × 180 000 = 60 000. 6 c. La proportion de ces expériences donnant (Bleu ; N) comme issue est alors : 3 2 1 60 000 1 × = = ou . 4 6 4 240 000 4 1 d. La probabilité d'obtenir l'issue (Bleu ; N) vaut donc . 4 e. La probabilité d'obtenir l'issue (Rouge ; Z) vaut donc : 1 1 1 × = . 4 6 24 (Il s'agit ici d'expliquer aux élèves, à partir d'un exemple concret, pourquoi la probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin. On peut alors formaliser les règles de calcul sur les arbres découvertes par les élèves lors de cette activité. On peut enfin faire remarquer que, finalement, les issues ne sont pas équiprobables et revenir sur la conjecture de la question 1. b. afin de la valider ou de l'invalider, ceci afin de développer l'esprit critique. E N Z 2 – 6) E N © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Il est assez naturel, pour des élèves ayant déjà calculé des probabilités, de comprendre intuitivement comment compléter cet arbre. c. La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1. e Savoir-fair 0,12 K 0,88 L 0,43 K 0,57 L 10 % Latin 90 % Pas latin 15 % Latin 85 % Pas latin 13 M 0,95 4 1.
Du plus probable au moins probable : 5 d.
(1) a. c. 9 1 b. 9 1 2.
P(2) = 9 1 2 5 9 10 1 2 192 2 14 La somme des probabilités de toutes les issues vaut 1 donc : 1 1 1 P(vert) = 1 – P(noir) – P(rouge) = 1 – – = 3 2 6 Les pièces de couleur cuivrée sont celles de 5 centimes et de 1 centime. 2+4 6 Donc P(couleur cuivrée) = = 0,6 ou 60 %. = 3 + 1+ 2 + 4 10 1. P(La boite ne contient pas de légumes) = 2+1 3 + 2 + 1+ 5 3 11 2. Les évènements A : « La boite contient des légumes » et B : « La boite contient des fruits » sont incompatibles. 8 1 9 Donc P(A ou B) = P(A) + P(B) = + = . 11 11 11 = 0,05 R 1. Garçon 55 % 45 % Fille 2. P(Fille étudiant le latin) = 45 15 27 = × 100 400 100 3. P(Garçon étudiant le latin) = 55 10 11 = × 100 200 100 Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 99 23 1. Julien a calculé P(1) + P(3) + P(5) (certaines parenthèses sont Exercices inutiles). La question peut donc être « Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre impair ? » P(nombre impair) = P(1) + P(3) + P(5) 4 1 1 6 = + + = 12 12 12 12 1 = = 0,5 2 Modéliser une expérience aléatoire flash Questions 15 P(17) = 1 15 24 16 P(vert) = 1 – 0,55 – 0,07 = 0,38 Sexe Origine 17 1. Les issues de cette expérience sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 14 ; 15 ; 16 ; 17 ; 18 ; 19 ; 20. 2. Toutes ces issues sont équiprobables de probabilité 1 . 20 87 = 0,435. 200 2. Chaque secteur ayant la même probabilité d'être obtenu, 1 soit , la probabilité d'obtenir un secteur bleu vaut : 5 2 = 0,4. 5 18 1. La fréquence d'apparition du secteur bleu vaut 0,435 est proche de ce résultat car, sur un grand nombre de lancers, la fréquence d'apparition d'un évènement se stabilise vers la probabilité de cet évènement. 19 Les issues possibles sont « Pile » et « Face ». © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Si on note f la probabilité d'obtenir « Face », alors la probabilité d'obtenir « Pile » vaut 2f. Or la somme des probabilités des issues vaut 1 donc f + 2f = 1, 1 ce qui donne 3f = 1 soit f = . 3 1 La probabilité d'obtenir « Face » vaut donc et celle d'obtenir 3 2 « Pile », . 3 Déterminer la probabilité d'un évènement flash Questions 20 Il y a 3 issues réalisant l'évènement « Obtenir un nombre plus grand que 3 » : 4, 5 et 6. 3 . 6 Il y a 2 issues réalisant l'évènement « Obtenir un multiple de 3 » : 3 et 6. 2 P(multiple de 3) = 6 Donc on a plus de chances d'obtenir un nombre plus grand que 3. Donc P(Nombre plus grand que 3) = 21 Entre 1 et 20, les nombres divisibles par 7 sont 7 et 14. Les issues étant toutes équiprobables, on a P(Nombre divisible 2 1 = = 0,1. par 7) = 20 10 22 S'il y a 15 boules dont 10 rouges, alors 5 ne sont pas rouges. Les issues étant toutes équiprobables, on a : 5 1 P(boule pas rouge) = = . 15 3 On peut aussi utiliser l'évènement contraire. Les issues étant toutes équiprobables, on a : 10 2 P(boule rouge) = = . 15 3 D'où : P(boule pas rouge) = 1 – P(boule rouge) 1 2 =1– = . 3 3 100 ORGANISATION DE DONNÉES, FONCTIONS Hommes Femmes Gironde 29 78 Lot-et-Garonne 17 34 Total 46 112 1. P(A) = 46 158 Total 107 51 158 (se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux, sinon il faut calculer : 29 + 17). 158 2. A : « La personne choisie n'est pas un homme » ou « La personne choisie est une femme ». P (A) = 112 158 51 3. P(B) = 158 (se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux ou se calcule en utilisant le 1. : P A = 1 – P(A)). () (se lit directement dans le tableau si on a ajouté les totaux, sinon il faut calculer : 17 + 34). 158 4. A et B ne sont pas incompatibles car on peut choisir un homme originaire du Lot-et-Garonne (il y en a 17), ce qui réalise les deux évènements simultanément. 25 1. La moitié des cartes sont rouges et chaque carte a la même probabilité d'être obtenue que les autres donc : 26 1 P(Carte rouge) = = = 0,5 52 2 On peut répondre directement 0,5 ; 50 % ou le fait que la moitié des cartes sont rouges. 1 en utilisant 2 2. Il y a un valet dans chaque catégorie soit 4 valets en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que 4 1 les autres : P(Valet) = = 52 13 Il y a deux valets rouges (cœur et carreau) en tout.
Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les 2 1 autres : P(Valet rouge) = = . 52 26 26 • Sac A : P(Jeton jaune) = 28 28 = = 0,56 28 + 22 50 Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser. Par exemple : une probabilité est un nombre entre 0 et 1 donc soit 0,44 ou 0,56. Or il y a plus de boules jaunes donc c'est 0,56. • Sac B : si n est le nombre de jetons non jaunes, on a P(Jeton 40 2 et on sait que P(Jeton jaune) = . 40 + n 5 2 40 = soit 40 × 5 = 2(40 + n) ou encore 200 = 80 + 2n D'où 40 + n 5 120 = 60. d'où n = 2 jaune) = Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser. 40 2 Par exemple : = donc il y a 100 boules, donc 60 5 100 non jaunes. On peut également tester les réponses proposées sachant que le nombre de boules non jaunes ne peut être qu'un nombre entier soit 60 ou 27. 29 1. La probabilité que la personne choisie soit vaccinée vaut 0,4 (cette probabilité se lit directement sur l'arbre). 2. La probabilité d'un chemin est le produit des probabilités rencontrées le long de ce chemin, donc la probabilité que la personne choisie soit à la fois saine et vaccinée vaut 0,4 × 0,8 = 0,32. 30 Il y a un as dans chaque catégorie soit 4 as en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les autres : 1 4 12 P(A) = = . et P (A) = 1 – P(A) = 52 13 13 re Quoi qu'on ait tiré à la 1 épreuve, cela n'influe pas sur la 2de épreuve. Dans tous les cas, il y a 3 figures dans chaque catégorie soit 12 figures en tout. Chaque carte ayant la même probabilité d'être obtenue que les autres : 12 3 5 P(F) = = et P (F) = 1 – P(F) = . 32 8 8 • Sac C : si n est le nombre de jetons jaunes, on a P(Jeton 3 n jaune) = et on sait que P(Jeton jaune) = . n + 36 7 3 n = soit 7n = 3(n + 36) ou encore 7n = 3n + 108 D'où n + 36 7 108 d'où 4n = 108 et par suite n = = 27. 4 Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser. On peut, par exemple, tester les réponses proposées sachant que le nombre de boules jaunes ne peut être qu'un nombre entier, soit 60 ou 27, ou procéder par élimination si on a trouvé la réponse pour le sac B. 3 – 8 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Sac B Sac C Sac D 5 – 8 3 – 8 12 – 13 Nombre de jetons jaunes Nombre de jetons non jaunes Probabilité d'obtenir un jeton jaune 28 22 0,56 40 60 27 36 22 28 F F A 5 – 8 Plusieurs raisonnements peuvent amener à ce résultat, y compris avec des méthodes dites « non expertes » qui seront à valoriser.
Par exemple : une probabilité est un nombre entre 0 et 1 donc soit 0,44 ou 0,56 ; or, il y a moins de boules jaunes, donc c'est 0,44. Ou on peut procéder par élimination si on a trouvé la réponse pour le sac A. Sac A A 1 – 13 22 22 = 0,44 = • Sac D : P(Jeton jaune) = 22 + 28 50 F F 31 1. Réponse b. (la réponse se lit directement sur l'arbre). 2. P(A et B) = 1 2 1 Donc réponse c. × = 6 4 3 1er lancer 32 2nd lancer 2 – 3 2 – 3 1 – 3 2 5 3 7 Face Face 1 – 3 2 – 3 Pile Face Pile 1 – 3 Pile La probabilité d'obtenir deux « Pile » vaut donc 0,44 1 1 1 × × = . 3 3 9 27 1. 3 jetons portent la lettre A. Chaque jeton ayant la même 3 1 = . 9 3 2. 4 jetons sont ronds.
Chaque jeton ayant la même probabilité 4 d'être tiré : P(Jeton rond) = . 9 3. 2 jetons sont carrés et portent la lettre B. Chaque jeton ayant la même probabilité d'être tiré : 2 P(Jeton carré avec lettre B) = . 9 probabilité d'être tiré : P(A) = t in Faire le po QCM 1 A 2 1. B 3 C 2. C Construire et utiliser un arbre de probabilités flash Questions 28 La somme des probabilités des branches issues d'un même nœud vaut 1 donc : 1 – 4 C 3 – 4 D 0,01 C A 0,7 0,3 B 0,99 D Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 101 Carte mentale 1 3 P(1) = P(2) = P(3) = Arbre de probabilités Expérience aléatoire à 2 épreuves Issues équiprobables 1 – 4 2 3 Issues non équiprobables 1 – 3 A 1 P(A) = 4 1 P(B) = 4 1 P(C) = 2 B 1 – 2 1 – 4 2 1 – 3 C 3 1 – 2 1 – 4 1 – 2 B C A 1 – 4 B C A 1 – 4 B C Probabilité d'obtenir « 3 et B » = 1 1 1 × = 3 4 12 b. On peut, par exemple, regrouper toutes les possibilités pour la somme de deux dés dans un tableau à double entrée : Algorithmique et outils numériques dé 1 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 6 7 2 3 4 5 6 7 8 3 4 5 6 7 8 9 4 5 6 7 8 9 10 5 6 7 8 9 10 11 6 7 8 9 10 11 12 dé 2 33 Somme de dés 1. Les issues de cette expérience aléatoire sont tous les nombres entiers entre 2 et 12 (compris). © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
1 1 – 3 1 A 1 – 4 2. a. Les variables intervenant dans ce script sont : • « nombre de tirages », qui représente le nombre de fois où on lance le dé ; • « dé1 », qui représente le résultat d'un tirage du 1er dé ; • « dé2 », qui représente le résultat d'un tirage du 2nd dé ; • « nombre de succès » (ce qu'elle représente dépend de ce qu'on met dans la condition) ; • « fréquence » (ce qu'elle représente dépend de ce qu'on met dans la condition).
b. 1 2 3 ; P(3) = ; P(4) = ; P(5) = 36 36 36 2 5 6 5 4 P(6) = ; P(7) = ; P(8) = ; P(9) = ; P(10) = 36 36 36 36 2 1 ; P(12) = P(11) = 36 36 Donc P(2) = 4 ; 36 3 ; 36 34 Des dés tétraédriques 1. Voir manuel numérique, fichier 10-p181-ex34-prof-excel. 2. Voir manuel numérique, fichier 10-p181-ex34-prof-excel. 3. Voir fichier tableur : c. La fréquence de 7 doit se stabiliser vers un nombre qui est la probabilité d'obtenir un 7 lorsqu'on lance deux dés équilibrés. Cette probabilité vaut environ 0,166. 3. Chacun obtiendra des résultats différents car chaque simulation aura des fréquences différentes. Néanmoins, on doit obtenir des valeurs proches de celles dans le tableau suivant. Somme 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 La fréquence se stabilisant vers la probabilité, la probabilité d'obtenir le 7 vaut environ 0,18.
4. Voir fichier tableur : 12 Probabilité 0,0280,0560,083 0,111 0,139 0,166 0,139 0,111 0,083 0,056 0,028 4. a. On a, par exemple, moins de chances d'obtenir 12 comme somme que 7. C'est plus rare (il faut avoir deux 6 alors que pour 7, on peut avoir 1 et 6 ou 3 et 4…). 102 ORGANISATION DE DONNÉES, FONCTIONS D'après les résultats précédents, il vaut mieux parier sur le 8. 35 Distance entre deux nombres 1. La conjecture peut être qu'on a une chance sur deux d'obtenir une distance plus petite que 0,5 (ou autre conjecture). 2. Voit manuel numérique, fichier 10-p181-ex34-prof-excel. 3. Dans les cellules B2 et C2 : =ALEA(). 4. Dans la cellule D2 : =MAX(B2:C2)-MIN(B2:C2). 5. Cette formule renvoie « OUI » si la distance entre les deux nombres est strictement inférieure à 0,5 et « NON » sinon. 6. On simule cette expérience un grand nombre de fois et on regarde vers quelle valeur se stabilise la fréquence d'apparition de distances inférieures à 0,5.
Voir fichier tableur en bas de page. La probabilité d'obtenir une distance inférieure à 0,5 est d'environ 0,75. Penser à invalider ou valider la conjecture faite au début. Problèmes 40 Faites tourner ! Deux secteurs sont gagnants : le bleu et le vert. La probabilité d'obtention de chaque secteur est proportionnelle à l'angle du secteur correspondant, donc : 30 + 120 150 5 P(Gagner) = = = 360 360 12 41 Sur terre ou sur mer La probabilité de planter l'épingle dans une zone donnée est proportionnelle à sa surface. Ainsi, la probabilité de planter l'épingle dans un océan vaut 71 %.
42 Au feu ! P(S'arrêter) = 1 – P(« Le feu est au vert ») = 1 – On pourrait également calculer la probabilité que le feu soit orange en utilisant le fait que la somme des probabilités de toutes les issues vaut 1, puis additionner les probabilités des issues « rouge » et « orange ». 43 À table 1 – 3 Rouge 36 Salaires Probabilité que l'employé gagne entre 1 000 et 2 000 € : 73 73 ≈ 0,53 > 0,5. = 12 + 73 + 32 + 21 + 1 139 On a donc plus d'une chance sur deux que cet employé gagne entre 1 000 et 2 000 €. 1 – 3 1 – 3 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 38 Infections nosocomiales Soit A l'évènement « Le patient a 65 ans ou plus ». Alors P(A) = 67,24 % = 0,672 4 Donc la probabilité que le patient infecté ait moins de 65 ans vaut : P (A) = 1 – P(A) = 1 – 0,672 4 = 0,327 6 ou 32,76 % On peut également faire la somme des probabilités des évènements « Le patient a entre 0 et 1 an », « Le patient a entre 1 et 15 ans » et « Le patient a entre 15 et 65 ans ». 39 Harry Potter nombre de R 3 P(R) = = nombre de cartons 11 1 – 3 1 – 3 Bleu 1 – 3 37 Voyage scolaire Les évènements A « L'élève est parti en voyage scolaire à l'étranger » et B « L'élève est parti en voyage scolaire en France » sont incompatibles car chaque élève ne peut partir en voyage scolaire qu'une seule fois au cours de sa scolarité. Donc P(« L'élève est parti en voyage scolaire ») 1 3 1 = P(A ou B) = P(A) + P(B) = + = 10 5 10 D'où P(« L'élève n'est pas parti en voyage scolaire ») 7 3 = 1 – P(A ou B) = 1 – = 10 10 1 3 = 4 4 1 – 3 1 – 3 Jaune 1 – 3 Rouge 1 – 3 Bleu Jaune Rouge 1 – 3 Bleu Jaune Rouge 1 – 3 Bleu Jaune D'après l'arbre précédent, la probabilité d'avoir deux bavoirs de 1 1 1 la même couleur vaut : 3 × × = . 3 3 3 44 The spinner 1. The probability of the spinner landing on red or blue is 0.7. The probability of the spinner landing on red is 0.2. So the probability of the spinner landing on blue is 0.7 – 0.2 = 0.5. 2. The probability of the spinner landing on white is 1 – 0.7 = 0.3. 1 2 45 C'est la foire ! 5 – 6 1 – 6 6 – 20 Noir 14 – 20 Rouge Pair Impair D'après l'arbre précédent, la probabilité que Suzy gagne un 5 6 1 prix vaut : × = . 6 20 4 Donc : réponse b. (peu probable). Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 103 46 Au soleil Short Tee-shirt 2 – 7 Rouge 2 – 7 2 – 7 1 – 10 2 – 10 3. Dans l'autre pièce, la probabilité que le candidat ne gagne 4 1 rien vaut : = . 8 2 Noir 2 – 7 2 – 7 7 – 10 Blanc 2 – 7 Rouge 3 – 7 50 Rentrée scolaire 1.
Blanc 1 – 6 Noir Rouge 3 – 7 0,6 Blanc Noir Rouge 3 – 7 0,2 Blanc 51 4 – 7 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 – 2 Écrou Face zone 5 points – carré moyen – petit carré = 4 – 1 = 3 Donc : zone 10 points = petit carré = 1 zone 1 point = grand carré – carré moyen = 9 – 4 = 5 On a donc : Nombre de points gagnés 1 5 10 Probabilité ! zone 1 point ! zone 5 points ! zone 10 points ! grand carré =5 9 ! grand carré =3 9 ! grand carré 2. 1000 € 4 – 8 100 € 4 – 8 4 – 8 ORGANISATION DE DONNÉES, FONCTIONS Tire sur la cible 9 – 10 200 € 100 € 1 – 10 vide 1. La probabilité que le candidat accède à la salle du trésor est 1 de . 4 2. Dans la salle du trésor, la probabilité que le candidat gagne 1 4 5 au moins 200 € vaut : + = 8 8 8 3 en utilisant l'évènement contraire). (ou 1 – 8 104 Écrou Aire du grand carré : grand carré = 32 = 9 On peut résumer les données à l'aide d'un arbre : Autre pièce Vis Pile 49 À la télé 3 – 4 Écrou Aire du carré moyen : carré moyen = 22 = 4 2 3 – 8 4 – 6 3 – 6 Aire du petit carré : petit carré = 12 = 1 On peut aussi calculer la probabilité de l'évènement contraire : obtenir deux « FACE ». Salle du trésor Vis 1. Les probabilités sont proportionnelles aux surfaces de chaque zone. D'après l'arbre précédent, la probabilité d'avoir un « PILE » en 1 1 3 deux lancers vaut : 3 × × = . 4 2 2 1 – 4 Vis 52 Carrément ciblé ! Face 1 – 2 1 – 8 Autre sac D'après l'arbre précédent, la probabilité que Martin obtienne 3 4 4 3 4 ce dont il a besoin vaut : × + × = . 7 6 7 6 7 Face 1 1 – 3 3 – 6 Pile 1 – 2 1 – 2 Sac à dos Jeu de construction 3 – 7 48 Pile ou face ? 1 – 2 Autre sac 2 – 3 2 – 6 3. P(vert) = 1 – P(pas vert) = 1 – 70 % = 30 % P(vert ou bleu) = P(vert) + P(bleu) = 30 % + 10 % = 40 % Pile Sac à dos 2. D'après l'arbre précédent, la probabilité que l'élève ait un sac 17 1 2 à dos vaut : 0,6 × + 0,2 × 0,25 + 0,2 × = . 6 3 60 On peut aussi calculer la probabilité de l'évènement contraire P(vert) en calculant d'abord P(noir) à l'aide de P(jaune) et de P(jaune ou noir). 1 – 2 Autre sac 16 ans D'après l'arbre précédent, la probabilité que Yoann s'habille avec une tenue d'une seule couleur vaut : 7 1 2 2 2 3 27 × + × + × = . 10 7 10 7 10 7 70 1. P(rouge ou bleu) = P(rouge) + P(bleu) = 20 % + 10 % = 30 % 2. P(pas vert) = P(rouge ou bleu ou jaune ou noir) = P(rouge ou bleu) + P(jaune ou noir) = 30 % + 40 % = 70 % 5 – 6 25 % 15 ans 75 % 0,2 Noir 47 Jetons-les ! Sac à dos 14 ans 5 – 9 1 – 9 = 1 9 1 point 3 – 9 5 points 10 points Rate la cible D'après l'arbre précédent, la probabilité que le tireur gagne 5 points ou plus vaut : 3 1 9 2 × + = ou 40 % de chances. 10 5 9 9 1 53 2 Truqué ou non On peut lancer ce dé un grand nombre de fois et compter le nombre d'apparitions de chaque face. Si la fréquence d'apparition de chaque face ne se stabilise pas autour de 1 ≈ 0,167, alors le dé n'est pas équilibré.
6 54 Un temps de chien ! Dimanche Lundi Mardi 5 – 6 5 – 6 Sec Sec 1 – 6 1 – 3 Sec 1 – 6 Les probabilités que la puce retombe dans une partie du plan étant proportionnelles à l'aire de chacune de ces surfaces, on va s'intéresser à l'aire du triangle AMB.
Si on considère le point H, pied de la perpendiculaire à (BC) passant par A, alors (AH) est la hauteur issue de A du triangle AMC mais également celle du triangle AMB.
MB × AH MC × AH Ainsi Aire(AMB) = et Aire(AMC) = . 2 2 Comme MB = MC, les triangles AMB et AMC ont la même aire. Ainsi la probabilité que la puce retombe dans le triangle AMB 1 vaut ou 0,5 ou 50 %. 2 Humide Sec Humide 2 – 3 Humide D'après l'arbre précédent, la probabilité qu'il fasse sec mardi vaut : 5 5 1 1 3 × + × = ou 75 % de chances. 6 6 6 3 4 57 Nombres aléatoires Il faut lister les nombres considérés et compter ceux qui contiennent le chiffre 1 ou le chiffre 4. 55 Gommettes Couleur des gommettes selon les tirages : dé 1 dé 2 1 2 3 4 5 6 1 2 3 4 5 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 6 • La probabilité de prendre une gommette bleue vaut : 9 1 = .
36 4 • La probabilité de prendre une gommette jaune vaut : 9 1 = . 36 4 • La probabilité de prendre une gommette verte vaut : 18 1 = . 36 2 Comme les fréquences d'apparition de chaque couleur se stabilisent vers la probabilité correspondante au bout d'un grand nombre de tirages, les proportions de gommettes 1 bleues et de gommettes jaunes devraient se rapprocher de 4 1 et celle de gommettes vertes de . 2 56 Sauts de puce B 37 = 0,37 ou Donc P(Le nombre contient un 1 ou un 4) = 100 37 %. 58 Stratégie de jeu Avec deux dés, on liste les résultats possibles et on compte ceux dont la somme est supérieure ou égale à 10 : dé 1 dé 2 1 2 3 4 5 6 M A C B M A H C 1 2 3 4 5 6 2 3 4 5 6 7 3 4 5 6 7 8 4 5 6 7 8 9 5 6 7 8 9 10 6 7 8 9 10 11 7 8 9 10 11 12 5 .
36 Avec un dé, on liste les résultats possibles et on compte ceux dont la somme est supérieure ou égale à 10 : Donc P(Gagner 1 point) = Dé 1 2 3 4 5 6 Points 6 7 8 9 10 11 2 12 = . Donc P(Gagner 1 point) = 6 36 Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 105 Il vaut donc mieux que Leïla choisisse de jouer avec un seul dé.
On peut également penser à écrire un script simulant des parties de ce jeu et observer les fréquences de parties gagnantes pour chacun des joueurs, pour un grand nombre de parties. 59 Roulette 1. Comme on double la mise à chaque fois, si le rouge sort, on gagnera plus que ce qu'on a perdu. De plus, si la roulette n'est pas truquée, la fréquence d'apparition du rouge devant 18 se stabiliser vers , on peut penser que le rouge finira bien 37 par sortir… 2. • Si le rouge sort au 1er coup : il a misé 1 € et gagné 2 € donc il a gagné 1 €. • Si le rouge sort au 5e coup : 1er coup : il perd 1 € ; 2e coup : il perd 2 € ; e 3 coup : il perd 4 € ; 4e coup : il perd 8 € ; 5e coup : il a misé 16 € et a gagné 32 €. Donc, en tout, il a perdu : 1 € + 2 € + 4 € + 8 € + 16 € = 31 €. Ainsi, il a gagné 1 €. • Si le rouge sort au 10e coup : 1er coup : il perd 1 € ; 2e coup : il perd 2 € ; 3e coup : il perd 4 € ; 4e coup : il perd 8 € ; 5e coup : il perd 16 € ; 6e coup : il perd 32 € ; 7e coup : il perd 64 € ; 8e coup : il perd 128 € ; 9e coup : il perd 256 € ; 10e coup : il a misé 512 € et a gagné 1 024 €.
Donc, en tout, il a perdu : 1 € + 2 € + 4 € + 8 € + 16 € + 32 € + 64 € + 128 € + 256 € + 512 € = 1 023 €. Ainsi, il a gagné 1 €. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On comprend que quel que soit le rang de sortie du premier rouge, on ne gagnera qu'un euro. On a donc de grandes chances de gagner peu contre une petite chance de perdre beaucoup ! 3. a. Ce script simule plein de parties, calcule le gain à chaque tirage, puis le gain de chaque partie, les gains cumulés au fil des parties ainsi que le gain moyen par partie avec une limitation de mise à 100 €. b. On voit qu'avec la limitation de mise, le gain moyen par partie est d'environ –0,20 €, donc le casino est gagnant en moyenne. En modifiant le script (on enlève la condition de limitation de mise à 100 €) : Brevet 60 Trois couleurs 1. a. La couleur la plus présente dans le sac est le jaune (sa fréquence d'apparition est clairement plus élevée que celle des autres couleurs). b. La fréquence d'apparition d'un jeton vert semble se stabiliser autour de 0,25. La probabilité d'obtenir un jeton vert vaut donc environ 0,25. c. La formule saisie dans la cellule C2 avant de la recopier vers le bas est : =B2/A2. 1 La probabilité de tirer un jeton rouge est de . 5 Il y a équiprobabilité (chaque jeton a la même probabilité d'être tiré), d'où : Nombre de jetons rouges 1 4 = = . Nombre total de jetons 5 20 Comme il y a 20 jetons au total, il y a 4 jetons rouges dans le sac. 61 Dés tétraédriques 1. La fréquence d'apparition de la somme 3 est 15 % (lecture graphique). 2. La fréquence d'apparition de la somme 1 est 0 % (lecture graphique) ; en effet, il est impossible d'obtenir 1, la plus petite somme possible étant 2 (1 sur chaque dé). 3. a. Il y a deux cas menant à une somme de 3 : • dé 1 : 1 et dé 2 : 2 • dé 1 : 2 et dé 2 : 1 b. Il y a 4 × 4 = 16 tirages différents dont deux donnent 3 comme somme. Donc la probabilité d'obtenir la somme 3 2 1 vaut : = = 0,125 = 12,5 %. 16 8 Ce résultat est différent du résultat à la question 1. car la fréquence fluctue autour de la probabilité. C'est une valeur approchée de cette probabilité.
62 Pour passer le temps 1. Comme le dé est équilibré, la probabilité d'obtenir un « 1 » 1 est la même que celle d'obtenir un « 5 » et vaut car chaque 6 numéro a autant de chances d'être tiré qu'un autre.
2. Pour une issue rouge, il y a 6 issues jaunes. Comme il y a 6 issues rouges, le nombre d'issues possibles quand Jules lance ses deux dés est de 6 × 6 = 36. 3. Possibilités du 3e lancer de Paul : Dé jaune 1 2 3 4 5 6 Dé rouge 1 1 000 50 50 50 50 50 2 50 200 50 50 50 50 3 50 50 300 50 50 50 4 50 50 50 400 50 50 5 50 50 50 50 500 50 6 50 50 50 50 50 600 Il ne reste plus à Paul qu'à obtenir au moins 350 points pour gagner la partie, soit à obtenir 400, 500, 600 ou 1 000 points, c'est-à-dire une paire de 4, de 5, de 6 ou de 1.
La probabilité 4 1 qu'il gagne vaut donc : = . 36 9 On obtient un gain moyen par partie de 1 €, le casino serait donc perdant. Néanmoins, cette méthode n'est pas très réaliste car il faut accepter un risque (faible) de perdre beaucoup pour être quasiment certain de gagner 1 € ! On pourrait miser plus dès le départ mais l'éventuelle perte serait plus importante. 106 ORGANISATION DE DONNÉES, FONCTIONS Exercice 2 Travailler trement au 1. 1er tirage B1 3 – 7 Deux énoncés pour un exercice On peut également calculer la probabilité de l'évènement contraire. Exercice 1 Les positions chèvre et mouton sont équiprobables et P(Chèvre 2 ou mouton) = . 3 Or P(Chèvre ou mouton) = P(Chèvre) + P(Mouton). Donc 1 chacune de ces deux positions a une probabilité de . 3 Appelons C l'évènement « L'osselet retombe sur une face dont le nom commence par la lettre C ». 1 2 P(C) = 1 – P (C) = 1 – P(Mouton) = 1 – = 3 3 La probabilité que l'osselet retombe sur une face commençant 2 par la lettre C vaut . 3 Exercice 2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1.
1er tirage 2 – 3 1 – 3 B1 2nd tirage 2 – 3 1 – 3 N1 2 – 3 B2 N2 B2 1 – 3 B2 4 – 7 N1 N2 3 – 6 B2 3 – 6 N2 2. P(2 boules de la même couleur) = P(B1 et B2) + P(N1 et N2) 3 2 4 3 3 = × + × = . 7 6 7 7 6 3. P(2 boules couleurs différentes) = 1 – P(2 boules de la même 3 4 couleur) = 1 – = . 7 7 Écriture d'un énoncé 1. Par exemple : On place dans une urne 25 boules dont 7 sont rouges, 5 sont bleues, 2 sont noires, 8 sont blanches et les autres sont jaunes ; on tire une boule de cette urne. Quelle est la probabilité qu'elle soit jaune ? 2. P(Jaune) = 1 – P(Rouge) – P(Bleue) – P(Noire) – P(Blanche) 7 5 2 8 3 =1– – – – = 25 25 25 25 25 Analyse d'une production Jorick s'est effectivement trompé dans son calcul car les deux évènements qu'il considère, L et U (qu'il n'a pas bien défini), ne sont pas incompatibles (des élèves font à la fois du latin et du sport à l'UNSS). Il s'est rendu compte de son erreur car une probabilité est un nombre compris entre 0 et 1, ce qui n'est pas le cas de son résultat. Comme 228 élèves font du sport à l'UNSS et que 53 font à la fois du sport à l'UNSS et du latin, alors le nombre d'élèves ne faisant que du sport à l'UNSS est de 228 – 53 = 175. Comme 87 élèves font du latin et que 53 font à la fois du sport à l'UNSS et du latin, alors le nombre d'élèves ne faisant que du latin est de 87 – 53 = 34. On peut résumer ces résultats sous forme d'un schéma : 38 N2 1 1 1 × = 3 3 9 4 2 2 3. P(2 boules blanches) = P(B1 et B2) = × = 3 3 9 Les évènements « Obtenir 2 boules noires » et « Obtenir 2 boules blanches » sont incompatibles donc P(2 boules de la même couleur) = P(2 boules noires ou 2 boules blanches) = P(2 boules noires) + P(2 boules blanches) 1 4 5 = + = 9 9 9 2. P(2 boules noires) = P(N1 et N2) = 2 – 6 4 – 6 Exercice 1 Appelons C l'évènement « L'osselet retombe sur une face dont le nom commence par la lettre C », c'est-à-dire « L'osselet retombe sur chèvre ou sur chameau ou sur cheval ». P(C) = P(Chèvre) + P(Chameau) + P(Cheval) ≈ 33 % + 17 % + 17 % ≈ 67 % La probabilité que l'osselet retombe sur une face commençant par la lettre C vaut 67 % ou 0,67. 2nd tirage 175 53 U (228) 34 L (87) Collège (1300) La probabilité que l'élève choisi fasse du latin ou du sport à l'UNSS vaut donc : 175 + 53 + 34 262 131 = = . 300 300 150 Livre du professeur – Chapitre 10 Probabilités 107 APITRE CH 11 11 Construction et transformation de figures © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Il permet d'aborder les points suivants du programme : – mettre en œuvre ou écrire un protocole de construction d'une figure géométrique. Coder une figure ; – comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires et les angles ; – comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure. Les transformations font l'objet d'une première approche, consistant à observer leur effet sur des configurations planes, notamment au moyen d'un logiciel de géométrie. • Exemples de situations, d'activités et de ressources pour l'élève : – Construire des frises, des pavages, des rosaces. – Utiliser un logiciel de géométrie dynamique, notamment pour transformer une figure par translation, symétrie, rotation, homothétie. – Faire le lien entre parallélisme et translation, cercle et rotation. • Repères de progressivité La symétrie axiale a été introduite au cycle 3. La symétrie centrale est travaillée dès le début du cycle 4, en liaison avec le parallélogramme.
Les translations, puis les rotations, sont introduites en milieu de cycle, en liaison avec l'analyse ou la construction des frises, pavages et rosaces, mais sans définition formalisée en tant qu'applications ponctuelles. Une fois ces notions consolidées, les homothéties sont amenées en 3e, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques. Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquette) Bénéficiant auprès des élèves d'un aspect attractif grâce à l'introduction d'une nouvelle transformation, ce chapitre peut être traité tôt dans l'année. Cela permettra de réinvestir les symétries dans l'étude des triangles et des parallélogrammes et de réactiver rapidement la construction de figures à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. De plus, les homothéties permettront aux élèves de créer des images mentales comme prémisses au théorème de Thalès. • Durant l'année de 5e, les élèves ont appris à reconnaitre et à utiliser les symétries axiale et centrale. Ils ont utilisé leurs propriétés pour construire mais aussi pour démontrer. Un travail a été également porté sur la recherche d'axe ou de centre de symétrie. • En classe de 4e, deux nouvelles transformations leur ont été présentées sans définition formelle en tant qu'application ponctuelle : la translation et la rotation. Elles ont été définies par le mouvement physique le plus simple (le plus économique et sans lever la main) permettant de passer d'une figure à une autre.
• • • • Ainsi : – La translation est associée à un glissement rectiligne. Ce déplacement est caractérisé par une flèche (le mot vecteur n'est pas employé). – La rotation est associée à l'action de tourner autour d'un point et est caractérisée par un centre, un angle et un sens de rotation. Il peut être nécessaire pour les plus fragiles de poursuivre et d'enrichir le travail sur ces transformations en classe de 3e avant d'aborder les homothéties. Elles seront introduites dans la même logique que la translation et la rotation, à savoir sans définition formalisée en tant qu'application ponctuelle mais définies par le mouvement le plus simple permettant de passer d'une figure à une autre et modélisant ainsi les agrandissements et les réductions. Une homothétie sera caractérisée par un centre et un rapport k. L'objectif de cette première approche des homothéties sera, comme pour la translation et la rotation : – de former et de dégager des concepts et des images mentales. Cela sera utile pour percevoir globalement les figures et leurs images par ces nouvelles transformations. Cela permettra également d'anticiper et de contrôler les effets de ces transformations ; – de la reconnaitre et de l'identifier par un centre et un rapport ; – de construire globalement, et non point à point, l'image d'une figure en utilisant les images mentales et les propriétés de ces transformations. Par ailleurs, les homothéties donnent l'occasion aux élèves de rencontrer pour la première fois une transformation qui ne conserve pas les longueurs et permettent une première approche du théorème de Thalès. Les constructions à l'aide des instruments de tracé seront essentiellement réalisées à l'aide de quadrillages et demeureront très simples, notamment pour le choix des angles des rotations (90° et 45°). Pour les homothéties, mis à part le cas particulier de k = –1, qui donne l'occasion de donner une troisième définition de la symétrie centrale, on pourra réserver les constructions dans le cas où le rapport est négatif aux élèves les plus avancés. Dans ce chapitre, l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique est fortement recommandé et souvent nécessaire à la réalisation des activités et des problèmes. En plus de permettre aux élèves de se familiariser avec ses fonctionnalités, ses nombreuses utilisations auront l'avantage de favoriser une bonne imprégnation d'images mentales (avec ou sans quadrillage) et permettront la réalisation de belles constructions comme des frises, des pavages et des rosaces. Pour aborder sereinement ce chapitre, les élèves devront : – connaitre la notion d'angles, maitriser les calculs d'angles ; – reconnaitre et repérer des droites parallèles à l'aide d'un quadrillage ou sur papier blanc ; – savoir décrire une direction à l'aide d'un quadrillage ; – reconnaitre un agrandissement, une réduction et en calculer le coefficient ; – savoir calculer des aires.
Yasmine ne pourra pas faire une paire avec la fusée car les deux cartes proposées ne respectent pas les proportions. Jade, elle, pourra faire toutes ses paires.
Elle sera donc la gagnante. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 109 Activités flash Questions 1. • On a utilisé une symétrie axiale dans le cas b. • On a utilisé une symétrie centrale dans le cas d. • On a utilisé une rotation dans le cas c. • On a utilisé une translation dans le cas a. 3. Pour aller de A vers B, on se déplace de 4 carreaux vers la droite et on monte de 1 carreau. 2.
• L'outil axiale. sert à construire l'image par une symétrie 5. Les dimensions du second rectangle sont 9 cm et 12,6 cm. sert à construire l'image par une symétrie 6. Diviser par 5, c'est multiplier par • L'outil 4. 12 = 1 ; 22 = 4 ; 32 = 9 ; 42 = 16 ; 52 = 25 ; 62 = 36 ; 72 = 49 ; 82 = 64 ; 92 = 81 ; 102 = 100. centrale. multiplier par 0,2. • L'outil sert à construire l'image par une rotation. • L'outil sert à construire l'image par une translation. 1 , cela revient donc à 5 Activité 1 Un beau pavage Intentions des auteurs On rappellera si besoin qu'une rotation est complètement définie par un centre, un angle et un sens de rotation. Il sera intéressant de demander d'autres images par ces transformations. Mais également d'autres symétries, translations et rotations (par exemple, des rotations de centre I). On amènera les élèves, si besoin, à remarquer que la symétrie centrale est une rotation particulière. Les objectifs de cette activité sont d'analyser un pavage, reconnaitre et caractériser des symétries, des translations et des rotations. Les prérequis nécessaires sont les connaissances des notions de figures symétriques, d'image par une translation et une rotation. Les capacités introduites sont de transformer une figure par symétrie, translation ou rotation, d'analyser et de construire des frises, des pavages et des rosaces. V © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Cette activité permet de remobiliser et de faire le point sur les différentes transformations rencontrées au cycle 3 en 5e et 4e.
L'étude de ce pavage permettra également de réactiver les connaissances sur les frises et les rosaces. Cette première activité peut débuter par un travail individuel court suivi d'un travail de groupe pour une remobilisation plus efficace de ces transformations et de leurs propriétés. 1.
Il y a bien sûr plusieurs symétries, translations et rotations possibles. On pourra noter, par exemple : • Les triangles 1 et 2 sont symétriques par rapport à la droite noire. • Les triangles 3 et 4 sont symétriques par rapport au point I.
• Le triangle 7 est l'image du triangle 4 par la translation définie par la flèche rouge. 5 1 I 2 3 4 7 2. Les caractéristiques de chacune de ces transformations ont été données dans la question 1. Une figure et son image par une symétrie, une translation ou une rotation sont superposables.
Ces transformations conservent les alignements, les angles, les longueurs et les aires. On rappellera qu'une translation est complètement définie par une direction, un sens et une longueur. Il pourra être intéressant de proposer aux plus rapides d'écrire un programme de construction permettant de construire ce pavage et de le réaliser à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique. • Le triangle 6 est l'image du triangle 5 par la rotation de centre V, d'angle 60° et dans le sens antihoraire. Activité 2 Jeu vidéo Intentions des auteurs Il devra émerger les deux éléments qui caractérisent une homothétie : un centre et un rapport. La formalisation d'une définition n'est pas nécessaire à ce stade si les élèves n'en éprouvent pas le besoin. De même que pour l'activité 1, un travail de groupe précédé d'un travail individuel permettra de construire plus efficacement cette nouvelle transformation.
L'objectif de cette activité est de découvrir l'homothétie. Les prérequis nécessaires sont de reconnaitre et caractériser des symétries, des translations et des rotations, connaitre la notion d'agrandissement, les coordonnées d'un point, savoir calculer avec des nombres relatifs. La capacité introduite est de transformer une figure par homothétie. Les constructions des 4 portes ainsi que la modélisation des déplacements par les 3 premières transformations ne posent pas de problème pour les élèves. Cependant, parler de transformation pour la porte 4 peut être perturbant pour certains. C'est une rupture pour les élèves avec toutes les transformations qu'ils connaissent et pratiquent depuis plusieurs années, car c'est la première fois qu'ils rencontrent une transformation qui ne conserve pas les longueurs. Cependant, étant familiarisés avec les agrandissements et les réductions depuis le début du cycle, ils iront vers cette nouvelle transformation naturellement. 110 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 6 1. 3 2 1 –3 –2 –1 0 –1 1 2 3 4 2. Niveau 1 Niveau 4 3 9 2 8 1 –1 7 0 1 2 3 6 –1 5 –2 4 –3 3 Le triangle vert est le symétrique du triangle jaune par rapport à l'axe des abscisses. Niveau 2 2 3 1 2 0 1 –3 –2 –1 0 1 2 3 –2 3 4 5 6 7 8 9 Il est naturel pour les élèves de parler de coefficient ; par contre le centre peut être un peu plus difficile à faire émerger. On pourra amener les élèves vers une réflexion suivant la position de cet agrandissement par rapport au triangle jaune et faire ainsi apparaitre la nécessité d'introduire un point pour caractériser cette nouvelle transformation.
Il est important d'insister sur le fait que l'on a défini une transformation qui ne conserve pas les dimensions d'une figure. On peut demander aux élèves de construire l'image des triangles vert, rouge et bleu par cette nouvelle transformation. –3 Le triangle rouge est le symétrique du triangle jaune par rapport au centre du repère. 5 4 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2 Pour obtenir le triangle rose, on agrandit le triangle jaune dans un rapport (ou un coefficient) égal à 3 tout en faisant glisser ces sommets le long de droites passant par O, l'origine du repère. On définit ainsi une nouvelle transformation caractérisée par un centre et un nombre. Cette transformation est appelée l'homothétie de centre 0 et de rapport 3.
–1 Niveau 3 1 3 2 1 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 –1 Le triangle bleu est l'image du triangle jaune par la translation définie par la flèche bleue. Activité 3 Le curseur Intentions des auteurs 1. L'objectif de cette activité est d'utiliser un logiciel de géométrie dynamique pour transformer une figure par homothétie et en observer les effets. Les prérequis nécessaires sont de savoir utiliser un logiciel de géométrie dynamique, connaitre la définition d'un trapèze rectangle. La capacité introduite est de transformer une figure par homothétie. Cette activité, en plus de permettre d'observer les effets d'une homothétie sur une figure, mettra en évidence l'idée d'agrandir ou réduire en faisant glisser les points d'une figure le long de droites convergentes vers un même point et permettra ainsi aux élèves de s'approprier davantage la définition donnée d'une homothétie. 2. a. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 111 3. a. b. Les points O, A et A′ sont alignés. Les points O, B et B′ sont alignés. Les points O, C et C′ sont alignés.
Les points O, D et D′ sont alignés. Si k > 0, k est le rapport de l'homothétie ; on a : OA′ = k × OA ; OB′ = k × OB ; OC′ = k × OC et OD′ = k × OD. b. • Lors d'un agrandissement, le rapport de l'homothétie est plus grand que 1. • Lors d'une réduction, le rapport de l'homothétie est plus petit que 1. c. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. c. Une homothétie de rapport –1 est une symétrie centrale.
d. Cliquer sur chaque point et cliquer sur « Afficher la trace ». d. L'homothétie conserve les formes, l'alignement et les angles, MAIS elle ne conserve pas les distances. Activité 4 Une maille triangulaire Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir et comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs et les aires.
Les prérequis nécessaires sont de savoir que diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse, de connaitre les premiers carrés parfaits. La capacité introduite est de transformer une figure par homothétie. Toutes les figures étant copiées sur la version papier ou numérique, il est possible de faire cette activité sans ouvrir le fichier. Cependant, il sera bien sûr plus intéressant et donc plus constructif pour l'élève de manipuler. 112 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 1. 2. Rapport d'agrandissement 2 3 4 5 Les longueurs sont multipliées par … 2 3 4 5 Les aires sont multipliées par … 4 9 16 25 3. Il pourra être utile de rappeler à certains élèves la propriété suivante : Diviser par un nombre non nul, c'est multiplier par son inverse. Le triangle ABC peut être pris comme unité d'aire. Il suffit donc de dénombrer le nombre de triangles superposables pour calculer l'aire du triangle AED. M 1 4 1 5 Les longueurs sont multipliées par … 1 2 1 3 1 4 1 5 Les aires sont multipliées par … 1 4 1 9 1 16 1 25 4. Lors d'un agrandissement ou d'une réduction de rapport k, les longueurs sont multipliées par k et les aires par k2.
I 50° A b. 1 3 3. O a. 1 2 On peut préciser que certains rapports sont décimaux et d'autres non. e Savoir-fair 2 Rapport de réduction L O I M 50° © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 50° L A 9 1. H 2. S H′ M′ A′ L′ R A′ M O I′ 50° R 3. I H′ M′ A H L G S G′ 5 1. R J I 10 O 2. J 1 2 I O′ O 1. MAX est l'image de ZOE par une homothétie de rapport 2,5. Or, par une homothétie de rapport 2,5, les longueurs sont multipliés par 2,5 donc les périmètres sont aussi multipliés par 2,5. On a donc MAX = ZOE × 2,5 = 12 × 2,5 = 30 cm. Par une homothétie de rapport 2,5, les aires sont multipliées par 2,52. Donc : MAX = ZOE × 2,52 = 6 × 6,25 = 37,5 cm2. 1 2. LYN est l'image de ZOE par une homothétie de rapport . 2 1 1 = 12 × = 6 cm Donc LYN = ZOE × 2 2 2 1 1 1 et LYN = ZOE × = ZOE × = 6 × = 6 × 0,25 = 1,5 cm2. 2 4 4 Le rapport de l'homothétie est inférieur à 1 donc LYN est une réduction de ZOE. ZOE est un triangle rectangle ; or les homothéties conservent les angles donc LYN est aussi un triangle rectangle. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 113 13 1. Voici le motif qui se répète. On obtient la rosace en construisant les images successives de ce motif par une rotation de centre E et d'angle 90°. 3.
(k) B1′ O E 2.
On peut obtenir le motif trouvé au 1. en traçant le symétrique par rapport à la droite (AE) du motif élémentaire ci-dessous. A A1′ R1′ S1′ C R A g S B 16 a. L'image du point A est le point D.
b. L'image du point E est le point H. c. L'image du point F est le point G. E 17 a. 3. A E A′ b. A A′ Exercices Transformer une figure par symétrie, translation ou rotation 18 1. A R M S flash Questions © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
14 a. Les triangles rose et violet sont symétriques par rapport à un axe. b. Les triangles rose et bleu sont symétriques par rapport à un point. c. Le triangle bleu est l'image du triangle beige par une translation. d. Le triangle rose est l'image du triangle vert par une rotation. 15 1. 2. A R M S (k) 3. O A C R B S g 2. C′ R′ A R M S A′ S′ (k) 4. B′ F E A R M S O A C 114 R g S ESPACE ET GÉOMÉTRIE B C 1′ 23 1. et 2. Pour construire l'image de DRA par l'homothétie de Transformer une figure par homothétie Questions flash 19 a. La figure bleue n'est pas correcte car elle est dans le mau- vais sens. b. La figure verte n'est pas correcte car elle est trop basse. c. La figure bleue n'est pas correcte car elle est mal placée (pas alignée avec les deux autres). d. La figure verte n'est pas correcte car elle est penchée. 20 a. centre O et de rapport 0,6, on peut tracer les images D′ et R′. On trace la demi-droite [OR), puis on place le point R′ tel que OR′ = 0,6 × OR. On recommence pour le point D puis on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont inchangés et les longueurs multipliées par 0,6. R D b. D′ R′ O O O Remarque : Pour les exercices de construction 21 , 22 et 23 , on pourra proposer aux élèves les plus fragiles de les effectuer à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique afin qu'ils puissent davantage se concentrer sur le concept et sur les images mentales que sur la manipulation des instruments. 21 On peut commencer par construire l'image des points K et © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. N, puis compléter en utilisant les propriétés de l'homothétie. A A′ 24 • Par une homothétie de rapport 4, les longueurs sont multipliées par 4 donc les périmètres également : R′H′I′N′ = (3,5 + 2) × 2 × 4 = 44 cm. • Par une homothétie de rapport 4, les aires sont multipliées par 42 soit par 16 donc : R′H′I′N′ = (3,5 × 2) × 16 = 7 × 16 = 112 cm2.
25 Par une homothétie de rapport k, les aires sont multipliées par k2. Donc : • fig.
1 = 1,5 × 0,52 = 0,375 cm2 • fig. 2 = 1,5 × 0,32 = 0,135 cm2 N′ • fig.
3 = 1,5 × 0,22 = 0,06 cm2 K′ 26 • Im 1 est l'image du robot par H4. N • Im 2 est l'image du robot par H5. • Im 4 est l'image du robot par H1. • Im 3 est l'image du robot par H2.
• Im 5 est l'image du robot par H3. K J 22 N′ Analyser et construire des frises, des pavages et des rosaces J flash Questions N I L K L′ 27 a. On obtient le motif du pavage en effectuant une symétrie centrale de centre O. b. On obtient le motif du pavage en effectuant deux rotations successives de centre I et d'angle 120°. O I c.
On obtient le motif du pavage en effectuant une symétrie axiale. d. On obtient le motif du pavage en effectuant cinq rotations successives de centre O et d'angle 60°. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures O 115 28 1.
La translation qui transforme A en B permet d'obtenir la frise 3. à partir du motif ci-dessous. A B 2. En effectuant à partir du motif ci-dessous une symétrie axiale suivie d'une translation dans la même direction, on obtient le motif élémentaire précisé à la question 1. t in Faire le po QCM 1 C B 2 1. C 2. A 3 B D Carte mentale Glisser Tourner Retourner Agrandir/Réduire Translation une direction une longueur un sens Rotation un centre un angle un sens Symétrie centrale : rotation d'angle 180° Symétrie axiale un axe Homothétie un centre un rapport k Les longueurs sont multipliées par k. Les aires sont multipliées par k2. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
O O Algorithmique et outils numériques 29 Effet tunnel 1. Ce script permet de tracer un carré. 2. a. Au début de l'exécution du script, la variable k vaut 50. b. Avant que la variable k ne change de valeur, la longueur est 50 unités. c.
Quand la variable k change de valeur pour la première fois, sa nouvelle valeur est 50 × 1,1 soit 55. d. Ce script permet de tracer 15 carrés. e. C'est une homothétie de centre le point de coordonnées (–100 ; –100) et de rapport 1,1.
f.
Par une homothétie de rapport 1,1 les longueurs sont multipliées par 1,1. La longueur du dernier carré tracé est donc 50 × 1,114 soit 189,874 916 8 unités soit environ 190 unités. Son aire vaut donc : 189,874 916 82 ≈ 36 052 unité2. 116 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 3. a. Il est possible de donner une variable à la couleur du stylo et ainsi de faire varier

