

Análisis Matemático I

GUÍA DE TRABAJOS PRÁCTICOS

FACULTAD DE INGENIERÍA DEL EJÉRCITO-UNDEF

PRÁCTICA 1: CONCEPTOS BÁSICOS.

Ejercicio 1. Completar cuadrados en las siguientes expresiones:

a) $x^2 - 6x + 5$

b) $x^2 + 3x + 1$

c) $-3x + 5x^2 + 2$

d) $-6x^2 - x + 1$

Ejercicio 2. Encontrar el conjunto de números reales que satisface cada una de las siguientes desigualdades:

a) $7x - 1 \leq 10x + 4$

b) $-6 < 2x + 3 < -1$

c) $2x + 4 \leq 6 - 7x \leq 3x + 6$

d) $x^2 + x - 12 < -12$

e) $\frac{x-2}{x+4} < 2$

f) $(x+2)(2x-1)(3x+7) \geq 0$

Ejercicio 3. Determinar si es verdadera (en este caso demostrarla) o falsa (en este caso exhibir un contraejemplo) cada una de las siguientes proposiciones:

a) $\forall x \in \mathbb{R} : 7x - 1 \leq 10x + 4$

b) $\exists x \in \mathbb{R} : |x+1| = |x-1|$

c) $\forall x \in \mathbb{R} : |x-1| = |1-x|$

d) $\exists x \in \mathbb{R} : |x^2+1| = x^2+1$

e) $\exists x \in \mathbb{R} : |2x+4| = 2|x+2|$

f) $\forall x \in \mathbb{R} : |x+1| = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \geq 0, \\ -x+1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$

g) Existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $-x < 1$

h) Para cualquier $x \in \mathbb{R}$ se tiene: $-x \leq 0$

i) $\forall x \in \mathbb{R} : |x+6| = |x|+6$

Ejercicio 4. Demostrar usando la definición de valor absoluto las siguientes propiedades:

a) $|x^2| = |x|^2$

b) Para cada $r \in \mathbb{R}$, $r > 0$, se cumple: $(|a - b| < r) \iff (b - r < a < b + r)$

Ejercicio 5. En cada uno de los siguientes ítems hallar la desigualdad que debe satisfacer un número:

a) Cuya distancia a 3 es menor que 2.

b) Cuya distancia a -2 es menor que 4 y mayor que 1.

c) Cuya distancia a -1 es menor que su distancia a -2 .

d) Cuya distancia a 0 es mayor que su distancia a -2 .

Ejercicio 6. Determinar si es verdadera (en este caso demostrarla) o falsa (en este caso exhibir un contraejemplo) cada una de las siguientes equivalencias:

a) $x - 3 < 2 \iff -x + 3 > 2$

b) $-x + 1 > 0 \iff x > -1$

c) $-x + 2 \geq 2 \iff x \leq 0$

d) $\frac{x+1}{x-2} \geq 1 \iff x+1 \geq x-2$

e) $\frac{x+1}{x^2+4} \leq 1 \iff x+1 \leq x^2+4$

f) $1 \leq x^2 \iff 1 \leq x$

g) $x^2 > 0 \iff x > 0$

Ejercicio 7. Encontrar el conjunto solución de las siguientes inecuaciones:

a) $\left| \frac{x}{3} - 2 \right| \leq 6$

b) $|x^2 + 7| \geq 2$

c) $2|2x - 3| \leq |x + 10|$

d) $|x - 1| \leq 2(x + 2)$

e) $\frac{|x - 1|}{x + 2} \leq 2$

f) $\frac{1}{|x + 1|} < \frac{3}{|x - 1|}$

g) $|2x - 1| \leq |x| - 2$

h) $|x + 1| + |x - 1| < 4$

i) $2 < |x + 1| \leq 4$

PRÁCTICA 2: FUNCIONES.

Ejercicio 1. Para las siguientes funciones, encontrar su dominio (máximo posible):

a) $f(x) = \sqrt{2x + 3}$

b) $h(t) = |2t + 3|$

c) $w(x) = \sqrt{(1+x)^{-1}}$

d) $g(x) = \frac{1}{4x - 1}$

e) $q(t) = \frac{4 - t^2}{t^2 - t - 6}$

f) $p(x) = -\sqrt{625 - x^2}$

Ejercicio 2. Determinar si las siguientes funciones son pares o impares (en caso de serlo):

a) $f(x) = 4x^4 - x^2 + 5$

b) $f(x) = \frac{x}{4x - 1}$

c) $f(x) = |2x + 3|$

d) $f(x) = \sqrt{2x^2 + x}$

e) $f(x) = \frac{1}{1 - 4x^2}$

f) $f(x) = |-2x|$

Ejercicio 3. Graficar las siguientes funciones:

a) $f(x) = 3x - 2$

b) $g(x) = \frac{1}{x - 4}$

c) $f(x) = x^2 + 1$

d) $h(x) = (x - 1)^2 + 2$

e) $f(x) = x^2 - 4x + 2$

f) $f(x) = 2 + \frac{1}{x - 3}$

g) $f(x) = \frac{x + 4}{x - 2}$

h) $g(x) = \sqrt{x - 3}$

Ejercicio 4. Para las funciones del ejercicio anterior, analizar si son inyectivas, calcular la imagen e indicar cuáles son sobreyectivas.