le ton de la couleur allant de rouge à magenta.

b. Pour avoir une réduction, il faut que le rapport de l'homothétie soit inférieur à 1. 31 Une propriété des homothéties L'objectif de cet exercice est de démontrer que l'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle. Pour cela, on peut utiliser les propriétés sur les angles correspondants (cas rapport positif) alternes-internes (cas du rapport négatif) ou bien utiliser la réciproque du théorème de Thalès si la notion a déjà été traitée. 1. a. c. Attention ! On tourne dans le sens antihoraire donc on tourne de 60° par rapport à l'horizontale et non de 120°. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. b. c. Ces deux segments sont parallèles avec le segment [AB]. d. Il semble que l'image d'un segment par une homothétie soit un segment parallèle. 30 De la profondeur 1. Le centre de cette homothétie est le centre du grand carré. 2. Pour réaliser cette figure, on commence par tracer un carré, puis on applique 14 fois l'homothétie de rapport 0,9 et de centre le centre du carré de départ. On obtient la figure ci-dessous. 2.

a. Pour démontrer cette conjecture, on peut utiliser les propriétés sur les angles alternes-internes ou bien la réciproque du théorème de Thalès. b. Démonstration utilisant les angles : . L'angle CB ′A ′ est l'image de l'angle CBA Or, l'homothétie conserve les mesures des angles donc . CB ′A ′ = CBA sont de même mesure. Les angles CB ′A ′ et CBA Les droites (AB) et (A′B′) sont coupées par la sécante (BB′). Or, si deux droites sont coupées par une sécante en formant des angles correspondants de même mesure, alors ces deux droites sont parallèles. Donc (AB) et (A′B′) sont parallèles. Démonstration utilisant la réciproque du théorème de Thalès : Les droites (AA′) et (BB′) sont sécantes en C. A′ et B′ sont les images des points A et B par l'homothétie de centre C et de rapport k. CA ′ On a alors CA′ = k × CA soit = k, CA CB ′ A ′B ′ de même = k et = k. CB AB CA ′ CB ′ A ′B ′ On a donc = = . CA CB AB De plus, les points C, B, B′ et C, A, A′ sont alignés dans le même ordre. L'égalité de Thalès est vérifiée, on peut donc affirmer que les droites (AB) et (A′B′) sont parallèles. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 117 2. On utilisera donc les outils suivants : Problèmes On peut également utiliser un curseur traces des deux triangles. ; a=2 ; . en affichant les 32 Fête foraine 180 ÷ 4 = 45 Donc chaque secteur angulaire mesure 45°. 4 × 45 = 135 Julia va donc gagner 3 points. 33 Le pharaon 1. et 2.

On peut commencer par construire l'image du point A, puis on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont conservés et les longueurs divisées par 2. A A′ B 36 Hygiène et sécurité Panneau 1 : symétrie axiale et homothétie. Panneau 2 : symétrie axiale et rotation. 34 Les Daltons 1. Lili pense à la symétrie axiale et à l'homothétie. 2. Antone a raison, il n'y a ni symétrie ni homothétie. Par exemple, il manque les gouttes de sueur de Joe sur son image sur l'eau pour la symétrie. Les proportions pour le nez de William, Jack et Averell ne sont pas respectées. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On pourra bien sûr faire constater d'autres arguments à l'oral et les noter sur la figure : alignements de points non respectés… 37 Transformations artistiques • La rosace centrale est construite à partir d'un motif composé d'une chauve-souris imbriquée dans un ange sur lequel on applique successivement des rotations de centre O et d'angle 120°. • Cet ange et cette chauve-souris ont chacun un axe de symétrie. • On observe également que certaines chauve-souris ont subi une homothétie par rapport à d'autres. Il en est de même pour certains anges. Sur la figure ci-dessous, on observe une homothétie de centre J. O 35 Le bijou 1. • Construire un triangle ABC rectangle en A tel que = 30°. ABC • Construire le symétrique ABC′ de ABC par rapport à la droite (AB). • Effectuer 5 rotations successives sur les triangles ABC et ABC′ de centre B et d'angle 60°, 120°, 180°, 240° et 300° (ou bien 5 rotations de même angle sur les images successives). J Remarque : ici, le sens n'a pas d'importance. • On trace ensuite l'image de chacun des 12 triangles par la translation qui transforme C en E. On obtient ainsi le motif de base ci-dessous. 38 The torn page 1. Zoé a effectué une homothétie de centre I et de rapport –2.

2. Ici, le rapport de l'homothétie est négatif, cela peut poser des problèmes à certains élèves. On insistera sur le fait que lorsque l'on fait glisser les points de la figure de l'autre côté du centre, la figure effectue un demi-tour autour de ce centre. Pour les élèves plus fragiles, il peut être intéressant de leur proposer d'utiliser un logiciel pour tracer les images des arcs de cercle. I Pour obtenir la frise représentant le modèle du bijou, on applique successivement 5 translations sur ce motif de base. 118 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 39 La Lune et le Soleil Les points T, L et S sont alignés. Les points T, L′ et S′ sont alignés : LL ′ TL = = 2,5 × 10 –3 TS SS ′ La transformation permettant de passer du disque représentant le Soleil à celui représentant la Lune est une homothétie de centre T et de rapport 2,5 × 10 –3. 40 La tache d'encre Pour poursuivre le travail de Pierre on utilise les propriétés des homothéties : les angles sont inchangés et les longueurs divisées par 2. On commence donc par construire l'angle L ′I ′J′ tel qu'il ait la même mesure que l'angle L IJ et tel que I′J′ = IJ ÷ 2. On trace ensuite l'angle I′L ′K ′ tel qu'il ait la même mesure que et tel que L′K′ = LK ÷ 2. l'angle ILK I H H′ J I′ J′ M′ L′ K′ 42 Le recadrage 1. Un rectangle de dimensions 21 × 29,7 n'est pas un agrandissement d'un rectangle de 10 × 12,5 car : 21 29,7 = 2,376. = 2,1 et 12,5 10 Hervé devra donc rogner sa photo de départ. 2. On va rogner le rectangle ABDE de sorte que AFHG soit l'image du nouveau rectangle dans une homothétie de centre A.

K M 3. • Calculons l'aire du losange ABCD : Le losange ABCD est constitué de 4 triangles rectangles superposables ; calculons l'aire d'un de ces triangles. Pour cela, on commence par calculer la longueur OB. Dans le triangle OCB rectangle en O, on a : OB OB tan 36° = = , donc OB = tan 36° × 2 ≈ 1,46 cm. OC 2 Donc BOC = (2 × OB) ÷ 2 ≈ (2 × 1,46) ÷ 2 ≈ 1,46 cm2. Donc l'aire du losange ABCD est environ : 1,46 × 4 = 5,84 cm2. • Calculons l'aire de l'étoile de base : La rotation conserve les aires donc : 5,84 × 5 = 29,2 cm2. L'aire de l'étoile de base est donc 29,2 cm2. • Calculons l'aire des 6 étoiles : Chaque étoile est l'image de l'étoile de base par une homothétie de rapport 0,7 ; 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1. Or, par une homothétie de rapport k (k > 0), les aires sont multipliées par k2.

≈ 29,2 × (1 + 0,72 + 0,52 + 0,32 + 0,22 + 0,12) ≈ 54,9 cm2 Chacune de ces étoiles est agrandie dans un rapport de 10. Caroline devra donc peindre une surface de : 54,9 × 102 = 5 490 cm2 soit environ 0,6 m2. Or sa bombe peut couvrir 1,5 m2. Elle aura donc assez de peinture avec cette bombe. L 41 La piste aux étoiles On aura besoin de la trigonométrie pour la question 3. 1. G © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Attention ! La construction du losange n'est pas évidente, elle nécessite l'analyse d'une figure à main levée. Comme ce losange est le motif de la rosace obtenue par une même rotation de centre C appliquée 4 fois, on obtient que = 72°.

On a donc BCA = 36°. l'angle BCD De plus, B appartient à la médiatrice de [AC] et (AC) est un axe de symétrie du losange. On peut donc commencer par construire le triangle ABC : – tracer [AC] tel que AC = 4 cm ; x tel que AC x = 36° ; – tracer l'angle AC – tracer la médiatrice de [AC] ; – noter B à l'intersection de cette médiatrice et de [Cx). On construit ensuite le symétrique de ABC par rapport à la droite (AC). On obtient la figure ci-dessous. L'étoile est obtenue en effectuant 4 rotations de centre C et d'angle 72° sur les images successives de ce losange. E J H I D A A D B P B F 43 Pont à haubans Remarques : pour la question 3., on se sert de la propriété démontrée dans l'ex. 31 : « L'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle ». Cette propriété est démontrée en utilisant la réciproque du théorème de Thalès. La réalisation d'un schéma à main levée est indispensable pour réaliser la figure demandée. 72° C 2. O 1. • On commence par étudier le document 1 : – sachant qu'il y a 14 haubans par pylône, il y a 7 points d'ancrage régulièrement espacés sur chaque pylône; – sachant qu'il y a 27 points de fixation sur le tablier et que les haubans partent symétriquement des pylônes, il y a 13 points d'ancrage entre les deux pylônes et 7 autres de chaque côté des pylônes. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 119 On obtient le schéma suivant que l'on complète grâce au document 2 : • Une homothétie de rapport positif multiplie les longueurs par son coefficient. Donc la longueur nécessaire à la construction de 7 haubans est : 6 5 4 3 2 1 28 90,14 × 1 + + + + + + = 90,14 × 7 7 7 7 7 7 7 = 90,14 × 4 = 350,56 cm • La longueur totale d'acier nécessaire est donc : 350,56 × 4 = 1 442,24 cm. 3. On a démontré dans l'ex. 31 que l'image d'un segment par une homothétie est un segment parallèle. On peut donc dire que les 7 haubans situés du même côté d'un pylône sont parallèles. (Comme les points de fixation sont régulièrement espacés, chaque hauban est l'image d'un autre hauban par une homothétie. • Construction d'une réduction à l'échelle 1/1 000 : – on commence par construire le segment [IZ] de longueur 0,170 m = 17 cm ; – on place le milieu Q de [IZ] ; – on construit le segment [IA′] de longueur 0,03 m = 3 cm ; – on trace [QA′] ; – on construit ensuite les images successives de [QA′] par des homothéties de centre I et de rapport : © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

1 6 5 4 3 2 ; ; ; ; et ; 7 7 7 7 7 7 – on construit le symétrique des 7 segments par rapport à la droite (IA′) ; – on construit l'image du pylône et des 14 haubans par la translation définie par la flèche rouge. Voir figure ci-après. 2. Calculons la longueur du hauban [QA′] : • Le triangle QIA′ est rectangle en I ; d'après le théorème de Pythagore, on a : QA′2 = IQ2 + IA′2 QA′2 = 852 + 302 QA′2 = 8 125 donc QA′ ≈ 90,14 cm. 120 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 44 Fabrication d'un pantographe) 1. [OB] est l'image du segment [OA] par l'homothétie de centre O et de rapport 0,4. Donc OB = 0,4 × OA = 0,4 × 54 = 21,6 ; B est donc le point de [OC] tel que OB = 21,6 cm. [BM′] est l'image du segment [AM] par l'homothétie de centre O et de rapport 0,4. Donc BM′ = 0,4 × AM = 0,4 × 54 = 21,6. De plus, M′CAB est un parallélogramme, ses côtés opposés sont donc de même longueur. Donc AC = BM′ = 21,6 cm et C est le point de [AM] tel que AC = 21,6 cm, et dans ce cas CM′ = AB = 54 – 21,6 = 32,4 cm. 2. Pour obtenir des agrandissements, il suffit de placer le stylo guide en M′. Sachant que OM′ = 0,4 × OM, on a : 1 OM = × OM′ = 2,5 × OM′. 0, 4 Ainsi le triangle OAM sera l'image du triangle OBM′ dans l'homothétie de centre O et de rapport 2,5. e. Brevet F (f5) 45 Un triangle dans tous ses états • Le triangle ② est l'image du triangle ① par la rotation de centre le sommet commun à ces deux triangles, d'angle 135° dans le sens antihoraire. • Le triangle ③ est l'image du triangle ① par la symétrie d'axe (AB). • Le triangle ④ est l'image du triangle ① par la translation définie par la flèche suivante : E D C A H B f. F E C A • Le triangle ⑤ est l'image du triangle ① par l'homothétie de centre A et de rapport 2. • Le triangle ⑥ est l'image du triangle ① par la symétrie de centre A. D B H (f6) 46 Une foule de transformations 1. F E 47 La chambre noire D C A Cet exercice donne aux élèves la possibilité de bien visualiser une homothétie de rapport négatif comme étant un agrandissement ou une réduction suivi d'un demi-tour. H B On commence par calculer le rapport de la réduction : OB 50 1 OA × coef = OB, donc coef = = = . OA 1500 300 2. a. Pour les élèves les plus avancés, on peut demander quel est le rapport de l'homothétie.

1 Le rapport de l'homothétie est : – . 300 F © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. E D (f1) C A H 1 Lors d'une réduction de rapport , les longueurs sont 300 1 multipliées par . 300 1 12 × = 0,04 300 Donc la hauteur de l'image du sapin sur l'écran de Sarah sera de 0,04 m soit 4 cm.

B b. (f2) F E 48 La mini-rampe D C A H B c.

F E (f3) D C A H B d. (f4) F E D C A B H 1. On commence par étudier le document 1 : • La face avant peut être modélisée par un rectangle auquel on a enlevé un demi-disque de rayon R et un rectangle de longueur R. • Calculons R, le rayon du disque sur le schéma : R = (BE – CD) ÷ 2 – AJ = (25 – 5) ÷ 2 – 3 = 7 • Les dimensions du rectangle sont donc 7 cm sur 5 cm. π × 72 • L'aire du demi-disque est ≈ 76,96 cm2. 2 L'aire du petit rectangle est 5 × 7 = 35 cm2. L'aire de la face avant est donc environ : 25 × 8 – 76,96 – 35 = 88,04 cm2. Le schéma est une réduction à l'échelle 1/20 donc la face avant peut être considérée comme un agrandissement de rapport 20. L'aire de la face avant est donc environ : 88,04 × 202 = 35 216 cm2 = 3,521 6 m2. Donc la surface des faces avant et arrière est : 3,521 6 × 2 = 7,043 2 m2.

• Grâce au document 2, on sait que 1 litre de peinture couvre 12 m2 donc 0,5 litre couvre 6,5 m2. Il faudra deux bidons de 0,5 litre. Le père de Baptiste devra donc payer au minimum 42,34 €. 2. Grâce au document 2, on sait que le temps de séchage de la peinture est de 2 heures. Livre du professeur – Chapitre 11 Construction et transformation de figures 121 Exercice 2 Travailler trement au 1. On peut rappeler que le coefficient étant négatif, la figure va être agrandie puis va effectuer un demi-tour autour du point O. Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 Lucien a obtenu la figure en construisant l'image de la figure rose par une translation définie par la flèche suivante : J O 2. Les longueurs OT, OP et OR sont doublées. Il a obtenu la bleue en construisant l'image de la figure verte 1 par une homothétie de centre J et de rapport . 2 R P Exercice 1 T O U Lucien a obtenu la figure en construisant l'image de la figure rose par une translation définie par la flèche verte. Q S Écriture d'un énoncé © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. J Il a obtenu la bleue en construisant l'image de la figure verte 1 par une homothétie de centre J et de rapport .

2 Exercice 2 1. O 1. Les questions sont les suivantes : a. Calculer la longueur BC. b. Calculer le coefficient de l'homothétie (de la réduction). c. Calculer le périmètre du triangle A'B'C'. d. Calculer l'aire du triangle A'B'C' . 2. Les réponses sont les suivantes : a. Le triangle ABC est rectangle en B ; d'après le théorème de Pythagore, on a : BC2 = AC2 – AB2 = 52 – 32 = 25 – 9 = 16 donc BC = 4 cm. b. [A'B'] est une réduction de [AB] de coefficient k. On a donc : A ′B ′ 1,8 A'B' = k × AB, donc k = = 0,6 3 AB c. Par une homothétie de rapport 0,6 les longueurs sont multipliées par 0,6 donc les périmètres également : A'B'C' = 0,6 × ABC = 0,6 × (3 + 4 + 5) = 0,6 × 12 = 7,2 cm. 2. d. Par une homothétie de rapport 0,6 les aires sont multipliées par 0,62 : 3 × 4 ABC = = 6 cm2 2 A'B'C' = 0,62 × ABC = 0,62 × 6 = 2,16 cm2 On peut plus tracer l'image M, K et I puis utiliser les propriétés des homothéties : conservation des angles et multiplication des longueurs par 2. Analyse d'une production L de 45° et non de 90°, et dans le mauvais sens. • La construction d'Hédi n'est pas correcte car la rotation K N J M I O 122 • La construction de Valentin n'est pas correcte car il a tourné ESPACE ET GÉOMÉTRIE • • conserve la mesure des angles ; le triangle A'B'C' doit donc être un triangle rectangle, et ce n'est pas le cas. La construction de Cali est correcte. La construction de Louis n'est pas correcte car il a tourné dans le mauvais sens. APITRE CH 12 12 Triangles et quadrilatères Introduction Dans l'esprit du cycle, on a passé du temps en début de cycle sur les constructions, notamment de triangles et de quadrilatères, les angles, le parallélisme. Puis les élèves doivent petit à petit valider par le raisonnement et la démonstration les propriétés qu'ils conjecturent.

Les problèmes de construction ne sont pas pour autant délaissés. Que ce soit avec les instruments de géométrie ou un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation, ils favorisent les représentations et la modélisation. • En 4e, on a dû aborder la notion de triangles égaux et semblables. Cependant, si tel n'était pas le cas, ces notions sont reprises en 3e, avec des exercices d'application.

Dès la 4e, on avait enrichi les connaissances sur les parallélogrammes particuliers (rectangles, losanges et carrés), tout en veillant à ne pas accumuler les propriétés mais à se concentrer sur un petit corpus qui permet de faire beaucoup de raisonnement : les propriétés liées aux diagonales. Ce travail est réinvesti et poursuivi en 3e. • Enfin, un attendu de fin de cycle 4 est d'utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer. Cette année de 3e se concentrera plus encore sur la maitrise d'un langage adapté pour communiquer ses raisonnements, en essayant de faire progresser petit à petit les élèves, en partant de leurs écrits. • Les problèmes se situent dans des champs très divers tels que les champs mathématique, scientifique, technologique ou artistique. On poursuit le travail sur les constructions, en lien avec l'art ou le graphisme. Les problèmes amènent à des raisonnements parfois très difficiles et avec plusieurs pas. Ils sont indiqués plus loin. Dans ces problèmes, afin de respecter l'esprit du programme, on favorisera les raisonnements plus que la maitrise de la démonstration formalisée. On augmentera progressivement nos attentes sur la forme, en différenciant selon le niveau de chaque élève. Le travail en groupe est particulièrement propice à des échanges riches entre élèves afin d'améliorer la communication de leurs idées et la rédaction de leurs justifications. Il est également riche de leur faire voir les productions de chaque groupe et de les commenter de façon constructive. Activités 4 flash Questions 1. Cette mosaïque est constituée de rectangles, de carrés, de triangles rectangles isocèles et de losanges. 2. a. Trois triangles rectangles : CFA, CDB et AEB. b. Trois triangles isocèles non rectangles : CDF, AEF et BDE. c. Deux triangles équilatéraux : DEF et ABC. d. Deux triangles semblables : DEF et ABC. e. Deux triangles égaux : par exemple, AEF et BDE Activité 1 Le Verrou de l'estuaire de la Gironde Intentions des auteurs Les objectifs de cette activité sont de réinvestir les connaissances sur les échelles et les unités de mesure, ainsi que sur les constructions. Les prérequis nécessaires sont de savoir construire un triangle connaissant un côté et deux angles adjacents, d'utiliser une échelle. 11,5 × 25 000 = 287 500 et 287 500 cm = 2 875 m 9 × 25 000 = 225 000 et 225 000 cm = 2 250 m Le bateau est approximativement à 2 875 m de la citadelle de Blaye et à 2 250 m de Fort Médoc. Avec un logiciel de géométrie dynamique : Les élèves peuvent utiliser 3 250 comme longueur entre la citadelle et Fort Médoc ; il faudra simplement qu'ils fassent un grand zoom arrière pour voir le segment en entier. 1. Avec un dessin à l'échelle 1/25 000 sur une feuille : 3 250 m = 325 000 cm 325 000/25 000 = 13 Citadelle m c ,5 11 (13 cm) 3 250 m n iro nv ee ur es 43° nm (o © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 6 R C 3 E Q U I L A T E R A L C S R T O R A C E N E 2 L O S A N G E L L E 5 C E R C L E n9 60° Fort (on e sur me iro env cm On mesure sur son dessin environ 11,5 cm entre le bateau et la citadelle et 9 cm entre le bateau et Fort Médoc. 2. Le bateau est approximativement à 2 888 m de la citadelle de Blaye et 2 274 m de Fort Médoc. 3. Les soldats auront le temps de charger les canons puisque le bateau est à plus de 2 km de la citadelle. Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 123 Activité 2 Mosaïques et pavements Intentions des auteurs c. Les objectifs de cette activité sont de réinvestir les connaissances sur les triangles et les quadrilatères particuliers, les calculs d'aire par comptage d'unités d'aire, de reconnaitre une situation qui peut être traitée à l'aide du théorème de Pythagore. Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Pythagore, des calculs d'aire. 1. La pièce A est un triangle rectangle. La pièce B est un carré. La pièce C est un parallélogramme. La pièce D est un rectangle. La pièce E est un parallélogramme. La pièce F est un losange. 2. La figure 1 peut être formée avec : – 2 pièces A et 1 pièce B ; – 4 pièces A ; – 2 pièces C. La figure 2 peut être formée avec 2 pièces F. La figure 3 peut être formée avec 2 pièces E (dont une retournée) et une pièce F. 3.

a. et b. 0,5 cm A D B D A D E E E E F F D A D B D A © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. On a utilisé 4 pièces E, 2 pièces F, 6 pièces D, 2 pièces B et 4 pièces A. Il y a plusieurs façons de calculer, les élèves peuvent même compter les carrés , ce qui permet au passage de redonner du sens au centimètre carré (qui est le carré de côté 1 cm). Trouver les surfaces des pièces E et F permet de revoir l'aire d'un parallélogramme et d'un losange par découpage et assemblage pour retrouver un rectangle. Surface de chaque pièce : A : 0,5 cm2 ; B : 1 cm2 ; D : 2 cm2 ; E : 1 cm2 ; F : 1 cm2. 4 × 1 + 2 × 1 + 6 × 2 + 2 × 1 + 4 × 0,5 = 22 La surface bleue a pour aire 22 cm2. d. L'élève devra utiliser le théorème de Pythagore pour calculer la longueur des coins biseautés. A La pièce A est un triangle rectangle, je peux donc utiliser le théorème de Pythagore : 12 + 12 = 2 L'hypoténuse a pour longueur 3 × 2 + 4 × 2 + 4 × 2 = 14 + 4 2 La valeur exacte de la longueur du contour extérieur de cette figure est 14 + 4 2 cm, soit approximativement 19,7 cm. Un élève qui aura pris 1,4 cm comme valeur approchée de obtiendra 19,6 cm comme longueur. 2 Activité 3 À la manière de Théo van Doesburg Intentions des auteurs 2 cm.

4. On obtient : L'objectif de cette activité est de réinvestir les connaissances sur les triangles égaux et semblables. Le prérequis nécessaire est la connaissance de la définition des triangles égaux et des triangles semblables. 1. Dans le petit rectangle, les côtés opposés sont de même longueur. Donc les deux triangles T1 et T2 ont leurs trois côtés de même longueur 2 à 2. Donc T1 et T2 sont égaux. 2. Je partage le rectangle moyen en deux triangles T3 et T4 et le grand rectangle en deux triangles T5 et T6. Comme le rectangle moyen est un agrandissement de rapport 2 du petit rectangle, alors : ×2 De même : Dimensions de T1 → Dimensions de T3 × 1,7 Donc : Dimensions de T3 → Dimensions de T5 × 2 × 1,7 Dimensions de T1 → Dimensions de T5 × 3,4 Dimensions de T1 → Dimensions de T5 Alors les triangles T1 et T5 sont semblables. De même, T3 et T5 sont semblables. 3. Les dimensions de T3 et T5 sont : – les angles sont de même mesure que ceux de T1 ; – les longueurs des côtés de T1 sont multipliées par 2 pour obtenir celles de T3 ; – les dimensions de T1 sont multipliées par 3,4 pour obtenir celles de T5. 124 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Il est intéressant de faire cette construction avec un logiciel de géométrie dynamique, on peut (re)voir les homothéties à cette occasion. Programme de construction : – construire un carré ABCD de côté 10 cm, tracer la diagonale [AC] ; – construire le rectangle « PETIT » de côtés 2,5 cm et 1 cm de façon à ce que la diagonale du carré soit la médiatrice des côtés de longueur 2,5 cm ; – tracer les quatre demi-droites d'origine A passant par les quatre sommets du rectangle « PETIT » ; – construire le rectangle « MOYEN » image du rectangle « PETIT » par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; – construire le rectangle « GRAND » image du rectangle « PETIT » par l'homothétie de centre A et de rapport 3,4.

V Pour que le triangle soit isocèle en E, il faut que les angles FGE et EFG soient de même mesure. = EFG = 28°. Donc FGE La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. = 180° – 28° – 28° = 124°. Donc FEG 4 ABED est un parallélogramme. Donc (DA) // (EB).

Les parallèles (DA) et (EB) et la sécante (AE) forment des angles alternes-internes de même mesure. = 74°. = AEB Donc EAD 6 Dans le quadrilatère ABCD : (AB) // (CD) et AB = CD. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc ABCD est un parallélogramme.

Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. Donc AD = BC. 8 49° A I 2. VRAI est un parallélogramme. Dans un parallélogramme, les côtés opposés sont deux à deux de même longueur. Donc IA = VR = 6,4 cm et VI = RA = 4,8 cm. R 3. 6,4 cm 49° 4,8 c m 2 R 6,4 4,8 13 1. e Savoir-fair V = CAB = 34° Les triangles AED et ABC ont un angle commun : EAD = ABC = 90°. De plus, AED La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. = ACB = 180° – (34° + 90°) = 56°. Donc AED Les triangles AED et ABC ont donc leurs trois angles deux à deux de même mesure. Ils sont donc semblables. A 11 PILE a quatre angles droits, c'est donc un rectangle. 12 1. M 4,2 cm 4c m I 14 1. (#2) (#1) O W 3,2 3 cm m 4,5 c N T T cm O H A 2. MO = TN = 4,2 cm ; ON = MT = 3 cm Si un quadrilatère a ses côtés opposés deux à deux de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc MONT est un parallélogramme. 3. M 4c m N 2. Les diagonales de WHAT sont les diamètres [WA] de (1) et [HT] de (2). O est le centre des cercle (1) et (2), donc O est le milieu des diamètres [WA] et [HT].

Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme. Donc WHAT est un parallélogramme. 16 1.

On s'aide d'un croquis : G R 6,1 3,9 O m 4,2 c 3 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Donc (PI) // (EL). Les points P, F, A et I sont alignés. Les points E, X, U et L sont alignés.

Donc (FA) // (XU). De plus, FA = XU. Si un quadrilatère non croisé a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc FAUX est un parallélogramme. T M Les élèves, ou le professeur, pourraient essayer de savoir si MONT est un rectangle. Pour cela, il faudrait tester la relation de Pythagore. Ce serait donc l'occasion de réinvestir cette notion abordée dès la 4e. I GRIM est un rectangle, donc ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur et ses diagonales sont de même longueur. Donc GM = RI = 3,9 cm et MR = GI = 6,1 cm. Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 125 2. G et LUP Dans le triangle PLU isocèle en L, les angles LPU sont égaux. De plus, la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. = LUP = (180° – 37°) ÷ 2 = 71,5°. Donc LPU Deux triangles égaux ont leurs angles de même mesure deux à deux. = 37° et SPU = SUP = 71,5°. Donc PSU 6, 1 3,9 cm R cm 19 1.

R A Z T E I M 17 On s'aide d'un croquis : F E EG = FH G H 1.

EF = GH et FG = HE. Si les côtés opposés d'un quadrilatère sont de même longueur, alors c'est un parallélogramme.

Donc EFGH est un parallélogramme. 2. EG = FH Si les diagonales d'un parallélogramme sont de même longueur, alors c'est un rectangle. Donc EFGH est un rectangle. 18 1. 2. Les triangles RZA, AZT, TZE et EZR sont isocèles rectangles en Z, donc : RZ = ZA = ZT = ZE = ZR et [RT] ⊥ [EA]. Alors RT = EA. Donc les diagonales [RT] et [EA] de RATE sont perpendiculaires, de même longueur et se coupent en leur milieu Z.