Ejercicio 5. Calcular la inversa (restringiendo dominio e imagen si hace falta) de:

a) $f(x) = 4x + 5$

b) $f(x) = \frac{1}{1 - 4x}$

c) $f(x) = |x + 4|$

d) $f(x) = x^2 - 7$

Ejercicio 6. Demostrar las siguientes igualdades:

a) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$

b) $\tan(2\alpha) = \frac{2 \tan \alpha}{1 - (\tan \alpha)^2}$

c) $\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

d) $\cos(2\beta) = (\cos \beta)^2 - (\sin \beta)^2 = 2(\cos \beta)^2 - 1 = 1 - 2(\sin \beta)^2$

e) $\sin x \cos y = \frac{1}{2}[\sin(x - y) + \sin(x + y)]$

f) $\sin x \sin y = \frac{1}{2}[\cos(x - y) - \cos(x + y)]$

$$g) \cos y \cos x = \frac{1}{2}[\cos(x - y) + \cos(x + y)]$$

$$h) \sin x + \sin y = 2 \sin \left(\frac{x + y}{2} \right) \cos \left(\frac{x - y}{2} \right)$$

Ejercicio 7. Resolver las siguientes ecuaciones:

$$a) 2 \sin^2(x) - \sin(x) = 0$$

$$b) \sin(x) + \cos(x) = 0$$

$$c) \sin(3x) = \frac{1}{2}$$

$$d) 4 \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$e) \sqrt{3}(\tan(x) + \cot(x)) = 4$$

$$f) 2 \cos^2(2x) - 7 \cos(2x) = -3$$

Ejercicio 8. Demostrar utilizando la definición de logaritmo las siguientes igualdades:

a) $\log_b(a) \log_a(b) = 1$

b) $\log_a(x) \log_b(a) = \log_b(x)$

Ejercicio 9. Para las siguientes funciones, encontrar su dominio:

a) $f(x) = \ln(2x^2 - 5x - 3)$

b) $f(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x - 2}{\sqrt{3x + 1}}\right)$

c) $f(x) = e^{\frac{2x-5}{5x+1}}$

d) $f(x) = \sqrt{\frac{x^3 - 3x^2 - 4x}{x^2 - 9}}$

e) $f(x) = \ln(x^2 - 4) + e^{2x^2+4x+3} - 1$

Ejercicio 10. Determinar si es verdadera (en este caso demostrarla) o falsa (en este caso exhibir un contraejemplo) cada una de las siguientes proposiciones:

a) $\sin(3x) = 3 \sin(x) \cos(x)$

b) $\cos(3x) = \cos(x) - 4 \sin^2(x) \cos(x)$

c) $\frac{\sin(4x)}{2} = \sin(2x)$

d) $\ln(x + y) = \ln(x) \ln(y)$

e) $\ln(2x) = 2 \ln(x)$

f) $\frac{\ln(x^2)}{2} = \ln(|x|)$

g) $2 \tan(2x) = \frac{\sin(4x)}{\cos(2x)}$

h) Si $f(2) = -f(-2)$, entonces f es impar.

i) Las funciones pares son siempre positivas.

j) La función $f(x) = 2^x$ es par.

PRÁCTICA 3: LÍMITES.

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 3}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{x^2 + 5x - 3}{x + 3}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - 9}{\sqrt{x} - 3}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 6}{x + 2}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 16x}{x^2 + 4}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x^2 - 1}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x^2 - 1}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x\sqrt{x} - x + \sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 5} \frac{1 - \sqrt{x - 4}}{x - 5}$$

$$l) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{\sqrt{2x + 1} - 3}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x} - 1}{2x - 2}$$

$$n) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{\sqrt{9 - x^2}}{x - 3}$$

$$\tilde{n}) \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} - x}{x^2 + x}$$

$$o) \quad \lim_{y \rightarrow \frac{1}{3}^+} H(y), \text{ donde } H(y) = \begin{cases} y^2 + y & \text{si } y < \frac{1}{3}, \\ 5 & \text{si } y = \frac{1}{3}, \\ 12y^3 & \text{si } y > \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Ejercicio 2. Graficar las siguientes funciones y calcular los límites pedidos:

$$a) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ x & \text{si } 0 < x < 1, \\ 1 + x^2 & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$$

$$b) \quad g(x) = \begin{cases} -x + 1 & \text{si } x \leq 1, \\ x - 1 & \text{si } 1 < x < 2, \\ 5 - x^2 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$$

$$1) \quad \lim_{x \rightarrow 1} g(x)$$

$$2) \quad \lim_{x \rightarrow 2^-} g(x)$$

$$3) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} g(x)$$

Ejercicio 3. Esbozar el gráfico de una función que satisfaga las siguientes condiciones:

$$a) \quad \text{Dom}(f) = [0, 4]$$

$$b) \quad f(0) = f(1) = f(2) = f(3) = f(4) = 1$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$$

$$d) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1$$

Ejercicio 4. Calcular, si existen, los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{|x|}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

Ejercicio 5. Calcular:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{f(x)g(x)}$, si $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 12$ y $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 3$
- b) $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} (fg - f - g)(x)$, si $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} f(x) = \frac{1}{3}$ y $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} g(x) = 30$
- c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f+7}{f-g}(x)$, si $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 30$ y $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \frac{1}{2}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$, si $6x - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - 6x + 18$ para todo $x \in \mathbb{R}$
- e) $\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$, si $1 - t^4 \leq f(t) \leq \sec t$ para todo $t \in \mathbb{R}$

Ejercicio 6. Calcular los siguientes límites:

- a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{3x}$
- b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{3x}$
- c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{x}$
- d) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(2x)}{\sin(x)}$
- e) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(x)}$
- f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cot(x)}{\csc(x) - 1}$
- g) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \sin(x)}{x \cos(x)}$

Ejercicio 7. Hallar los límites laterales en $x = 0$ de:

$$a) f(x) = \frac{2x - \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

Ejercicio 8. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cos \left(\frac{x+1}{x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} (x^2 - 4) \sin \left(\tan \left(\frac{1}{x} \right) \right)$$

Ejercicio 9. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right)$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \ln(|\cos(2x)|)$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 1}{x - 2}$$

Ejercicio 10. Calcular los conjuntos de positividad C^+ y de negatividad C^- de las siguientes funciones, indicando qué propiedad utilizó para determinarlos:

$$a) f(x) = x^3 - 3x - 2$$

$$b) f(x) = \cos(x + \pi)$$

Ejercicio 11. Resolver las siguientes inecuaciones:

$$a) 0 < x \sec(x) \text{ en el intervalo } (-2\pi, 2\pi)$$

$$b) \sin(x) \cos(x) < 0 \text{ en el intervalo } (-2\pi, 3\pi)$$

Ejercicio 12. Redefinir las siguientes funciones de forma tal que sean continuas en $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} a) \quad f(x) &= \frac{x^2 - 9}{x - 3} \\ b) \quad f(x) &= \frac{9x^2 - 4}{3x - 2} \\ c) \quad f(x) &= \frac{\sin x}{x} \\ d) \quad f(x) &= \frac{\sin(2x) - \sin x}{3x} \end{aligned}$$

Ejercicio 13. Calcular los siguientes límites:

$$\begin{aligned} a) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 2x + 1}{5x^3 - 4x + 2} \\ b) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3 - 2x}{x - 3} \\ c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 3x - 4}{x - 1} \\ d) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 9}}{x - 3} \\ e) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x\sqrt{x^2 + 3x + 1}}{x^2 + x - 1} \\ f) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3}}{\sqrt[3]{x^3 + 1}} \\ g) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 4} - x) \\ h) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3^x + 4}{2^x - 1} \\ i) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5^x + 3}{e^{x-1}} \\ j) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} - x) \\ k) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 - x + 5} + x) \\ l) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} \end{aligned}$$

$$m) \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{1}{x} \right)$$

$$n) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$\tilde{n}) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

Ejercicio 14. Determinar si existen los siguientes límites y calcularlos en dicho caso:

$$a) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{2x - 1} \right)^{3x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right)^{x^2 + 1}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 4}{2x - 1} \right)^{3x + 8}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x + 3}{x - 1} \right)^{\sqrt{x}}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + x^2)^{\frac{1}{3x}}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{x}}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + x)}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + 2) - \ln(2)}{x}$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + x}{1 - x} \right)^{\frac{1}{x}}$$

$$j) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x + 1}{3x + 2} \right)^{2x}$$

PRÁCTICA 4: DERIVADAS.