Si les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu, c'est un parallélogramme. Si en plus elles sont perpendiculaires et de même longueur, c'est un carré. Donc RATE est un carré. Exercices Utiliser les propriétés des angles et des triangles L flash Questions 20 Quatre couples d'angles alternes-internes de même mesure : = CDK FCD LBA = IAB = CDA BCD CBG = GAD cm 21 Les droites (AB) et (DC) et la sécante (EF) forment deux angles alternes-internes de même mesure, donc (AB) et (DC) sont parallèles. 6,2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 3 7° 22 Expression de la mesure de l'angle manquant en fonction de D x : 180 – x – 2x = 180 – 3x. 23 Les droites (FD) et (GA) avec la sécante (AC) forment les deux P U X 24 La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. Dans le triangle ABC : = 180° – 108° – 36° = 36° ACB = 180° – 108° = 72°. Les points B, A et D sont alignés, donc DAC Le triangle ACD est isocèle en D, donc : = DAC = 72° et ADC = 180° – 2 × 72° = 36° ACD Les parallèles (BA) et (EC) et la sécante (BC) forment des angles = ABC = 36°. alternes-internes de même mesure, donc ECB Dans le triangle BEC : = 180° – 90° – 36° = 54° CBE 25 1. La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. S 2. PLUS est un losange. Les diagonales d'un losange se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. Donc les segments [PU] et [SL] se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires. 3. Le losange PLUS est formé de deux triangles isocèles égaux : PLU et PSU. 126 et ACD . angles alternes-internes GAC Pour que (FD) et (GA) soient parallèles, il faut que : = ACD GAC mesure 43°, donc : ACD et ACF forment un angle plat et ACF ACD = 180° – 43° = 137°. mesure également 137°. Il faut donc que GAC ESPACE ET GÉOMÉTRIE Dans le triangle ABC : = 180° – 105° – 42° = 33° BAC 2. Les droites (AD) et (BC) et la sécante (AC) forment deux angles alternes-internes de même mesure : = ACB = 42° DAC Donc les droites (AD) et (BC) sont parallèles. 3. (AB) // (CD) et (AD) // (BC) Donc ABCD est un parallélogramme. 4. Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même mesure. = ABC = 105°. Donc ADC Dans le triangle ADC : = 180° – 42° – 105° = 33° ACD La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. = 180° – 112° – 53° = 15°.

Donc ABE 31 La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. On calcule l'angle manquant dans chacun des deux triangles : 180° – 63° – 48° = 69° et 180° – 63° – 69° = 48° Les deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, ils sont donc semblables. On peut également utiliser les parallèles (AB) et (DC) et la . sécante (AC) pour trouver la mesure de l'angle DAC Reconnaitre des triangles égaux et des triangles semblables 32 1. Les longueurs des côtés des triangles ABC et MNA, de la plus grande à la plus petite, sont : Triangle ABC : BC = 5,7 cm ; AB = 4,8 cm ; AC = 3,6 cm. Triangle MNA : MN = 1,9 cm ; MA = 1,6 cm ; NA = 1,2 cm. On constate que les longueurs sont proportionnelles 2 à 2 : BC AB AC = = =3 MN MA NA Donc les triangles ABC et AMN sont semblables.

2. Le rapport de réduction pour passer des longueurs de ABC 1 aux longueurs de MNA est . 3 flash Questions 26 Les triangles sont égaux dans les figures ①, ② et ③. Pour la figure ④, les deux angles de même mesure ne sont pas compris entre les deux paires de côtés de même longueur. Cela peut être l'occasion de faire produire aux élèves un contreexemple, avec ou sans logiciel de géométrie dynamique. C Reconnaitre un parallélogramme D flash Questions B A 33 1. TRUC est un parallélogramme donc ses côtés opposés sont deux à deux de même longueur. Donc UC = RT = 7,2 cm et RU = TC = 4,3 cm. 2. Les angles opposés d'un parallélogramme sont de même = RTC = 82°. mesure. Donc RUC F DAC et FAC sont dans la situation de la figure ④. Or ils ne est obtus alors que l'angle sont pas égaux car l'angle ADC AFC est aigu. 34 Si les diagonales d'un quadrilatère ont le même milieu, alors c'est un parallélogramme.

Les diagonales des deux quadrilatères bleus sont des diamètres de deux cercles de même centre, donc elles ont le même milieu. 27 D'après le codage, il n'y a que pour la figure ③ qu'on peut affirmer que les deux angles sont semblables. Les diagonales d'un losange sont perpendiculaires et se coupent en leur milieu. Donc, si on nomme Z le point d'intersection des deux diagonales, on a : ZA = ZC ZB = ZD = BZC = CZD = DZA = 90° AZB Donc les quatre triangles AZB, BZC, CZD et DZA ont deux angles de même mesure compris entre deux côtés de même longueur deux à deux.

Donc ces quatre triangles sont égaux. B 36 5,4 cm A 6 cm Les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc avec les sécantes (BC) et (AD) elles forment les angles alternes-internes égaux = DAB et ABC = DCB . De plus, AB = DC. suivants : ADC Donc les triangles ABE et DCE ont deux côtés de même longueur (AB = DC) avec les deux paires d'angles adjacents à ces côtés de même mesure deux à deux.

Donc les triangles ABE et DCE sont égaux. C F D E 76° m = DCF = 112° angles alternes-internes de même mesure : EAD De plus, CF = AE et CD = AB. Les triangles FCD et EAB ont deux à deux un angle de même mesure compris entre deux côtés de même longueur. Donc FCD et EAB sont égaux. 2. Deux triangles égaux ont leurs angles deux à deux de même mesure. = CFD = 53°. Donc AEB G H Il peut être difficile pour les élèves de rédiger la réponse dans un langage mathématique maitrisé, même en fin de cycle 4. Il est intéressant de privilégier le raisonnement dans ce type d'exercice. Ils peuvent être autorisés à regarder le cours page 210 et ils doivent repérer la propriété qui peut servir ici. On peut demander une justification orale uniquement, ou rédigée en groupes. On exigera le codage des angles de même mesure sur un schéma, la mention des droites parallèles et de l'égalité entre des angles alternes-internes. 30 1. Les droites parallèles (d) et (d') et la sécante (AC) forment des F E 5 cm 29 35 3c © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 28 ABCD est un losange. 72° G H Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 127 6 cm Reconnaitre un parallélogramme particulier J I flash Questions 89° 39 1. Vrai. 4,8 cm 40 • Léa AB = DC et AD = BC Donc ABCD est un parallélogramme. AC = BD Donc ABCD est un rectangle.

Un rectangle a quatre angles droits. ^ Alors ADC = 90° K Parallélogramme MNOP, voir figure en bas de page. 37 1. Dessin 1 → Propriété b . Dessin 2 → Propriété c . • Dessin 3 → Propriété a . Dessin 4 → Propriété b .

E�GH es� �� los�n�� c�� �e� �iag�n��e� �� c�����n� �� ���� ������ �����n�i��l������n�. Le� �ua��� cô�é� �� E�GH s�n� �� ���� l�n����� e� EF = 4,3 ��. �G = 4,3 �� 2. Dessin 1 → Propriété f . Dessin 2 → Propriété e . Dessin 3 → Propriété d . Dessin 4 → Propriété f et d . milieu, c'est donc un parallélogramme. 2. R est le milieu de [OP] et OR = 3,4 cm. Donc OP = 2 × 3,4 cm = 6,8 cm. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont de même longueur. Donc PU = LO = 5,7 cm. 3. Les côtés opposés d'un parallélogramme sont parallèles. Donc les parallèles (LO) et (PU) forment avec la sécante (OP) des angles alternes-internes de même mesure. = OPU = 38°. Donc LOP 4. 5,7 cm 41 1. cm E M O I 38° R 3,4 D cm O 2. [MD] et [OE] sont deux diamètres du même cercle de centre I. Les diagonales du quadrilatère MODE ont le même milieu, donc c'est un parallélogramme. 3. Les diagonales du parallélogramme MODE ont la même longueur, donc c'est un rectangle. 38° P U N 5 cm 92° 6 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 38 1. Les diagonales du quadrilatère LOUP se coupent en leur L Tom 3,5 L 2. Faux. 4. Vrai. 6. Vrai. 3. Vrai. 5. Vrai. P 128 ESPACE ET GÉOMÉTRIE O 42 1.

45 1. V 5 cm P A O 6c m R G E 2. PAGE est un rectangle, donc ses diagonales se coupent en leur milieu et sont de même longueur. Donc OA = OG = OP = OE. 3. et 4. a., b. et c. 50° S 5,1 cm C 41° 5 cm P A L 2. Dans le triangle SAR, la somme des mesures des angles est égale à 180°, donc : = 180° – 50° – 41° = 89°. ASR Donc les diagonales [VA] et [RC] ne sont pas perpendiculaires. VRAC ne peut pas être un losange. A 6c m 43 1. On s'aide d'un croquis : 4,2 cm T R 45° 46° E I Z O P 4,2 cm R © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. T 46° d. L est un point de [PA] tel que PL = PE. I est un point de [EG] tel que EI = EP. PAGE est un rectangle donc (PA) // (EG). Alors les côtés [PL] et [EI] de PLIE sont parallèles et de même longueur.

Donc PLIE est un parallélogramme. De plus, PL = PE = EI. Donc PLIE est un losange. De plus, PLIE possède deux angles droits, donc c'est un rectangle. Alors PLIE est un carré. 45° Z P O 2. TROP semble être un rectangle. t in Faire le po Raisonnement par l'absurde : Si TROP est un rectangle, alors ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu Z.

Donc le triangle TZR est isocèle en Z. et TRZ sont de même mesure. Donc les angles RTZ Or RTZ = 46° et TRZ = 45°. Donc c'est impossible. TROP n'est pas un rectangle. 44 1. ABCD a quatre angles droits, donc c'est un rectangle. QCM 1 A 2 1. C 3 B 4 B 2. A 2. ABCD est un rectangle, donc AB = CD et AD = BC. De plus, E, F, G et H sont les milieux des côtés [AD], [AB], [BC] et [CD]. Les triangles AEF, BGF, CGH et DEH ont donc un angle droit compris entre deux côtés de même longueur. Ces quatre triangles sont donc égaux. 3. Les triangles AEF, BGF, CGH et DEH sont égaux, donc EF = FG = GH = HE. Donc EFGH est un losange. Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 129 G Carte mentale Losange Parallélogramme constitué de deux triangles isocèles égaux ou de quatre triangles rectangles égaux constitué de deux triangles égaux Triangles égaux Triangles semblables B Les angles sont égaux. C A N M constitué de deux ou quatre triangles égaux . et outils numériques 46 Pavage 1. On s'aperçoit déjà qu'il faut effacer tout au démarrage du script. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. constitué de deux triangles rectangles égaux Les longueurs des côtés sont proportionnelles . Algorithmique 2. On s'aperçoit en plus qu'on gagne à réinitialiser la position et l'orientation du lutin au démarrage du script. On a modifié le script initial, pour l'améliorer, en plus de l'avoir répété 9 fois. 130 Rectangle Carré ESPACE ET GÉOMÉTRIE 3. On a fait des essais qui ont conduit à de nouvelles modifications. Le script est long et perfectible, mais il est le résultat de ce qu'un élève pourrait faire à force d'essais. 47 Attention chiens méchants ! 1. a. et b. 2. c. Les cordes de chaque chien ont pour longueur 5 mètres, il faut donc que les centres des cercles soient à une distance supérieure à 10 mètres pour que les chiens ne puissent pas se bagarrer. On peut ne pas exiger des élèves qu'ils prouvent que J est le milieu de [CD]. CDEF est un rectangle de centre Q. Donc les médiatrices des cotés sont des axes de symétrie du rectangle. Donc J est le milieu de [CD]. On considère que le point B est dans sa position la plus éloignée de C quand les cercles se touchent : BQ = 5 m. On utilise le théorème de Pythagore dans le triangle BJQ rectangle en J : BJ2 = BQ2 – JQ2 = 52 – 4,52 = 4,75 Donc BJ = 4,75 m ≈ 2,18 m. Donc CB < 6,5 – 4,75 . Ou encore CB < 4,32 m.

On retrouve bien le résultat obtenu avec le logiciel de géométrie dynamique au dixième de mètre près. 3. a. Par symétrie de centre Q, les triangles MBC et OAE sont égaux. On doit placer les points B et A sur [CD] et [EF] de telle façon que CB = EA. Pour cela, on utilise le centre du jardin rectangulaire et on construit le symétrique de B par la symétrie centrale. a. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

b. 5,48 m + 32,59 m = 38,07 m Chaque chien dispose d'environ 38 m2. CDEF est un rectangle, donc ses côtés opposés sont parallèles. B et A sont des points de [CD] et [EF] tels que CB = EA. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc CBEA est un parallélogramme. b. On trace les cercles de centre A et B et de rayon 5. Puis, dans « paramètres », on active la trace des points A et B pour voir les valeurs possibles des distances CB et AE sans que les cercles se touchent.

Problèmes 48 Mosaïque carrée 1. Les quatre triangles égaux ainsi placés forment un quadrilatère dont les quatre côtés sont de même longueur. C'est donc un losange. De plus, un triangle blanc et un triangle gris ont leurs angles a et aigu deux à deux de même mesure, notons b leurs a + mesures. On a b = 90°. b a a b b a b On obtient des valeurs comprises entre 0 et 4,3 m environ. c. On trace la perpendiculaire à [CD] passant par le centre du rectangle, nommé Q. Cette droite coupe [CD] en J. a Le losange formé possède quatre angles droits, c'est donc un carré.

2. Le vide laissé au centre est formé par quatre segments de même longueur, c'est la différence entre les longueurs du coté a : 8 cm – 6 cm = 2 cm. opposé et du côté adjacent à l'angle De plus, ce quadrilatère possède quatre angles droits puisque les triangles sont rectangles. Donc le vide laissé a la forme d'un carré de côté 2 cm. 3. Nous devons connaitre la longueur du côté du carré formé par les quatre triangles rectangles, elle correspond à l'hypoténuse de ces triangles rectangles. Dans les triangles rectangles égaux, on peut utiliser le théorème de Pythagore : ℓ2 = 62 + 82 = 36 + 64 = 100 donc ℓ = 10. Le carré formé de quatre triangles rectangles a pour côté 10 cm. Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 131 Il faut carreler un mur rectangulaire de 3 m sur 2,40 m donc on doit calculer combien de fois 10 cm rentrent dans la longueur et la largeur de ce mur rectangulaire. 3 m = 300 cm = 30 × 10 cm 2,40 m = 240 cm = 24 × 10 cm 30 × 24 = 720 Il faudra 720 carrés formés de 2 triangles blancs et 2 triangles gris. 720 × 2 = 1 440 Il faudra 1 440 triangles blancs et 1 440 triangles gris. 4. Le vide laissé entre les triangles est un carré de côté 2 cm. Il y aura 720 vides. 2 cm × 2 cm = 4 cm2 720 × 4 cm2 = 2 880 cm2 2 880 cm2 devront être comblés par les petits cristaux.

49 Trois bibliothèques Les trois bibliothèques sont identiques, donc les montants [LI] et [ER] sont parallèles et de même longueur. Si un quadrilatère a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, alors c'est un parallélogramme. Donc LIRE est un parallélogramme. 50 Encadrer © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Un quadrilatère qui possède un angle droit n'est pas forcément un rectangle.

Cette vérification ne suffit pas à prouver que le cadre est rectangulaire.

2. Les deux diagonales n'ont pas la même longueur, donc le cadre ne peut pas être un rectangle. 3. a.

On doit trouver le motif de base qui est répété par translation pour construire cette mosaïque, ensuite on peut trouver combien elle contient de rectangles et de carrés. Le voici : Certains élèves n'arrivent pas à atteindre ce motif ou se perdent dans leurs comptes de rectangles et de carrés. On peut leur proposer de manipuler. • Démarche 2 : Manipuler On trace et on découpe des rectangles et des carrés en grandeur réelle ou à l'échelle 1/2, puis on essaie de les assembler pour réaliser la mosaïque. Cela permet aux élèves d'expérimenter les rotations et translations en jeu ; on peut alors leur proposer de finir le travail avec un outil numérique.

• Démarche 3 : Utiliser un fichier texte MN 12-p222-ex51-eleve Elle ne doit être proposée qu'une fois que les élèves ont modélisé le problème ou manipulé, sinon ils ont fait l'économie du raisonnement et de la modélisation. b. Wafa peut exiger de M. Carré qu'il recommence le travail puisqu'un des angles du cadre mesure moins de 89°. 51 Mosaïque tressée On travaille avec le fichier texte MN 12-p222-ex51-eleve où figurent déjà le motif à répéter et le carré à paver.

On copie et colle ce motif en prenant soin de compter le nombre de motifs qu'on aura mis dans le pavage au fur et à mesure. 12-p222-ex51-prof Les élèves auront des démarches très différentes, c'est vraiment le cœur de cet exercice. Il faut éviter d'induire une démarche en particulier. C'est pourquoi il faut les laisser chercher d'abord seuls, puis en groupe afin qu'ils échangent sur leurs démarches et les optimisent. • Démarche 1 : Schématiser et modéliser long 15 cm presque 7 fois … 14 rectangles 100 cm On se rend alors compte qu'il y a beaucoup de rectangles ou carrés qui débordent : voir fichier 12-p222-ex51-prof Il faut donc se demander combien de fois le motif de base rentre-t-il dans le carré. 132 ESPACE ET GÉOMÉTRIE On a vu qu'il fallait autant de rectangles rouges que de carrés noirs grâce à notre motif de base. La surface totale est de 1 m2, soit 10 000 cm2. Le motif a pour aire 225 cm2 : 4 × (10 × 5) + 4 × 2,52 = 225 10 000 ÷ 225 ≈ 44,4 Il faudra donc environ 45 fois le motif. 45 × 4 = 180 Il faudra 180 rectangles rouges et 180 carrés noirs. 180 ÷ 40 = 4,5 et 196 ÷ 50 = 3,6 Il faudra donc 5 paquets de carreaux rectangulaires rouges et 4 paquets de carreaux carrés noirs. 2. 0,9 cm → 90 m 110 × 90 Area = 110 × 90 Area = 5 × = 24 750 2 Area of the building : 137 750 – 24 750 = 113 000. The surface of this building is 113 000 m2. On peut faire remarquer qu'en réalité, pour avoir assez en comptant les chutes utilisées et les pertes (casses), le carreleur compte la surface à paver augmentée de 5 % à 10 % pour calculer la quantité de carreaux à acheter. D'ailleurs, sur les paquets il est toujours indiqué le nombre de m2 et pas le nombre de carreaux. 52 Enseigne de boulangerie 1 de la surface de sa 9 1 vitrine, alors les dimensions de la pancarte font de celles 3 1 1 de la vitrine (le carré de est). 3 9 7,5 m ÷ 3 = 2,5 m et 3,3 m ÷ 3 = 1,1 m. Les dimensions de la pancarte sont : C'D' = 2,5 m et C'A' = 1,1 m. 1. Si la surface de la pancarte occupe C'est l'occasion de rappeler que lorsque les longueurs sont multipliées par k, les aires sont multipliées par k2 et les volumes par k3. 2. La pancarte rectangulaire A'B'C'D' est centrée sur la vitrine ABCD, donc ces deux rectangles ont le même centre. On note O ce centre. On s'aide d'un dessin à main levée : © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. C D C' D' O A' A 3,3 B' 7,5 B Le triangle ACD est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : AD2 = AC2 + CD2 = 3,32 + 7,52 = 67,14 Donc AD = 67,14 ≈ 8,19. Les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu. Donc AO ≈ 8,19 ÷ 2 ≈ 4,095. 1 Comme A'B'C'D' est une réduction de rapport de ABCD, 3 alors : OA' 1 OA' 1 = ou encore ≈ OA 3 4,095 3 Donc OA' ≈ 4,095 ÷ 3 ≈ 1,365. Et AA' ≈ 4,095 – 1,365 ≈ 2,73.

On peut faire remarquer aux élèves qu'on n'a volontairement pas arrondi au dixième trop tôt dans les calculs, puisque AA' devra être multiplié par 4. 5,8 cm 54 Laser mégajoule Dans cet exercice, les angles roses sont en réalité les angles violets. 1. Les miroirs [CD] et [EF] sont parallèles, avec la sécante (SP), ils forment des angles alternes-internes vert et bleu de même mesure. Les miroirs [GH] et [EF] sont parallèles, avec la sécante (SQ), ils forment des angles alternes-internes rose et bleu de même mesure. Donc les angles verts, les angles verts, bleus et roses sont de même mesure. 2. Les angles verts, bleus et roses sont de même mesure, on les v, note b et r . De plus : = 180° = 2 v + TPE CPD ESF = 180° = 2 b + PSQ = 180° = 2 r + SQR GQH = PSQ = SQR . Donc TPE Les droites (RQ) et (SP) et la sécante (SQ) forment deux = SQR . angles alternes-internes de même mesure : TPE Donc les droites (RQ) et (SP) sont parallèles. 55 À la recherche du point inconnu Cet exercice est l'occasion de revoir la distance entre deux droites et l'aire d'un triangle. Il exploite pleinement les possibilités d'un logiciel de géométrie dynamique pour émettre une conjecture. 1. MN 12-p223-ex55-1-prof-geogebra 4 × 2,73 = 10,92 Il faudra environ 11 mètres de câbles pour soutenir la pancarte. 53 Pentagon 1. The building is a pentagon, formed from five isosceles triangles. For each pentagon, we measure the length of one side of the pentagon and the distance between the center of the pentagon and one summit. • The big one : 2,9 cm on the picture → 29 000 cm in reality (290 m). 1,9 cm on the picture → 19 000 cm in reality (190 m). 290 × 190 = 137 750 2 • The small one : 1,1 cm → 110 m Area = 5 × Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 133 2. Cas 1 : 56 Les allumettes 1. a.

10,5 cm = 3 × 3,5 cm et 14 cm = 4 × 3,5 cm. Il faut bien 10 allumettes (3 + 3 + 4) pour faire ce triangle de côtés 10,5 cm, 10,5 cm et 14 cm. b. Avec 10 allumettes de 3,5 cm on peut faire trois segments de longueurs 3,5 cm, 10,5 cm et 21 cm. Cependant, 3,5 + 10,5 < 21.

D'après l'inégalité triangle, un triangle de côtés 3,5 cm, 10,5 cm et 21 cm n'est pas constructible. 2. Cas 2 : Côté 1 Côté 2 Côté 3 10,5 7 7 10,5 14 10,5 14 14 17,5 On peut construire trois triangles non égaux entre eux avec ces 10 allumettes.

Le dernier est aplati car 7 + 10,5 = 17,5. 57 Transat On s'aide d'un croquis : B 40 m B 0m 300 m 4 A 1027 30 m C d C E 1 E2 E E E 3 4 5 50 cm Conjecture : Le point M doit être situé sur une droite parallèle à (AD) et (CE). © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Pour inciter les élèves à aller plus loin, on peut demander : « Comment peut-on la situer par rapport à (AD) et (CE) ? » Les élèves penseront alors à la situer par une distance entre les droites ; ils peuvent éventuellement faire apparaitre cette distance sur le fichier. On les incitera alors à prouver leur conjecture et trouver précisément ces deux distances. MN 12-p223-ex55-2-prof-geogebra Lorsque C est dans l'encoche E3, le triangle ABE3 est rectangle en B ; on peut utiliser le théorème de Pythagore : AB2 = 502 – 302 = 1 600 Donc AB = 40 m. Lorsque C est dans l'encoche E1, le triangle ABE1 est rectangle en E1, alors d'après le théorème de Pythagore : AE1 = 402 − 302 = 700 L'intervalle d entre les encoches est donc : 50 − 700 ≈ 11,8 cm 2 Dans le cas où le point C serait dans l'encoche E4, les dimensions du triangle ABE4 seraient environ : 61,8 m ; 30 m ; 40 m. 30 + 40 > 61,8 ; c'est donc possible. Dans le cas où le point C serait dans l'encoche E5, les dimensions du triangle ABE5 seraient environ : 73,6 m ; 30 m ; 40 m. 30 + 40 < 73,6 ; ce triangle n'est donc pas possible. On peut caler la barre [BC] dans l'encoche E4 mais pas dans l'encoche E5. d= 58 La pyramide du Louvre (Paris) 1. Ce qui gène Léo c'est que les informations de ces deux sites sont contradictoires. Par exemple, le site A dit que la pyramide est constituée de 675 losanges alors que le site B dit qu'elle est constituée de 603 losanges et 70 triangles. 2. a. • Pour les trois faces triangulaires sans porte À la base, on peut compter 18 triangles. Ensuite on compte les losanges en partant du haut de la face triangulaire : 1 + 2 + 3 + … + 16 + 17 = 153 On note x la distance entre le point M et la droite (AD) et y la distance entre le point M et la droite (CE). AD × x 3x ADM = = = 1,5x 2 2 CE × y 5y CEM = = = 2,5y 2 2 Les deux aires sont égales lorsque 1,5x = 2,5y. On vérifie que : Cas 1 : Lorsque x = 10 et y = 6 alors les deux aires sont égales à 15 cm2. Cas 2 : Lorsque x = 2,5 et y = 1,5 alors les deux aires sont égales à 3,75 cm2. 134 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Cela peut être l'occasion de poser le petit problème suivant : Trouver une façon rapide de calculer 1 + 2 + 3 + … + n quel que soit le nombre entier n. Réponse : 2 × (1 + 2 + 3 + … + n) = (n + 1) × n (n + 1)n Donc 1 + 2 + 3 + … + n = . 2 • Pour la face qui intègre la porte On compte 16 triangles et il y a 9 losanges de moins que dans les autres faces. Total des triangles : 18 × 3 + 16 = 70 Total des losanges : 153 × 3 + 153 – 9 = 603 Cette pyramide est constituée de 7 triangles équilatéraux et de 603 losanges. b.

La base d'une face sans porte compte 18 triangles équilatéraux de côté 1,9 m. 18 × 1,9 m = 34,2 m Or la base carrée a pour côté 35,4 m. Cette différence s'explique par la jonction entre les panneaux de verre. Elle a une épaisseur. c. Finalement, les informations des sites A et B qui sont conformes à ce qu'a observé Léo sont : • Site A : les dimensions des losanges ; • Site B : le nombre de losanges et de triangles équilatéraux et les dimensions de la base de la pyramide. E L O H On pourrait proposer aux élèves de vérifier la hauteur de la pyramide donnée par le site A par un calcul. 3. La pyramide est formée de 4 triangles équilatéraux de côté 35,4 m.

Les élèves peuvent calculer une hauteur en utilisant le théorème de Pythagore après avoir précisé que la hauteur, la médiane et la médiatrice sont confondues.

On acceptera aussi qu'ils aient utilisé un logiciel de géométrie dynamique ou fait une construction à une échelle qui permet une mesure à la règle assez précise. On obtient environ 30,66 m. M 2. Un quadrilatère dont les côtés ont la même longueur est un losange. 3. Soit H le milieu des diagonales. Dans le triangle MHL rectangle en H (dans un losange les diagonales sont perpendiculaires), le théorème de Pythagore s'écrit : ML2 = MH2 + HL2 ou HL2 = ML2 – MH2 = 42 – 2,82 = 8,16 d'où on tire HL = 8,16 ≈ 2,857 cm ; donc OL ≈ 5,714 ≠ 5,6 : les diagonales n'ont pas la même longueur ; le losange n'est pas un rectangle donc pas un carré. Marie a tort. 61 Triangle isocèle © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La surface d'une face est 35, 4 × 30,66 = 542,63 2 542,63 × 4 = 2 170,52 La surface totale des 4 faces de la pyramide est d'environ 2 170,5 m2. Aire d'un losange en verre : Les diagonales du losange font 1,9 m et 2,9 m. 1,9 × 2,9 Aire = = 2,755 2 Un losange est constitué de deux triangles équilatéraux de côté 1,9 m donc l'aire d'un triangle équilatéral en verre est : 2,755 ÷ 2 = 1,377 5 Calcul de l'aire de la surface vitrée : 603 × 2,755 m2 + 70 × 1,377 5 m2 = 1 757,69 m2 1 757,69 × 100 ≈ 81 2 170,5 Environ 81 % de la surface de la pyramide du Louvre est en verre.

1. D'après l'inégalité triangulaire, pour que le triangle soit constructible, il faut que n + n ⩾ 13 donc n ⩾ 6,5.

Donc la plus petite valeur pour n est 6,5. 2. Le triangle est rectangle lorsque l'égalité de Pythagore est vérifiée. Comme le triangle est isocèle de base 13, alors il faut : n2 + n2 = 132 2n2 = 169 n2 = 84,5 n = 84,5 Le triangle est rectangle pour n valant 84,5 . 62 Problème de construction On note c la longueur du côté du carré dont l'aire est égale à la somme des aires des deux carrés représentés. Le carré d'aire 4 cm2 a pour côté 2 cm puisque 4 est le carré de 2. Donc le côté du deuxième carré a pour longueur 4 cm. On doit donc avoir c2 = 22 + 42 = 20.

Alors les carrés de côté 2, 4 et c sont dans une configuration de Pythagore : 4 cm2 2 Brevet 59 Pentagone régulier 1. Les cinq triangles OAB, OBC, OCD, ODE et OEA sont isocèles en O.

De plus, leurs côtés sont deux à deux de même longueur, donc ce sont des triangles égaux. 2. Les cinq angles de sommet O sont de même mesure et leur somme est égale à 360°, donc ils mesurent chacun 180° ÷ 5 = 36°. Ces cinq triangles sont isocèles en O et la somme de leurs trois angles est égale à 180°, donc : = OBC = 180° − 36° = 72° OBA 2 = OBA + OBC = 72° + 72° = 144°. ABC 60 Losange ou carré ? 1. On construit [ME] tel que ME = 5,6 cm, puis la médiatrice de ce segment qui coupe le cercle de centre M et de rayon 4 aux deux points O et L. 4 16 cm2 c2 = 4 cm2 + 16 cm2 Programme de construction : Tracer un triangle rectangle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 2 cm et 4 cm. Construire le carré ayant pour côté l'hypoténuse de ce triangle rectangle. Le carré est solution du problème posé. 63 Avec un octogone 1. Les triangles API, JBK, ODN et MCL ont un angle droit compris entre deux côtés de même longueur, ils sont donc égaux. 2. BJK est un triangle isocèle rectangle en B. 12 cm BJ = BK = = 4 cm 3 Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 135 D'après le théorème de Pythagore : JK2 = 42 + 42 = 32 JK = 32 cm IJ = 4 cm ≠ JK Donc IJKLMNOP n'est pas un octogone régulier. 3. AireIJKLMNOP = AireABCD – 4 × AireBJK Deux triangles tels que BJK forment un carré de côté 4 cm, donc : AireIJKLMNOP = 122 – 2 × 42 = 112 L'aire de l'octogone IJKLMNOP est de 112 cm2. 4. I A J Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 1. V B G A X K B On présente ici une rédaction qui montre une bonne maitrise des langages (Domaine 1). Cependant, auprès des élèves, on privilégiera le raisonnement avec des supports visuels qui permettent au lecteur de comprendre la démarche (croquis avec les mesures, les égalités codées). L O D N C M Aire du disque de diamètre 12 cm : π × 62 = 36π ≈ 113,09 L'aire du disque de diamètre 12 cm est supérieure à l'aire de l'octogone IJKLMNOP. 2. HE = GA = 20 cm VHGT est un carré donc ses diagonales sont perpendiculaires : (VG) ⊥ (HT). Compte tenu de l'espacement régulier des carreaux, OH = EX = XA = GO.

Pour calculer OH, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle VGH : VG2 = 202 + 202 = 800 Remarque : Le calcul est inutile pour affirmer qu'il ne peut pas y avoir égalité puisque l'aire de l'octogone est un nombre entier de cm2 alors que l'aire d'un disque est 36π avec π irrationnel. 64 Aires égales 1. a. Aire du carré ABCD : ABCD = AB2 = 402 = 1 600 cm2 b. Aire du rectangle DEFG : D, E et A sont alignés dans cet ordre, donc : DE = DA – AE = AB – AE = 40 – 15 = 25 cm. D, C et G sont alignés dans cet ordre, donc : DG = DC +CG = AB + CG = 40 + 25 = 65 cm. Ainsi : DEFG = DE × DG = 25 × 65 = 1 625 cm2. 40 A B 15 F E 25 C D 40 25 G 2.

En procédant de la même manière que précédemment, on obtient : DE = x – 15 et DG = x + 25.

L'aire du rectangle DEFG est égale à : (x – 15)(x + 25) = x2 + 10x – 375. Afin que l'aire du carré ABCD soit égale à l'aire du rectangle DEFG, il faut et il suffit que : 375 x2 = x2 + 10x – 375 ⇔ 10x – 375 = 0 ⇔ x = = 37,5 10 x A B 15 F E x − 15 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. E O T C D 136 H x ESPACE ET GÉOMÉTRIE G 25 Donc VG = 800 = 20 2 .

Les diagonales du carré se coupent en leur milieu.

3. Donc OH = 10 2 ≈ 28,3. Pour l'hexagone HEXAGO, on a : HE = GA = 20 cm OH = EX = XA = GO = 10 2 Les élèves en difficulté sur le raisonnement et la communication dans un langage adapté peuvent travailler ces compétences dans cette question à un niveau de difficulté accessible. HOG et EXA sont deux triangles rectangles et isocèles en O et X : = EXA = 90° HOG La somme des angles d'un triangle est 180°, donc : = 45°. OHG = XEA = 45°. De même, OHG = OGH = EAX = AGO . Donc OHE = 45° + 90° = 135° = HEX = XAG 4. AireHEXAGO = AireHEAG + AireHOG + AireEXA AireHEAG Or, AireHOG + AireEXA = AireVHG = . 2 Donc AireHEXAGO = 1,5 × AireHEAG. HEAG a la même aire qu'un carreau carré puisque les carreaux carrés ont pour côté 20 cm et qu'ils sont espacés de 20 cm. Donc l'aire d'un carreau hexagonal est égale à une fois et demie celle d'un carreau carré. Exercice 1 Les élèves ayant une bonne maitrise du raisonnement et de la communication pourront encore progresser dans cet exercice. Ils passeront plus de temps sur la question 1. que ceux qui ont l'exercice précédent car ici on n'a pas donné de nom au carreau hexagonal, et raisonner et communiquer peut prendre plus de temps.

Dans cet exercice, c'est à l'élève de penser à nommer un hexagone pour faciliter la communication de ses raisonnements.

Si jamais il justifie sans employer de noms, on peut alors discuter avec lui au moment où il rencontre des difficultés à communiquer clairement ou lorsque lui-même se perd dans son raisonnement par manque de structure. On veut l'amener à sentir qu'avec un langage mathématique, il peut plus facilement raisonner et communiquer. 1. À l'échelle 1/10, les carrés ont pour côté 2 cm. b. La propriété n'est pas vraie car la construction est un contre-exemple.

Exercice 2 H 2 E Cette fois-ci, on ne fait pas construire de supports visuels ou d'exemples aux élèves. Soit ils y pensent par eux-mêmes, soit ils parviennent à raisonner et communiquer sans supports. O X G A 2. Si on nomme HEXAGO un carreau hexagonal, on a HE = GA = 20 cm. VHGT est un carré, donc ses diagonales sont perpendiculaires : (VG) ⊥ (HT). Compte tenu de l'espacement régulier des carreaux : OH = EX = XA = GO. Pour calculer OH, on utilise le théorème de Pythagore dans le triangle VGH : VG2 = 202 + 202 = 800 Donc VG = 800 = 20 2 . Les diagonales du carré se coupent en leur milieu. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Donc OH = 10 2 ≈ 28,3. Pour l'hexagone HEXAGO, on a : HE = GA = 20 cm OH = EX = XA = GO = 10 2 3. AireHEXAGO = AireHEAG + AireHOG + AireEXA AireHEAG Or AireHOG + AireEXA = AireVHG = . 2 Donc AireHEXAGO = 1,5 × AireHEAG. AireHEXAGO 3 = 1,5 = .