Ejercicio 1. Calcular por definición las derivadas de las siguientes funciones en los puntos que se indican:

a) $f(x) = x^2 - x$ en $x_0 = 3$

b) $f(x) = x^3$ en $x_0 = -2$

c) $f(x) = \frac{3}{x+1}$ en $x_0 = 4$

d) $f(x) = \sqrt{x^2 + 4}$ en $x_0 = 1$

e) $f(x) = \frac{2x-1}{x-4}$ en $x_0 = 2$

f) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 4 & \text{si } x \leq 2, \\ x + 6 & \text{si } x > 2 \end{cases}$ en $x_0 = 2$

g) $f(x) = \begin{cases} x^3 & \text{si } x \leq 1, \\ x + 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

h) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \leq 1, \\ -x + 2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

i) $f(x) = \begin{cases} x - 20 & \text{si } x \leq 1, \\ -20 + x^2 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ en $x_0 = 1$

Ejercicio 2. Calcular usando propiedades de la derivada las derivadas de las siguientes funciones:

a) $f'(x)$, $g'(x)$, $(2f - 3g)'(x)$ y $(f \cdot g)'(x)$ si:

$$f(x) = x^2 - x, \quad g(x) = x$$

b) $f'(x)$, $g'(x)$, $(f + g^2)'(x)$ y $\left(\frac{g}{f}\right)'(x)$ si:

$$f(x) = x^2 - 2x - 1, \quad g(x) = x + 1$$

Ejercicio 3. Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de las siguientes funciones en el punto indicado:

a) $f(x) = 3x^2 - 6x - 1$ en $x_0 = 1$

b) $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$ en $x_0 = 2$

Hallar las ecuaciones de las rectas normales a los gráficos anteriores en dichos puntos. Realizar una interpretación geométrica en el caso el ítem a).

Ejercicio 4. Calcular el dominio y la derivada de cada una de las siguientes funciones:

a) $y = \sin(3x^2 + 14x)$

b) $y = \cos\left(\frac{x^2 - 1}{x + 4}\right)$

c) $y = (3x^2 + 5)^2(x^3 - 11)^4$

d) $y = \ln(|\sec(x) + \tan(x)|)$

e) $y = \cos(\sin(t^2))^6$

f) $y = 3x^{5/3} + \sqrt{x}$

g) $y = \frac{1}{\sqrt{x^2} \sin^3(x)}$

h) $y = \frac{e^{x-1}}{e^x + 1}$

i) $y = 32x^4 - x$

j) $y = (x^2 + 1) \ln x$

k) $y = \tan(\arcsin(x))$

l) $y = \cosh(x^2 - 1)$

m) $y = \frac{(x+1)^2}{x-4}$

n) $y = \left(\frac{4x^2 - 7}{2x - 3}\right)^6$

$\tilde{n}$) $y = \ln(\ln(x+1))$

$$o) \ y = \sin(t \cdot \tan(t^2 + 1))$$

$$p) \ y = \sin(x^2 + x)^4$$

$$q) \ y = \sqrt{x^2} \cdot \cos(x)$$

$$r) \ y = \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^2 - 1} \right)$$

$$s) \ y = e^{\sqrt{x}} + \sqrt{e^x}$$

$$t) \ y = \sin^2(x) + 2 \sin(x)$$

$$u) \ y = \arctan \left(\frac{1 - x}{1 + x} \right)$$

$$v) \ y = x \arctan(x)$$

$$w) \ y = \ln(\coth(x + \sqrt{x}))$$

Ejercicio 5. a) Encontrar la ecuación de la recta normal al gráfico de la función dada en el punto $x_0 = 2$:

$$f(t) = \frac{t^3 + 1}{t - 1}$$

b) Encontrar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función dada en el punto $x_0 = 0$:

$$f(x) = \frac{x^4 - 2}{x^5 + 1}$$

c) Dada la curva de ecuación $y = x^3 + 3x$, encontrar las coordenadas de los puntos de la misma para los cuales la pendiente de la recta tangente es 15.

d) La curva de ecuación $ax^2 + bx + c$ cruza el eje y en 3. El punto de coordenadas $(1, 2)$ pertenece a la curva, y la recta tangente a la curva en el mismo tiene pendiente nula. Encontrar la ecuación de la curva.