Donc AireHEAG 2 AireHEAG 2 Ou encore : = . AireHEXAGO 3 L'aire d'un carreau carré est égale au deux tiers de l'aire d'un carreau hexagonal. Exercice 2 1. a. 1. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc le point d'intersection des diagonales est à la même distance des quatre sommets du

rectangle. Donc les quatre sommets d'un rectangle sont bien situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales. 2. La question est plus difficile pour ces élèves car de nouveau on ne leur fait pas construire à l'avance le contre-exemple. Ils peuvent dans ce cas ne pas avoir d'autres images mentales que des rectangles inscrits dans un cercle, et répondre oui hâtivement. Il est alors intéressant de projeter les productions des élèves ayant l'exercice 2 vert pour débloquer la situation (ce qui valorisera ces élèves, a priori d'un niveau plus faible). Contre-exemple : B A C O D Écriture d'un énoncé 1. Construire un triangle équilatéral ABC. Placer les points I, J et K milieux des côtés [AB], [BC] et [CA]. Tracer le triangle IJK. Placer les points R, S, T, U, V, W, X, Y et Z milieux des côtés [AI], [IB], [BJ], [JC], [CK], [KA], [IJ], [JK] et [KI]. Tracer les triangles RZW, SXT et UYV. 2.
Si l'élève qui reçoit cet énoncé n'arrive pas à faire la construction, il doit écrire ce qui lui manque et redonner l'énoncé à l'auteur. L'auteur doit alors le compléter. Ensuite ils peuvent discuter ensemble de la clarté de l'énoncé et chercher à l'améliorer ensemble. Analyse d'une production b.
Lorsqu'on trace les cercles sur les quatre exemples, la propriété semble vérifiée.
Il faut maintenant le prouver. Dans un rectangle, les diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donc le point d'intersection des diagonales est à la même distance des quatre sommets du rectangle. Donc les quatre sommets d'un rectangle sont bien situés sur un cercle de centre le point d'intersection de ses diagonales. 2. a. • Élise a bien répondu. • Florian a mal compris la propriété, les angles de même mesure doivent être compris entre les deux paires de côtés de même longueur, ce qui n'est pas le cas ici. • Mathilde a raison.
B A C O 5 D Livre du professeur – Chapitre 12 Triangles et quadrilatères 137 APITRE CH 13 13 Triangles rectangles : trigonométrie Introduction © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie », dont le but est d'utiliser les notions de géométrie plane à des fins de démonstrations. Les connaissances associées sont le théorème de Pythagore et sa réciproque et les rapports trigonométriques dans le triangle rectangle. La compétence associée est de résoudre des problèmes de géométrie plane, en particulier dans le cadre de problèmes relevant de la vie courante et de situations concrètes, de prouver un résultat général, de valider ou réfuter une conjecture. Ce chapitre s'inscrit aussi dans le thème « Nombres et calculs ». Les nombres sont utilisés pour résoudre des problèmes avec la définition de la racine carrée et dans le thème « Organisation de données », pour traiter une situation de proportionnalité et résoudre des problèmes de recherche de la quatrième proportionnelle. • Les élèves ont déjà vu le théorème de Pythagore et sa réciproque en 4e, il s'agit donc de réinvestissement dans ce chapitre.
• Ils connaissent la définition d'un triangle rectangle, la somme des angles d'un triangle et connaissent le théorème de Thalès et/ou ont déjà travaillé sur des situations de proportionnalité et La première horloge donne (360° ÷ 12) × 1 = 30°. La deuxième horloge donne (360° ÷ 12) × 3 = 90°. d'agrandissement/réduction. Ils doivent utiliser la trigonométrie du triangle rectangle pour calculer des longueurs ou des mesures des angles aigus. Les élèves vont ainsi effectuer des calculs mais valider aussi par le raisonnement et la démonstration grâce à de nouveaux outils. • Ce chapitre s'inscrit dans le développement du raisonnement et la maitrise de la démonstration, le plus souvent dans des situations concrètes afin pour eux de faire sens et de leur permettre la construction du sens du cours. • Les élèves doivent être capables de visualiser la figure de référence qu'est le triangle rectangle et très rapidement de l'identifier dans un problème contextualisé. Ils doivent être capables d'identifier les mesures connues et de choisir la formule adaptée à chaque cas.
Ils pourront mettre en place des stratégies de vérification des résultats trouvés. • Ce thème sera de nouveau abordé avec les solides et la géométrie, permettant ainsi de varier les contextes d'utilisation du théorème de Pythagore et des formules de trigonométrie. La troisième horloge donne (360° ÷ 12) × 5 = 150°. Le mot de passe de Mme Eskera pour son ordinateur est le 3090150. Activités flash Questions 1. réponse b. La somme des angles d'un triangle est égale à 180°. 2. L'hypoténuse est le côté [AC] du triangle. On peut faire remarquer qu'on repère l'hypoténuse de deux façons : c'est le côté opposé à l'angle droit et c'est aussi le côté le plus long dans un triangle rectangle. 3. La somme des angles d'un triangle est égale à 180° : = 39° et MPN = 90°. MNP = 180 – 90 – 39 = 51°. Donc NMP On peut faire remarquer que la somme des deux angles aigus d'un triangle rectangle est toujours égale à 90° : on les appelle des angles complémentaires. 4. a. 2,1 =7 0,3 b. 14, 4 = 3,6 4 On peut trouver les nombres manquants à l'aide d'un coefficient multiplicateur ou à l'aide de la propriété des produits en croix. Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 139 139 06/10/2016 09:28 Activité 1 Des carrés Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de réactiver le théorème de Pythagore. Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la racine carrée et du théorème de Pythagore. La capacité introduite est d'utiliser l'égalité de Pythagore pour calculer une longueur et d'utiliser la racine carrée. Cette activité permet de retrouver le théorème de Pythagore à travers une énigme. On peut proposer ce site pour aller plus loin : Faire_des_maths/rallye/corriges_culture/2013_racine_de_deux_ corrige.pdf 1. Il faut découper les deux carrés en deux sur une diagonale. On peut ensuite reconstituer un carré d'aire 2 dm2. 2.
On démontre de cette façon que l'on obtient un carré d'aire 2 dm2 et qui a donc pour côté 2 dm. En discussion collective, on reprendra l'égalité de Pythagore et ses conditions d'utilisation. A B 1 dm2 C Le triangle ABC est rectangle en B. On retrouve bien l'égalité de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2. En effet : AB2 + BC2 = 12 + 12 = 1 + 1 = 2 = AC2. Cette situation est inspirée d'une situation décrite dans l'ouvrage d'Annie Berté, Mathématique dynamique. 1 dm2 1 dm2 2 dm2 Activité 2 Avec un logiciel de géométrie dynamique Intentions des auteurs © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. L'objectif de cette activité est d'introduire les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle : le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu. Le prérequis nécessaire est de savoir utiliser un logiciel de géométrie dynamique.
La capacité introduite est de connaitre les formules de trigonométrie dans un triangle rectangle et de savoir les utiliser pour calculer une longueur d'un des côtés du triangle ou la mesure d'un des angles aigus. = cos 26,57° ≈ 0,89 cos CAB On retrouve la valeur affichée en A1 et B1. 6. On affiche BC/AC en A2 et DE/AE en B2. Dans cette activité, les élèves vont apprendre que l'on peut connaitre les mesures d'un angle quand on connait les longueurs de deux côtés du triangle. 1. et 2. On constate que les rapports sont là-aussi égaux. = sin 26,57° ≈ 0,45 sin CAB On retrouve la valeur affichée en A2 et B2. 7. On affiche BC/AB en A3 et DE/AD en B3. 3. Dans la cellule A1, on tape AB/AC puis entrée. Dans la cellule B1, on tape AD/AE puis entrée. On constate que les rapports sont là-aussi égaux. = tan 26,57° ≈ 0,5 tan CAB On retrouve la valeur affichée en A3 et B3. On pourra ainsi définir le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle A dans un triangle rectangle de la façon suivante : aigu 4. Quand on fait bouger le point D le long de la demi-droite [Ax), les rapports restent égaux. 5. On utilise l'icone 140 6113_3e_C13.indd 140 α pour afficher la mesure d'un angle. = longueur du côté adjacent à l' angle A cos A longueur de l' hypoténuse longueur du côté opposé à l' angle A = sin A longueur de l' hypoténuse = longueur du côté opposé à l' angle A tan A longueur du côté adjacent à l' angle A et faire allusion au moyen mnémotechnique SOH CAH TOA permettant de mémoriser ces définitions.
ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:28 Activité 3 Une démonstration Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de démontrer et d'établir que le cosinus d'un angle aigu dans un triangle rectangle ne dépend que de cet angle. Le prérequis nécessaire est la connaissance du théorème de Thalès. La capacité introduite est de définir le cosinus d'un angle aigu d'un triangle rectangle comme quotient de deux longueurs ne dépendant que de la mesure de cet angle. 1. Les droites (BC) et (B'C') sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à la droite (AB). « Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. » Les points A, B, C et A', B', C' sont alignés. On peut donc utiliser l'égalité du théorème de Thalès : AB AC BC = = AB' AC' B' C' AB AC On a bien = AB' AC' AB AC 2.
On a = donc en utilisant le produit en croix, on obtient AB' AC' AB AB' bien = . AC AC ' AB ne varie pas quand on déplace 3. On a démontré que le rapport AC le point B sur la droite (AB'). Les seules valeurs dans le triangle rectangle ABC qui ne varient pas et ACB . lorsqu'on déplace le point B sont les valeurs des angles CAB On a démontré que le quotient de la longueur du côté adjacent à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur de son hypoténuse ne dépend que de la mesure de cet angle.
Ce quotient appelé le cosinus de cet angle et noté cos(angle). On a ainsi : = longueur du côté adjacent à l' angle CAB = AB cos CAB longueur de l' hypoténuse AC De la même façon, on montrerait que le quotient de la longueur du côté opposé à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur de son hypoténuse ne dépend que de la mesure de cet angle ; ce quotient est alors appelé sinus de cet angle et noté sin(angle). On a ainsi : = longueur du côté opposé à l' angle CAB = BC sin CAB longueur de l' hypoténuse AC De la même façon, on montrerait que le quotient de la longueur du côté opposé à un angle aigu d'un triangle rectangle par la longueur du côté adjacent à cet angle ne dépend que de la mesure de cet angle ; ce quotient est alors appelé la tangente de cet angle et noté tan(angle). On a ainsi : = longueur du côté opposé à l' angle CAB = BC tan CAB AB longueur du côté adjacent à l' angle CAB Activité 4 Une avalanche de propriétés © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir les relations trigonométriques.
Les prérequis nécessaires sont de connaitre les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu, connaitre le théorème de Pythagore.
La capacité introduite est d'utiliser les formules de trigonométrie pour établir des relations trigonométriques. Dans cette activité, les élèves vont conjecturer puis démontrer des relations trigonométriques en utilisant les règles de calcul sur les fractions et le théorème de Pythagore. 1. Les valeurs sont ici des valeurs approchées au millième près. Mesure de l'angle a 5° 30° 45° cos a 0,996 0,866 0,707 0,5 0,087 sin a 0,087 0,5 0,707 0,866 0,996 tan a 0,087 0,577 1 1,732 11,430 60° 85° (cos a)2 0,992 0,75 0,5 0,25 0,008 (sin a)2 0,008 0,25 0 ,5 0,75 0,992 (cos a)2 + (sin a)2 1 1 1 1 1 sin a cos a 0,087 0,577 1 1,732 11,430 Le tableau précédent a été obtenu avec une calculatrice. On peut également l'obtenir avec un tableur : Les formules saisies sont alors : En B2 : =COS(RADIANS(B1)) En B3 : =SIN(RADIANS(B1)) En B4 : =TAN(RADIANS(B1)) En B5 : =B2*B2 En B6 : =B3*B3 En B7 : =B5+B6 En B8 : =B3/B4 2. En observant le tableau, on peut conjecturer les propriétés suivantes : sin a (cos a)2 + (sin a)2 = 1 (*) et tan a = (**) cos a On peut faire noter que les valeurs 0° et 90° n'apparaissent pas dans le tableau car, dans un triangle rectangle, les angles différents de l'angle droit sont aigus.
On peut néanmoins calculer le cosinus et le sinus de 0° et 90° avec la calculatrice. On fera remarquer que le cosinus et le sinus sont des nombres strictement compris entre 0 et 1 (car on divise par l'hypoténuse et que l'hypoténuse est le côté le plus grand d'un triangle rectangle), tandis que la tangente est un nombre strictement positif mais peut être supérieur à 1 (l'hypoténuse n'intervenant pas dans son calcul, le côté opposé à l'angle concerné pouvant être supérieur ou inférieur à son côté adjacent). On peut aussi faire remarquer que cos 5° = sin 85° et que A = sin (90° – A). De même que sin A). A = cos(90° – cos 3. Dans le triangle ABC rectangle en B on a les relations trigonométriques suivantes : AB BC BC cos a = sin a = tan a = AC AC AB 4. On peut écrire les relations suivantes : AB 2 BC 2 AB2 + BC2 (cos a)2 + (sin a)2 = + = AC AC AC2 Or le triangle ABC est rectangle en B, on peut utiliser l'égalité de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 On remplace dans notre égalité, on obtient : AC2 (cos a)2 + (sin a)2 = =1 AC2 La propriété (*) est démontrée. ( ) ( ) On peut faire noter que (cos a)2 se notera aussi cos2 a .
De même que (sin a)2 se notera aussi sin2 a . Les fonctions COS, SIN et TAN permettent de calculer respectivement le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle dont la mesure est en radians, et la fonction RADIANS permet de convertir la mesure d'un angle en radians en degrés.
Le radian est une unité de mesure d'angle utilisée au lycée. AB sin a AB AC AB AC = = × = = tan a BC cos a AC BC BC AC La propriété (**) est démontrée. Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 141 141 06/10/2016 09:28 Activité 5 Sous les combles Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de savoir utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer la longueur d'un des côtés du triangle et plus particulièrement choisir la bonne relation trigonométrique. Les prérequis nécessaires sont de connaitre les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, de savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu, d'utiliser la propriété des produits en croix pour calculer une quatrième proportionnelle. La capacité introduite est de calculer la longueur du côté opposé à l'un des angles aigus dans un triangle rectangle en utilisant la tangente. On est dans la modélisation d'une situation concrète. On suppose que les portes des placards sont perpendiculairement au sol du grenier. posées A C 2,5 m Pente 35° B 1,5 m Porte de placard Le triangle ABC est rectangle en B. On peut donc utiliser les formules de trigonométrie.
On a : = longueur du côté adjacent à l' angle ACB = BC cos ACB longueur de l' hypoténuse AC = longueur du côté opposé à l' angle ACB = AB sin ACB longueur de l' hypoténuse AC longueur du côté opposé à l angle ACB BC ′ = = tan ACB AB longueur du côté adjacent à l' angle ACB et la mesure On connait la longueur du côté adjacent à l'angle ACB . On cherche la longueur du côté opposé à l'angle de l'angle ACB . aigu ACB On va donc utiliser la formule de la tangente (TOA).
= longueur du côté opposé à l' angle ACB = BC tan ACB AB longueur du côté adjacent à l' angle ACB On remplace par les valeurs connues : BC tan 35° = 1,5 On utilise le produit en croix : BC = 1,5 × tan 35° Avec la calculatrice, on obtient : BC ≈ 1,05 m Catherine devra commander des portes d'environ 1,05 m de hauteur. Activité 6 Au secours Les objectifs de cette activité sont de savoir utiliser les relations trigonométriques dans un triangle rectangle pour calculer la mesure d'un des angles aigus du triangle et plus particulièrement choisir la bonne relation trigonométrique, d'utiliser la calculatrice pour calculer la valeur exacte (ou approchée) de la mesure d'un angle connaissant son cosinus, son sinus ou sa tangente. Les prérequis nécessaires sont de connaitre les relations trigonométriques dans un triangle rectangle, de savoir utiliser la calculatrice pour calculer le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle aigu. La capacité introduite est de calculer la valeur d'un des angles aigus d'un triangle rectangle en utilisant une fonction trigonométrique. On utilise donc la formule de la tangente (TOA) : = longueur du côté opposé à l' angle ACB = AB tan ACB BC longueur du côté adjacent à l' angle ACB On remplace par les valeurs connues : = 19 – 1,7 tan ACB 10 = 17,3 tan ACB 10 On cherche la mesure d'un angle connaissant sa tangente. On introduit ici les touches « arccos », « arcsin » et « arctan » de la calculatrice. Le parallèle pourra être fait avec la touche « carrée » et la touche « racine carrée » de la calculatrice, l'une étant l'inverse de l'autre. On est dans la modélisation d'une situation concrète. On suppose que le mur de l'immeuble est perpendiculaire au sol. A ≈ 60° au degré près. On a donc : ACB Les pompiers devront donner une inclinaison de 60° par rapport à l'horizontale. 5m 19 m ⩽2 C B E D 1,7 m © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Intentions des auteurs Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de trignométrie. , la On connait la longueur du côté opposé à l'angle aigu ACB et on cherche la valeur longueur du côté adjacent à l'angle aigu ACB . de l'angle aigu ACB 142 6113_3e_C13.indd 142 On peut aussi vérifier que la longueur de l'échelle est suffisante pour atteindre la fenêtre. Le triangle ABC est rectangle en B, on cherche la longueur du côté [AC]. On utilise l'égalité de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = (19 – 1,7)2 + 102 AC2 = 17,32 + 102 = 299,29 + 100 = 399,29 AC = 399,29 ≈ 20 m Il faut donc que l'échelle soit dépliée sur 20 m environ, ce qui est possible puisque l'échelle peut mesurer au maximum 25 m. ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:28 e Savoir-fair 1. Dans ABC rectangle en A, d'après le théorème de Pythagore : BC2 = AB2 + AC2 BC2 = 122 + 52 BC2 = 144 + 25 BC2 = 169 BC = 169 = 13 cm 2. Dans ISR rectangle en I, d'après le théorème de Pythagore : SR2 = IS2 + RI2 142 = 92 + RI2 196 = 81 + RI2 RI2 = 196 – 81 RI2 = 115 RI = 115 ≈ 10,7 cm 3. [EG] est le plus grand côté. EG2 = 380,25 EF2 + FG2 = 380,25 EG2 = EF2 + FG2 L'égalité de Pythagore est vérifiée donc EFG est rectangle en F. 4. [ST] est le plus grand côté.
ST2 = 64 SR2 + RT2 = 65 ST2 ≠ SR2 + RT2 L'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée donc RST n'est pas rectangle. 9 Dans ABC rectangle en B : AB 10 BC 7,5 A= A= cos = 0,8 sin = 0,6 = = AC 12,5 AC 12,5 BC 7,5 = BC = 7,5 = 0,6 A= tan = = 0,75 cos C AB 10 AC 12,5 AB 10 AB 10 4 sin C = = = 0,8 tan C = = = . AC 12,5 BC 7,5 3 Dans LMN rectangle en N : LN 21 MN 20 cos L = = sin L = = LM 29 LM 29 MN 20 MN 20 tan L = = cos M = = LN 21 ML 29 LN 21 LN 21 = tan M = = = 1,05 sin M = LM 29 MN 20 Dans DEF rectangle en D : DF 3,9 39 DE 8 80 cos F = = = = sin F = = 8,9 89 FE 8 80 EF DE 8 80 ED 8 80 = = tan F = = cos E = = 3,9 39 8,9 89 FE EF DF 3,9 39 DF 3,9 39 = = tan E = = = = 0,487 5 sin E = EF 8,9 89 DE 8 80 Dans HGK rectangle en K : HK 12 GK 5 cos H = = sin H= = GH 13 GH 13 GK 5 GK 5 tan H = = cos G = = HK 12 GH 13 HK 12 HK 12 = tan G = = = 2,4 sin G = GH 13 GK 5 1. Dans DEF rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore : EF2 = ED2 + DF2 72 = ED2 + 4,22 49 = ED2 + 17,64 ED2 = 49 – 17,64 ED2 = 31,36 DE = 31,36 = 5,6 cm DF 4,2 sin E = sin E = EF 7 Donc E ≈ 37° (à l'aide de la touche « arcsin » de la calculatrice). 2. Dans ABC rectangle en A : AB AC cos C = cos 23° = BC 5,2 AC = 5,2 × cos 23°. Donc AC ≈ 4,8 cm. 3. Dans HIJ rectangle en I : IJ 5 tan H= tan H= HI 8 Donc H ≈ 32° (grâce à la touche « artan » de la calculatrice). Questions flash 10 • Le triangle ABE est rectangle en A, on peut écrire l'égalité de Pythagore : BE2 = AB2 + AE2 • Le triangle BCD est rectangle en D, on peut écrire l'égalité de Pythagore : BC2 = BD2 + DC2 • Le triangle BDE est rectangle en B, on peut écrire l'égalité de Pythagore : ED2 = BE2 + BD2 11 Pour chaque triangle, on regarde si l'égalité de Pythagore est vérifiée. • 112 + 92 = 202 et 152 = 225 ; l'égalité de Pythagore n'est pas vérifiée, le triangle n'est pas rectangle. • 32 + 42 = 25 et 52 = 25 ; l'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle est rectangle. • 122 + 162 = 400 et 202 = 400 ; l'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle est rectangle. 12 Le triangle ABC est rectangle en A, on peut écrire l'égalité de Pythagore : BC2 = BA2 + AC2 BC2 = 3,62 + 2,72 = 20,25 BC = 20,25 = 4,5 cm Le triangle BCD est rectangle en C, on peut écrire l'égalité de Pythagore : BD2 = DC2 + BC2 DC2 = BD2 – BC2 DC2 = 11,72 – 4,52 = 116,64 DC = 116,64 = 10,8 cm 13 D C A B Dans le carré ABCD, le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser le théorème de Pythagore : BC2 = AB2 + BC2 BC2 = 62 + 62 2 BC = 36 + 36 = 72 BC = 72 ≈ 8,5 cm 14 8,3 cm A D B C 6,2 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 6 Utiliser l'égalité de Pythagore 6 cm 3 Exercices Dans le rectangle ABCD, le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser le théorème de Pythagore : BC2 = AB2 + BC2 BC2 = 6,22 + 8,32 BC2 = 107,33 BC = 107,33 ≈ 10,4 cm Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 143 143 06/10/2016 09:28 15 • Dans le triangle ABE, [AB] est le plus grand côté : AB2 = 1,52 = 2,25 AE2 + BE2 = 1,22 + 0,92 = 2,25 AB2 = AE2 + BE2 L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ABE est rectangle en E. • Dans le triangle ADC, [AC] est le plus grand côté : AC2 = (1,5 + 0,625)2 = 4,51 AD2 + DC2 = (1,2 + 0,5)2 + 1,2752 = 4,51 AC2 = AD2 + DC2 L'égalité de Pythagore est vérifiée, donc le triangle ADC est rectangle en D. Les droites (BE) et (CD) sont perpendiculaires à la même droite (AD), elles sont donc parallèles. Utiliser les rapports trigonométriques flash Questions ≈ 41°. 25 a.
arccos 0,75 ≈ 41° donc a b. arcsin 0,58 ≈ 35° donc c. arctan 1,29 ≈ 52° donc = 26 a.
cos ABC 3 5 b ≈ 35°. c ≈ 52°. =3 b. tan ACB 4 =3 c. sin ACB 5 27 En regardant la figure, on a les mesures du côté opposé à l'angle A et de l'hypoténuse.
C'est dans la formule du sinus que l'on utilise ces deux longueurs, c'est Yvan qui a raison.
Calculer des rapports trigonométriques flash Questions .
16 [BC] est le côté opposé à l'angle CAB . [AC] est le côté adjacent à l'angle CAB [KI] est le côté opposé à l'angle KJI .
[IJ] est le côté adjacent à l'angle KJI . 17 Le triangle ABC est rectangle en A, on peut utiliser les formules de trigonométrie. = AB cos ABC BC = AC sin ABC BC = AC tan ABC AB 18 Le triangle JIK est rectangle en I, on peut utiliser les formules de trigonométrie.
IJ sin IKJ = JK IK sin IJK = JK © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 19 Les triangles sont rectangles. On peut utiliser les formules de trigonométrie.
3 1,2 cos α = = 0,6 et cos β = = 0,6 5 2 20 a. cos 27° ≈ 0,891 b. sin 65° ≈ 0,906 28 • 1er triangle : on connait la mesure de l'hypoténuse et on , on utilise cherche la mesure du côté opposé à l'angle UOT donc le sinus. = TU sin UOT OT • 2e triangle : on connait la mesure du côté opposé à l'angle et on cherche la mesure du côté adjacent, on utilise UOT donc la tangente. = OT tan UOT TU • 3e triangle : on connait la mesure du côté adjacent à l'angle et on cherche la mesure du côté opposé, on utilise UOT donc la tangente.
= TU tan UOT OU • 4e triangle : on connait la mesure du côté adjacent à l'angle et on cherche la mesure de l'hypoténuse, on utilise UOT donc le cosinus. = UO cos UOT UT 29 1. c. tan 56° ≈ 1,483 rectangle en H. dans le triangle ABH • [AH] est le côté opposé à l'angle ABC rectangle en H. dans le triangle ABC • [AC] est le côté opposé à l'angle ABC rectangle en A.
dans le triangle ABC • [AB] est le côté adjacent à l'angle ABC rectangle en A. 22 Un cosinus ne peut pas être supérieur à 1. 23 • Premier triangle : 24 I sin JH IJ cos H I cos JH IJ tan H I tan JH 144 6113_3e_C13.indd 144 5,1 AC 5,1 = 0,6 et tan B = = = 0,75 8,5 BC 6,8 4,16 IK 4,16 4 = 0,8 et tan J = = = 5,2 I J 3,12 3 • • • • • B 36° dans le triangle ABH 21 • [BH] est le côté adjacent à l'angle ABC AC cos A = = AB • Second triangle : IK cos K = = KJ 2,4 cm A • • • • • IJ HI HJ HI HJ IJ IJ HJ IJ HI C 2. Le triangle ABC est rectangle en A.
• On cherche la longueur BC. On utilise les formules de trigonométrie. 2,4 = AB cos ABC cos 36° = BC BC 2, 4 BC = ≈ 3 cm cos 36° • On cherche la longueur AC. On utilise les formules de trigonométrie. AC = AC tan ABC tan 36° = AB 2, 4 AC = 2,4 × tan 36° ≈ 1,7 cm 30 • Dans le triangle OMT, rectangle en O, on utilise les formules de trigonométrie. = OT = 4,3 sin OMT sin OMT MT 5,6 4,3 OMT = arcsin ≈ 50° 5,6 • Dans le triangle ITO, rectangle en I, on utilise les formules de trigonométrie. IO cos IOT = TO 3,1 IOT = cos 4,5 3,1 IOT = arccos ≈ 46° 4,5 (( )) ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:28 33 1. Le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser le théorème • Dans le triangle PTO, rectangle en T, on utilise les formules de trigonométrie.
= PT = 6,2 tan TOP tan TOP TO 4,5 = arctan 6,2 ≈ 54° TOP 4,5 (de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 6,32 + 4,72 AC2 = 61,78 AC = 61,78 AC ≈ 7,9 cm Le triangle ADC est rectangle en C. On peut utiliser le théorème de Pythagore : AD2 = AC2 + DC2 AD2 = 61,78 + 3,12 AD2 = 71,39 AD = 71,39 AD ≈ 8,4 cm 2. Le triangle ACD est rectangle en C. On peut utiliser les formules de trigonométrie. = AC + 7,9 cos DAC AD 8, 4 7,9 DAC ≈ arccos ≈ 20° 8, 4) 31 Le triangle OQP est rectangle en Q. On cherche la mesure de . On connait la mesure du côté opposé à l'angle OPQ l'angle OPQ et celle de l'hypoténuse. On utilise donc la formule du sinus. = PT sin OPQ OP C'est donc Thomas qui a tapé la bonne séquence. 32 M 15 6,5 m ,6 N 16,9 m m (P Pour plus de précision, on remplacera AC et AD par leurs valeurs respectives exactes 61,78 et 71,39 . ≈ 22°. On trouve alors DAC Le triangle NPM est rectangle en M. On peut utiliser les formules de trigonométrie. = MN cos MNP NP 6,5 cos MNP = 16,9 = arccos 6,5 ≈ 67° MNP 16,9 = MN = 6,5 sin MPN NP 16,9 6,5 MPN = arcsin ≈ 23° 16,9 (( ) t in Faire le po QCM) en utilisant la somme des angles On peut aussi calculer MPN d'un triangle égale à 180°.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.) 1 1. A 2. C 2 1. B 2. B 3 1. C 2. A 3. B Carte mentale Trigonométrie dans un triangle rectangle Calculer la mesure d'un angle Deux longueurs connues Calculer des rapports de longueurs B Calculer la longueur d'un côté hypoténuse côté opposé à qC Touches « arccos », « arcsin », « arctan » de la calculatrice A C Produit en croix côté adjacent à qC SOH CAH TOA sin C = AB BC cos C = AC BC tan C = Un angle et une longueur connus AB AC Touches « cos », « sin », « tan » de la calculatrice Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 145 145 06/10/2016 09:28 35 Triangle rectangle Algorithmique 1. On trace un rectangle ADCB de longueur 5 et de largeur 2. On place sur [DC] un point M. On trace les segments [AM] et et la longueur [MB]. On affiche la mesure de l'angle AMB DM. On bouge le point M pour que AMB soit rectangle en M, mesure 90°. On note alors qu'il c'est-à-dire pour que AMB existe deux positions du point M : lorsque DM = 4 ou DM = 1. et outils numériques 34 Construction de triangle 1. et 2. 150 C A B 200 Le premier angle correspond à l'angle droit B , soit 90°. Il faut donc compléter les premiers pointillés par : Le deuxième angle est l'angle C . ABC est un triangle rectangle. AB tan C = BC 200 tan C = 150 Attention, le lutin doit tourner d'un angle de valeur x : C 150 x A 200 B © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. C'est-à-dire 180° – C. Il faut donc compléter les deuxièmes pointillés par : Il faut ensuite avancer de la longueur AC. ABC est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 2002 + 1502 AC2 = 40 000 + 22 500 AC2 = 62 500 AC = 62 500 AC = 250 Il faut donc compléter les troisièmes pointillés par : 2. On note DM = x. D'après le théorème de Pythagore : Dans ADM rectangle en D : AM2 = DM2 + AD2 AM2 = x2 + 22 AM2 = x2 + 4 Dans MBC rectangle en C : MB2 = MC2 + BC2 MB2 = (5 – x)2 + 22 MB2 = (5 – x)2 + 4 On saisit dans la feuille de calcul les formules suivantes : Dans B2 : =A2*A2+4, dans C2 : =(5-A2)*(5-A2)+4 et dans D2 : =B2+C2. Pour afficher les valeurs de 0 à 5 dans la colonne A, de 0,5 en 0,5 : soit on saisit 0 dans A1, puis la formule =A1+0,5 dans A2 puis on étire la formule jusqu'en A12, soit on saisit 0 dans A1 et 0,5 dans A2, on sélectionne A1 et A2 puis on étire jusqu'en A12. On obtient : Voici le programme complété : On cherche pour quelles valeurs de DM = x (dans la colonne A), la valeur présente dans la colonne D est égale à AB2 = 25 pour que l'égalité de Pythagore soit vérifiée et que le triangle AMB soit rectangle en M. On trouve grâce aux lignes 4 et 10 que x = DM = 1 ou 4. Le résultat est bien vérifié. 36 Tableur et fonctions trigonométriques On vérifie qu'on obtient bien la figure souhaitée : 146 6113_3e_C13.indd 146 Dans les cellules B5, B6 et B7, il faut saisir respectivement les formules : =B1/B3, =B2/B3 et =B2/B1. Dans les cellules D5, D6 et D7, il faut saisir respectivement les formules : =B2/B3, =B1/B3 et =B1/B2. On obtient alors : ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:28 37 Tables trigonométriques 1. Dans la cellule C2, il faut saisir la formule = RACINE(1-B2*B2) A + sin2 A = 1) et dans la cellule D2 : =C2/B2 (car car cos2 sin A A=). On obtient alors la feuille de calcul suivante : tan cos A On déplace F sur [CD] de sorte que BF = 2AF et on note alors les longueurs CF et DF correspondantes. 2. Dans le triangle ABC rectangle en B : BC A= sin AC BC , ainsi BC = 7 × sin 42°. Donc sin 42° = 7 D'après le tableau de la question 1. : 0,642 787 61 < sin 42° < 0,707 106 78 donc 4,49 cm < BC < 4,94 cm.
38 Les deux tours © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. On trace un segment [CD] de longueur 6. On trace un segment [CB] perpendiculaire à [CD] et de longueur 7, puis un segment [DA] perpendiculaire à [CD] et de longueur 4. On trouve que la fontaine est à 46,8 toises de la tour de 70 toises de hauteur et à 13,2 toises de la tour de 40 toises. 2. Soit d la distance en toises entre la tour de 70 m de hauteur et la fontaine. Le triangle BCF est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : BF2 = BC2 + CF2 BF2 = 702 + d2 BF = 702 + d 2 = 4 900 + d De même : Le triangle AFD est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore : AF2 = AD2 + DF2 AF2 = 402 + (60 – d)2 On place un point libre F sur [CD], on trace [BF] et [AF], puis on affiche les longueurs CF, DF, AF et FB. On efface les objets inutiles. AF = 402 + (60 – d)2 = 1600 + (60 – d)2 On souhaite que BF = 2AF.
On va donc faire varier d de 1 en 1 dans la colonne A, afficher BF dans la colonne B et 2AF dans la colonne C. On saisit dans la cellule B2 la formule =RACINE(4900+A2*A2) et dans la cellule C2 la formule : =2*RACINE(1600+(60-A2)*(60-A2)). On ouvre ensuite le tableur et on affiche dans la cellule A1 la longueur BF (soit BF) et dans la cellule B1 la longueur 2AF (soit 2*AF).
Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 147 147 06/10/2016 09:28 Problèmes 39 L'horloge du village On schématise la situation avec la figure suivante : A 2,3 m E C B 3,6 m 1,2 m [AB] représente l'horloge et [DE] le lampadaire. Coup de pouce : déterminer d'abord la mesure de l'angle , puis la longueur AB. ECD Grâce aux lignes 48 et 49 de cette feuille de calcul, on trouve que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est comprise entre 46 et 47 toises. On reprend la même feuille de calcul en faisant varier d entre 46 et 47 toises, de 0,1 en 0,1, par exemple. On obtient alors : Le triangle EDC est rectangle en D.
On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connait la mesure du côté opposé et du coté adjacent, on va utiliser la formule de la tangente. = ED tan ECD DC 2,3 tan ECD = 1,2 2,3 arctan ≈ 62° 1,2 ≈ 62° donc ECD ( ) On trouve alors que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est égale à environ 46,8 toises et donc celle entre le sommet de la tour la plus basse et la fontaine est d'environ 60 – 46,8 = 13,2 toises. On retrouve le même résultat que précédemment. On peut recommencer avec plus de précision et faire varier d entre 46,8 et 46,9 de 0,01 en 0,01 : = BA tan ACB BC BC = BD + DC = 3,6 + 1,2 = 4,8 m BA tan 62° = 4,8 BA = 4,8 × tan 62° ≈ 9 m La hauteur de l'horloge est de 9 m environ. 40 L'ombre On schématise la situation avec la figure suivante : B D x E 1,70 m © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Le triangle ACB est rectangle en B. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connait la mesure du côté adjacent et de et on cherche la mesure du côté opposé. On va l'angle ACB utiliser la formule de la tangente : x On trouve alors que la distance entre le pied de la plus haute tour et la fontaine est égale à environ 46,83 toises. A G C 1,40 m Le triangle ECG est rectangle en G. On peut utiliser les formules de trigonométrie. On connait la mesure du côté opposé et du côté adjacent, on va utiliser la formule de la tangente : = EG tan ECG GC 1,7 x = tan 1, 4 1,7 arctan ≈ 51° 1, 4 x ≈ 51° L'angle d'élévation est de 51° environ. ( ) 148 6113_3e_C13.indd 148 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:28 41 Nouveau stade de Bordeaux 44 L'abri de voiture On schématise la situation avec la figure suivante : A 55° 1. On cherche la surface du toit. C'est un rectangle. =L×ℓ L = 548 cm Il manque la largeur. On schématise la vue de côté de l'abri par la figure suivante : F 1,40 m B C 25 m B Le triangle EFA est rectangle en F. On peut utiliser les formules et de trigonométrie.
On connait la mesure de l'angle AEF du coté adjacent à cet angle. On cherche la mesure du côté opposé. On va utiliser la formule de la tangente : = AF tan AEF EF AF tan 55° = 25 AF = 25 × tan 55° ≈ 35,7 m AB = AF + FB AB ≈ 35,7 + 1,4 AB ≈ 37,1 m Le stade de Bordeaux mesure 37,1 m environ de hauteur. A 219,3 cm D 306,6 cm E Cet exercice permet d'utiliser le théorème de Pythagore et les formules de trigonométrie. Coup de pouce : Quelle est la forme du toit à recouvrir ? Représenter la situation. D 42 Un outil A 340 cm Le triangle ADB est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore : cm 16 cm 20 AB2 = AD2 + BD2 BD = 306,6 – 219,3 = 87,3 cm AB2 = 3402 + 87,32 = 123 221,29 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. AB = B C 12 cm Pour vérifier si cet outil peut servir d'équerre, on regarde si l'égalité de Pythagore est vérifiée. [AC] est le plus grand côté.
AC2 = 202 = 400 AB2 + BC2 = 162 + 122 = 400 L'égalité de Pythagore est vérifiée, le triangle ABC est rectangle en B. Pierre peut donc utiliser son outil comme équerre. . On connait la mesure 2. On cherche la mesure de l'angle BAD des côtés opposé et adjacent et de l'hypoténuse à cet angle.
On peut utiliser les trois formules de trigonométrie. 43 Au ski = BD tan BAD AD 87,3 tan BAD = 340 87,3 = AD . arctan ≈ 14° ou cos BAD 340 AB 340 cos BAD = 351 340 arccos ≈ 14° 351 = BD ou sin BAD AB 87,3 sin BAD = 351 87,3 arcsin ≈ 14° 351 mesure environ 14°. La construction est L'angle BAD conforme, car l'angle ne dépasse pas 17°. (Attention à ne pas confondre distance et altitude.
On schématise la situation avec la figure suivante : A 2 00 0m 12° C B Le triangle ABC est rectangle en B. On peut utiliser les formules et de de trigonométrie. On connait la mesure de l'angle ACB l'hypoténuse. On cherche la mesure du côté opposé.
On va utiliser la formule du sinus : AB = AB sin ACB sin 12° = 2 000 AC AB = 2 000 × sin 12° ≈ 415,8 m L'altitude de l'arrivée est d'environ 1 800 – 415,8 = 1 384,2 m. 123 221,29 ≈ 351 cm La largeur du rectangle est d'environ 351 cm. L'aire d'un rectangle est donnée par la formule : = longueur × largeur. Donc = 351 × 548 = 192 348 cm2 ≈ 19,2 m2 12 × 19,2 = 230,4 Il faut 231 tuiles pour couvrir le toit du garage.) ( ) ( ) Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 149 149 06/10/2016 09:29 45 Bien regarder la télévision On schématise la situation avec les figures ci-après. C Coup de pouce : faire un schéma. F On schématise la situation avec la figure suivante : ABCD représente l'écran de télévision. 101,96 cm D 57, 35 m 55, 614 m 5,66° h 3,99° h' 3,99° 5,66° C B On cherche la longueur de la diagonale du rectangle ABCD. Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 57,352 + 101,962 = 13 684,864 1 13 684,864 1 ≈ 117 cm AC = La diagonale de l'écran mesure environ 117 cm. La distance entre l'écran et le canapé doit être de 117 × 2,5 = 292,5 cm environ. 46 La pyramide de Khéops Coup de pouce : faire un schéma. On schématise la situation avec la figure suivante : S 0 22 m D C O A 231 m B Le triangle ABC est rectangle en B, car ABCD est un carré. On utilise le théorème de Pythagore : B A E D Sur chaque figure, les angles verts sont alternes-internes, déterminés par une sécante et deux droites parallèles, donc de même mesure. Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de et la trigonométrie. On connait la mesure de l'angle ACB ; longueur de l'hypoténuse. On cherche le côté adjacent à ACB on utilise donc le cosinus. h = BC cos ACB cos 5,66° = AC 55,614 h = 55,614 × cos 5,66°≈ 55,34 m Le triangle DEF est rectangle en E. On utilise les formules de et la trigonométrie. On connait la mesure de l'angle DFE ; longueur de l'hypoténuse.
On cherche le côté adjacent à DFE on utilise donc le cosinus. h′ = FE cos DFE cos 3,99° = DF 55,614 h′ = 55,614 × cos 3,99° ≈ 55,48 m 55,48 – 55,34 = 0,14 m = 14 cm La hauteur de la tour par rapport au sol a augmenté d'environ 14 cm. 48 Zone inaccessible Cet exercice permet de retravailler le théorème de Pythagore dans un problème à deux étapes. On pourra faire remarquer l'intérêt de garder les valeurs exactes de la racine carrée.
Coup de pouce : trouver d'abord AE. A 15 m AC2 = AB2 + BC2 B AC2 = 2312 + 2312 = 106 722 AC = 106 722 ≈ 326,7 m Les diagonales d'un carré se coupent en leur milieu donc AO = OC = 326,7 ÷ 2 = 163,35 m. Le triangle SOC est rectangle en O.
On utilise le théorème de Pythagore : 10 m © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 55,6 14 m A SC2 = SO2 + OC2 2202 = SO2 + 163,352 SO2 = 2202 – 163,352 = 21 716,777 5 SO = 21 716,777 5 ≈ 147,4 m La hauteur de la pyramide est d'environ 147,4 m.
La difficulté est de bien distinguer le triangle rectangle dans lequel on travaille. 47 Tour de Pise Coup de pouce : faire un schéma. Il faut bien évidemment comprendre que les angles d'inclinaison sont donnés par rapport à la verticale. 150 6113_3e_C13.indd 150 D E 8m Le triangle ABD est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore : AD2 = AB2 + BD2 AD2 = 152 + 102 AD2 = 325 AD = 325 ≈ 18 m Le triangle AED est rectangle en E.
On utilise le théorème de Pythagore : AD2 = AE2 + ED2 AE2 = AD2 – ED2 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:29 AE2 = 182 – 82 = 260 AE = 260 ≈ 16,1 m La distance entre les deux arbres est d'environ 16,1 m. Pour plus de précision, on peut aussi remplacer AD2 par sa valeur exacte 325, on obtient alors : AE2 = 325 – 82 AE2 = 325 – 64 = 261 AE = 261 ≈ 16,2 m Cet exercice permet de travailler la visualisation dans l'espace. E F 12 c m H 16 C D 42° B 35° 51 The Eiffel Tower Cet exercice peut permettre de montrer l'importance de la précision dans les mesures d'angles. 49 Coccinelle et fourmi A Seconde possibilité : 1 400 ÷ 80 = 17,5 877 ÷ 150 ≈ 5,8 On peut donc mettre 17 panneaux sur la longueur et 5 sur la largeur, soit un total de 17 × 5 = 85 panneaux. C'est la première solution qui permet de poser le maximum de panneaux solaires sur le toit, soit 90 panneaux. Les panneaux sont alors placés en mode « portrait » sur le toit. G 0,6° cm 73,9° © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. D C Le chemin le plus court entre la coccinelle en A et la fourmi en F est le segment [AF].
Il faut donc trouver les longueurs AB et BF pour ensuite trouver la longueur AF.
Le triangle ABC est rectangle en B, on a : AB = AB cos BAC cos 35° = AC 16 AB = 16 × cos 35° ≈ 13,1 cm Le triangle FBC est rectangle en B, on a : FB = FB cos BFC cos 42° = FC 12 FB = 12 × cos 42° ≈ 8,9 cm Le triangle ABF est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : AF2 = AB2 + BF2 AF2 = 13,12 + 8,92 AF2 = 250,82 AF = 250,82 AF ≈ 15,8 cm La distance la plus courte entre les deux est donc d'environ 15,8 cm. 50 Panneaux solaires On cherche la largeur du toit. On représente une vue de droite du toit par la figure suivante. B A 90 m Coup de pouce : il faut trouver la longueur AD et AC, pour ensuite déterminer DC. Le triangle ABC est rectangle en A, on cherche la longueur AD. AD = AD tan ABD tan 73,9° = AB 90 AD = 90 × tan 73,9° ≈ 311,8 m On cherche maintenant la longueur AC : = 73,9° + 0,6° = 74,5° ABC AC = AC tan ABC tan 74,5° = AB 90 AC = 90 × tan 74,5° ≈ 324,5 m DC = AC – AD DC = 324,5 – 311,8 = 12,7 m L'antenne de la tour Eiffel mesure environ 12,7 m. 52 Les lunules d'Hippocrate Cet exercice permet de voir une propriété connue des mathématiciens en faisant réviser les formules de l'aire d'un disque et d'un triangle tout en utilisant le calcul littéral.
On pourra apporter des coups de pouce en décomposant les étapes du raisonnement. C A b D 24° a B A 9,6 m B ABC est un triangle rectangle en C, on a : = AC cos CAB AB AC cos 24° = 9,6 AC = 9,6 × cos 24° ≈ 8,77 m E c O L'aire d'un disque de rayon R est donnée par la formule : = πR2. c L'aire du demi-disque blanc de centre O et de rayon est : 2 2 2 2 1 c 1 c πc = . c = π = π 2 2 4 8 a L'aire du demi-disque de centre D et de rayon est : 2 2 22 a 1 1 a πa = . = π a = π 2 2 4 8 b L'aire du demi-disque blanc de centre E et de rayon est : 2 2 2 2 b 1 1 b πb = . b = π = π 2 2 4 8 L'aire d'un triangle est donnée par la formule : produit des longueurs des deux côtés de l'angle droit divisé par 2. 12 Attention à ne pas donner une valeur approchée par excès ! Le toit est donc un rectangle de 1 400 cm sur 877 cm.
On veut mettre un maximum de panneaux rectangulaires de 150 cm sur 80 cm. Première possibilité : 1 400 ÷ 150 ≈ 9,3 877 ÷ 80 ≈ 10,9 On peut donc mettre 9 panneaux sur la longueur et 10 sur la largeur, soit un total de 9 × 10 = 90 panneaux. 1 2 12 Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 151 C 151 06/10/2016 09:29 On considère que les rayons du Soleil sont parallèles. Les angles a et c sont symétriques par rapport à un point donc de même mesure. Les angles b et c sont deux angles alternes-internes déterminés par deux droites parallèles et une sécantes donc ils ont la même mesure. Ainsi les trois angles a, b et c ont la même mesure, qu'on notera x. x C B 53 Le billard 3,10 2,25 m T A E D 40° D C © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2,54 m Le triangle ABC est rectangle en B, on a : 1,27 = BC tan BAC tan 40° = AB AB 1,27 AB = ≈ 1,51 m tan 40° T désigne le trou du milieu. TA = AB – TB Or TB = 2,54 ÷ 2 = 1,27 m Donc TA ≈ 1,51 – 1,27 TA ≈ 0,24 m Justine doit taper avec sa boule de billard à 24 cm du trou du milieu pour faire rentrer sa boule.
54 Le périmètre de la Terre Dans ce problème, on utilise la propriété des angles alternesinternes et le calcul de la longueur d'un arc de cercle. a c m A B 1,27 m 40° x 25 m L'aire du triangle ABC rectangle en A est égale à : a×b ab = = . 2 2 L'aire des 2 lunules bleues est égale à : Aire du demi-disque de centre D et de diamètre a + aire du demi-disque de centre E et de diamètre b + aire de ABC – aire du demi-disque blanc de centre O et de diamètre c, soit : lunules = a + b – c π a2 π b2 ab πc2 + + – lunules = 8 8 2 8 π(a2 + b2 – c 2) ab + lunules = 8 2 Or le triangle ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a : BC2 = AB2 + AC2 c2 = a2 + b2 donc a2 + b2 – c2 = 0 ab On obtient ainsi : lunules = 2 L'aire des deux lunules d'Hippocrate est donc égale à l'aire du triangle rectangle.
x O Le triangle ABC est rectangle en A. AB = 3,1 m et AC = 25 m. On a donc : = 3,1 tan BCA 25 ≈ 7,1° x = BCA On connait la longueur du petit arc de cercle d'extrémités A et D qui est de 800 km. Il y a proportionnalité entre la longueur de l'arc et l'angle correspondant. Mesure de l'angle (en °) Longueur de l'arc correspondant (en km) 360 7,1 y 800 À l'aide des produits en croix, on trouve : 360 × 800 y = ≈ 40 563 km 7,1 Le périmètre de la Terre trouvée par Ératosthène est d'environ 40 563 km. Le périmètre réel est de 40 075 km ; Ératosthène avait donc trouvé une valeur très approchée de ce périmètre correcte. Les erreurs peuvent venir de plusieurs sources, mesure de la distance entre les deux villes, approximation de la forme de la Terre… On peut également trouver une valeur approchée du rayon de la Terre. La longueur d'un cercle de rayon R étant donnée par la formule 2 × π × R, on trouve un rayon d'environ 40 563 ÷ 2π ≈ 6 455 km. 55 Courbes de niveaux Il faut mesurer la distance entre A et B sur le dessin, on obtient 1,7 cm. On a le tableau de proportionnalité suivant : Tour Puits Distance sur le dessin (en cm) 0,8 1,7 Distance réelle (en m) 50 x 50 × 1,7 = 106,25 m. 0,8 On cherche l'altitude des points A et B. A est à 150 m d'altitude, B est à 120 m d'altitude, d'après les lignes de niveau. Le dénivelé entre les deux points est de 150 – 120 = 30 m. La distance entre A et B est donc d = b 152 6113_3e_C13.indd 152 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:29 On peut donc représenter la situation suivante : A m 30 m ,25 106 B C Le triangle ABC est rectangle en C, on a : = AC sin ABC AB 30 sin ABC = 106,25 ≈ 16° ABC L'angle d'inclinaison est donc de 16° environ.
57 Le passage piéton Berlin 53,52° B Terre h1 52,52° A Sud Si Julien passe par le passage piéton, il parcourt 8 + 15 = 23 m.
S'il traverse la route du point J au point F : FKJ est un triangle rectangle en K. D'après le théorème de Pythagore, on a : H Nord Équateur F FJ2 = 82 + 152 Lune 34,36° E h2 C Cap de BonneEspérance 34,66° K © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La somme des angles d'un quadrilatère est égale à 360°, donc : – BAC – ACL x = 360° – ABL = 360° – 126,48° – 145,34° – 86,88° = 1,3° 2. Dans la figure précédente, on a : • ABE triangle rectangle en E, on peut utiliser les formules de trigonométrie : = BE sin BAE AB AB est un rayon de la Terre, on a donc : = 6 370 × sin 52,52° ≈ 5 055,01 km h1 = BE = AB × sin BAE • ACF triangle rectangle en F, on peut utiliser les formules de trigonométrie : = CF sin CAF AC AC est un rayon de la Terre, on a donc : = 6 370 × sin 34,36° ≈ 3 595,2 km h2 = CF = AC × sin CAF On a posé que BC = h1 + h2 = 5 055 + 3 595 = 8 650,21 km. Nord B 53,52° h1 52,52° Équateur x H h2 Sud C Cap de BonneEspérance L Lune 34,36° 34,66° FJ2 = 64 + 225 = 289 FJ = 289 ≈ 17 m 23 – 17 = 6 m, il a gagné 6 m. v = 10 m/9 s est un angle plat, on a donc : ABH = 180° – 53,52° = 126,48°. ABL = 180° – 34,66° = 145,34°.
De la même manière, ACL On sait que BAC = 52,52° + 34,36° = 86,88°. Berlin FJ2 = FK2 + KJ2 L x Coup de pouce : on cherche les mesures des angles du quadrilatère ABLC. Terre En réalité, cette distance est de 384 400 km. On remarque que cette méthode de calcul est donc assez précise. Brevet 56 La distance Terre-Lune 1. Le triangle BCL est considéré isocèle en L, il possède donc un axe de symétrie passant par L qui est aussi une hauteur du x . triangle et une bissectrice de l'angle Le triangle BHL est rectangle en H. On a donc : = BH tan BLH HL BH 8 650,21 ÷ 2 4 325,105 HL = ≈ 381 230 km = = tan 0,65° tan(1,3° ÷ 2) tan BHL On trouve une distance d'environ 381 230 km entre la Terre et la Lune. Distance (en m) 10 6 Temps (en s) 9 t 6×9 = 5,4 s ; il a gagné 5,4 s. 10 On peut aussi calculer le temps qu'il met s'il traverse sur le 23 × 9 passage piéton : t = = 20,7 s. 10 Puis le temps qu'il met s'il traverse imprudemment : 17 × 9 t′ = = 15,3 s. 10 20,7 – 15,3 = 5,4 On retrouve le même résultat ; il a gagné 5,4 s. t= 58 Panneaux routiers 1. Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise les formules de trigonométrie : = AB = 10 tan BCA tan BCA BC 100 ≈ 6° donc BCA 1 20 = , c'est-à-dire 20 %. 5 100 C'est le panneau B qui indique la pente la plus forte.
2. On a 59 Trottoir roulant Le triangle PCH est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore, on a : PC2 = CH2 + PH2 PC2 = 252 + 42 = 625 + 16 = 641 PC = 641 ≈ 25,318 m D'après les formules de trigonométrie, on a : Modèle 1 : = CH = 4 tan CPH CP 25 ≈ 9° CPH Pour le modèle 1, l'angle de 9° est bon. Pour parcourir la pente, il faut : 25,318 t= ≈ 50,6 s < 1 min 0,5 Le modèle 1 convient. Le modèle 2 ne convient pas, l'angle d'inclinaison est trop grand. Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 153 153 06/10/2016 09:29 60 Les arbres Exercice 2 1.
Le triangle OAS est rectangle en A, on a : AS = AS tan AOS tan 45° = OA 15 AS = 15 × tan 45° = 15 m Le triangle APO est rectangle en A, on a : AP = AP tan OAP tan 25° = OA 15 AP = 15 × tan 25° AP ≈ 7 m Donc h = SA + AP = 22 m. L'arbre mesure environ 22 m. 2.
a. En M2, il faut écrire la formule =SOMME(B2:L2) b. 30 × 2 + 35 × 4 + 40 × 8 + 50 × 10 + 55 × 12 + 60 × 14 + 65 × 15 + 70 × 11 + 80 × 3 d= 2 + 4 + 8 + 9 + 10 + 12 + 14 + 15 + 11 + 4 + 3 5 210 = ≈ 57 cm 92 Le diamètre moyen du lot est d'environ 57 cm = 0,57 m. 3. On calcule le volume commercial des 92 pins : 10 92 × × 0,572 × 22 = 273,999 m3 24 70 × 273,999 = 19 179,93 La vente rapportera environ 19 180 €. 1. 67,50 m A 70° C B Le triangle ABC est rectangle en B. On a : BC = BC tan CAB tan 70° = 67,5 AB BC = 67,5 × tan 70° ≈ 185,5 m Le chaland est à environ 185,5 m du pied du phare. 2. v = 9 × 1,852 = 16,668 km/h = 16 668 m/3 600 s = 4,63 m/s 185,5 t= ≈ 40 4,63 Il mettra 40 s pour rejoindre le phare. Exercice 2 A B 10° 67,50 m 25° Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice D Exercice 1 On cherche d'abord la distance entre le chaland et le phare. Le triangle ABC est rectangle en B. On a : 67,5 = BC tan CAB tan 10° = AB AB 67,5 ≈ 382,8 m AB = tan10° On cherche maintenant la distance entre le voilier et le phare. a une valeur Le triangle ADV est rectangle en D et l'angle DAV de 90° – 25° = 65°. 12° A C d DV = DV tan DAV tan 65° = AD 67,5 DV = 67,5 × tan 65° ≈ 144,8 m 382,8 – 144,8 = 238 m La distance entre le voilier et le chaland est d'environ 238 m. B Le triangle CAB est rectangle en B. On a : 5 = BC tan CAB tan 12° = AB d 5 ≈ 23,5 km d= tan12° L'avion a parcouru 23,5 km environ depuis le décollage. Exercice 3 On cherche la longueur de la diagonale du rectangle de 5 cm sur 4 cm. C Exercice 1 C 4 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 5 km C V d A 12° A 5 cm B On cherche la distance AC : v = 200 km/h ; donc au bout de 15 min, il aura parcouru : 200 15 × = 50 km. 60 Le triangle CAB est rectangle en B. On a : d = BC sin CAB sin 12° = AB 50 AB = 50 × sin 12° ≈ 10,4 km L'avion est à une hauteur de 10,4 km environ au bout de 15 min. 154 6113_3e_C13.indd 154 B Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 52 + 42 = 25 + 16 = 41 AC = 41 AC = 41 ≈ 6,4 cm Pour trouver la valeur de l'angle, on utilise les formules de trigonométrie. = AB = 5 tan ACB tan ACB BC 4 ≈ 51° donc ACB ESPACE ET GÉOMÉTRIE 06/10/2016 09:29 Exercice 3 On cherche la longueur de la diagonale du rectangle de 6 cm sur 5 cm.
Le triangle ABC est rectangle en A ; d'après le théorème de Pythagore, on a : BC2 = AB2 + AC2 BC2 = 61 + 42 = 61 + 16 = 77 A 5 cm On remplace AB2 par sa valeur exacte 61 ; on peut aussi remplacer AB par 7,8 qui est une valeur approchée, le calcul sera alors moins précis. BC = 77 ≈ 8,8 cm Dans le triangle ABC, on a : B 6 cm D On cherche d'abord la longueur AB. Le triangle ABD est rectangle en D ; d'après le théorème de Pythagore, on a : 4 cm AB2 = BD2 + AD2 AB2 = 62 + 52 = 36 + 25 = 61 AB = 61 ≈ 7,8 cm On cherche maintenant la longueur BC, qui est la diagonale du cube. C B A = 4 tan CAB 7,8 Écriture d'un énoncé Les élèves peuvent, par exemple, donner une des longueurs du triangle rectangle et demander de calculer une autre longueur.
Analyse d'une production • Éva n'a pas utilisé la touche « arccos » pour trouver la valeur de l'angle. Elle a donné directement le résultat du quotient et assimilé le cosinus à la valeur de l'angle. • Jules s'est trompé de formule de trigonométrie. On ne peut pas utiliser la tangente, on ne connait pas le côté opposé. Il faut utiliser le cosinus de l'angle. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. ≈ 7,8 cm = BC tan CAB AH ≈ 27° donc CAB Livre du professeur – Chapitre 13 Triangles rectangles : trigonométrie 6113_3e_C13.indd 155 155 06/10/2016 09:29 6113_3e_C13.indd 156 06/10/2016 09:29 APITRE CH 14 14 Théorème de Thalès © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie », dont le but est d'utiliser les notions de géométrie plane à des fins de démonstrations. La connaissance associée est le théorème de Thalès (sens direct et réciproque). La compétence associée est de résoudre des problèmes de géométrie plane, en particulier dans le cadre de problèmes relevant de la vie courante et de situations concrètes, de prouver un résultat général, de valider ou réfuter une conjecture. Les élèves vont de ce fait effectuer des calculs mais ils valident aussi désormais par le raisonnement et la démonstration grâce à de nouveaux outils.
• Les repères de progressivité précisent : « Le théorème de Thalès est introduit en 3e, en liaison étroite avec la proportionnalité et l'homothétie, mais aussi les agrandissements et réductions.
» Un lien privilégié est donc à établir entre ce chapitre et le chapitre sur les triangles semblables, traité en 4e, et celui sur les homothéties ; c'est d'ailleurs dans cet esprit que la première activité est traitée.
Le chapitre sur les homothéties peut néanmoins être traité indifféremment avant ou après le chapitre sur le théorème de Thalès. • Ce chapitre s'inscrit donc aussi dans le thème « Grandeurs et mesures », l'objectif étant de comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs. La notion de proportionnalité est étroitement liée au théorème de Thalès, ce chapitre s'inscrivant ainsi de ce fait également dans le thème « Organisation et gestion de données, fonctions », comme le rappellent les repères de progressivité : « En 3e, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème. » La connaissance de la proportionnalité est l'un des prérequis nécessaires à ce chapitre, l'élève devant être capable de calculer C'est l'occasion de rappeler la définition de triangles semblables vue en 4e (deux triangles sont semblables lorsque leurs angles sont deux à deux de même mesure) ainsi que les méthodes permettant de démontrer que deux triangles sont semblables : – montrer qu'ils ont deux paires d'angles deux à deux de même mesure. – montrer que les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles. C'est également l'occasion de rappeler que la somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. Les triangles A et G sont semblables, car les longueurs des côtés du triangle G sont proportionnelles à celles des côtés du triangle A et le coefficient de proportionnalité est 2. Activités une quatrième proportionnelle, quelle que soit la méthode utilisée (l'accent sera mis dans ce chapitre plus particulièrement sur l'usage des produits en croix, mais toute autre méthode peut être envisagée) et de reconnaitre une situation de proportionnalité, par le produit en croix ou la reconnaissance de quotients égaux.
• Ce chapitre permet également de développer le raisonnement et la maitrise de la démonstration, le plus souvent dans des situations concrètes afin de faire sens.
Les élèves doivent être capables de visualiser les figures de référence du théorème de Thalès : forme « classique » et forme « papillon ». L'élève doit tout d'abord être capable d'écrire l'égalité de Thalès lorsque les conditions d'utilisation sont vérifiées. Il doit également être capable d'utiliser cette égalité pour montrer que deux droites sont parallèles en utilisant la réciproque du théorème de Thalès. L'élève sera également capable de montrer que deux droites ne sont pas parallèles.
Dans ce dernier cas, on n'attend pas nécessairement que les élèves sachent distinguer l'utilisation de la réciproque et la contraposée du sens direct. On pourra simplement invoquer l'égalité de Thalès (vraie lorsque les droites sont parallèles, fausse lorsque les droites ne sont pas parallèles). L'accent est mis, comme le préconise le programme, sur la diversification des problèmes dans leur nature et « la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques », notamment pour calculer des longueurs inaccessibles. « Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures. » • Ce chapitre permet également de retravailler le théorème de Pythagore et la vision dans l'espace, permettant ainsi à l'élève de développer son raisonnement grâce à des outils divers et complémentaires. Les triangles B et E sont semblables, car les longueurs des côtés du triangle E sont proportionnelles à celles des côtés du triangle B et le coefficient de proportionnalité est 3. Les triangles C et F sont semblables, car leurs angles sont deux à deux de même mesure : 50°, 70° et 60°.
En effet, dans le triangle C, l'angle manquant a pour mesure 180° – (50°+70°) = 180° – 120° = 60° et dans le triangle F, l'angle manquant a pour mesure 180° – (60°+50°) = 180° – 110° = 70°. Les triangles D et H sont semblables, car leurs angles sont deux à deux de même mesure : 25°, 35° et 120°. En effet, dans le triangle D, l'angle manquant a pour mesure 180° – (25°+35°) = 180° – 60° = 120° et dans le triangle H, l'angle manquant a pour mesure 180° – (120°+25°) = 180° – 145° = 35°. C'est l'occasion de faire constater que les mesures des angles, elles, ne sont pas proportionnelles. Elles sont égales. flash Questions Dans les questions 1., 2.
et 3., les calculs sont simples et ne nécessitent pas l'usage de la calculatrice. C'est l'occasion de retravailler le calcul mental. 1. Cette question permet de retravailler la notion de proportionnalité et plus particulièrement le fait de compléter un tableau de proportionnalité. a. 2 6 4 7 10 12 21 30 On peut trouver facilement le coefficient de proportionnalité faisant passer de la 1re ligne à la 2nd ligne du tableau : 6 = 3. Il faut donc multiplier les nombres de la 1re ligne 2 par 3 pour obtenir les nombres de la 2nd ligne. Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 157 b. 3 6 7,5 10,5 2 4 5 7 On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 6 à 9, on multiplie par 1,5 ; il suffit donc de multiplier 4 par 1,5, ce qui donne 6. On peut trouver le coefficient de proportionnalité faisant 3 passer de la 2nd ligne à la 1re ligne du tableau : = 1,5. Il faut 2 donc multiplier les nombres de la 2nd ligne par 1,5 pour obtenir les nombres de la 1re ligne et donc diviser par 1,5 les nombres de la 1re ligne pour obtenir ceux de la 2nd (ou 2 3 multiplier par , l'inverse de). On fera remarquer que le 3 2 coefficient de proportionnalité faisant passer de la 1re ligne 2 à la 2nd ligne du tableau, , n'est pas un nombre décimal. 3 Il est également possible de compléter ce tableau grâce aux 3× 4 2 × 7,5 10,5 × 2 produits en croix : =6; = 5 et = 7. 2 3 3 d. On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 8 à 2, on divise par 4 ; il suffit donc de diviser 27 par 4, ce qui donne 3. 3. Cette question permet de revoir la propriété suivante : « La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. » La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180°. Donc : B = 180° – (30° + 68°) = 180° – 98° = 82° L'angle B mesure 82°. 2. Cette question permet de réinvestir la connaissance de la propriété des produits en croix pour calculer une quatrième proportionnelle, non plus dans le cadre d'un tableau de proportionnalité, mais dans le cadre de l'égalité de deux quotients.
a. 4. Cette question permet de revoir la caractérisation des droites parallèles à l'aide des angles alternes-internes de même mesure. 5 12 × 5 x = 20. = donc x = 3 3 12 Les deux angles indiqués sur la figure sont deux angles alternes-internes, formés par les deux droites (d) et (d') et une sécante, de même mesure (58°), donc les deux droites (d) et (d') sont parallèles. On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 3 à 12, on multiplie par 4 ; il suffit donc de multiplier 5 par 4, ce qui donne 20. C'est l'occasion de revoir l'une des propriétés permettant de démontrer que deux droites sont parallèles et d'en revoir d'autres : droites perpendiculaires à une même droite, droites parallèles à une même droite, propriétés des côtés opposés d'un parallélogramme, d'un rectangle, d'un losange, d'un carré, par exemple, propriétés qui pourront servir à démontrer l'une des conditions nécessaires à l'utilisation du théorème de Thalès direct (droites parallèles). 2 5×3 3 b. = donc x = = 7,5. 2 5 x On peut aussi faire remarquer que, pour passer de 2 à 3, on

multiplie par 1,5 ; il suffit donc de multiplier 5 par 1,5, ce qui donne 7,5. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. c.
8 27 × 2 2 donc x = = 6,75. = 27 8 x 4 4×9 x = donc x = = 6. 6 6 9 Activité 1 Famille de triangles Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de faire apparaitre « naturellement » la configuration « classique » de Thalès.
Il s'agit en effet d'aborder la propriété en exploitant les connaissances des élèves en lien avec les triangles semblables, en termes d'agrandissement et de réduction et donc en lien direct avec la proportionnalité, pour enfin initier sa forme avec l'égalité des rapports dans l'activité 2. Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la notion de triangles semblables et leur reconnaissance, et la connaissance de la caractérisation du parallélisme par les angles alternesinternes et l'utilisation de la notion de proportionnalité pour calculer des grandeurs proportionnelles. La capacité introduite est d'énoncer le théorème de Thalès dans la configuration « classique ».
Cette activité est à réaliser en classe, les élèves étant répartis par groupes. Le rapporteur et la règle sont indispensables. Il faudra prévoir des feuilles de format A4 pour chaque élève. 1. 2. La question 2 est traitée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle. Les élèves seront tout de suite amenés à constater leurs éventuelles erreurs dans les tracés d'angles (utilisation de la mauvaise graduation sur le rapporteur en traçant un angle de 66° au lieu de 114°) : ils s'en aperçoivent vite car leur triangle ne ressemble pas à ceux de leurs camarades. 114° 21° 45° 21° 45° Chaque élève construit, avec son matériel de géométrie, un triangle répondant à la consigne. 114° 21° 114° 45° Avec les traits de construction : 114° 45° 158 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Les élèves remarquent vite que tous les triangles ont les trois mêmes angles. On peut leur faire démontrer en utilisant la propriété sur la somme des angles d'un triangle. Certains élèves peuvent utiliser les notions d'échelle ou de proportionnalité sans préciser entre quelles grandeurs. Ils remarqueront qu'il y a des grands triangles et des petits, sans forcément le traduire avec des propriétés mathématiques. 3. Tous les triangles construits par les élèves ont les mêmes angles : 114°, 45° et 180° – (114° + 45°) = 180° – 159° = 21°. Ils sont donc semblables et leurs côtés sont proportionnels. (vu en 4e) 6. A 4 E 2 Il faut calculer la mesure du troisième angle (21°), puis placer le plus grand côté du triangle qui est celui opposé au plus grand angle. Le segment le plus grand que l'on peut tracer dans la feuille est la diagonale de la feuille. Ce sera le grand côté du triangle.
Ensuite, on trace les deux angles de 45° et 114°. 3 B 5 C On prolonge la droite (DE). On remarque que les angles 1 et 2 sont symétriques par rapport à D et sont donc de même mesure. Les angles 1 et 2 étant de même mesure, les angles 2 et 3 aussi. Les angles 2 et 3 sont deux angles alternes-internes de même mesure. Or si les droites (DE) et (BC) sont parallèles alors les angles 2 et 3 ont même mesure. Donc si les angles 2 et 3, et par conséquent les angles 1 et 3, n'ont pas même mesure, alors les droites (DE) et (BC) ne sont pas parallèles.
On le démontre de la même façon pour les angles 4 et 5. Les élèves risquent de rencontrer des difficultés et leur triangle sortira de la feuille s'ils débutent par l'angle de 45° et celui de 114°. Certains élèves essaieront de faire rentrer leur figure dans la feuille en rapprochant leur côté grâce à des parallèles successives. 4. On peut alors faire déterminer le triangle gagnant. On peut aussi faire remarquer qu'il faut placer le triangle dans le bon sens, sinon le troisième côté n'est pas parallèle au troisième coté du triangle du professeur et pourtant les angles sont exacts. Il suffit de retourner le triangle. Le bilan est donc : quand on superpose deux triangles ABC et ADE, les sommets A, B, D d'une part et A, C, E d'autre part, sont alignés et les côtés (BC) et (DE) sont parallèles. Ainsi les deux triangles ont les mêmes angles : ils sont semblables. Le triangle construit par le professeur est supposé juste. On peut demander aux élèves de mesurer les trois angles de ce triangle pour le valider comme modèle.
Il faut ensuite superposer les autres triangles avec celui du professeur en commençant par l'un des angles : les côtés des deux angles doivent se superposer. Si les deux angles obtus ne coïncident pas, il est inutile de continuer avec ce triangle.
(vu en 4e) 7. B cm triangle vert faux 1 D Distribuer une feuille de format A4 et demander aux élèves de tracer le plus grand triangle possible ayant un angle de 114° et un angle de 45°. 114° 70 triangle du professeur Figure du tableau 45° triangle bleu faux Si le premier angle essayé convient, il faut continuer à superposer les deux triangles en changeant d'angle pour vérifier les deux autres angles (un seul de ces deux angles pouvant être testé, car si deux angles sont égaux deux à deux, le troisième sera identique). triangle du professeur La première impression risque d'être que c'est impossible. Il faut remarquer que le triangle tracé au tableau est semblable à tous les triangles justes déjà construits d'après la question précédente. Le triangle du tableau est semblable aux triangles justes déjà construits et donc ses côtés sont proportionnels à ceux des triangles justes précédemment construits. On peut alors utiliser un triangle juste déjà construit, même si le coefficient n'est pas très pratique.
On peut aussi tracer un triangle avec le côté [BC] mesurant 7 cm, par exemple, et multiplier les autres côtés qu'ils mesurent par 10. triangle violet juste B 13,8 m triangle du professeur Figure d'un élève cm 114° 7c © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. triangle du professeur A C 45° On peut alors demander s'il n'existe pas une méthode plus rapide car il y a beaucoup de triangles à valider ou non. 5. Le triangle de Nina est faux, pourtant il a un angle juste (l'angle obtus, car les côtés de l'angle se superposent), mais le troisième côté du triangle de Nina devrait être parallèle au troisième côté du triangle du professeur, sinon les deux angles ne peuvent pas être corrects. C A 17,9 cm Ainsi, par exemple, le triangle tracé au tableau est un agrandissement du triangle précédent de rapport 10. Il suffit de multiplier les longueurs de ses côtés par 10 pour obtenir les dimensions du triangle du tableau : AB = 13,8 × 10 = 138 cm et AC = 17,9 × 10 = 179 cm. Il est intéressant de faire vérifier en mesurant sur le tableau si les longueurs mesurées sont proches des longueurs calculées. On peut faire remarquer que les différences peuvent être dues à l'imprécision des tracés, des mesures, du matériel utilisé (la règle du tableau mesurant en général 1 m).
Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 159 Activité 2 Avec des droites parallèles Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir le théorème de Thalès, exprimé sous la forme d'égalité de trois quotients, dans les deux configurations : « classique » et « papillon ». Il s'agit donc d'un élargissement de l'activité précédente. Le seul prérequis nécessaire à cette activité est la prise en main d'un logiciel de géométrie dynamique. La capacité introduite est d'énoncer le théorème de Thalès sous la forme d'égalité de trois quotients. Cette activité est une activité à réaliser soit en classe entière avec l'utilisation d'un vidéoprojecteur, soit en salle informatique, les élèves étant en autonomie. Le professeur fera bien ressortir les deux types de configuration « classique » des cas 1 et 2 et « papillon » du cas 3. b. La propriété conjecturée est : si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés et si (MN) est parallèle à (BC), alors AM AN MN = = . AB AC BC c. On déplace les points A, B et C, on obtient ainsi d'autres triangles. On remarque que la propriété conjecturée à la question 2. b.
est toujours vraie. 1. a. Placer trois points A, B et C puis les droites (AB) et (AC). b.
Tracer le triangle ABC et le colorer en bleu. Placer un point M sur la droite (AB). c. Tracer la droite parallèle à (BC) passant par M et placer N le point d'intersection de cette parallèle et de (AC). d. Tracer le triangle AMN et le colorer en rouge. e. Ouvrir le tableur et saisir respectivement dans les cellules A2, B2 et C2 : AM/AB, AN/AC et MN/BC. Dans la cellule A1, pour afficher le texte, il faut saisir : =«AM/AN». Il faut faire de même dans les cellules B1 et C1. d. Les côtés des triangles AMN et ABC sont proportionnels.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 2. a. On déplace M sur (AB). On distingue en fait trois cas : • Cas 1 : M est sur [AB]. Cette question permet ainsi de présenter l'activité 2 comme une reformulation et un élargissement de l'activité 1. Dans cette activité, il n'est pas proposé de démonstration du théorème de Thalès (sens direct) mais il est possible d'en proposer une aux élèves, même très rapidement à l'oral : On considère la figure suivante dans laquelle (DE) et (BC) sont parallèles. A • Cas 2 : M est sur [AB) mais pas sur [AB]. 1 D 4 E 2 B • Cas 3 : M est sur (AB) mais pas sur [AB). On remarque, dans les trois cas, que les trois quotients et MN sont égaux. BC 160 ESPACE ET GÉOMÉTRIE AM AN , AB AC 3 5 C Les angles 2 et 3 sont deux angles alternes-internes formés par deux droites parallèles (DE) et (BC) et une sécante (BD) donc les angles 2 et 3 ont même mesure.
Les angles 1 et 2 sont symétriques par rapport à D donc ils ont même mesure (la symétrie centrale conservant les angles). Donc les angles 1 et 3 ont même mesure. Les triangles ADE et ABC ont un angle commun A ; ils ont donc maintenant deux angles de même mesure. Ils sont donc semblables. Leurs côtés sont donc proportionnels. On vient ainsi de démontrer le théorème de Thalès dans sa configuration « classique ». La configuration « papillon » est obtenue par une symétrie de centre A de la configuration « classique ». Activité 3 Pyramide Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est d'utiliser le théorème de Thalès pour calculer une longueur. Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Thalès découvert à l'activité précédente, la recherche d'une quatrième proportionnelle, plus particulièrement avec l'égalité des produits en croix. La capacité introduite est d'utiliser le théorème de Thalès en vue de calculer une longueur. Cette activité nécessite une réelle prise d'initiative, l'élève étant pour la première fois confronté au théorème de Thalès dans son utilisation. Les élèves utiliseront leur calculatrice, procèderont par essais. Ce travail peut être réalisé en groupe en vue de favoriser les échanges et débats. Il ne faut pas attendre, à ce stade, une rédaction parfaite, mais des essais, la difficulté première étant déjà de bien visualiser la situation. Aucune source ne permet d'attribuer effectivement le « théorème de Thalès » à Thalès ! Le calcul par Thalès de la hauteur d'une pyramide à partir de son ombre, relatée ici dans le roman Le Théorème du perroquet de Denis Guedj, serait une légende. La première démonstration de ce théorème fut en effet donnée par Euclide au livre VI des Éléments.
L'expression « théorème de Thalès » apparait pour la première fois en France dans la seconde moitié du XIX siècle, dans l'ouvrage de Rouché et Comberousse, Traité de géométrie élémentaire. 1. A B D Thalès 1,73 m C 231 ÷ 2 = 115,5 m Ombre de la pyramide 163,4 m Ombre de Thalès 3,50 m E 231 m 2. On suppose que la hauteur de la pyramide [AB] et Thalès [DC] sont perpendiculaires au sol donc (AB) et (DC) sont parallèles. Les points E, D, A d'une part et E, C, B d'autre part sont alignés et (AB) // (DC). D'après le théorème de Thalès : ED EC DC = = EA EB AB EB = 163,4 + 115,5 = 278,9 m ED 3,5 1,73 = = EA 278,9 AB 278,9 × 1,73 = 137,9 m. Donc AB = 3,5 La hauteur de la pyramide de Kheops est d'environ 137,9 m.
Activité 4 Division euclidienne © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir la réciproque du théorème de Thalès. Les prérequis nécessaires sont la connaissance du théorème de Thalès découvert à l'activité 2 et la maitrise d'un logiciel de géométrie dynamique. La capacité introduite est d'énoncer puis d'utiliser la réciproque du théorème de Thalès. Cette activité peut être menée en classe entière avec l'usage d'un vidéoprojecteur ou en salle informatique. La question 3 peut être menée collectivement en classe ou en recherche individuelle ou par groupes. On remarque que les droites (MN) et (BC) semblent parallèles. On peut faire remarquer qu'on retrouve les configurations « classique » et « papillon » du théorème de Thalès. 1. et 2. a. b. On peut conjecturer la propriété suivante : Si les points A, M, B AM AN d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés et si = , AB AC alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles. Cette figure remet en cause la conjecture précédente puisque les AM AN quotients et sont bien égaux mais que les droites (MN) AB AC et (BC) ne sont pas parallèles. Il faut donc rajouter une condition sur l'emplacement des points M et N : les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part doivent être alignés dans le même ordre. Autrement dit, M appartient au segment [AB], alors N doit appartenir au segment [AC]. Si M appartient à la demi-droite [AB) mais pas à [AB], alors N doit appartenir à [AC) mais pas à [AC]. Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 161 3. M cm C'est cette propriété qu'on appelle « réciproque du théorème de Thalès ».
La propriété sera admise sans démonstration. MN On pourra faire remarquer que le quotient n'intervient pas. BC MN On pourra prolonger l'activité en faisant afficher le quotient BC AM MN = et que, et faire remarquer sur la figure suivante que AB BC pourtant, les deux droites (MN) et (BC) ne sont pas parallèles. ,4 42 cm N 32 c. On peut ainsi formuler la propriété suivante : Si les points A, M, B d'une part et A, N, C d'autre part sont alignés dans le même ordre AM AN et si = , alors les droites (MN) et (BC) sont parallèles. AB AC 54 m L c 70 cm O P Il s'agit de voir si les droites (MN) et (LP) sont parallèles. On s'assure déjà que les points N, O, P d'une part et M, O, L d'autre part sont alignés dans le même ordre. On calcule ensuite séparément les deux quotients : ON 40 = = 0,6 OP 70 OM 32, 4 = = 0,6 OL 54 ON OM On remarque que = . D'après la réciproque du théorème OP OL de Thalès, on peut en conclure que les droites (NM) et (LP) sont parallèles et donc que la table à repasser est bien horizontale. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. En revanche si On peut faire remarquer qu'on peut également prouver l'égalité des deux quotients à l'aide de l'égalité des produits en croix : 40 × 54 = 70 × 32,4. ON OM On peut également faire remarquer que si ≠ , alors les OP OL droites (MN) et (OP) ne peuvent pas être parallèles. AM AN AM AN MN = , alors on a bien = = . AB AC AB AC BC On remplace les valeurs connues : 5,6 6,3 PL = = 3,7 4,8 EM On utilise le produit en croix : 6,3 × 3,7 EM = ≈ 4,2 cm 5, 6 4, 8 × 5, 6 ≈ 7,3 cm PL = 3,7 e Savoir-fair 2 Les points O, L, E d'une part et O, S, A sont alignés. Les droites (LS) et (EA) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : OL OS LS = = OE OA EA On remplace les valeurs connues : OA = OS + SA = 2,3 + 1,8 = 4,1 cm 1,2 2,3 LS = = 4,1 5,7 OE On utilise le produit en croix : 1,2 × 4,1 OE = ≈ 2,1 cm donc LE ≈ OE – OL 2,3 ≈ 2,1 – 1,2 ≈ 0,9 cm 5,7 × 2,3 LS = ≈ 3,2 cm 4,1 3 Les points P, E, O d'une part et L, E, M sont alignés. Les droites (PL) et (MO) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : EP EL PL = = EO EM OM 162 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 6 Les points E, A, C d'une part et D, A, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. On vérifie l'égalité de Thalès : AE 3,2 1 AD 3, 4 1 = = = et = 6, 4 6,8 AC 2 AB 2 AE AD L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (ED) = et (BC) sont parallèles. AC AB 7 Les points A, E, B d'une part et A, D, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. On vérifie l'égalité de Thalès : AB = AE + EB = 1,5 + 1,4 = 2,9 cm AE 1,5 AD 1,9 et = = 2,9 3,5 AB AC Les rapports ne tombent pas justes, on utilise le produit en croix : 1,5 × 3,5 = 5,25 et 2,9 × 1,9 = 5,51 AE AD L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites ≠ (ED) et (BC) ne sont pas parallèles. AB AC 8 Les points G, A, F d'une part et G, B, H d'autre part sont alignés dans le même ordre. On vérifie l'égalité de Thalès : GH = GB + BH = 6,3 cm GA 1,9 GB 2,1 et = = 5,7 6,3 GF GH Les rapports ne tombent pas justes, on utilise le produit en croix : 1,9 × 6,3 = 11,97 et 5,7 × 2,1 = 11,97 GA GB = GF GH L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (AB) et (FH) sont parallèles. Exercices Calculer des longueurs avec le théorème de Thalès Questions 9 a. x = 9 c.
x = 5 flash b.
x = 4 d. x = 6,3 On peut utiliser la propriété des quotients égaux ou la propriété des produits en croix. 10 AB = 2 unités de longueur AC = 6 unités de longueur Le rapport d'agrandissement est de AC 6 = = 3. AB 2 11 On peut utiliser le théorème de Thalès dans les configurations © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. des figures ⑤, ⑥, ⑦ et ⑧.
Dans ces cas, les points sont alignés de part et d'autre et les droites sont parallèles.
Dans les figures ①, ② et ④, les droites ne sont pas parallèles.
Dans les figures ③ et ⑨, les points ne sont pas alignés.
Dans les figures ⑤ et ⑦, les droites sont parallèles grâce à la propriété suivante : Si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. 12 Les points O, M, R d'une part et O, N, S d'autre part sont alignés. Les droites (MN) et (RS) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : OM ON MN = = OR OS RS 13 1. L'égalité est fausse. Le dernier rapport est faux. 2. L'égalité est vraie. 3. L'égalité est vraie. 4. L'égalité est fausse. Le point d'intersection des deux droites est U.
5. L'égalité est fausse. Les points alignés n'ont pas été suivis pour écrire les rapports. 14 Figure ① : égalité b. Figure ② : égalité a. Figure ③ : égalité c. 15 Les points O, E, U d'une part et T, E, P d'autre part sont alignés. Les droites (OT) et (PU) sont parallèles.
Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : EO ET OT = = EU EP PU 16 Les points A, D, C d'une part et A, D, E d'autre part sont alignés.
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE de 6 rapport = 3. 2 17 Cet exercice permet d'utiliser à la fois le théorème de Pythagore et le théorème de Thalès. Le triangle ARS est un triangle rectangle en R. On utilise le théorème de Pythagore. AS2 = AR2 + RS2 AS2= 2,12 + 2,82 = 12,25 AS = 12,25 AS = 3,5 cm Les points A, R, B d'une part et A, S, C d'autre part sont alignés. Les droites (RS) et (BC) sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : AR AS RS = = AB AC BC AB = AR + RB = 2,1 + 3,9 = 6 cm On remplace les valeurs connues : 2,1 3,5 2,8 = = 6 AC BC On utilise le produit en croix : 6 × 2, 8 BC = = 8 cm 2,1 6 × 3,5 AC = = 10 cm 2,1 18 AB = AD + DB = 4,2 + 2,1 = 6,3 cm On cherche d'abord le rapport d'homothétie : AB 6,3 = 1,5 = 4,2 AD Le triangle ABC est l'image du triangle ADE par l'homothétie de centre A et de rapport 1,5. Par cette homothétie, le segment [DE] a pour image [BC] et le segment [AE] a pour image [AC].
Donc AC = 1,5 × AE et BC = 1,5 × DE AE = 6 ÷ 1,5 = 4 cm DE = 3,6 ÷ 1,5 = 2,4 cm 19 1. On ne peut pas trouver la valeur de GC. Il manque une valeur. Il faudrait connaitre FG.
2. Les points E, G, A d'une part et C, G, F d'autre part sont alignés. Les droites (FA) et (EC) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : GF GA FA = = GC GE CE On remplace par les valeurs connues : GF 3,2 3, 4 = = GC 3,6 CE On utilise le produit en croix : 3, 6 × 3, 4 CE = = 3,825 cm 3,2 20 Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés.
Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : AD AE DE = = AB AC BC On remplace par les valeurs connues : 3,7 5,7 4,1 = = 5,3 AC BC On utilise le produit en croix : 5,3 × 5,7 AC = ≈ 8,2 dm 3,7 5,3 × 4,1 BC = ≈ 5,9 dm 3,7 Donc EC = AC – AE ≈ 8,2 – 5,7 ≈ 2,5 dm. 21 Les points D, T, N d'une part et C, T, E d'autre part sont alignés. Les droites (DC) et (EN) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : TD TC DC = = TN TE EN Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 163 26 Les points T, U, S d'une part et O, U, R d'autre part sont alignés On remplace par les valeurs connues : 4,7 TC DC = = 5,2 2, 4 4,3 On utilise le produit en croix : 4,7 × 2, 4 TC = ≈ 2,2 cm 5,2 4,7 × 4,3 DC = ≈ 3,9 cm 5,2 dans le même ordre. On vérifie l'égalité de Thalès : UT 5 UO 7,5 et = = 1,8 2,7 US UR On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux. 5 × 2,7 = 13,5 et 1,8 × 7,5 = 13,5 UT UO = US UR L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (OT) et (RS) sont parallèles. 22 Les points A, D, C d'une part et B, E, C d'autre part sont alignés. Les droites (DE) et (AB) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : CD CE DE = = CA CB AB On remplace par les valeurs connues : AC = AD + DC = 5 + 3 = 8 cm 3 CE DE = = 8 9 AB On ne peut pas trouver DE. Pour la trouver, il faut avoir la valeur de AB. C'est donc Manon qui a raison. 27 Les codages sur la figure montrent que N et R sont les milieux respectifs des côtés [K I] et [IA]. On a donc IK = 2 × IN et IA = 2 × IR. IK IA On en déduit que = 2 et = 2.
IN IR Les points I, N, K d'une part et I, R, A d'autre part sont alignés IK IA dans le même ordre : = . IN IR L'égalité de Thalès est vérifiée, les droites (NR) et (KA) sont parallèles. KA IK = On a donc = 2. NR IN On en déduit que NR = 7,2 ÷ 2 = 3,6 cm. Reconnaitre des droites parallèles flash Questions 23 28 C'est Noé qui a raison, car pour prouver que deux quotients sont égaux, il faut travailler avec des valeurs exactes et non approchées, comme l'a fait Lucas. Lucas aurait dû utiliser le produit en croix pour vérifier l'égalité des rapports. Cet exercice permet de remobiliser la propriété des quotients égaux ou celle des produits en croix pour reconnaitre deux quotients égaux. a.
5 × 9 = 45 et 3 × 15 = 45, donc les rapports sont égaux. b. 7,4 × 5 = 37 et 3,6 × 10 = 36, donc les rapports ne sont pas égaux. c. 3,6 × 6 = 21,6 et 9 × 1,8 = 16,2, donc les rapports ne sont pas égaux. 29 Les points D, E, A d'une part et D, G, B d'autre part sont alignés dans le même ordre. DA = DE + EA = 4,12 + 1,03 = 5,15 cm DG = DB – GB = 4,24 – 1 = 3,24 cm On vérifie l'égalité de Thalès : DE 4,12 DG 3,24 = et = DA 5,15 DB 4,24 On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux.
4,12 × 4,24 = 17,468 8 et 5,15 × 3,24 = 16,686 DE DG ≠ DA DB L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites (EG) et (AB) ne sont parallèles. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
24 a. Les droites (d) et (d') sont parallèles car elles sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite. b. (d) et (d') ne sont pas parallèles, les angles alternes-internes ne sont pas de même mesure. c. (d) et (d') sont parallèles, car elles sont portées par les côtés opposés d'un losange (car c'est un quadrilatère dont les diagonales se coupent en leur milieu et sont perpendiculaires) et ses côtés sont parallèles. 25 Les points A, E, C d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés dans le même ordre. AC = AE + EC = 3,31 + 1,16 = 4,47 cm AB = AF + FB = 3,16 + 0,82 = 3,98 cm On vérifie l'égalité de Thalès : AE 3,31 AF 3,16 et = = 4, 47 3,98 AC AB On utilise le produit en croix pour vérifier si les rapports sont égaux. 3,31 × 3,98 = 13,173 8 et 4,47 × 3,16 = 14,125 2 AE AF L'égalité de Thalès n'est pas vérifiée, les droites ≠ (EF) et (BC) ne sont pas parallèles. AC AB t in Faire le po QCM 1 1.
C 2. A 2 1. C 2. B Carte mentale Calculer une longueur Reconnaitre des droites parallèles Les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés. A N C M A B Si (MN)//(CB) alors 164 M C B AN AM NM . = = AC AB CB ESPACE ET GÉOMÉTRIE N Égalité de Thalès Les points A, B, M d'une part et A, C, N d'autre part sont alignés dans le même ordre . • Si AN = AM alors (MN)//(CB) AC AB • Si AN ≠ AM alors les droites ne sont AC AB pas parallèles. D'après le théorème de Thalès : Algorithmique DE DC EC = = DA DB AB et outils numériques 30 Une construction 1. Ce script permet de construire 4 triangles rectangles semblables. DE 15 EC = = DA 60 80 15 × 80 = 20 EC = 60 DEC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : ED2 = EC2 + DC2 ED2 = 202 + 152 ED2 = 400 + 225 ED2 = 625 ED = 625 ED = 25 Donc les côtés du dernier triangle tracé mesurent : 15 ; 20 et 25. 31 Feux de croisement Il faut décaler le lutin pour pouvoir visualiser la figure construite. La variable n indique le nombre de fois où le lutin va faire la construction. Les côtés de chaque triangle construit sont proportionnels car on divise les longueurs des côtés par 2, puis par 3, puis par 4. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
2. • 1re méthode Le premier triangle rectangle a pour côtés de l'angle droit 60 et 80. D'après le théorème de Pythagore, l'hypoténuse h vérifie : h2 = 602 + 802 h2 = 3 600 + 6 400 h2 = 10 000 h = 10 000 h = 100 Le dernier triangle construit est une réduction du premier 1 triangle construit de rapport . 4 Les longueurs de ses côtés mesurent 60 ÷ 4 = 15 ; 80 ÷ 4 = 20 et 100 ÷ 4 = 25. • 2nd méthode On déplace le dernier triangle construit et on le place à l'intérieur du premier triangle construit de façon à obtenir une configuration de Thalès « classique ». A 1. À l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique, on trace une droite (AB). Sur (AB), on place C de sorte que AC = 3. On trace la perpendiculaire à (AC) passant par A et on y place un point D tel que AD = 0,9. D matérialise le phare de la moto. On trace la perpendiculaire à (AC) passant par C (représentant le mur) et on y place un point E qui matérialise la hauteur des feux sur le mur.
On trace la droite (DE) et on place F le point d'intersection de (DE) et (AC). On affiche les longueurs CE et AF. Voir figure en bas de page. On bouge le point E de sorte que la longueur AF soit égale à 30, et on note CE. On trouve que CE, c'est-à-dire la hauteur de réglage x, doit être d'environ 0,81 m = 81 cm. 2.
Par le calcul : Les points D, E, F d'une part et A, C, F d'autre part sont alignés et (CE) et (AD) sont parallèles (on suppose la moto et le mur tous deux perpendiculaires au sol). D'après le théorème de Thalès : FE FC EC = = FD FA DA FE 30 – 3 x = = (90 cm = 0,9 m) FD 30 0,9 27 x = 30 0,9 27 × 0,9 x= = 0,81 m 30 La hauteur de réglage x doit être de 0,81 m = 81 cm. On retrouve bien le même résultat. 32 Les morceaux de bois E D C B La longueur du premier côté tracé du dernier triangle rectangle est 60 ÷ 4 = 15. Ici, DC = 15. Les points D, E, A d'une part et D, C, B d'autre part sont alignés et (CE) et (AB) sont parallèles (car ABC est rectangle en B et ECD est rectangle en C ; (AB) et (CE) sont donc toutes les deux perpendiculaires à une même droite et sont par conséquent parallèles entre elles). Les points A, E, D d'une part et C, E, D d'autre part sont alignés et (AC) // (DB). D'après le théorème de Thalès : EA EC AC = = EB ED BD EA 8 AC = = 10 – EA 12 – 8 BD EA 8 = 10 – EA 4 AE Donc =2 10 – AE Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 165 Dans la feuille de calcul suivante, on fait varier AE de 0 à 10 avec un pas de 0,5 et on cherche pour quelle valeur de AE la valeur de AE ÷ (10 – AE) est la plus proche de 2. La formule saisie dans la cellule A3 est =A2+0,5, puis on étire la formule. La formule saisie dans la cellule B2 est =A2/(10-A2), puis on étire la formule. On trouve que la largeur de ce chemin est d'environ 1,22 m. b. À l'aide d'un tableur Cette partie est assez technique : l'objectif est d'obtenir une équation. D'après les lignes 15 et 16, on voit que AE ÷ (10 – AE) est égal à 2 lorsque AE est compris entre 6,5 et 7.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La valeur indiquée dans la cellule B22 est liée au fait que si AE = 10, le dénominateur de AE ÷ (10 – AE) est alors 0, ce qui est impossible. On reprend le tableau précédent en faisant varier AE de 6,5 à 7 avec un pas de 0,1. La formule saisie en A3 est alors =A2+0,1. La formule saisie dans la cellule B2 est la même que précédemment. En se servant de la figure précédente • 1re méthode Appelons ℓ la longueur AB. Les points B, E, C d'une part et B, F, A d'autre part sont alignés et (CA) // (EF). D'après le théorème de Thalès : EB BF EF = = BC BA AC EB BF 1 = = 2 , AC , Donc BF = . AC ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore : 22 = ℓ + AC2 AC2 = 4 – ℓ2 AC = BC2 = AB2 + AC2 4 – ,2 1 , , on obtient BF = . AC 4 – ,2 Les points A, E, D d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés et (BD) // (EF). D'après le théorème de Thalès : AE AF EF = = AD AB BD EA AF 1 = = 3 , BD , Donc AF = BD ABD est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : Donc en reportant dans BF = D'après la ligne 4, on trouve que AE ÷ (10 – AE) est proche de 2 lorsque AE ≈ 6,7. 33 Chemin barré 1.
Grâce à un logiciel de géométrie dynamique On trace une droite (AB). On trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par A et passant par B. On place un point C sur la droite perpendiculaire passant par A et un point D sur la droite perpendiculaire passant par B. On trace les segments [CB] et [AD]. Placer E le point d'intersection de ces deux segments. On trace la droite perpendiculaire à (AB) passant par E. On place F le point d'intersection de (AB) et de cette dernière perpendiculaire tracée.
Afficher les longueurs CB, AD, AB et EF. On déplace alors les points de sorte que CB = 2, AD = 3 et EF = 1 et on note alors la longueur AB correspondante. 166 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 32 = ℓ2 + BD2 BD2 = 9 – ℓ2 BD = AD2 = AB2 + BD2 9 − ,2 , , on obtient AF = BD , 1 . + 4 − ,2 9 − ,2 Donc en reportant dans AF = Or AB = ℓ = AF + FB = , 9 − ,2 . On crée donc un tableau : Dans la colonne A, on fait varier ℓ de 0,1 en 0,1 (de 0 jusqu'à 2, car AB doit être plus petite que BC). Dans la colonne B, on affiche la valeur de , + 1 correspondante et 4−, 9 − ,2 on cherche pour quelle valeur de ℓ, sur une même ligne on trouve la même valeur dans la colonne A et dans la colonne B. Dans A3, on saisit la formule =A2+0,1 et dans B2 la formule =(A2/RACINE(4-A2*A2))+(A2/RACINE(9-A2*A2))).
2 Grâce aux lignes 14 et 15, on trouve que la valeur de ℓ est comprise entre 1,2 et 1,3. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La valeur affichée dans la cellule B22 s'explique par le fait que si ℓ = 2, alors 0 apparait au dénominateur de l'une des fractions, ce qui est impossible. On reprend le même tableau en faisant varier ℓ entre 1,2 et 1,3 avec un pas de 0,01, c'est-à-dire que dans A3 on saisit =A2+0,01. D'après le théorème de Thalès : AE AF EF = = AD AB BD AE AF 1 = = 3 , BD , Donc AF = .
BD AB = AF + FB , , Donc ℓ = + BD AC 1 1 + 1= BD AC 1 1 =1– AC BD 1 BD 1 = – AC BD BD 1 BD − 1 = AC BD BD AC = BD − 1 ABC est rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore : BC2 = AB2 + AC2 2 2 2 2 = ℓ + AC AC2 = 4 – ℓ2 ABD est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : AD2 = AB2 + BD2 2 2 2 3 = ℓ + BD ℓ2 = 9 – BD2 Or AC2 = 4 – ℓ2 donc AC2 = 4 – (9 – BD2) = 4 – 9 + BD2 = –5 + BD2 BD BD2 donc AC2 = Or AC = BD − 1 (BD − 1)2 On obtient donc l'équation suivante : BD2 –5 + BD2 = (BD − 1)2 BD2 2 soit BD = 5 + (BD − 1)2 Il faut donc résoudre cette équation.
On va donc, dans un tableur, faire varier BD dans la colonne BD2 A, afficher BD2 dans la colonne B et dans la (BD − 1)2 colonne C et chercher pour quelle valeur de BD on trouve sur la même ligne la même valeur dans les colonnes B et C. Il faut ensuite chercher la valeur de AB correspondante : or ℓ2 = 9 – BD2, donc ℓ = 9 − BD2 . On fait donc afficher dans la colonne D la valeur de ℓ correspondant.
Grâce à ce nouveau tableau et à la ligne 5, on trouve que la distance ℓ entre les deux murs est d'environ 1,23 m. • 2nd méthode (plus complexe) Appelons ℓ la longueur AB. Les points B, E, C d'une part et B, F, A d'autre part sont alignés et (CA) // (EF). D'après le théorème de Thalès : EB BF EF = = BC BA AC EB BF 1 = = 2 , AC , Donc BF = . AC Les points A, E, D d'une part et A, F, B d'autre part sont alignés et (BD) // (EF).
Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 167 35 Les ombres On fait un schéma de la situation. B E 162 cm Dans la cellule A3, on saisit la formule =A2+0,1. Dans la cellule B2, on saisit la formule =A2*A2. Dans la cellule C2, on saisit la formule =5+((A2*A2)/((A2-1)*(A2-1))) et dans la cellule D2, on saisit la formule =RACINE(9-B2). Grâce aux lignes 29 et 30, on trouve que BD doit être compris entre 2,7 et 2,8. On reprend donc le tableau précédent en faisant varier BD entre 2,7 et 2,8 avec un pas de 0,01, c'est-à-dire que dans A3 on saisit =A2+0,01. A D 160 cm C 180 cm Grâce à ce nouveau tableau et à la ligne 6, on trouve que la distance AB entre les deux murs est d'environ 1,22 m. Le segment [CE] représente Yaël et le segment [BC], Cédric. Les rayons du soleil sont parallèles. Le triangle DCE est une réduction du triangle ABC de rapport DC 160 8 = = . CA 180 9 8 On a donc EC = × 162 = 144 cm. 9 Yaël mesure 1,44 m.
On peut aussi utiliser le théorème de Thalès. Problèmes 36 Le carré géométrique 34 Le sténopé On pourra se référer au lien internet suivant qui est un extrait de la Composition et usage du carré géométrique d'Oronce Fine. On fait un schéma de la situation. Personnage A Photographie F A © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. C O B 8 cm B F D 4,5 m 20 cm Le personnage peut être assimilé au segment [AE] perpendiculaire au sol et la paroi du sténopé où est projetée la photographie [FD] aussi. B est le milieu de [AE] et C est le milieu de [FD]. (AB) et (CD) sont perpendiculaires à une même droite (BC), elles sont donc parallèles. Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : OA OB AB = = OD OC DC On remplace les valeurs connues, mais d'abord on les convertit toutes en centimètres. 4,5 m = 450 cm OA 450 AB = = OD 20 4 On utilise le produit en croix : 450 × 4 AB = = 90 cm 20 La hauteur totale du personnage avec sa canne est de 2 × 90 cm = 180 cm = 1,80 m. La taille du personnage est donc de 180 – 7 = 173 cm = 1,73 m (on soustrait à la taille totale du personnage réel la longueur de la canne à pêche qui dépasse). 168 C D E ESPACE ET GÉOMÉTRIE E 2 bras A B F D C E On cherche la longueur CE. Les côtés BC et DC du carré sont gradués. Dans la configuration dite « du papillon », A, F, E d'une part et B, F, C d'autre part sont alignés et les droites (AB) et (DC) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : FB FA AB = = FC FE CE Les graduations sur le côté BC donnent la longueur FC et BC et on connait AB = 2 bras.
FC × AB On utilise le produit en croix : CE = FB AB = 2 bras = 1,1 m Soit BF = x (en m). FC = 1,1 – x (en m). (1,1 − x) × 1,1 .
Donc CE = x x étant connu car les côtés du carré sont gradués, on peut trouver la longueur CE, distance sur le sol plat, grâce à cette formule. (1,1 – 0,5) × 1,1 = 13,42 m Par exemple, si BF = 0,5 m, alors CE = 0,5 37 L'éclipse 39 Bricolage On schématise la situation : A On schématise la situation : N M L cm E D T 60 cm S 50 30 cm On peut utiliser le théorème de Thalès ou le rapport d'agrandissement. 1. SN = 1 400 000 ÷ 2 = 700 000 km rayon du Soleil. ML = 3 500 ÷ 2 = 1 750 km rayon de la Lune. Les points N, M, T d'une part et S, L, T d'autre part sont alignés, les droites (SN) et (LM) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : TM TL ML = = TN TS NS On remplace les valeurs connues : TM TL 1 750 = = TN 149 600 000 700 000 On utilise le produit en croix : 1 750 × 149 600 000 TL = = 374 000 km 700 000 L'observateur doit être à environ 374 000 km du centre de la Lune. 2. La distance de 373 000 km est très proche de la valeur trouvée à la première question qui est une valeur approchée. C'était donc une éclipse totale. C B 1,20 m On suppose le mur perpendiculaire au sol. Le triangle ABC est rectangle en B, on utilise l'égalité de Pythagore pour trouver la longueur AC. AC2 = AB2 + BC2 = 902 + 1202 = 22 500 AC = 22 500 = 150 cm Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés dans le même ordre. On vérifie l'égalité de Thalès : AD 30 1 AE 1 50 = = = = AB 90 3 AC 3 150 Les rapports sont égaux, l'égalité de Thalès est vérifiée donc les droites (DE) et (BC) sont parallèles. L'étagère est horizontale. 40 Le puits On schématise la situation : C 150 cm Cet exercice peut être exploité dans le cadre d'un EPI sur le calcul de longueurs astronomiques, en lien avec la physiquechimie. 38 Distance Terre-Lune © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Dans cet exercice, il faut faire attention aux unités. On schématise la situation : 120 cm N A 100 cm O D M L S T On a : NS = 3 500 ÷ 2 = 1 750 km = 175 000 000 cm, le rayon de la Lune. ML = 0,5 cm Les points N, M, T d'une part et S, L, T d'autre part sont alignés, les droites (SN) et (LM) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : TM TL ML = = TN TS NS On remplace les valeurs connues : TM 100 0,5 = = TN TS 1 75 000 000 On utilise le produit en croix : 100 × 175 000 000 = 35 000 000 000 cm 0,5 = 350 000 000 m = 350 000 km La distance Terre-Lune est d'environ 350 000 km. TS = B Les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires à la droite (AD) qui matérialise le sol. Deux droites perpendiculaires à une même droite sont parallèles entre elles. (AB) et (CD) sont donc parallèles.
Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : OA OB AB = = OD OC DC On remplace les valeurs connues : 120 OB AB = = 100 OC 150 120 × 150 AB = = 180 cm 100 Le puits est à une profondeur de 1,80 m. Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 169 On peut aussi présenter la méthode suivante qui utilise une configuration classique et non « papillon » de Thalès : 1,50 m C Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : CD CF DF = = CA CG AG CD 20 10 On remplace les valeurs connues : = = CA 540 AG 540 × 10 Donc AG = = 270 cm. 20 On obtient ainsi la moitié de la hauteur de l'arbre. 2 × 270 = 540 cm = 5,40 m. L'arbre mesure 5,40 m. 42 Course d'orientation • Première partie du parcours 1m A D O B D C B E • Seconde partie du parcours 400 m D C 30 ? 0m 41 La croix du bucheron On obtient le dessin suivant : [AB] représente l'arbre et DEC la croix du bucheron. On convertit d'abord toutes les mesures en centimètres. 0m E G D G C F 20 cm E B Les points C, D, A d'une part et C, F, G d'autre part sont alignés et les droites (DF) et (GA) sont parallèles. 170 ESPACE ET GÉOMÉTRIE ? 15 A 10 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.
1,20 m + 1 m = 2,20 m Les droites (OD) et (BE) sont parallèles. Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés, les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : CO CD OD = = CB CE BE On remplace les valeurs connues : 1,50 1 CO = = 2,20 CE CB 1,50 × 2,20 CE = = 3,30 m 1 DE = CE – CD DE = 3,30 – 1,50 = 1,80 m Le puits est à une profondeur de 1,80 m. B est le milieu de [AD] donc AB = 250 m. Le triangle ABD est rectangle en B, on peut utiliser le théorème de Pythagore. AD2 = CD2 + AC2 CD2 = AD2 – AC2 = 5002 – 3002 = 160 000 CD = 400 m ACD est un triangle rectangle en C, c'est la moitié d'un rectangle.
B est le milieu de [AD]. Or les diagonales d'un rectangle se coupent en leur milieu et sont de même longueur. Donc AB = BD = CD = 250 m. F 250 m Les droites (CD) et (GF) sont parallèles. Les points C, E, F d'une part et D, E, G d'autre part sont alignés. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : ED EC CD = = EG EF GF ED 300 400 = = On remplace les valeurs connues : 150 EF 250 150 × 400 ED = = 240 m 250 300 × 250 EF = = 187,5 m 400 On cherche la longueur totale du parcours : AB + BC + CD + DE + EF = 250 + 250 + 400 + 240 + 187,5 = 1 327,5 m On cherche la vitesse d'Hugo : d 1327,5 v= = × 60 = 4 425 m/h = 4,425 km/h t 18 Hugo a tort. 43 Big Ben 44 La falaise On schématise la situation en notant les valeurs connues. B C D A 1,5 10 pieds 316 ft M ft E 500 pieds C A représente l'objectif de l'appareil photo, assimilé à l'extrémité du bras. [AE] représente le bras. [DE] représente l'image de Big Ben (l'écartement entre les deux doigts). [BC] représente Big Ben en vrai. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès : AD AE DE = = AB AC BC BC = 316 × 30,48 = 9 631,68 cm AE = 1,5 ft = 1,5 × 30,48 = 45,72 cm Il manque DE, il faut mesurer la tour sur la photo. DE = 2 cm AD 45,72 2 = = 9 631,68 AB AC 45,72 × 9 631,68 AC = ≈ 220 180,2 cm ≈ 2 200 m 2 ≈ 2,2 km Cette longueur trouvée peut être assimilée à la distance qui sépare Bob de Big Ben, la taille de Bob étant négligeable par rapport à cette distance. Mais si on recherche plus de précision : B A 15 pieds [MN] représente la perche plantée dans le sable, [BC] la falaise. La perche et la muraille sont perpendiculaires au sol, donc parallèles entre elles. Les droites (BC) et (MN) sont parallèles. Les points A, M, C d'une part et A, N, B d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès : AM AN MN = = AC AB BC AM 15 10 = = AC 515 BC 515 × 10 ≈ 343,3 pieds BC = 15 BC ≈ 343,3 × 30,48 ≈ 10 463,8 cm ≈ 104 m La hauteur de la muraille est d'environ 104 m. 45 À la montagne On schématise la situation. Sapin 2 750 m B D 1 850 m A C E v = 120 km/h = 100 120 000 m m/s = 3 3 600 s 100 × 24 = 800 m 3 BC = 2 750 – 1 850 = 900 m 1 min 12 s = 72 s 100 AD = × 72 = 2 400 m 3 Les droites (DE) et (BC) sont parallèles, car elles sont toutes les deux perpendiculaires au sol. On utilise le théorème de Thalès : AD DE AE = = AB BC AC DE 2 400 = 900 2 400 + 800 2 400 × 900 DE = 3 200 DE = 675 m L'altitude du sapin est de 1 850 + 675 = 2 525 m. DB = D A 316 ft © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. N B F 1,5 ft E C Soit F le milieu de [BC]. BF = BC ÷ 2 = 9 631,68 ÷ 2 = 4 815,84 cm Le triangle AFC est rectangle en F. D'après le théorème de Pythagore : AC2 = AF2 + FC2 2 2 220 180,2 = AF + 4 815,842 AF = 220180,22 − 4 815, 84 2 ≈ 220 128 cm 46 Partage On trace un segment [AB] que l'on veut diviser en 7 parts égales. On trace une demi-droite [AC). Avec un compas, on trace 7 segments égaux (on choisit l'écartement que l'on veut). Cette photo a été prise à environ 2,2 km de Big Ben. B On remarque que les longueurs AC et AF sont effectivement très proches. AF peut ainsi être assimilée à AC. A D E F G H I Z Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès C 171 On relie le point B et le point Z.
A B I H Z C On trace ensuite des droites parallèles à (BZ) passant par les points D, E, F, G, H et I. cm 238 cm G 4 F 8, 6 E 45 D A D E B F B D A E F G I H Z C Grâce au théorème de Thalès, on a divisé le segment [AB] en 7 parts égales. 47 Sous l'escalier La table a une profondeur de 61 cm et l'escalier de plus de 80 cm, il n'y a donc pas de problème dans ce sens-là. On schématise la situation. A Escalier C 392 cm On cherche maintenant si on a la place pour mettre la table en dessous de l'escalier. Le rectangle BDEF matérialise la table. Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés, et les droites (DE) et (BC) sont parallèles. On peut utiliser le théorème de Thalès : AD AE DE = = AB AC BC AD AE DE = = 458,64 238 392 DE = AD × 392 28 AD = 238 17 Si on suppose que EF = 110 cm alors : AD = 238 – 110 = 128 cm. 28 On trouve alors pour DE = × 128 ≈ 210,8 cm. 17 210,8 > 150 Ewen aura donc largement la place de mettre sa table haute sous l'escalier. 48 À Paris B C F On schématise la situation par le dessin suivant. B On cherche d'abord la longueur de l'escalier. L'escalier a une longueur égale à 14 fois la longueur de l'hypoténuse du triangle rectangle suivant qui représente une marche : E A C Faire attention : il y a bien 15 marches mais la longueur à calculer s'arrête à l'avant-dernière marche ! Le triangle ABC est rectangle en B, on utilise le théorème de Pythagore. AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 282 + 172 AC2 = 1 073 AC = 1073 ≈ 32,76 cm Donc l'escalier a une longueur de 32,76 × 14 ≈ 458,64 cm.
On cherche ensuite la largeur sous l'escalier : 14 × 28 = 392 cm 172 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 60 cm F 320 m B 210 m A 7,3 cm 28 cm 17 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. La difficulté de cet exercice réside dans un premier temps dans sa représentation. On suppose que la tour Eiffel et la tour Montparnasse sont situées à la même altitude. E D D G [AF] représente la tour Montparnasse et [BG] la tour Eiffel. [ED] représente la règle. Les deux tours sont perpendiculaires au sol donc les droites (AF), (ED) (on suppose que Jade tient sa règle perpendiculairement au sol) et (BG) sont parallèles entre elles puisque perpendiculaires à une même droite. Les points A, E, B d'une part et A, D, G d'autre part sont alignés. On peut utiliser l'égalité de Thalès : AE AD ED = = AB AG BG On convertit toutes les mesures en mètres. 7,3 cm = 0,073 m et 60 cm = 0,6 m. AE 0,6 0,073 = = AB AG 320 0, 6 × 320 AG = ≈ 2 630,1 m 0, 073 FG = 6 873 326,1 FG ≈ 2 622 m À vol d'oiseau, les deux tours sont distantes d'environ 2,6 km. Prolongements possibles : Il peut être intéressant de faire vérifier cette distance sur une carte de Paris. Cela permet de retravailler la notion d'échelle et de proportionnalité. Il faut donc calculer l'aire de la surface du plancher au sol de ce rectangle de longueur 13 m et de largeur 2,475 × 2 = 4,95 m. 4,95 m 2 = 4,95 × 13 = 64,35 m2 La surface totale est : = 1 + 2 = 117 + 64,35 = 181,35 m2. 13 m Le triangle AFG est rectangle en F.
D'après le théorème de Pythagore : AG2 = AF2 + FG2 2 2 2 2 630,1 = 210 + FG FG2 = 6 873 326,1 Le prix de vente possible est donc égal à P = 181,35 × 1 416 soit environ 256 792 €. 50 Cône de sel 1. a. S 1m C A 3,20 m On trouve un résultat assez proche, l'écart étant dû à l'imprécision de la situation (on suppose notamment que l'œil de Jade est au même niveau que l'extrémité de son bras). On peut aussi faire calculer le pourcentage d'erreur. 49 Vente de maison La surface du rez-de-chaussée est l'aire d'un rectangle de longueur 13 m et de largeur 9 m : © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 = 9 × 13 = 117 m2 On cherche maintenant la surface au sol des combles. On schématise : C E D A H F G B CF = 4 m, EG = 1,80 m et BF = 4,5 m. Dans le triangle BCF, les points B, E, C d'une part et B, G, F d'autre part sont alignés. Les droites (FC) et (EG) sont toutes les deux perpendiculaires au sol représenté par le droite (AB), elles sont donc parallèles. Les conditions du théorème de Thalès sont réunies, on peut utiliser son égalité : BE BG EG = = BC BF CF BE BG 1,8 = = 4,5 BC 4 4,5 × 1, 8 = 2,025 m 4 FB = AB ÷ 2 = 9 ÷ 2 = 4,5 m Donc FG = 4,5 – 2,025 = 2,475 m BG = E B 2,30 m O L 5m La hauteur de ce cône de sel est h = 2,50 mètres. Les points A, C, S d'une part et A, B, O d'autre part sont alignés. Les droites (CB) et (SO) sont perpendiculaires à une même droite, elles sont donc parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc écrire l'égalité de Thalès : AC AB BC = = AS AO OS On remplace par les valeurs connues : AO = AB + BE + EO = 3,2 + 2,3 + 2,5 (EO = 2,5 m car le triangle SEL est isocèle en S donc la hauteur [SO] est aussi la médiatrice de [EL], par conséquent O est le milieu de [EL]). AC 3,2 1 = = AS 8 OS 8 ×1 = 2,5 OS = 3,2 La hauteur h mesure 2,5 m. b. On utilise la formule du volume d'un cône : 1 1 = πr2 h = × π × 2,52 × 2,5 ≈ 16 m3 3 3 Le volume de sel contenu dans ce cône est proche de 16 m3. 2. Le volume d'un cône est de 1 000 m3 et la hauteur maximale est 6 m. On remplace les valeurs connues dans la formule du calcul du volume du cône : 1 = πr2 h 3 1 1 000 = π × r2 × 6 3 1000 × 3 500 Donc r² = = 6π π 500 ≈ 12,6 m r= π Le rayon minimum est d'environ 12,6 m. 51 La desserte On ne peut pas utiliser la réciproque du théorème dans ce cas précis, n'ayant pas les valeurs de OA et OD. On va donc raisonner différemment en cherchant la valeur qu'aurait CD si les droites (AB) et (CD) étaient parallèles, et comparer. Les points A, O, D d'une part et B, O, C d'autre part sont alignés. On suppose que les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On utilise le théorème de Thalès pour trouver la valeur de CD : OC OD CD = = OB OA AB 60 OD CD = = 45 OA 76 60 × 76 CD = ≈ 101,3 cm ≠ 100 cm 45 La supposition initiale est fausse, les plateaux de la desserte ne sont pas parallèles. Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 173 52 Escalier 1. Le triangle EBD est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore : ED2 = DB2 + EB2 DB = 20 + 250 = 270 cm ED2 = 2702 + 3602 ED2 = 202 500 202 500 = 450 m ED = 2. On se place dans le triangle BED. Les points B, A, E d'une part et B, C, D d'autre part sont alignés. Les droites (ED) et (AC) sont parallèles (l'épaisseur de la rampe est toujours la même). Les conditions du théorème de Thalès sont réunies. On a donc l'égalité : BA BC AC = = BE BD ED BA 250 AC = = 360 270 450 360 × 250 250 × 450 On a BA = ≈ 333 cm et AC = ≈ 417 cm. 270 270 53 Le fumoir 1. On a OD = JK = 2 m car ODJKJ est un rectangle (il a 3 angles droits) et ses côtés opposés sont donc de même longueur. 2.
HI = HD – IO – OD = 5 – 0,6 – 2 = 2,4 m 3. Les droites (OJ) et (IF) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (HD), elles sont donc parallèles. 4. Les points H, F, J d'une part et H, I, O d'autre part sont alignés. Les droites (OJ) et (IF) sont parallèles. On peut utiliser le théorème de Thalès : HF HI IF = = HJ HO OJ HF 2, 4 IF = = HJ 3 5 2, 4 × 5 =4m IF = 3 La longueur du panneau devra être de 4 m. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 Exercice 1 1. Les droites (DE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles. On veut vérifier si le triangle ADE est rectangle en D. 2. Le triangle ADE est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore : EA2 = ED2 + DA2 ED2 = EA2 – DA2 ED2 = 5,52 – 4,42 ED2 = 10,89 ED2 + DA2 = 4,22 + 5,62 = 49 ED = 10,89 = 3,3 cm 3.
Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés. Les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : AD AE DE = = AB AC BC On remplace par les valeurs connues : 4, 4 5,5 3,3 = = 8,1 AB BC 4, 4 × 8,1 8,1 × 3,3 AB = = 6,48 cm et BC = = 4,86 cm. 5,5 5,5 BD = AB – AD BD = 6,48 – 4,4 = 2,08 cm 174 ESPACE ET GÉOMÉTRIE EA2 = 72 = 49 EA2 = ED2 + DA2.
L'égalité de Pythagore est vérifiée donc le triangle ADE est bien rectangle en D. Les droites (DE) et (BC) sont toutes les deux perpendiculaires à une même droite (AB), elles sont donc parallèles. Les points A, D, B d'une part et A, E, C d'autre part sont alignés. Les conditions d'utilisation du théorème de Thalès sont respectées, on peut donc l'utiliser : AD AE DE = = AB AC BC On remplace par les valeurs connues : 5,6 7 4,2 = = AB AC 6,3 6,3 × 5, 6 = 8,4 cm 4,2 BD = AB – AD = 8,4 – 5,6 = 2,8 cm AB = 6,3 × 7 = 10,5 cm 4,2 EC = AC – AE = 10,5 – 7 = 3,5 cm AC = Exercice 2 Exercice 2 C C G 15 m E B Les segments [DE] et [CB] représentent les deux sculptures. Elles sont perpendiculaires toutes les deux à une même droite (AB) qui représente le sol, elles sont donc parallèles. Les points A, E, B d'une part et A, D, C d'autre part sont alignés. Les conditions du théorème de Thalès sont remplies. On a l'égalité : AE AD ED = = AB AC BC 15 AD 1,9 = = 2,1 AB AC 15 × 2,1 AB = ≈ 16,6 m 1,9 Donc EB = AB – AE = 16,6 – 15 = 1,6 m. Patrick devra espacer ses sculptures d'environ 1,6 m. Écriture d'un énoncé On pourra, par exemple, donner les dimensions de la grande voile et donner une seule dimension de la petite voile, puis demander de trouver les deux dimensions manquantes. Analyse d'une production © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. • Tiphaine s'est trompée de sommet dans son égalité. Elle ST TR SR aurait dû écrire : = = . TO TU OU • Quentin s'est trompé de droite. Il n'a pas les points alignés.
Il a également oublié d'indiquer si les conditions d'utilisation du théorème de Thalès étaient vérifiées. • Jolan s'est trompé dans le produit en croix. A E 10 m 2,30 m 1,80 m 1,30 m 1,90 m A D 2,10 m D F B Les segments [DE], [DG] et [CB] représentent les trois sculptures. Elles sont perpendiculaires toutes les trois à une même droite (AB) qui représente le sol, elles sont donc parallèles. Les points A, E, B d'une part et A, D, C d'autre part sont alignés. Les conditions du théorème de Thalès sont remplies.
On a l'égalité : AE AD ED = = AB AC BC 10 AD 1,3 = = 2,3 AB AC AB = 10 × 2,3 ≈ 17,7 m 1,3 Donc EB = AB – AE = 17,7 – 10 = 7,7 m. Patrick devra espacer les sculptures [DE] et [BC] de 7,7 m. Les points A, E, F d'une part et A, D, G d'autre part sont alignés. Les conditions du théorème de Thalès sont remplies. On a l'égalité : AE AD ED = = AF AG FG 10 AG 1,3 = = 1,8 AF AC 10 × 1, 8 ≈ 13,8 m 1,3 EF = AF – AE = 13,8 – 10 = 3,8 m Patrick devra espacer les sculptures [DE] et [GF] de 3,8 m et donc [GF] et [BC] de 3,9 m. AF = Livre du professeur – Chapitre 14 Théorème de Thalès 175 APITRE CH 15 14 Solides de l'espace Introduction Ce chapitre s'inscrit dans le thème « Espace et géométrie ». Les connaissances et compétences associées sont : – se repérer dans un parallélépipède rectangle ou sur une sphère ; – utiliser, produire et mettre en relation des représentations de solides et de situations spatiales ; – développer sa vision de l'espace. Ces notions ont été amorcées en 5e, puis travaillées en 4e. C'est ici l'occasion de refaire un point sur ses connaissances et de les remobiliser. La nouveauté introduite ici est l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique pour visualiser les sections planes des solides (faire le lien avec les courbes de niveau sur une carte). • Ce chapitre s'inscrit aussi dans le thème « grandeurs et mesures ».
Les connaissances et compétences associées sont : – calculer avec des grandeurs mesurables et exprimer les résultats dans les unités travaillées : les notions de grandeurs produits (unités de volumes), les formules donnant le volume d'un cylindre, d'une pyramide, d'un cône, d'une boule. Ces notions ont été travaillées en 5e, puis revues en 4e (avec la nouveauté de la formule du volume d'une boule). C'est ici l'occasion de remobiliser ses connaissances. – comprendre l'effet d'un agrandissement ou d'une réduction sur les volumes, nouveauté introduite dans ce chapitre.
© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Le cube est constitué de 6 faces carrées toutes identiques. Le chemin rouge et le chemin vert sont constitués de • Les repères de progressivité du programme nous précisent : « Les problèmes de construction constituent un champ privilégié de l'activité géométrique tout au long du cycle 4. Ces problèmes, diversifiés dans leur nature et la connexion qu'ils entretiennent avec différents champs mathématiques, scientifiques, technologiques ou artistiques, sont abordés avec les instruments de tracé et de mesure. Dans la continuité du cycle 3, les élèves se familiarisent avec les fonctionnalités d'un logiciel de géométrie dynamique ou de programmation pour construire des figures.
La pratique des figures usuelles et de leurs propriétés, entamée au cycle 3, est poursuivie et enrichie dès le début et tout au long du cycle 4, permettant aux élèves de s'entrainer au raisonnement et de s'initier petit à petit à la démonstration.
» • Ce chapitre s'inscrit donc dans la continuité du travail entrepris en 5e et prolongé en 4e. Le travail avec les logiciels de géométrie dynamique est approfondi. Les activités de construction sont poursuivies ainsi que l'utilisation des propriétés des figures usuelles. Comme dans les chapitres de 5e et de 4e les notions de proportionnalité, de calculs de périmètre et d'aire sont réinvesties. C'est de nouveau l'occasion d'utiliser notamment le théorème de Pythagore ou la trigonométrie. 4 arêtes du cube et d'une diagonale d'une face du cube. Les deux chemins ont donc exactement la même longueur. Activités flash Questions Ces exercices permettent de remobiliser ses connaissances sur les solides (reconnaissance et patron) et les formules de volume.
Ils permettent aussi de retravailler les conversions d'unités de volume et de capacité. 1. ① C'est un pavé droit. Patron C. ② C'est un cylindre de révolution. Patron B. ③ C'est une pyramide (à base triangulaire, aussi appelée tétraèdre). Patron D.
④ C'est un cône de révolution. Patron A.
2. 1 L = 1 dm3 35 000 cm3 = 35 dm3 5,2 dm3 = 5 200 cm3 5,9 km3 = 5 900 000 dam3 4,5 dL = 45 cL 3,275 mL = 0,032 75 dL 3. ① et a. ④ et d. ③ et b. ② et c.
⑤ et e. Activité 1 À l'eau ! Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de résoudre un problème concret, en cherchant et en extrayant les informations utiles, de façon à retravailler les notions d'aire, de volume et les conversions d'unités de volume et de capacité vues en 5e. Les prérequis nécessaires sont la connaissance des formules d'aire d'un disque et d'un carré, des formules de volume d'un cylindre et d'un pavé droit, des unités de volume, de capacité, ainsi que de la notion de proportionnalité (calculer une quatrième proportionnelle). La capacité introduite est de remobiliser ses connaissances sur les calculs de volumes et sur les unités de volume, de capacité. Cette activité nécessite l'utilisation de la calculatrice. Elle peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe.
1.
Aire d'un disque = π × rayon2. Surface au sol de la piscine ronde = π × 1,72 ≈ 9,1 m2. Aire d'un carré = côté2. Surface au sol de la piscine carrée = 4,42 = 19,36 m2. On cherche la surface minimale conseillée pour les 4 membres de la famille : 4 × 3,4 = 13,6 m2. Il faut donc choisir la piscine carrée, la piscine ronde étant alors trop petite. 2. Volume d'un pavé droit = longueur × largeur × hauteur. Le volume de la piscine carrée est de 4,4 × 4,4 × 1,2 = 23,232 m3. La piscine se remplit de 12 L d'eau par minute. Entre vendredi 14 h et samedi 10 h, il s'est écoulé 20 h, soit 20 × 60 = 1 200 minutes.
La piscine s'est donc remplie de 1 200 × 12 = 14 400 L soit 14 400 dm3 = 14,4 m3. 14,4 m3 < 23,232 m3, donc la piscine ne va pas déborder.
Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 177 Activité 2 D'accord ou pas ? Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir les effets d'un agrandissement sur les volumes. Les prérequis nécessaires sont la connaissance de la visualisation et de la formule du volume d'un cube. La capacité introduite est de comprendre l'effet d'un agrandissement (et donc d'une réduction) sur les volumes.
Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe. La formule du volume d'un cube est côté3. Le cube de volume 8 cm3 a donc pour côté 2 cm, car 23 = 8.
Le cube de volume 64 cm3 a pour côté 4 cm, car 43 = 64. Le cube de volume 64 cm3 est donc 2 fois plus grand que celui de volume 8 cm3. C'est donc Hugo qui a raison. On retiendra de cette activité que : par un agrandissement de rapport 2, les volumes sont multipliés par 23 = 8. On généralisera : par un agrandissement ou une réduction de coefficient k, les volumes sont multipliés par k3. On peut aussi visualiser ainsi la situation : 64 cm3 8 cm3 2 cm 4 cm Activité 3 Fromage ou dessert ? Intentions des auteurs 2. Il coupe d'abord parallèlement au disque de base : L'objectif de cette activité est de découvrir les sections planes d'un pavé droit, d'un cylindre et d'une boule (ou sphère). Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation. La capacité introduite est de visualiser des sections planes de solides (pavé droit, cylindre et boule). Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe. On obtient un disque de même rayon que le disque de base : © Hachette Livre 2016

– Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Paolo coupe parallèlement à la face verte : Il coupe ensuite perpendiculairement au disque de base : Il obtient un rectangle de mêmes dimensions que la face verte. Il coupe ensuite parallèlement à cette nouvelle face verte : Il obtient un rectangle dont l'une des dimensions est la hauteur du cylindre : 3. a. Si l'on coupe un pamplemousse (que l'on suppose être une boule parfaite), la section obtenue est un disque. Il obtient un rectangle de mêmes dimensions que la face verte. Il coupe enfin parallèlement à l'arête verte : b. La section est la plus grande lorsqu'on coupe le pamplemousse en deux parties égales : on coupe en passant par le centre de la boule. La section est alors un disque de même rayon que le pamplemousse. Il peut être intéressant de montrer une sphère construite avec un logiciel de géométrie dynamique et coupée par un plan : afficher la section de la sphère et du plan grâce à l'outil : Il obtient un rectangle dont l'une des dimensions a la même longueur que l'arête verte : 178 ESPACE ET GÉOMÉTRIE puis cliquer droit sur la section et sélectionner « Créer une vue 2D ». Faire varier la position du plan pour voir que le rayon du cercle de la section plane varie et est maximal lorsque le plan passe par le centre de la sphère. Activité 4 On coupe !!! Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de découvrir les sections planes d'une pyramide et d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base. Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation ainsi que la maitrise d'un logiciel de géométrie dynamique 3D. La capacité introduite est de visualiser des sections planes de solides (cône et pyramide) grâce à un logiciel de géométrie. Puis on clique droit sur l'objet et on sélectionne : Cette activité peut être réalisée aussi bien de manière individuelle qu'en groupe, en salle informatique ou en cours en classe entière avec vidéoprojecteur. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. a. On trace le carré ABCD dans le plan de base puis, grâce à la commande : on construit une pyramide ABCDE. b. On place un point P sur l'axe des cotes puis on construit un plan parallèle à la base de la pyramide passant par P. d. On fait réapparaitre les axes et le point P. On déplace le point P sur l'axe des cotes. En effaçant les axes pour mieux visualiser le solide et le plan : c. On peut effacer le point P pour mieux visualiser la suite. On construit la section de cette pyramide par ce plan grâce à l'outil : La section d'une pyramide à base carrée par un plan parallèle à sa base est un carré : c'est une réduction de la base. Plus le plan est proche de la base, plus la section est grande. Plus le plan est proche du sommet de la pyramide, plus la section est petite. Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 179 2. a. On réalise la même chose pour un cône de révolution. On trace un cercle de rayon quelconque dans le plan de base puis, grâce à l'outil : on construit un cône de révolution. On place un point P sur l'axe des cotes, puis un plan parallèle à la base du cône passant par P. b. On construit de la même façon qu'à la question 1. c. La section de ce cône par le plan. On déplace le point P sur l'axe des cotes. La section d'un cône de révolution par un plan parallèle à sa base est un cercle qui est une réduction du cercle de base. Plus le point P est proche de la base, plus la section est grande. Plus le point P est proche du sommet du cône, plus la section est petite. Activité 5 La boule de pétanque © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est de visualiser la section d'une boule par un plan pour résoudre un problème.