Ejercicio 6. Calcular las derivadas segundas de cada una de las siguientes funciones:

$$a) \ y = \sin(x^3 + 3x^2 - 2x - 8)$$

$$b) \ y = \frac{x}{2x - 4}$$

- c) $y = \sin(3x)$
- d) $y = \cos(x^2)$
- e) $y = \frac{e^x}{1 + e^x}$
- f) $y = \sin^2(x + 1)$

Ejercicio 7.* Suponiendo que cada una de las siguientes ecuaciones define implícitamente una función $y = f(x)$, calcular su derivada:

- a) $x^2 - y^2 = 9$
- b) $xy + \sin(y) = x^2$
- c) $\cos(xy) = y^2 + 2x$
- d) $\ln(xy^2) - x + y = 0$

Ejercicio 8.* a) La siguiente ecuación define implícitamente una función $y = f(x)$, calcular su derivada segunda en el punto de abscisa $x = 1$:

$$xy + y^3 = 2$$

- b) Determinar la ecuación de la recta normal al gráfico de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación:

$$8(x^2 + y^2)^2 = 100(x^2 - y^2), \quad \text{en el punto } (3, 1)$$

- c) Determinar la ecuación de la recta tangente al gráfico de la función $y = f(x)$ definida implícitamente por la ecuación:

$$e^{-x} \cos(y) + \sin(y) = e, \quad \text{en el punto } (1, \pi)$$

* Estos ejercicios presentan informalmente el tema llamado **Funciones Implícitas** y no serán evaluados en los exámenes ya que se continúan los mismos en la materia **Análisis Matemático II**.

PRÁCTICA 5: ANÁLISIS DE FUNCIÓN.

Ejercicio 1. Calcular los siguientes límites:

$$a) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^3 - 6x^2 + x - 2}{x^5 - x^3 - 12x}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \arctan(x)}{x - \sin(x)}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - x - 1}{x \sin(x)}$$

$$d) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cos(x) - \sin(x)}{x^2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x}$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 1}{e^x + x}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x}{\sin^2(x)} - \frac{1}{x^2} \right)$$

$$h) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

$$i) \lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

$$j) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\cos(2x))^3}{x^2}$$

$$k) \lim_{x \rightarrow 1^+} \ln(x) \ln(x-1)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x}$$

Ejercicio 2. Encontrar, si existen, las ecuaciones de todas las asíntotas de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$
- b) $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$
- c) $f(x) = \frac{|x|^3}{x^2+9}$
- d) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$
- e) $f(x) = \ln(1+e^{-x})$
- f) $f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{4-x}$

Ejercicio 3. Dada la función $f(x) = \frac{1}{x-4}$, probar que no existe $c \in (2, 6)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(6) - f(2)}{6 - 2}.$$

¿Contradice este hecho el teorema del valor medio?

Ejercicio 4. a) Sea $f(x) = 3x^2 + 5x + 7$.

- 1) Probar que el punto c dado por el teorema del valor medio en el intervalo $(3, 5)$ es 4.
- 2) Ver que para cualquier intervalo (a, b) , el punto c dado por el teorema del valor medio en dicho intervalo es exactamente el promedio:

$$c = \frac{a+b}{2}.$$

b) Generalizar el ítem anterior a cualquier función cuadrática.

Ejercicio 5. a) Probar que la ecuación $e^x = x + 1$ tiene una única raíz en $x = 0$.
b) Probar que la ecuación $\arctan(x) = x$ tiene una única raíz en $x = 0$.
c) Probar que el polinomio $x^3 + x - 3$ tiene una única raíz en el intervalo $(1, 2)$.

Ejercicio 6. Se definen las funciones $\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ llamadas respectivamente **seno hiperbólico** y **coseno hiperbólico**.

- a) $\sinh(x)$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$.
- b) $\cosh(x)$ es estrictamente creciente en $(0, +\infty)$ y estrictamente decreciente en $(-\infty, 0)$.

Ejercicio 7. Hallar todos los intervalos de crecimiento y decrecimiento de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - 9}$
- b) $f(x) = \frac{x + 3}{x^2}$
- c) $f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x + 1}$
- d) $f(x) = -x^2 + 4x - 1$
- e) $f(x) = \sin^2(2x)$
- f) $f(x) = x\sqrt{1 - x}$
- g) $f(x) = \ln(x) - \arctan(x)$
- h) $f(x) = \frac{1}{5}(2x^3 + 3x^2 - 12x)$

Ejercicio 8. Estudiar la concavidad y hallar los puntos de inflexión de las siguientes funciones:

- a) $f(x) = (x - 3)^2$
- b) $f(x) = x^2 \ln(x)$
- c) $f(x) = \frac{3x^2 - 1}{x^2}$
- d) $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x$