Les prérequis nécessaires sont la reconnaissance des solides usuels et leur visualisation ainsi que la connaissance du théorème de Pythagore. La capacité introduite est de visualiser la section plane d'une boule permettant de réinvestir le théorème de Pythagore pour calculer une longueur dans un triangle rectangle. Le triangle ABC est rectangle en C. D'après le théorème de Pythagore : AB2 = AC2 + BC2 3,752 = AC2 + 2,12 14,062 5 = AC2 + 4,41 AC2 = 14,062 5 – 4,41 AC2 = 9,652 5 AC = 9,652 5 AC ≈ 3,1 cm Cette activité peut être menée individuellement ou en groupe, en classe comme à la maison. Coupe transversale : On cherche la longueur CD : CD = AD – AC CD ≈ 3,75 – 3,1 CD ≈ 0,65 cm La boule de pétanque s'est donc enfoncée de 6,5 mm. ,5 ÷ 7 ,75 3 2= cm A Sol B 4,2 ÷ 2 = 2,1 cm C D 180 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Soit le volume de ce cône. 1 = π × 2,72 × 3,3 ≈ 25,2 cm3 3 Soit ′ le volume du cône agrandi. Par un agrandissement de rapport 3, le volume est multiplié par 33.

′ = 33 × ′ ≈ 27 × 25,2 ≈ 680,4 cm3 e Savoir-fair 3 1. a. On commence par la base carrée que l'on trace en perspective cavalière. Puis on trace les diagonales du carré pour trouver le centre et tracer la hauteur de 3 cm. On relie tous les sommets. 3 cm Reprendre les règles des dessins en perspective cavalière. 6 1. En utilisant la figure de l'exercice 4 , on obtient : B(2 ; 0 ; 0) D(0 ; 2 ; 0) H(0 ; 2 ; 1) F(2 ; 0 ; 1) 2. En utilisant la figure de l'exercice 5 , on obtient : N (15°S ; 15°O) La latitude est donnée en premier, la longitude en second. 9 La section d'un pavé droit est un rectangle. Le parallélépipède est coupé par un plan parallèle à l'une de ses arêtes. C'est donc un rectangle dont une de ses dimensions est IJ = OP = AT = 5,5 cm. On reproduit la face du pavé et on reporte toutes les longueurs connues. On place les points I et L puis on trace le rectangle IJKL. 5 cm b. On utilise la formule du volume d'une pyramide : 1 1 = × aire de la base × hauteur = × 52 × 3 = 25 cm3 3 3 Par une réduction de rapport 0,6, le volume est multiplié par 0,63. ′ = (0,6)3 × 25 = 5,4 cm3 2. a. Pour tracer le patron du cône, on cherche d'abord le périmètre de la base qui est un disque de rayon 2,7 cm : base = 2π × 2,7 = 5,4π cm On cherche ensuite le périmètre d'un disque de rayon 4,3 cm : ′ = 4,3 × π × 2 = 8,6π cm On utilise le tableau de proportionnalité suivant pour trouver l'angle correspondant. Mesure de l'angle (en °) 360 x Longueur de l'arc (en cm) 8,6π 5,4π 3,3 cm O R 4,4 cm I K L N A 6,6 cm 10 C 2 cm D B 360 × 5, 4 π x= ≈ 226° 8,6 π b. On cherche la hauteur du cône. Soit A le sommet du cône, B le pied de la hauteur. [AC] est une génératrice de ce cône. 5,6 cm 3,2 cm E 4,3 c m A D C F Le triangle ABC est rectangle en B. On utilise le théorème de Pythagore. 11 C B 3,4 cm A Le triangle ABD est rectangle en B.

On utilise le théorème de Pythagore. AD2 = AB2 + BD2 AB2 = 5,62 – 3,22 = 21,2 AB = 21,12 ≈ 4,6 cm. Le plan se situe donc à environ 4,6 cm du centre de la sphère. D r cm A 2,7 cm 6,9 B 4, 3 h D cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. J 5,5 cm B A C 2,7 cm AB2 + BC2 = AC2 2,72 + h2 = 4,32 h2 = 4,32 – 2,72 = 11,2 h = 11,2 cm h ≈ 3,3 cm La hauteur de ce cône est d'environ 3,3 cm. Le triangle ABD est rectangle en B. On cherche r = AD. On utilise le théorème de Pythagore. AD2 = AB2 + BD2 BD2 = 6,92 – 3,42 = 36,05 BD = 36,05 ≈ 6 cm Le rayon de la section obtenue est d'environ 6 cm. Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 181 16 On trace d'abord la base qui est un carré de côté 7 cm puis on trace Exercices les quatre triangles isocèles dont les côtés égaux mesurent 5 cm. Représenter des solides et calculer des volumes flash Questions 12 ① Pyramide. 7 cm 5 ② Prisme droit. ③ Sphère. ④ Cylindre (de révolution). ⑤ Pyramide.

⑥ Cylindre (de révolution). ⑦ Cube. ⑧ Pavé droit ou parallélépipède rectangle. ⑨ Cône (de révolution). cm 13 Cf. tableau bas de page. 14 Vue de dessus : ① Vue de dessous : ⑤ Vue de face : ③ Vue de derrière : ④ Vue de gauche : ② Vue de droite : ⑥ 17 ① On utilise la formule du volume d'un pavé droit : 15 On trace d'abord le rectangle de base de longueur 6,2 cm et de 4 cm largeur 5,5 cm. On trace ensuite les 4 faces qui ont une arête commune. On termine par la face du dessus qui a les mêmes dimensions que la première. = longueur × largeur × hauteur. = 3 × 4 × 2 = 24 cm3 ② On utilise la formule du volume d'une pyramide : 1 = × aire de la base × hauteur. 3 1 = × 5 × 4 × 6 = 40 cm3 3 4 × π × r3 ③ = 3 4 2 048 = × π × 83 = π cm3 3 3 = aire de la base × hauteur ④ = π × r2 × h = π × 322 × 7 = 28 π cm3 1 × aire de la base × hauteur 3 1 1 = × π × r2 × h = π × 2,52 × 9 = 18,75 π cm3 3 3 = 5,5 cm ⑤ 18 On doit d'abord calculer la hauteur du cône. On note A le sommet du cône et O le pied de sa hauteur. [AB] est une génératrice du cône. A 5 7, cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 6,2 cm h O C B 4,5 cm 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1 Triangle 2 Quadrilatère 0 2 Disque 1 Rectangle 2 Disque 2 Carré 2 Rectangle 1 Disque Nombre d'arêtes 6 12 0 0 8 0 12 12 0 Nombre de sommets 4 8 0 0 5 0 8 8 1 Nombre de base et nature 182 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Le triangle AOB est rectangle en O. On utilise le théorème de Pythagore : Construire des sections planes de solides AB2 = AO2 + OB2 AO2 = 7,52 – 4,52 = 36 AO = 6 cm 1 = × π × 4,52 × 6 = 40,5 π ≈ 127 cm3 3 flash Questions 27 La section obtenue est la 3. 1 20 Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur. Le volume du pavé droit initial est : 4 = 2,3 × 4,2 × 5 = 48,3 cm3. Le volume du pavé droit est multiplié par 43 quand ses dimensions sont multipliées par 4. Le volume du pavé droit agrandi ′ est donc : ′ = 43 × 48,3 = 3 091,2 cm3 2 3 4 5 28 La section obtenue est la 6. 5 6 29 a. C'est un rectangle de 3 cm sur 4 cm.

J B 21 Le volume d'une pyramide est donné par la formule : Aire de la base × hauteur . 3 Le volume de la pyramide initiale SABCD est : 1 = × 6 × 3 × 5 = 30 cm3.

3 2 Par une réduction de rapport , le volume de la pyramide est 3 3 2 multiplié par . 3 Le volume ′ de la pyramide réduite S'A'B'C'D' est : 2 3 = × 30 ≈ 9 cm3. 3 A = ( ) F E G 3 cm H J B C A D I F ( ) E 3 cm c. G H J B C A 3 cm Se repérer dans l'espace flash Questions 23 A (0 ; 0 ; 0) D (3 ; 0 ; 0) G (3 ; 0 ; 5) 24 A (65° N ; 30° O) D (40° S ; 180°) C (3 ; 4 ; 0) F (3 ; 4 ; 5) B (0° ; 30° O) E (0° ; 50° E) C (40° S ; 0°) B (0 ; 3 ; 0) E (0 ; 0 ; 3) H (3 ; 0 ; 3) C (3 ; 3 ; 0) F (0 ; 3 ; 3) D I F E B (0 ; 4 ; 0) E (0 ; 4 ; 5) H (0 ; 0 ; 5) 4 cm b. C'est un carré de côté 3 cm. 22 C'est faux. Le volume du liquide est multiplié par le coefficient © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. D I ( ) 1 de réduction qui est de au cube. Il est donc multiplié par 2 3 1 1 = . 2 8 Le volume du liquide représente donc un huitième du volume du verre. C 3 cm par 33 = 27. 3 2 1 19 Par un agrandissement de rapport 3, le volume va être agrandi 3 cm G H m 4c On calcule d'abord la longueur AC. Le triangle ADC est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore : AC2 = AD2 + DC2 = 32 + 42 = 9 + 16 = 25 AC = 5 La section est un rectangle de 3 cm sur 5 cm. 30 La section est un cercle de centre L et de rayon 4 cm. 25 A (0 ; 0 ; 0) D (3 ; 0 ; 0) G (3 ; 3 ; 3) 26 Les coordonnées de I et G sont : I (45° Sud ; 10° Ouest) et G (50° Nord ; 120° Ouest). F est sur la même latitude que G et sur la même longitude que I donc les coordonnées de F sont (50° Nord ; 10° Ouest). H est sur la même latitude que I et sur la même longitude que G donc les coordonnées de H sont (45° Sud ; 120° Ouest).

31 1. La section est un cercle de centre A et de rayon AM. 2. Le triangle AOM est un triangle rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on a : OM2 = OA2 + AM2 AM = 6 – 2 = 36 – 4 = 32 AM = 32 ≈ 5,7 cm 2 2 2 32 La section d'un cône par un plan parallèle à sa base est un cercle de centre O'. Pour connaitre son rayon, il faut calculer le rapport de réduction permettant de passer du cône initial au deuxième cône. SO ′ 2 Le rapport de réduction des hauteurs est de = . SO 5 La section obtenue est un cercle de centre O' et de rayon 2 r' = × 4 = 1,6 cm. 5 Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 183 int Faire le po 4. On fait plusieurs essais pour h. QCM 1 1. A 2 B 3 1. B 2. C 2. A Algorithmique et outils numériques 33 Ça déborde ! © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. Le script complété est : Si h = 2, le message est « ça va ». Si h = 3, le message est « ça déborde ! ». h est donc compris entre 2 et 3. Les variables créées sont : – « h » : la hauteur de l'eau dans la bouteille (en cm) ; – « Vol eau » : le volume d'eau dans la bouteille (en cm3) ; – « Vol verre » : le volume du verre (en cm3).

2. Arthur a trouvé 38,48 en calculant l'aire de la base de la bouteille : Aire de la base = π × rayon2, le rayon étant de 3,5 cm. Aire de la base = π × 3,52 ≈ 38,48 cm2. 3. Le volume du verre est égal à : Si h = 2,5, le message est « ça va ».

Si h = 2,7, le message est « ça déborde ! ». π × rayon2 × hauteur , 3 π × 42 × 6 = 32π ≈ 100,53 cm3. soit = 3 = Il faut donc compléter : Si h = 2,6, le message est « ça va ». On peut donc verser dans le verre une hauteur d'eau allant jusqu'à 2,6 cm. On peut, par exemple, demander de vérifier ce résultat par le calcul, en prolongement. h doit vérifier : π × 42 × 6 π × 3,52 × h = 3 Soit 12,25h = 32 h = 32 ÷ 12,25 ≈ 2,6 cm 184 ESPACE ET GÉOMÉTRIE 34 Pâte à modeler 1. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur. Donc le volume en cm3 du pavé droit de pâte à modeler est égal à 1,2 × 1,2 × longueur de la pâte à modeler (en cm). Dans la cellule B2, il faut donc saisir la formule = 1,2*1,2*A2. 2.

Le volume du cylindre est = π × rayon2 × hauteur, soit = π × 1 × 1 × 6 = 6π ≈ 18,85 cm3. On cherche donc la valeur dans la colonne A pour laquelle le volume écrit dans la colonne B est le plus proche de 18,85 cm3. Problèmes 36 Boite de chocolats Cet exercice permet de travailler l'utilisation d'une formule pour calculer un volume, l'effet d'une réduction, ainsi que la notion de pourcentage. 1.

Le volume d'une pyramide est donnée par la formule : aire d'une base × hauteur = . 3 30 × 30 × 18 SABCD = = 5 400 cm3. 3 2. EFGH est un carré. C'est une réduction de la base ABCD de SO ′ 6 1 rapport k = = = . SO 18 3 1 Son côté mesure donc 30 × = 10 cm. 3 1 3.

Par une réduction de rapport , les volumes sont multipliés 3 1 3 . par 3 1 3 1 3 = 5 400 × = 200 cm3. Donc SEFGH = SABCD × 3 3 ABCDEFGH = SABCD – SEFGH ABCDEFGH = 5 400 – 200 = 5 200 cm3 Le volume contenant les chocolats est égal à 5 200 cm3.

4. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur.

un chocolat = 3 × 2 × 1,5 = 9 cm3. 60 % du volume du récipient est occupé par des chocolats 60 soit 5 200 × = 3 120 cm3. 100 3 120 ÷ 9 ≈ 346. La boite contient environ 346 chocolats. 12 On peut, par exemple, demander de vérifier ce résultat par le calcul, en prolongement. Soit L la longueur de la pâte à modeler. L doit vérifier : 1,2 × 1,2 × L = 6π Soit 1,44 L = 6π L = 6π ÷ 1,44 L ≈ 13,1 cm 35 Fabrication d'une verrine Il faut d'abord placer un point A (par exemple, sur l'axe des cotes), puis tracer la sphère de centre A et de rayon 3 cm. Placer ensuite un point B sur l'axe des cotes, tracer (AB) puis le plan passant par B et perpendiculaire à (AB). Tracer l'intersection de ce plan et de la sphère. Afficher sa vue 2D en cliquant droit sur l'objet et en sélectionnant « Créer une vue 2D » de l'objet. Tracer un rayon de ce cercle et afficher sa longueur. Déplacer ensuite le point B sur l'axe des cotes jusqu'à ce que la longueur du rayon de la section précédemment tracée soit égale à 2 cm. Faire afficher la longueur AB. 12 37 Tatouage Coup de pouce : chercher le sens de 1' et de 1''. 1. 1° = 60' et 1° = 3 600'' (1' = 1 min et 1'' = 1 s) Cela signifie que la latitude du lieu est : 40 26 22 + + ≈ 22,674° Sud 60 3 600 31 40 et que la longitude est 14 + ≈ 14,528° Est. + 3 600 60 2. Les parallèles étant gradués de 15° en 15°, tout comme les méridiens, on trouve que cet enfant est né sur le continent africain. 38 Courbes de niveau Cet exercice fait le lien entre les sections par un plan et les courbes de niveau. Il permet de visualiser et de donner du sens aux sections de solide par un plan. A⑥ B① C③ D⑤ E④ F② 39 Sammy's fish Coup de pouce : représenter la situation. 1. La forme de la surface de l'eau est un disque. D C 4 cm B 15 cm A eau 15 cm © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. D'après la ligne 15, on trouve que la longueur du pavé droit qui sortira de la seringue aura une longueur proche de 13 cm. 12 On trouve une valeur de AB proche de 2,22 cm pour que le rayon de l'ouverture soit de 4 cm. La hauteur de la verrine est alors proche de 3 + 2,22 = 5,22 cm. F Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 185 2. Le triangle BDA est rectangle en D. D'après le théorème de Pythagore : AB2 = AD2 + BD2 2 2 15 = 4 + BD 225 = 16 + BD2 BD2 = 225 – 16 BD2 = 209 BD = 209 ≈ 14,5 cm Le rayon du disque qui forme la surface de l'eau est proche de 14,5 cm. 40 L'aquarium 1. On remplace dans la formule donnée h par 19,2 et R par 12. Le volume de cet aquarium est : π × 19,22 × (3 × 12 – 19,2) ≈ 6 485 cm3. 3 2. On lit ce résultat sur la ligne 8 pour laquelle le volume du liquide (colonne B) est le plus proche de 75 cm3. Coup de pouce : Quelle est la forme occupée par l'eau ? 6 L = 6 000 cm3 L'eau prend la forme d'un pavé droit, dont le volume est donné par la formule = longueur × largeur × hauteur. Soit h la hauteur de l'eau dans le récipient (en cm), le volume de l'eau est égal à 6 × 24 × h. On a alors = 26 × 24 × h = 6 000 6 000 Donc h = ≈ 9,6 cm. 26 × 24 La hauteur de l'eau dans le récipient est proche de 9,6 cm. 3. La hauteur de l'eau peut également être trouvée par tâtonnements. 41 Cocktail 1 2 1 2 42 Piscine à débordement Coups de pouce : chercher le volume de la piscine vide (pavé droit auquel on a enlevé deux solides), représenter le prisme gris. Vue de dessus 8m Vestiaire Piscine à débordement Douche Terrasse 4m SN x = . SO 10 b. Le volume d'un cône est donné par la formule : aire d'une base × hauteur = .

3 2 π × 4 × 10 160 π = verre = ≈ 168 cm3 3 3 x Par une réduction de rapport , les volumes sont 3 10 x multipliés par . 10 160 π x 3 16 π 3 Donc liquide = = × x ≈ 0,168x3 cm3. 3 10 300 2. a. Dans B2, il faut saisir la formule =0,168*A2*A2*A2 ou =(16*PI()*A2^3)/300.

b. 1. a. Le rapport de la réduction est k = On retrouve le même résultat : la hauteur est proche de 7,7 cm. Pour cela, il faut tracer le premier cône de rayon 4 cm et de hauteur 10 cm, puis le couper par un plan perpendiculaire à son axe passant par un point C situé sur cet axe. Tracer le cône représentant le liquide. Faire afficher la hauteur et le volume de ce cône, ainsi que le volume du verre.

Jardin WC Portillon à clef Coupe verticale 3m 1,80 m 3,50 m 8m 8m 186 ESPACE ET GÉOMÉTRIE A B 4,50 m 3,50 m 1,20 m C Grâce aux lignes 9 et 10, on lit que la hauteur doit être comprise entre 7 et 8 cm. Ce sont les lignes pour lesquelles la valeur du volume du liquide (colonne B) est la plus proche de 75 cm3. c. On modifie le contenu de la colonne A en faisant varier la hauteur entre 7 et 8 cm, de 1 mm en 1 mm, on trouve que la hauteur du liquide est proche de 7,6 cm.

3m © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Cet exercice permet de travailler sur l'effet d'une réduction sur un volume ; le coefficient de réduction étant ici variable. Les questions 1. et 2. a. et 2. b. peuvent être traitées sans tableur. La question 2. c. nécessite l'utilisation d'un tableur. La question 3. nécessite l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique. 4m Le volume de la piscine est égal au volume du pavé droit C auquel on soustrait le volume d'un prisme droit A à base triangulaire (triangle rectangle ayant pour côtés de l'angle droit 8 – 3,5 = 4,5 m et 3 – 1,8 = 1,2 m) et de hauteur 4 m et d'un pavé droit B de longueur 3,5 m, de largeur 1,20 m et de hauteur 4 m. Le volume du pavé droit (piscine totale) est donné par la formule = longueur × largeur × hauteur. Le volume du pavé droit C est égal à 8 × 4 × 3 = 96 m3. Le volume du prisme droit à base triangulaire A est égal au volume de la moitié d'un pavé droit de longueur 4,5 m, de 4,5 × 1,2 × 4 largeur 1,2 m et de hauteur 4 m soit = 10,8 m3. 2 Le volume du pavé droit B de longueur 3,5 m, de largeur 1,20 m et de hauteur 4 m est égal à 3,5 × 1,2 × 4 = 16,8 m3. Donc le volume d'eau dans la piscine est égal à : 96 – (10,8 + 16,8) = 96 – 27,6 = 68,4 m3. Il faut donc 7 × 10 = 70 pastilles, soit 70 × 20 = 1 400 g = 1,4 kg de chlore. Les pots étant des pots de 1 kg, il faut acheter 2 pots de chlore. 43 Crème au caramel 1.

Le volume d'une boule est donné par la formule : 4 π × rayon3 = . 3 Il faut calculer ici le volume d'une demi-boule de rayon 4 5 cm : 1/2 boule × π × 53 ÷ 2 ≈ 262 cm3. 3 Le volume de la crème contenue dans une coupe est d'environ 262 cm3. 2. 1 2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Coup de pouce : Quelle est la forme occupée par la crème ? La crème prend la forme du récipient, c'est-à-dire d'un pavé droit de longueur 9 cm, de largeur 7 cm et de hauteur h (en cm). Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur. Donc le volume de la crème est égal à 9 × 7 × h (cm3). Donc pavé = 9 × 7 × h = 262 h = 262 ÷ 63 h ≈ 4,2 cm. La hauteur de crème dans la verrine est d'environ 4,2 cm. M 50° 70 50° O 63 50e parallèle H km = MH . cos MHO OH Dans OHM rectangle en M : Faire remarquer que OH = 6 370 km car c'est un rayon de la Terre. MH 6 370 Donc MH = 6 370 × cos 50° ≈ 4 095 km. Le rayon du 50e parallèle mesure environ 4 095 km. cos 50° = Rappeler la formule qui permet de calculer la circonférence d'un cercle : 2 × π × rayon.

La moitié de la circonférence du 50e parallèle mesure environ π × 4 095 ≈ 12 865 km. Il y a proportionnalité entre l'angle et la distance.

Angle (en °) 30 – 3 = 27 180 x 12 865 Distance (en km) Les deux villes sont séparées d'un angle de 30°– 27° = 3°. 50e parallèle 30° – 3° = 27 ° On peut faire remarquer aux élèves que la hauteur du récipient (6 cm) est bien supérieure et donc que la crème ne déborde pas ! La hauteur de la crème peut également être trouvée par tâtonnements. Kiev Lille 44 Des glaçons Le volume d'un cube est donné par la formule : = côté × côté × côté. 1 glaçon = 3 × 3 × 3 = 27 cm3 5 glaçons = 5 × 27 = 135 cm3 11 eau = 135 – 135 × = 120,15 cm3 100 Soit h la hauteur de l'eau en cm. Le volume de l'eau dans le verre a la forme d'un cylindre de révolution de rayon 4 cm et de hauteur h. Le volume d'un cylindre est donné par la formule : = π × rayon² × hauteur.

Donc le volume de l'eau est égal à π × 42 × h cm3. 120,15 Par conséquent π × 42 × h = 120,15 donc h = ≈ 2,4 cm. 16π Il y avait 2,4 cm d'eau environ dans le verre quand elle a versé l'eau gazeuse. 27 × 12 865 ≈ 1 930 180 Entre Kiev et Lille, il y a environ 1 930 km à vol d'oiseau. 2. Bordeaux et Oran sont situées sur le même méridien car elles ont la même longitude.

x= Bordeaux 45 À vol d'oiseau 1. 9° Exercice qui nécessite une représentation et une bonne compréhension de la situation. Coup de pouce : déterminer le rayon du 5e parallèle puis sa longueur. 63 70 km Oran Kiev et Lille ont la même latitude : ces deux villes sont donc situées sur le même parallèle : le 50e parallèle Nord. Il faut d'abord déterminer le rayon de ce parallèle. Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 187 Cette situation est plus simple car il faut faire remarquer que : – tous les parallèles n'ont pas la même longueur ; – tous les méridiens ont la même longueur. Attention : un méridien est un demi-cercle ! 1. Coup de pouce : trouver la hauteur d'une face latérale. On représente une face latérale. S La longueur d'un méridien est 6 370 × π ≈ 20 012 km.

Il y a proportionnalité entre l'angle et la distance. Angle (en °) y 20 012 Distance (en km) 1m 180 33, 44 – 35 = 9 9 × 20 012 ≈ 1 001 180 Entre Bordeaux et Oran, il y a environ 1 001 km à vol d'oiseau. y= 46 Meteor Crater H B 35,42 ÷ 2 = 17,71 m 1.

Coups de pouce : faire un dessin, déterminer d'abord la profondeur du trou et résoudre une équation. 35,42 m Le triangle SHB est rectangle en H. D'après le théorème de Pythagore : SB2 = SH2 + HB2 33,12 = SH2 + 17,712 SH2 = 33,12 – 17,712 Soit x le rayon théorique de la météorite en mètres. On appellera le rayon théorique le rayon obtenu par calcul correspondant à une situation modélisée des facteurs ou paramètres extérieurs pouvant contredire cette modélisation (qui est une situation « idéale »). 2. A m S Sol B C F Le triangle EBF est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : EF2 = EB2 + BF2 2 2 2 677 = 650 + BF BF2 = 6772 – 6502 BF = 6772 − 6502 ≈ 189 m. La profondeur du trou est d'environ 189 m. Le triangle ABS est rectangle en B. D'après le théorème de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 x2 = (x – 189)2 + 6502 Donc x2 – 378x + 35 751 + 422 500, soit 378x = 45 822.

45 822 Donc x = ≈ 1 212 m. 378 Le diamètre théorique de la météorite est de 2 424 m environ. 2. La différence très importante est due au souffle de l'impact qui a créé un cratère bien plus grand que la météorite ellemême. La modélisation effectuée ne tenant pas compte de cela n'est donc pas valide. D C O A B Le triangle ABC est rectangle et isocèle en B. D'après le théorème de Pythagore : AC2 = AB2 + BC2 AC2 = 35,422 + 35,422 AC2 = 35, 422 + 35, 422 ≈ 50 m. La diagonale du carré de la base mesure : 35, 422 + 35, 422 ≈ 50 m. La moitié de la diagonale est donc égale à environ 25 m. OB ≈ 25 m. On calcule maintenant la hauteur de la pyramide. S 47 Au Louvre ! O S On représente d'abord la pyramide. 25 m D C A ESPACE ET GÉOMÉTRIE B Le triangle SOB est rectangle en O. D'après le théorème de Pythagore : SB2 = SO2 + OB2 33,12 = SO2 + 252 SO2 = 33,12 – 252 SO = 33,12 − 252 ≈ 21,69 m. La hauteur de la pyramide mesure environ 21,69 m. O 188 Hauteur de la pyramide 1m Cet exercice permet d'apprendre à bien se repérer et à visualiser dans l'espace, en particulier repérer dans quel plan travailler. Il permet de réinvestir les formules de calcul de volumes, le théorème de Pythagore, l'effet d'une réduction et la trigonométrie. 33, © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

677 650 m 189 m 650 m E Coup de pouce : trouver la longueur d'une diagonale de la base carrée, puis la hauteur de la pyramide. x x SH = 33,12 − 17,712 ≈ 27,96 m La hauteur d'une face latérale est d'environ 27,96 m. L'aire d'un triangle est donnée par la formule : côté × hauteur relative = . 2 La surface vitrée des 4 faces latérales est : 35, 42 × 27,96 Ssurface latérale = 4 × ≈ 1 981 m2. 2 B On travaille à présent dans le triangle SOH rectangle en O. S Brevet 48 Moule à muffins D C O A B H 27, 96 m Hauteur de la pyramide 21,69 m S Une face latérale 1. Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule : aire de la base × hauteur = . 3 2 3,75 × π × 12 grand cône = ≈ 176,7 cm3. 3 Le petit cône qu'on enlève au grand est une réduction de 8 2 rapport = du grand cône. 12 3 2 Par une réduction de rapport , les volumes sont multipliés 3 2 3 . par 3 2 3 . Donc petit cône = grand cône × 3 12 12 Donc petit cône ≈ 176,7 × O x H Le triangle SOH est rectangle en O.

SO sin H = SH 21,69 , soit x ≈ 1°. sin x = 27,96 L'angle d'inclinaison d'une face latérale par rapport à l'horizontale est d'environ 51°. 3. La hauteur de la pyramide du Louvre mesurant 21,69 m, celle de la pyramide de Khéops mesure 21,69 × 6,7 ≈ 145 m. 1 4. Par une réduction de rapport , les volumes 6,7 3 1 1 sont multipliés par = donc on peut mettre 6,7 300 300 pyramides du Louvre dans la pyramide de Khéops. 5.

Le volume d'une pyramide est donné par la formule : aire de la base × hauteur = . 3 Par une réduction de rapport k, les volumes sont multipliés par k3.

Donc pyramidion = pyramide du Louvre × k3. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 2 35, 42 × 35, 42 × 21,69 × k3 donc 9 070 × k3 = 97. 3 En procédant par essais successifs, on trouve que k ≈ 0,22. La pyramide du Louvre a pour hauteur 21,69 m donc un pyramidion a pour hauteur 0,22 × 21,69 ≈ 4,8 m. Donc 97 = 1 23 2 3 ≈ 52,4 cm3. Donc le volume d'une cavité est : = grand cône – petit cône = 176,7 – 52,4 ≈ 125 cm3. 2. Léa a préparé 1 L = 1 000 cm3 de pâte. 3 Chaque cavité contient 125 × = 93,75 cm3 de pâte. 4 3 93,75 × 9 = 843,75 cm = 0,843 L de pâte sont nécessaires : Léa a donc assez de pâte. 49 Piscine à rénover 1. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur. Le volume de la piscine est de 10 × 4 × 1,2 = 48 m3. En 4 h, 4 × 14 = 56 m3 s'écoulent : la piscine sera donc vide en moins de 4 h. Ou : 48 ÷ 14 = 3,4 h = 3 h 24 min ; il faut donc moins de 4 h pour vider la piscine. 2.

La surface intérieure de la piscine (les 4 faces latérales et le sol) est de 10 × 1,2 × 2 + 4 × 1,2 × 2 + 4 × 10 = 73,6 m2. Il faut donc 73,6 ÷ 6 ≈ 12,3 litres de peinture pour repeindre la surface intérieure. Il faut deux couches donc 12,3 × 2 = 24,6 litres. Il faudra donc 9 seaux soit un montant à payer de 9 × 69,99 = 629,91 €.

50 Les gélules 1. La longueur L de la gélule est de 16,6 + 9,5 = 26,1 mm. C'est donc un calibre 000. 2. Le volume d'un cône de révolution est donné par la formule : aire de la base × hauteur = . 3 Le volume d'une boule est donné par la formule : 4 × π × rayon3 = .

3 gélule = cylindre + boule 4 gélule = π × 4,752 × 16,6 + π × 4,753 ≈ 1 626 mm3. 3 3. Robert a donc pris 3 × 6 × 1 626 = 29 268 mm3 d'antibiotique, soit 29 268 × 6,15 × 10–4 ≈ 18 g d'antibiotique. Livre du professeur – Chapitre 15 Solides de l'espace 189 Travailler trement au Deux énoncés pour un exercice Exercice 1 Exercice 1 O O C D A AC = 28 m, OA = 18 m. Le triangle AOD est rectangle en D. On utilise le théorème de Pythagore pour trouver OD : AD2 = OD2 + AD2 2 2 2 Donc OD = AD – AD = 182 – 142 = 128 OD = 128 m OD ≈ 11,3 m 18 + 11,3 = 29,3 m La hauteur de la géode est d'environ 29,3 m. Exercice 2 Exercice 2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Le volume d'une boule est donné par la formule : 4 × π × rayon3 = .

3 4 sphère extérieure = π × 93 ≈ 3 054 m3 3 4 sphère intérieure = π × (9 – 0,03)3 ≈ 3 023 m3 3 3 054 – 3 023 = 31 m3 Le volume de l'acier représente environ 31 m3. La masse volumique de l'acier étant de 7 850 kg/m3, on calcule : 31 × 7 850 = 243 350 kg.

La masse d'une sphère est de 243 tonnes environ. 1. Le triangle NMF est un triangle rectangle en F. 4×2 FNM = = 4 cm2 2 2. Le volume d'une pyramide est donné par la formule : aire de la base × hauteur = . 3 Volume de la pyramide : 1 BMFN = × FNM × h = 4 cm3 3 3. Le volume d'un pavé droit est donné par la formule : = longueur × largeur × hauteur. Volume du pavé : Le volume d'une pyramide est donné par la formule : aire de la base × hauteur = . 3 1 2,5 × 2,5 pyramide = × × 2,5 ≈ 2,6 cm3 3 2 cube = 53 = 125 cm3 Pour calculer le volume du solide obtenu, on enlève le volume des 8 pyramides au volume du cube : solide ≈ 125 – 8 × 2,6 solide ≈ 104,2 cm3 Le solide obtenu a un volume d'environ 104,2 cm3. 3 pavé = 10 × 12 × 3 = 360 cm . pavé sans les pyramides = 360 – 4 × 4 = 344 cm3. Le volume du solide obtenu est de 344 cm3. 190 ESPACE ET GÉOMÉTRIE Analyse d'une production • Mahel s'est trompé dans son calcul du coefficient de réduction (il a calculé le coefficient d'agrandissement ; le coefficient de réduction est son inverse) et dans la formule pour calculer le volume d'un cône (il a oublié de diviser par 3). • Leila a juste dans ses calculs. Elle s'est juste trompée dans l'unité du résultat final : il s'agit de cm3 et non de cm2. • Dorian a oublié de mettre le coefficient de réduction à la puissance 3 puisque c'est un volume. • Amel a juste. APITRE CH 16 10 Algorithmique et programmation © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Introduction Ce chapitre permet d'aborder l'ensemble des attendus de fin de cycle du thème « Algorithmique et programmation ». La progression retenue sur le cycle est de découvrir l'ensemble de ces notions dès le début du cycle et de les approfondir de façon progressive tout au long du cycle. Cette approche est nécessaire si l'on veut proposer aux élèves des activités motivantes, riches sur le plan du raisonnement, et qui s'inscrivent dans une démarche de projet. À cette fin, les élèves ont rapidement besoin des notions de variables, de boucles et d'instructions conditionnelles. • Le logiciel Scratch permet d'aborder ces notions rapidement et simplement. Il est de plus très proche du langage naturel. L'ensemble des activités peuvent donc être menées avec ce logiciel qui permettra de mettre en œuvre des projets ambitieux de façon très accessible. Il permet ainsi de se dispenser d'un travail de rédaction d'algorithme sur papier et en langage naturel qui peut sembler abstrait et peu motivant aux élèves. • Ce chapitre propose 6 activités qui permettent de découvrir, redécouvrir ou approfondir l'ensemble des attendus de fin de cycle : – L'activité 1 propose une découverte ou une reprise en main du logiciel Scratch et de ses fonctionnalités essentielles. Elle pourra être proposée à des élèves qui n'ont qu'une pratique très limitée de cet outil. – L'activité 2 propose un travail sur la notion de variable informatique en lien avec des programmes de calcul. Elle permet également de réinvestir des connaissances simples sur le calcul des nombres relatifs et le calcul littéral. – L'activité 3 porte sur la construction de figures. Elle permet de découvrir l'ensemble des commandes nécessaires au déplacement du lutin sur la « scène », très utiles pour la réalisation des projets. Elle permet également de réinvestir des connaissances en géométrie. – L'activité 4 porte sur les structures itératives (les boucles) et conditionnelles (si... alors...). Des boucles très simples ont pu être découvertes dans les trois premières activités, mais cette activité 4 permet d'approfondir la question, en remobilisant la notion de variable. Le support de cette activité est la programmation d'un petit jeu mobilisant les tables de multiplication. – L'activité 5 permet de remobiliser les notions d'arithmétique et de découvrir la notion de « bloc » et de « listes ». – L'activité 6 porte enfin sur les nombres aléatoires et l'utilisation de la programmation en lien avec les notions de probabilités du programme. Elle remobilise également les boucles et les instructions conditionnelles. • Ces activités ont vocation à être traitées en autonomie par l'élève, par exemple en salle informatique. L'énoncé propose des questions qui amènent l'élève à s'interroger et à construire les notions à travers des exemples simples au début et qui se complexifient progressivement. Les indications données permettent une certaine autonomie de l'élève face à l'outil sans pour autant brider sa créativité et sa réflexion. L'objectif est ici de travailler les compétences du programme, notamment les compétences « chercher » et « raisonner ». Pour autant, en cas de difficulté d'accès à un matériel informatique, ces activités peuvent également être traitées en partie avec un vidéoprojecteur et en partie en autonomie par les élèves (à la maison, par exemple). • Ces activités ont également été conçues de façon à prendre en compte l'hétérogénéité des élèves. Elles débutent par des questions très simples qui permettent une approche rapide des notions fondamentales. Elles sont accessibles à tous, même à des élèves qui n'ont pas pratiqué Scratch les années précédentes. Petit à petit, les questions approfondissent les notions abordées et les activités se terminent par une rubrique « Pour aller plus loin », qui permet de garder en activité même les élèves les plus rapides ou qui sont déjà habiles dans l'utilisation de Scratch. Chacun peut ainsi avancer à son propre rythme et ces activités n'ont pas nécessairement à être traitées en intégralité par tous les élèves. On peut parfaitement fixer un temps de travail (1 heure ou 2 heures, par exemple) sur une activité et s'arrêter même si certains élèves ne l'ont pas terminée. • Enfin, ce chapitre propose deux projets qui mobilisent l'ensemble des attendus de fin de cycle. Le premier projet consiste à programmer un jeu d'adresse, le second un jeu de stratégie. L'objectif est ici de proposer aux élèves un travail motivant et riche sur le plan du raisonnement.

Ces deux projets sont simples et peuvent être menés assez rapidement. Quelques heures sur chaque projet peuvent s'avérer suffisantes avec des élèves déjà rôdés à l'utilisation de Scratch. Ces deux projets proposent, comme les activités, une rubrique « Pour aller plus loin » qui permet de prolonger le travail en implémentant des variantes ou de nouvelles fonctionnalités afin de tenir compte de l'hétérogénéité des élèves.

Ces variantes, si elles sont traitées dans leur intégralité, demanderont nettement plus de temps et n'ont pas vocation à être traitées avec tous les élèves. Elles peuvent permettre à de bons élèves de rester actifs et d'approfondir leurs compétences. Dans tous les cas, même les élèves les moins performants pourront arriver rapidement à une réalisation concrète et motivante, même s'ils ne vont pas au bout du projet. Avertissement : pour une plus grande facilité d'utilisation, le manuel numérique qui contient les solutions comporte parfois des fichiers avec plusieurs scripts, qui correspondent chacun à une question ; si on clique sur le drapeau vert, tous les scripts vont s'exécuter en même temps et cela peut générer des résultats incohérents. Pour tester un script en particulier, il faut donc cliquer directement sur le script. C'est le mot « PROGRAMME ». Livre du professeur – Chapitre 16 Algorithmique et programmation 191 L'environnement de Scratch Activité 1 Intentions des auteurs Scratch utilise sa propre unité de longueur qui est telle que la scène est un rectangle de dimensions 480 unités (en largeur) et 360 unités (en hauteur). Les distances correspondant à l'écran peuvent dépendre de plusieurs paramètres. Il est d'ailleurs possible d'utiliser un mode « petite scène » accessible depuis le menu « Edition ». Avec les élèves, on pourra soit éluder ces questions et ne pas parler d'unité, soit considérer que l'unité de longueur est un « pixel » (contraction de « picture element »), c'est-à-dire un point affiché à l'écran tel que la scène est un rectangle de 480 pixels par 360 pixels. L'objectif de cette activité est d'effectuer un premier contact avec le logiciel Scratch. Avant de commencer, on peut présenter aux élèves, rapidement et avec un vidéoprojecteur, l'interface de Scratch et les grands concepts du logiciel, en particulier : - Scratch est un logiciel qui permet de faire exécuter des commandes à un ou plusieurs lutins ; - une succession de plusieurs commandes qu'on fait exécuter à un lutin est appelée un script ; - l'interface de Scratch est partagée en plusieurs zones, qu'on pourra montrer. 1 Pour aller plus loin Premiers mouvements 1. Cette question a pour objectif de faire manipuler l'élève et de lui faire écrire son premier script. Il doit comprendre qu'il existe plusieurs catégories de commandes et qu'on peut les faire glisser vers la droite et les emboiter les unes avec les autres afin de réaliser un script. On pourra faire remarquer que les commandes sont « aimantées ». 2 Exécution du script a. Ajouter la commande « S'orienter à 90° » en début de script pour que le lutin démarre son script à l'horizontale et vers la droite. Le lutin ne peut pas « sortir » de la scène. Il peut être nécessaire de repositionner le lutin sur la scène (avec la souris) avant d'exécuter le script pour éviter que le lutin touche un bord, sans quoi la figure tracée peut être incorrecte.

On pourra faire remarquer que l'angle dont on doit faire 360° tourner le lutin est égal à . nombre de côtés Cette question a pour objectif de comprendre comment exécuter un script. Ici, on a placé au début du script la commande . On a donc ici un « script déclenché par un évènement » : le script va s'exécuter quand l'utilisateur cliquera sur le drapeau vert. On pourra aussi faire remarquer qu'il est possible d'exécuter un script en cliquant directement sur celui-ci. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. L'intérêt de la commande est qu'elle permet de démarrer l'exécution de plusieurs scripts en même temps. b. L'angle formé par les deux segments a pour mesure 60°. L'angle dans le script est différent car c'est l'angle dont on doit faire tourner le lutin qui trace les segments. 3 2. Il faut ici diminuer la longueur du côté pour éviter que le lutin rencontre un bord de la scène au cours de son tracé.

On pourra remarquer que la figure tracée est très proche d'un cercle. Ajout de commandes 3. 4 Répétition b.

192 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION On peut repartir du script réalisé à l'étape 3 pour tracer un triangle équilatéral et le compléter ainsi : Il est également possible d'utiliser deux boucles imbriquées et une variable. Ce script est nettement plus compliqué sur le plan algorithmique. On pourra ne proposer cette deuxième méthode qu'aux élèves déjà rôdés à l'utilisation de Scratch. Activité Des programmes de calcul 2 Intentions des auteurs Les objectifs de cette question sont : – montrer comment on peut affecter à une variable une valeur demandée à l'utilisateur du script ; – comprendre comment changer la valeur d'une variable en utilisant, dans une même commande, l'ancienne et la nouvelle valeur de cette variable ; L'objectif de cette activité est de comprendre et d'utiliser la notion de variable informatique. Il faut notamment faire comprendre une différence fondamentale entre une variable informatique et les lettres utilisées en mathématiques : dans un script, la valeur d'une variable peut changer au fil du temps. 1 a. Un premier exemple Script Nouvelle valeur Ancienne valeur – commencer à utiliser des opérateurs. Valeur de la variable « vies » © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 3 a. Il n'est pas possible d'utiliser une seule variable car la dernière étape du programme de calcul fait appel au nombre de départ, qu'on doit donc garder en mémoire dans une variable distincte. On peut donc renommer la variable « nombre » existante en « nombre de départ » puis créer une autre variable appelée « résultat » (on peut aussi créer deux nouvelles variables). 3 2 2 Il est plus facile de comprendre un script quand on donne des noms explicites aux variables, plutôt que d'utiliser de simples lettres a, b... b. À la fin du script, le lutin affichera la valeur 2. On pourra insister sur l'importance de systématiquement initialiser une variable, c'est-à-dire de lui affecter une valeur en début de script. On pourra également remarquer que la valeur de la variable s'affiche dans la scène et qu'on pourrait se passer de la dernière commande. Il est cependant utile de faire prendre l'habitude aux élèves d'utiliser des commandes de sortie qui affichent le résultat d'un script. On peut supprimer l'affichage des variables sur la scène en décochant la case à gauche de la variable (dans la zone des commandes) ou, à partir d'un clic droit sur l'affichage de la variable dans la scène, cliquer sur « cacher ». 2 a. Avec deux variables b. Un programme de calcul On pourra insister sur le fait que la variable « résultat » change de valeur à chaque étape du script.

Pour des élèves qui ont du mal à le comprendre, on pourra leur faire exécuter ce script « à la main » en indiquant à chaque étape la valeur de chaque variable. Livre du professeur – Chapitre 16 Algorithmique et programmation 193 4 Des programmes en pagaille a. Programme 1 Programme 2 Choisir un nombre Ajouter 1 Multiplier par le nombre départ Soustraire le nombre de départ Soustraire 1 Programme 3 Choisir un nombre Ajouter 1 Multiplier ce résultat par lui-même Soustraire le double du nombre de départ Soustraire 2 Programme 2 b. Programme 1 On peut aussi n'utiliser qu'une seule variable pour ce script. On pourra attirer l'attention des élèves sur l'imbrication des blocs de calcul dans Scratch, qui jouent le rôle de parenthèses et permettent si besoin de gérer les priorités de calcul. Programme 2 © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Programme 3 b. On constate que les trois programmes renvoient tous le carré du nombre entré au départ par l'utilisateur auquel on a ajouté 1. Ici, il est indispensable d'utiliser deux variables. La dernière commande peut également être remplacée par : Pour aller plus loin 1.

On écrit des expressions littérales correspondant à chaque programme, puis on les réduit : Programme 1 : (x + 1) × x – x – 1 = x2 + x – x – 1 = x2 + 1 Programme 2 : (x + 1) × (x + 1) – 2x = x2 + x + x + 1 – 2x = x2 + 1 Programme 3 : x2 + 1 2.

a. Programme 3 On peut éventuellement s'inspirer des programmes donnés dans l'énoncé et les modifier de façon à obtenir un résultat égal à x 2 – 1. Dans cette question, les élèves devront faire preuve de recherche et d'initiative, mais selon leurs compétences en calcul littéral, les élèves peuvent élaborer des programmes plus ou moins compliqués. Programme 1 Choisir un nombre Le multiplier par lui-même Soustraire 1 194 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION On constate que les trois programmes renvoient tous le carré du nombre entré au départ par l'utilisateur auquel on a retranché 1. c. On écrit des expressions littérales correspondant à chaque programme, puis on les réduit : Programme 1 : x2 – 1 Programme 2 : (x + 1) × x – x – 1 = x2 + x – x – 1 = x2 – 1 Programme 3 : (x + 1) × (x + 1) – 2x – 2 = x × (x + 1) + 1 × (x + 1) = x2 + x + x + 1 – 2x – 2 = x2 – 1 Activité Construction de figures 3 Intentions des auteurs L'objectif de cette activité est d'étudier les différentes commandes permettant de tracer des figures. Elle se prête en effet particulièrement bien au raisonnement et à la remobilisation de notions de géométrie plane (angles, longueurs, polygones, repérage, transformations). 1 Avancer et tourner L'objectif de cette question est notamment de bien comprendre dans quel sens doit se tourner le lutin pour tracer chaque segment. Le script étant assez long, en cas d'erreur, on peut inciter l'élève à en « détacher » une partie afin de le tester morceau par morceau. Dans le script ci-dessous, on démarre le tracé à partir du point inférieur gauche. 3 Drapeaux Il y a différentes stratégies possibles pour construire chaque drapeau. Le plus simple est d'utiliser les coordonnées de chaque point et de construire indépendamment chaque drapeau.

On se prive alors de la possibilité d'utiliser une boucle.

On peut construire ainsi un premier drapeau (les drapeaux suivants se construisent sur le même modèle) : Si on veut utiliser une boucle pour construire les quatre drapeaux, comme l'énoncé le suggère, il faut utiliser les longueurs et les angles et donc analyser la figure avant de la construire (ici, on a pris 10 comme longueur du côté d'un carreau). = arctan 10 ≈ 63,435° On trouve DBC 5 et BC = CD = 125 ≈ 11,18 d'où le script suivant pour construire le premier drapeau. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 2 On peut alors insérer cette construction dans une boucle en prenant soin, à la fin de chaque itération, de revenir au centre et de tourner de 90°. 2 Utiliser les coordonnées pour les déplacements b. C'est la commande : On peut constater que cette question est moins anodine qu'elle ne peut paraitre au premier abord. On pourra envisager de différencier ses attentes en fonction des élèves : – construction à l'aide des coordonnées (pour les plus fragiles) ; – construction d'un seul drapeau avec les angles et longueurs ; – construction de la totalité de la figure avec la boucle (pour les plus rapides).

Livre du professeur – Chapitre 16 Algorithmique et programmation 195 4 Frise Ici, une analyse de la figure s'impose. Si on prend à nouveau 10 pour la longueur du côté d'un carreau, la diagonale d'un carreau mesure 200 ≈ 14,14. On peut donc construire un parallélogramme avec le script suivant (on démarre la construction à partir du point inférieur gauche). On peut ensuite dupliquer le parallélogramme en prenant soin de bien se positionner pour le parallélogramme suivant à la fin de chaque itération de la boucle.

Pour une meilleure lisibilité du programme, on peut aussi créer un « bloc » pour tracer un parallélogramme.

Cette notion va être utilisée à la question suivante. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit.

2. L'objectif est ici de paver le plan avec des octogones. La figure est assez simple à analyser et l'objectif n'est pas de démontrer quelles sont les valeurs des angles et des longueurs. La difficulté réside dans la construction des programmes. Pour une meilleure lisibilité, on peut créer : – un bloc qui trace un octogone ; – un autre bloc qui trace une ligne d'octogones (10, par exemple) ; – un programme qui trace des lignes d'octogones (5 lignes, par exemple). Pour aller plus loin 1. Il faut insérer le programme précédent à l'intérieur d'une autre boucle en prenant soin de bien se repositionner pour l'itération suivante. 196 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION On peut proposer d'autres améliorations pour les plus rapides, par exemple demander à ce que la scène soit complètement pavée, ce qui n'est pas facile car le lutin ne doit pas dépasser un bord. Il faut donc calculer avec soin le début et la fin de chaque ligne tracée. Activité Le multiplicato 4 Intentions des auteurs Cette activité a pour objectif de se familiariser avec les boucles et les instructions conditionnelles à travers la réalisation d'un petit jeu mobilisant les tables de multiplication. On peut éventuellement la considérer comme un mini-projet.

© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1 3 Avec trois erreurs a.

La condition qui arrêtera le jeu sera : . b. Il faut ici remplacer la boucle « Répéter 10 fois » par une boucle « Répéter jusqu'à ».

Un petit jeu On pourra faire remarquer que les blocs qui expriment une condition ont une forme différente des autres : ils sont « pointus », à la différence des variables, qui sont « arrondies ». 2 4 Avec 10 questions Il faut insérer le script précédent à l'intérieur d'une boucle « Répéter 10 fois ». Plus difficile On doit remplacer les deux commandes qui affectent une valeur aléatoire à « nombre1 » et « nombre2 » par une structure conditionnelle. On pourra insister sur le fait qu'un script continue après avoir exécuté la structure conditionnelle, quel que soit le résultat de celle-ci. Livre du professeur – Chapitre 16 Algorithmique et programmation 197 5 2. Plus vite Il faut utiliser la variable Au lieu d'ajouter 1 ou 2 points à chaque bonne réponse, on peut ajouter « 5-chronomètre » : ainsi, le joueur marquera d'autant plus de points qu'il répondra vite (jusqu'à 5 points), et perdra des points s'il met plus de 5 secondes à répondre. de Scratch : cette variable est égale au temps écoulé en secondes depuis l'instant où on a exécuté la commande . 3. On peut ajouter une structure « répéter jusqu'à » avant la commande qui demande au joueur sa réponse. © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Pour aller plus loin 1. Il faut remplacer la structure conditionnelle créée à l'étape 4 par deux lignes qui attribuent à « nombre1 » et « nombre2 » des valeurs aléatoires comprises entre 2 et un nombre qui augmente en fonction du score, par exemple 5+score. Le jeu va rapidement devenir injouable au-delà de certaines valeurs. Pour l'éviter, on peut ne faire augmenter en fonction du score que l'une des deux variables. 198 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION Activité Autour des nombres premiers 5 Intentions des auteurs L'activité, qui mobilise les notions d'arithmétique au programme du cycle 4, a pour objectif de programmer des algorithmes assez complexes utilisant des boucles et des structures conditionnelles. C'est également l'occasion de découvrir les variables de type « liste » et les blocs. 1 3 Stockage dans une liste b. Si on souhaite conserver toute une liste de nombres premiers, il faut utiliser une variable de type « liste », qu'on pourra nommer, par exemple, « nombres premiers ». La commande : permet d'effacer toutes les valeurs de la liste. On peut donc modifier ainsi le script réalisé à la question précédente : Test de primalité c.

© Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. Pour tester si un nombre n est premier, on peut tester s'il est divisible par tous les entiers compris entre 2 et n . On doit donc initialiser la variable « diviseur » à 2 et répéter le test jusqu'à ce que la variable « diviseur » soit supérieure à n . Pour tester si n est divisible par « diviseur », il faut effectuer la division euclidienne de n par « diviseur » et tester si ce reste est égal à 0. Enfin, il faut tester tous les entiers un à un, donc si on n'a pas encore trouvé de diviseur, il faut incrémenter la variable « diviseur » de 1. d.

Il suffit de modifier le nombre d'itérations de la boucle et de lire la longueur de la liste qui s'affiche sur la scène : il y a 1 229 nombres premiers inférieurs à 10 000. On pourra demander aux élèves (ou leur expliquer) comment on peut utiliser ce bloc : ce bloc est un script qui, selon la valeur de n avec laquelle il est exécuté, attribue à la variable « test » la valeur « vrai » si n est premier, et la valeur « faux » si n n'est pas premier. Pour l'utiliser, il suffit d'insérer la commande dans un script. On peut même tester ce bloc sans écrire de script. Dans la catégorie de commandes « Ajouter blocs », on peut écrire une et cliquer directement valeur dans la commande sur la commande. On peut alors observer la valeur de la variable « test » qui s'affiche sur la scène.

Par exemple, en cliquant sur , on pourra observer cliquant sur 2 , on observera , alors qu'en . Le temps d'exécution du script peut être plus ou moins long selon l'ordinateur sur lequel il est exécuté.

On peut accélérer considérablement son exécution en n'affichant pas la variable « nombres premiers », dont l'affichage se met à jour chaque fois qu'on y stocke une nouvelle valeur. Pour cela, il faut aller dans la catégorie de commandes « Données » et décocher la case à gauche de la variable. Une fois le script terminé, on peut cocher à nouveau la case pour afficher la variable. Un premier affichage On utilise le bloc comme expliqué à la question précédente, au sein d'une boucle où la variable « nombre » varie de 2 à 50. On pourra noter qu'il faut indiquer 51 dans la boucle sinon elle ne s'exécute pas pour « nombre = 50 ». Livre du professeur – Chapitre 16 Algorithmique et programmation 199 4 Nombres premiers jumeaux a. Il faut d'abord tester si la variable « nombre » est premier puis, si c'est le cas, tester si « nombre+2 » est premier. Si c'est également le cas, on stocke « nombre » dans la liste « nombres jumeaux ». b. Le dernier élément de la liste est 9 929. La plus grande paire de nombres premiers jumeaux inférieurs à 10 000 est donc : (9 929 ; 9 931). c. La longueur de la liste est égale à 205, il y a donc 205 paires de nombres premiers jumeaux inférieurs à 10 000. 2. Il est nécessaire de créer tout d'abord une nouvelle liste dans laquelle on stocke les diviseurs premiers de 1 à 100, en utilisant le script précédemment écrit. Pour mieux comparer les deux scripts et faire différents essais, on peut éventuellement créer un nouveau bloc plutôt que de modifier le premier.

La variable « numéro » représente l'indice ou le rang d'un diviseur premier dans la liste. On peut alors dupliquer le script précédent et utiliser le bloc « Primalité2 » : Pour aller plus loin © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. 1. La réponse à cette question dépend de l'ordinateur utilisé et de si on affiche ou non la liste « nombres premiers ».

Il est vivement conseillé de désactiver l'affichage des listes. Pour une mesure précise, on peut utiliser le chronomètre de Scratch et créer une variable « temps » dans laquelle on stocke la valeur du chronomètre à la fin de l'exécution du script.

3. On doit pouvoir constater que le temps d'exécution du nouveau script est inférieur au précédent. Cela peut s'expliquer par le fait qu'on teste beaucoup moins de diviseurs avec cette méthode. Pour observer correctement ce phénomène, il est indispensable de supprimer l'affichage des listes qui modifie considérablement le temps d'exécution des scripts. 200 ALGORITHMIQUE ET PROGRAMMATION Activité Expériences aléatoires 6 1 5 Des nombres aléatoires À deux épreuves On peut renommer la variable « nombre de résultats pairs » en « nombre de résultats inférieurs à 11 ». On pourra noter que, dans le script suivant, la variable « issue » joue successivement le rôle de l'issue de la 1re étape de l'expérience, puis celui de la 2nd étape. 2 Encore et encore 3 Interprétation Pour aller plus loin a. On peut constater que le résultat est souvent égal ou très proche de 0,07. 1 b. La valeur exacte est , ce qui est cohérent avec le résultat 15 1 ≈ 0,07. précédent puisque 15 4 1. L'arbre est presque impossible à construire à la main : il y a 15 × 6 = 90 branches ! On peut en revanche reproduire l'arbre à l'aide d'un tableur. Pair ou impair ? © Hachette Livre 2016 – Mission Indigo 3e – Livre du professeur – La photocopie non autorisée est un délit. a. =NB.SI(C2:C91;» Les meilleurs professeurs de Maths disponibles Le triangle ?

Rien de plus simple ! On sait parfaitement l'étudier : ses angles, ses côtés, son centre de gravité, ses bissectrices, ses médiatrices...

Mais cela est il si simple ? Regardons dans cet article la trigonométrie dans un triangle rectangle. Définition Pour étudier et comprendre la trigonométrie dans un triangle rectangle, on va s'intéresser aux fonctions sinus, cosinus et tangente. La trigonométrie est une branche des mathématiques qui lie la longueurs des côtés et la mesure des angles dans un triangle. En classe de troisième, on se placera plus particulièrement dans le cas du triangle rectangle, triangle qui possède un angle droit.

La trigonométrie à de nombreuses applications dans le domaine de la physique comme en astronomie mais aussi en navigation. Dans un triangle rectangle, on appelle l'hypoténuse le côté le plus grand. Il fait face à l'angle droit. Voici le schéma d'un triangle rectangle. On observe clairement l'angle droit et l'hypoténuse. On appelle le côté adjacent à un angle, le côté qui touche l'angle et qui n'est pas l'hypoténuse. Enfin, on appelle le côté opposé à un angle le côté qui ne touche pas l'angle, le côté qui fait face à l'angle. On utilise trois fonctions trigonométriques pour déterminer les angles ou les longueurs dans un triangle : le cosinus, noté cos, le sinus, noté sin et la tangente, noté tan.

Dans un triangle rectangle, on définit le cosinus d'un angle comme le rapport de la longueur du côté adjacent à l'angle par la longueur de l'hypoténuse. On note [cos =frac{adjacent}{hypotenuse}] Dans notre schéma, cela donne [cos (widehat{ABC})=frac{AB}{BC}] De même, on définit le sinus d'un angle comme le rapport de la longueur du côté opposé à l'angle par la longueur de l'hypoténuse. Autrement dit, on note [sinus=frac{oppose}{hypotenuse}] Dans notre schéma, cela donne [sinus (widehat{ABC})=frac{AC}{BC}] Enfin, on définit la fonction tangente d'un angle comme le rapport de la longueur du côté opposé à l'angle par la longueur du côté adjacent à l'angle. On note [tan=frac{oppose}{adjacent}] Dans notre schéma, on obtient [sinus (widehat{ABC})=frac{AC}{AB}] On retiendra la petite astuce mnémotechnique : SOHCAHTOA.

Elle permet de retenir les trois formules : sinus = opposé / hypoténuse, cosinus = adjacent / hypoténuse et tangente = opposé / adjacent. Le cosinus, le sinus et la tangente d'un angle n'ont pas d'unité. Regardons quelques valeurs remarquables qu'il peut être utile de connaître : 0°30°45°60°90° valeur du sinus01/2√2/2√3/21 valeur du cosinus1√3/2√2/21/20 Où trouver des cours de maths pour réviser avant une épreuve ? Propriétés Regardons les multiples propriétés de nos fonctions trigonométriques. Le cosinus et le sinus d'un angle sont toujours compris entre -1 et 1. En particulier, dans notre triangle rectangle, comme les angles non droits sont aigus, leurs cosinus et leurs sinus sont compris entre 0 et 1. On a, grâce au théorème de Pythagore, l'identité suivante : [(cos x)^2+(sin x)^2=1] On l'écrit plus couramment [cos^2x+sin^2x=1] De plus, ses trois fonctions trigonométriques sont en faite liées par la formule suivante [tan x=frac{sin x}{cos x}] Chacune de ses fonctions trigonométriques possèdent une fonction réciproque. La fonction réciproque de la fonction cosinus est la fonction arc cosinus, notée arccos. Elle permet de déterminé la valeur de l'angle lorsque l'on connait le cosinus de cet angle. Les fonctions réciproques de sinus et tangente, respectivement arc sinus, noté arcsin, et arc tangente, noté arctan, ont le même intérêt : déterminer la valeur de l'angle en connaissant le sinus ou la tangente de cet angle. Comment trouver des cours de maths seconde pour progresser ? Exercices Soit un triangle IJK rectangle en I. On sait que JK mesure 7 centimètres et que [widehat{IJK} = 38 °] On veut calculer la longueur du côté IJ. Traçons la figure en vraie grandeur en reportant les valeurs connues. Cela nous permet de visualiser l'exercice que l'on nous demande. Dans ce triangle rectangle en I, d'après le cours vu ci dessus, on a [cos widehat{IJK} = frac{IJ}{JK}] En remplaçant par les valeurs, on a [cos 38° = frac{IJ}{7}] Par un produit en croix, on a finalement que [IJ = 7 times cos 38°] (valeur exacte) soit environ 5,5 cm. Soit EFG un triangle rectangle en F. On admet que EF = 4 cm et que l'angle [widehat{FEG}] mesure 56 degrés. On chercher à calculer la longueur FG. Le triangle EFG étant rectangle, on peut appliquer les fonctions trigonométriques que l'on connait. Ici, on utilise les fonctions trigonométriques puisque l'on connait la longueur d'un côté et un angle. On a [cos widehat{FEG} = frac{EF}{EG}] on a aussi [sin widehat{FEG} = frac{FG}{EG}] ou encore [tan widehat{FEG} = frac{FG}{EF}] Ici, c'est la fonction tangente que nous allons devoir utiliser. Remplaçons par les valeurs que nous avons : [tan 56° = frac{FG}{4}] Par un produit en croix, on obtient [FG =tan 56° times 4] Finalement, cela implique que

FG est environ égal à 5,9 cm. Soit un triangle RST rectangle en R. On sait que RT mesure 3 cm et ST mesure 9 cm. On souhaite déterminer l'angle [widehat{RST}] En se rapportant à nos fonctions trigonométriques, on observe que celle à utiliser ici est la fonction sinus.

Cela est très clair lorsque l'on dessine un croquis de l'énoncé. La formule nous donne [sin widehat{RST}=frac{RT}{ST}] On obtient donc [sin widehat{RST}=frac{3}{9}=frac{1}{3}] C'est donc dans ce cas que l'on utilise la fonction réciproque à la fonction sinus pour déterminer la valeur de l'angle. En effet, on a [arcsin sin widehat{RST}=arcsin frac{1}{3}] c'est à dire [widehat{RST}=arcsin frac{1}{3}] Il ne reste qu'à taper le calcul à la calculatrice et le tour est joué ! On obtient que l'angle vaut environ 19,5° Terminons par un exercice de type brevet qui regroupe la géométrie de manière plus générale. Cet exercice est issu du brevet de maths d'Amérique du Nord de juin 2019. On considère la figure ci-dessous, réalisée à main levée et qui n'est pas à l'échelle. Voici la figure évoquée dans l'énoncé. On donne les informations suivantes : les droites (ER) et (FT) sont sécantes en A AE=8cm, AF=10cm, EF=6cm; AR=12cm, AT=14cm 1.Démontrer que le triangle AEF est rectangle en E. 2.En déduire une mesure de l'angle [widehat{EAF}] au degré près. 3.Les droites (EF) et (RT) sont-elles parallèles? 1.$AF^2=10^2=100$ et $AE^2+EF^2=8^2+6^2=64+36=100$ Donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en E. 2.Le triangle est rectangle donc on peut utiliser les fonctions trigonométriques.

Par exemple, [cos widehat{EAF}=frac{EA}{AF}] On obtient alors [cos widehat{EAF}=frac{8}{10}=0,8] Grâce à la calculatrice et la fonction arc cosinus, on a finalement que [widehat{EAF}=37°] 3. Si les droites sont parallèles, le théorème de Thalès nous dit que [frac{AE}{AR}=frac{AF}{AT}] Or [frac{AE}{AR}=frac{8}{12}] et [frac{AF}{AT}=frac{10}{14}] Il n'y a pas égalité. Donc les droites ne sont pas parallèles.

Durant la suite de la trigonométrie, en classe de seconde, nous découvrirons une nouvelle unité de mesure pour les angles, le radian, ainsi qu'une nouvelle application de la trigonométrie que se fera cette fois ci dans un cercle : le cercle trigonométrique.

Page 2 Les meilleurs professeurs de Maths disponibles La fonction, en mathématique, on en a tous déjà entendu parler. Elle permet d'étudier des statistiques, des systèmes électriques, des mouvements, des variations de populations etc...

En faite, les applications sont nombreuses et dans plusieurs domaines. Essayons de comprendre ce qu'est une fonction et comment l'utiliser. Définition Commençons par définir ce qu'est une fonction et étudier les différents types de fonction que l'on étudie en 3ème. Tout d'abord, c'est quoi une fonction ? Une fonction est une relation mathématique qui prend une valeur et lui en associe une autre.

On note souvent f la fonction et x le nombre de départ. On note f(x) le nombre d'arrivée.

Par exemple, fonction f(x) = 2x + 3 est une fonction qui a tout x associe 2x+3. Si on lui donne 5, elle ressortira [f(5)=2 times 5+3= 13] Si on lui donne (-4) elle lui associera [f(-4)=2times (-4)+3=-8+3=-5] et ainsi pour chaque nombre x dont on souhaite obtenir la valeur f(x).

On appelle x l'antécédent de f(x) par la fonction f. Par exemple, 5 est l'antécédent de 13 par la fonction f. De même, on dit que -4 est l'antécédent de -5 par la fonction f. On appelle f(x) l'image de x par la fonction f. Par exemple, 13 est l'image de 5 par la fonction f et -5 est l'image de -4 par la fonction f.

L'image d'un nombre par une fonction est unique, il n'en existe pas d'autres.

Par contre l'antécédent n'est pas toujours unique, il peut en exister plusieurs. Il existe beaucoup de fonctions différentes. En troisième, on ne voit que trois types de fonctions : La fonction constante, par exemple f(x)=5. La fonction constante associe toujours le même nombre à x, quelque soit la valeur de x que l'on choisit. Elle est toujours de la forme [f(x)=c] où c est un nombre. La fonction linéaire, par exemple f(x)=2x. Elle est toujours de la forme [f(x)=ax] où a est un nombre. La fonction affine, par exemple f(x)=2x+3. Elle est toujours de la forme [f(x)=ax+b] où a et b sont des nombres.

Les fonctions constantes et les fonctions linéaires sont des cas particuliers de fonctions affines. En effet, la fonction constante correspond à une fonction affine où a=0 et la fonction linéaire correspond à une fonction affine où b=0.

Ces trois sortes de fonction auront toujours un unique antécédent. Vous cherchez des cours de math 3eme ? Représentation graphique Pour comprendre une fonction, on peut la représenter dans un repère, c'est à dire tracer sa représentation sur un graphique. Les fonction affines se représentent toutes sous forme d'une droite. Les fonctions linéaires ont la particularité de se représenter par des droites qui passent par l'origine du repère et les fonctions constantes, elles, sont des droites parallèles à l'axe des abscisses, des droites horizontales. Pour tracer une droite constante, il suffit de connaître un point ou l'équation de la droite. Pour tracer une droite linéaire, il suffit également de connaître un point (on en a un deuxième puisque la droite passe par le point (0,0)) ou l'équation de la droite. Traçons par exemple les droites y=3 (fonction constante) et [y=-frac{1}{2}x] (fonction linéaire). Pour une fonction linéaire, lorsque l'on a l'équation de la droite, il a deux possibilités pour tracer la droite. Soit on détermine un point de la droite, par exemple, quand x=-2, on trouve que y=1.

On a ainsi deux points qu'il nous suffit de relier pour obtenir la droite. Mais on peut aussi utiliser le coefficient directeur a de la droite. Voici les deux droites. La droite constante est bien horizontale et la droite linéaire passe par l'origine du repère.

On peut facilement déterminer le coefficient directeur d'une droite graphiquement. En effet, on se place sur un point de la droite et l'on regarde de combien on monte/descend et avance/recule pour arriver à un deuxième point de la droite.

Par exemple, pour la droite [y=-frac{1}{2}x] les points C et D appartiennent à la droite. En partant du point C, on descend de 1 et on avance de 2 pour arriver au point D. Donc le coefficient directeur est -1 divisé par 2. Où trouver des cours de maths pour réviser avant une épreuve ? Cas des fonctions affines On étudiera plus particulièrement les fonctions affines c'est à dire les fonctions de la forme f(x)=ax+b. Graphiquement, la fonction affine se représente par une droite. Le nombre a qui est devant le x s'appelle le coefficient directeur. Il correspond à la pente de la droite. Le nombre b quant à lui s'appelle l'ordonnée à l'origine. C'est l'ordonnée du point qui se situe à l'intersection de la droite avec l'axe des ordonnées. Dans le cas d'une fonction linéaire, b vaut 0 puisque la droite passe par l'origine du repère. Si on connait les coordonnées de deux points A et B appartenant à la droite (d), on peut calculer l'équation de cette droite.

On détermine dans un premier temps le coefficient directeur avec la formule [a=frac{y_b-y_a}{x_b-x_a}] aussi notée [frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a}] où [(x_a,y_a)] sont les coordonnées du point A et [(x_b,y_b)] les coordonnées du point B. Lorsque le coefficient directeur est positif, la droite est croissante, et lorsqu'il est négatif la droite est décroissante.

Une fois le coefficient directeur déterminé, il suffit de résoudre l'équation f(x)=ax+b en remplaçant la valeur a et en remplaçant x et y par les coordonnées d'un point, par exemple [A(x_a,y_a)] On pourra donc déterminer le b.

Étudions un exemple pour comprendre : soient A(-1,1) et B(0,3) deux points de la droite. Déterminons l'équation de la droite.

[a=frac{f(x_b)-f(x_a)}{x_b-x_a}=frac{3-1}{0+1}=2] Donc on a [f(x)=2x+b] Déterminer l'ordonnée à l'origine. On résout l'équation avec le point A : [f(-1)=2times (-1)+b] ce qui équivaut à [1=-2+b] ainsi on a b=3. En fait, on avait déjà l'ordonnée à l'origine, c'est le point B(0,3) qui est l'intersection de l'axe des ordonnées et de la droite. Donc [f(x)=2x+3] Représentons cette droite sur un graphique : On a tracer la droite y=2x+3 ainsi que le droite y=-x+1 qui elle est décroissante puisque son coefficient directeur est négatif. Son ordonnée à l'origine est 1. Exercice Terminons par un petit exercice d'application pour apprendre à calculer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine d'une droite. Déterminer le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine des droites (AB) où A(-2,1) et B(3,4); (DC) où D(2,0) et C(3,2) ainsi que (EF) où E(4,-2) et F(-3,5). Présentons les valeurs obtenues dans un tableau : DroitesCoefficient directeurOrdonnée à l'origine (AB)a=(4-1)/(3+2)=3/51=(3/5)x(-2)+b => b=(11/5) (DC)a=2/(3-2)=20=2x2+b => b=-4 (EF)a=(5+2)/(-3-4)=-1-2=-1x4+b => b=2 La plateforme qui connecte profs particuliers et élèves Quelles sont les principales transformations des expressions algébriques et les principes fondamentaux à connaître en mathématiques ? Développer, réduire et factoriser, kézako ? En mathématiques, développer, réduire et factoriser sont des concepts importants liés à la manipulation et à la simplification des expressions algébriques. Plus précisément : Développer consiste à multiplier les termes [...] 14 mai 2023 · 14 minutes de lecture Quelles sont les formules à connaître pour réussir sont Diplôme National du Brevet des Collèges ? Commençons avec quelques définitions Définitions N désigne l'ensemble des entiers naturels, on écrit N = {0, 1, 2, . . .}. Z désigne l'ensemble des entiers relatifs, on écrit Z = {. .

. ; −2, −1, 0, 1,[...] 15 décembre 2022 · 12 minutes de lecture Comment effectuer des opérations sur les nombres relatifs ? Introduction Avec les nombres relatifs, les entiers ne sont plus toujours positifs : ils peuvent être négatifs. Plus rarement utilisés dans la vie courante, les nombres négatifs ont été inventés afin de pouvoir résoudre un plus grand nombre d'équations qui n'admettaient jusqu'alors pas de solution. Définitions[...] 9 décembre 2020 · 4 minutes de lecture Comment calculer le PGCD et quelles sont ses propriétés ?

Introduction Le plus grand commun diviseur, aussi connu sous le nom de PGCD, est nécessaire pour de nombreuses applications comme la simplification de fractions ou encore déterminer si deux nombres sont premiers entre eux. Étudions ses propriétés et ses différentes applications. Rappel sur le PGCD[...] 16 novembre 2020 · 5 minutes de lecture Comment résoudre un système de deux équations à deux inconnues ? Introduction Nous savons comment résoudre une équation à une inconnue. Apprenons maintenant à résoudre les équations à deux inconnues. Pour cela, il est nécessaire d'avoir au moins deux équations. On appelle ça un système. Apprenons différentes méthodes à travers différents exemples. Rappels sur les[...] 5 août 2020 · 6 minutes de lecture Comment factoriser une expression avec un facteur commun ou une identité remarquable ? Introduction En général, on connait la forme développée d'une expression, ou du moins on sait l'obtenir. La factorisation est plus difficile et demande un peu plus de travail. Essayons de déterminer différentes méthodes pour trouver la forme factorisée d'une expression littérale. Définitions[...] 24 février 2020 · 5 minutes de lecture Comment calculer le discriminant d'un polynôme du second degré? Introduction Résoudre une équation du premier degré, nous savons déjà le faire. Mais qu'en est-il des équations de degré 2 ? Est il possible de les résoudre ? Cherchons à comprendre comment s'étudie un polynôme du second degré et les différentes propriétés qu'il cache. Définition et[...] 24 février 2020 · 5 minutes de lecture Quelles sont les caractéristiques d'un vecteur ? Introduction Pour effectuer une translation ou encore pour identifier le coefficient directeur d'une droite, les vecteurs nous offrent de nombreuses applications en géométrie. Commençons par définir ce qu'est un vecteur et étudions ses différentes propriétés et applications. Définition d'un vecteur Un vecteur est un objet mathématique que l'on[...] 6 février 2020 · 6 minutes de lecture Qu'est ce qu'une inéquation et comment la résoudre ? Introduction Les équations et inéquations sont des égalités et inégalités à une ou plusieurs variables que l'on souhaite résoudre, c'est à dire dont on souhaite déterminer les inconnues. Cherchons à comprendre comment elles se résolvent à travers des propriétés et des exemples. Définitions Une équation en[...] 6 février 2020 · 6 minutes de lecture