Ejercicio 9. Hacer el estudio completo de las siguientes funciones y a partir de él esbozar su gráfico:

$$a) f(x) = \frac{1}{4}x^4 - 2x^2$$

$$b) f(x) = \frac{x^2}{x^2 + 3}$$

$$c) f(x) = x(x - 4)^3$$

$$d) f(x) = (x + 1)e^x$$

$$e) f(x) = \frac{x - 2}{x^2 - 4x + 3}$$

$$f) f(x) = \frac{x^3}{2x^2 - 8}$$

$$g) f(x) = \frac{3x - 2}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$h) f(x) = \frac{-x^3 + x^2 + 4}{x^2}$$

$$i) f(x) = x + \arctan(x)$$

$$j) f(x) = \frac{1}{100 + \sin(x)}$$

$$k) f(x) = x + \sqrt{1 - x}$$

$$l) f(x) = \tanh(x)$$

$$m) f(x) = \frac{x}{\ln(x)}$$

$$n) f(x) = \frac{|x|}{x^2 + 1}$$

Ejercicio 10. Dos postes de 12m y 28m de altura distan 30m entre sí. Desea tenderse un cable, fijado en un único punto del suelo, entre las puntas de ambos postes. ¿En qué punto del suelo hay que fijar el cable para usar la menor cantidad posible?

- Ejercicio 11.** a) Hallar dos números positivos cuya suma sea 110 y su producto el mayor posible.
- b) Hallar dos números positivos cuyo producto sea 192 y su suma la mínima posible.
- c) Descomponer al número 81 en dos sumandos positivos, de manera tal que el producto del primer sumando por el cuadrado del segundo sea máximo. Justificar.
- Ejercicio 12.** De todos los rectángulos de perímetro 36m, hallar el de área máxima.
- Ejercicio 13.** De todos los cilindros cerrados de 200 cm^3 de volumen, hallar el que tiene menor superficie total.
- Ejercicio 14.** Un granjero desea vallar un prado rectangular adyacente a un río. El prado debe tener 18ha para proporcionar suficiente pasto. ¿Qué dimensiones debe tener para que requiera la menor cantidad de valla posible, teniendo en cuenta que no hay que poner valla en el lado que da al río? ($1\text{ha} = 10.000\text{m}^2$).
- Ejercicio 15.** Un granjero dispone de 200m de valla para cerrar dos corrales rectangulares iguales con un lado en común. ¿Qué dimensiones harán que el área encerrada sea máxima?

PRÁCTICA 6: FÓRMULA DE TAYLOR.

- Ejercicio 1.** a) Dada $f(x) = \ln(x)$, hallar la ecuación de la recta tangente a su gráfica en el punto de abscisa $x = 1$. Utilizar la recta tangente para encontrar un valor aproximado de $\ln(0,9)$.
- b) Para la función $f(x) = \ln(x)$, hallar los polinomios de Taylor centrados en $c = 1$, de grados 1, 2 y 3. Emplear los polinomios hallados para encontrar valores aproximados de $\ln(0,9)$. ¿Cuál de las aproximaciones obtenidas es mejor? (Comparar con el valor de $\ln(0,9)$ que se obtiene con la calculadora).
- c) ¿Hay alguna relación entre los ítems a) y b) del ejercicio? Justificar.
- Ejercicio 2.** Para la función exponencial $f(x) = e^x$, hallar los polinomios de Maclaurin de grado 4, 5 y n .
- Ejercicio 3.** Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $c = 9$ de la función $f(x) = \sqrt{x}$, y emplearlo para dar un valor aproximado de $\sqrt{9,5}$.
- Ejercicio 4.** Construir el polinomio de MacLaurin de grado 4 de las siguientes funciones:
- a) $f(x) = \sqrt{1+x}$
- b) $f(x) = x \cdot e^{3x}$
- c) $f(x) = \sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$
- Ejercicio 5.** Escribir el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $y = \sin(2x)$ centrado en $c = \pi$.
- Ejercicio 6.** Obtener el polinomio de Maclaurin de grado 2 de la función $y = e^{\sin(x)}$ y emplearlo para hallar un valor aproximado de $e^{\sin(0,2)}$.
- Ejercicio 7.** Dar una aproximación de $\sin(0,5)$ utilizando el polinomio de MacLaurin de grado 5.

- Ejercicio 8.** Dar una aproximación de $\ln(0,7)$ utilizando el polinomio de MacLaurin de grado 4 de la función $f(x) = \ln(1+x)$.
- Ejercicio 9.** Aproximar $\sqrt{1,3}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $y = \sqrt{x}$ centrado en $c = 1$.
- Ejercicio 10.** Aproximar $\sqrt[3]{9,3}$ utilizando el polinomio de Taylor de grado 4 de la función $y = \sqrt[3]{x}$ centrado en $c = 8$.
- Ejercicio 11.** En los ejercicios 3, 7 y 8, dar una cota del error cometido al realizar la aproximación indicada.

PRÁCTICA 7: INTEGRALES.

Ejercicio 1. Calcular las siguientes integrales indefinidas:

$$a) \int (x^3 + \sqrt{x}) dx$$

$$b) \int \frac{x^4 - 2x^3 + 1}{x^2} dx$$

$$c) \int (3t^2 - 2 \sin(t)) dt$$

$$d) \int (5x^3 - 18)^7 \cdot 3x^2 dx$$

$$e) \int (3t) \sqrt{2t^2 - 113} dt$$

$$f) \int \frac{3y}{\sqrt{2y^2 + 5}} dy$$

$$g) \int \cot(x) dx$$

$$h) \int (\sin(x^2))^5 \cdot x \cos(x^2) dx$$

$$i) \int \frac{2}{4x - 3} dx$$

$$j) \int \frac{4x + 2}{x^2 + x + 5} dx$$

$$k) \int \frac{2}{x(\ln(x))^2} dx$$

$$l) \int \frac{\cos(x)}{2 \sin(x) + 3} dx$$

$$m) \int (x + 3)e^{x^2 + 6x} dx$$

$$n) \int 3xe^x dx$$

$$\tilde{n}) \int \frac{e^x}{e^x - 1} dx$$

- o) $\int \frac{(\sec(x))^2}{\tan(x)} dx$
- p) $\int \frac{1}{1+4x^2} dx$
- q) $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$
- r) $\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$
- s) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$
- t) $\int \frac{1}{(\cos(x))^2(3\tan(x)+1)} dx$
- u) $\int \frac{1}{4-9x^2} dx$
- v) $\int \frac{x^3}{x^2-1} dx$
- w) $\int \frac{1}{x^2-6x+5} dx$

Ejercicio 2. Calcular las siguientes integrales por el método de integración por partes:

- a) $\int xe^{3x} dx$
- b) $\int xa^x dx$
- c) $\int x \ln(x) dx$
- d) $\int x^2 \ln(x) dx$
- e) $\int x\sqrt{x+1} dx$
- f) $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$
- g) $\int (\cos(x))^2 dx$

$$h) \int (\sin(x))^2 e^{3x} dx$$

$$i) \int (\ln(x))^2 dx$$

$$j) \int \sin(\ln(x)) dx$$

Ejercicio 3. Calcular las siguientes integrales usando descomposición en fracciones simples:

$$a) \int \frac{4}{(x-2)(x-1)} dx$$

$$b) \int \frac{3x-2}{(x+2)(x+3)} dx$$

$$c) \int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x+3)} dx$$

$$d) \int \frac{2x+2}{x^2-4} dx$$

$$e) \int \frac{7x-6}{3x^3+6x^2+3x} dx$$

$$f) \int \frac{x^3-2x}{x^2-1} dx$$

$$g) \int \frac{8x^3+7}{8(x+1)(2x+1)^2} dx$$

$$h) \int \frac{1}{(x^2-1)^2} dx$$

Ejercicio 4. Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int x^2 \ln(\sqrt{1-x}) dx$$

$$b) \int 3x\sqrt{x-2} dx$$

$$c) \int \sqrt{e^t+1} dt$$

$$d) \int \ln(\sqrt{1+x^2}) dx$$

- e) $\int \frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} dx$
- f) $\int y \sinh(y) dy$
- g) $\int x \arctan(2x) dx$
- h) $\int \sinh(x) \cos(x) dx$
- i) $\int \frac{x + 1}{e^x} dx$
- j) $\int (x^2 + 2x) \sin(5x) dx$
- k) $\int \frac{\sin(x) \cos(x)}{\sqrt{1 - 4(\sin(x))^2}} dx$
- l) $\int \frac{1}{(1 + \sqrt{x})^2} dx$
- m) $\int \frac{x + \arctan(x)}{x^2 + 1} dx$
- n) $\int \frac{x}{x^2 + 2x + 2} dx$
- $\tilde{n}$) $\int \frac{1}{e^{2x} + e^x - 3} dx$
- o) $\int x(\cos(x))^2 dx$
- p) $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{1 - e^{2x}} dx$
- q) $\int \frac{x + 1}{1 - \sqrt{x}} dx$

Ejercicio 5. Dibujar la región limitada por los gráficos de las funciones dadas y calcular su área acotada:

- a) $f(x) = x^2 - 6x, g(x) = 0$
- b) $f(x) = x^2 + 2x + 1, g(x) = 2x + 5$
- c) $f(x) = x^2 - 4x + 1, g(x) = -x^2 + 2x + 3$
- d) $f(x) = 3x^2, g(x) = x^3$
- e) $f(x) = 3(x^3 - x), g(x) = 0$
- f) $f(x) = (x - 1)^3, g(x) = x - 1$
- g) $f(x) = |x|, g(x) = x^2 - 1$

Ejercicio 6. Calcular el volumen de los sólidos que se forman al girar la región dada alrededor del eje x :

- a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq -x + 1\}$
- b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 4 \text{ y } 0 \leq y \leq \sqrt{x}\}$
- c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq x \leq 2 \text{ y } 0 \leq y \leq \sqrt{4 - x^2}\}$

Ejercicio 7. Calcular el volumen del sólido formado al girar la región (acotada), limitada por los gráficos de las siguientes funciones, alrededor del eje x :

$$f(x) = x^2 + 2, \quad g(x) = 4 - x^2.$$

Ejercicio 8. Calcular la longitud de la gráfica de las siguientes funciones en el intervalo indicado:

- a) $f(x) = \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2x}$, en $[1/2, 2]$
- b) $g(x) = \ln(\cos(x))$, en $[0, \pi/4]$
- c) $h(x) = \frac{3}{2}x^{2/3}$, en $[1, 8]$

PRÁCTICA 8: TEOREMA FUNDAMENTAL DEL CÁLCULO. INTEGRALES IMPROPIAS.

Ejercicio 1. Calcular la derivada G' de las siguientes funciones:

a) $G(x) = \int_0^x (t^2 + t) dt$

b) $G(x) = \int_0^x (\sin(u))^4 \tan(u) du \quad \text{si } -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$

c) $G(x) = \int_x^1 x^2 \sqrt{u^2 + 1} du$

Ejercicio 2. Si $a \neq 0$, demostrar que la siguiente función es siempre cóncava hacia arriba:

$$f(x) = \int_x^0 \frac{s}{\sqrt{s^2 + a^2}} ds.$$

Ejercicio 3. Hallar los intervalos en los que f es cóncava hacia arriba, siendo:

$$f(x) = \int_0^x \frac{1+t}{1+t^2} dt.$$

Ejercicio 4. Calcular $\int_0^4 f(x) dx$ para las siguientes funciones:

a) $f(x) = |x - 2|$

b) $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 2, \\ x & \text{si } 2 \leq x \leq 4. \end{cases}$

Ejercicio 5. Encontrar el valor medio en los intervalos indicados de las siguientes funciones:

a) $f(x) = (\sin(x))^2 \cos(x) \quad [0, \pi]$

b) $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 16}} \quad \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

Ejercicio 6. Calcular las siguientes integrales:

$$a) \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) dx$$

$$b) \int_1^2 \frac{e^{3/x}}{x^2} dx$$

$$c) \int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx$$

$$d) \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} x \csc^2(x) dx$$

$$e) \int_4^6 \frac{x-17}{x^2+x-12} dx$$

$$f) \int_0^4 \frac{t}{\sqrt{9+t^2}} dt$$

Ejercicio 7. Calcular las siguientes integrales impropias:

$$a) \int_0^{\infty} x e^{-x} dx$$

$$b) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}}$$

$$c) \int_2^{\infty} \frac{1}{x(\ln x)^8} dx$$

$$d) \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}}$$

$$e) \int_0^4 \frac{dx}{\sqrt{x-13}}$$

$$f) \int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$$

$$g) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin x}} dx$$

$$h) \int_1^{\infty} (1-x)e^{-x} dx$$

$$i) \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3}}$$

$$j) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^2}$$

PRÁCTICA 9: SERIES.

Ejercicio 1. Hallar la suma de las siguientes series geométricas:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{2^{n-1}}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n + 2^n}{6^n}$$

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} 2^n 3^{1-n}$$

Ejercicio 2. Utilizando la definición de serie hallar la suma de las siguientes series telescópicas:

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \right)$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n} \right)$$

$$c) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{(n+1)(n+2)}$$

Ejercicio 3. Determinar si las siguientes series de términos positivos convergen o divergen.

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 3n^2 + 10}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{3^n}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)(n+2)3^n}$$

$$d) \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln(n)}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2/5)^n}{n}$$

$$f) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{10n+5}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n^3}}{(n+1)\sqrt{n}}$$

$$h) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{3n+1}$$

$$i) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$j) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{n(3^n + 1)}$$

Ejercicio 4. Analizar la convergencia de las siguientes series alternadas:

$$a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$$

$$b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n - 1}$$

$$c) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{3n^2 + 5}$$

$$d) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 3}{n^2 + 1}$$

$$e) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 4}{3n - 2}$$

$$f) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 5n^2}{n^3 + 2}$$

$$g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{2^n}$$

$$h) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 3n}{1 + 3^{2n}}$$