Operaciones matemáticas con matrices

Ricardo Giraldo C.

En el capítulos séptimo del libro **La Casa de Los Números** se estudian diferentes tópicos del álgebra, por ejemplo, las ecuaciones lineales usadas para describir la relación entre dos o más variables, las que se representan con números complejos (ab, a_{i+d}, x, y-n, $y_{mn\ldots}$) y puede ser graficadas en el sistema de coordenadas Cartesianas. Estas ecuaciones son utilizadas en casi todas las ciencias, especialmente para realizar proyecciones y otras cuantificaciones. En esta nueva publicación en nuestro blog introduciré a la matriz que es otra herramienta importante del algebra lineal.

Una matriz es una tabla bidimensional en la que se presentan números reales (positivos, negativos, raíces, coeficientes de un sistema de ecuaciones…) ordenados en filas y columnas, los que pueden sumarse, restarse y multiplicarse.

$$\left\{\begin{array}{l} 2x + 5y = 12 \\ 4x - 6y = 2 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 5 & 12 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix} \quad \textbf{Matriz}$$

Las matrices se utilizan para describir sistemas de ecuaciones como en el ejemplo anterior, así como registrar datos o elementos, los que se presentan en líneas verticales o columnas y filas o renglones líneas horizontales, conocidas como las dimensiones de la matriz. Cada uno de estos elementos ocupan una posición en una fila y en una columna, por lo que se representa a cada elemento llevando dos subíndices, por ejemplo, a_{rs} (**a** es el elemento, los subíndice **rs** que indican la fila y la columna donde se localiza el elemento).

$$A = \begin{array}{c} \underline{a_{rs}} \quad \underline{a_{rs}} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \end{array} \text{ filas } 2 = m = 2$$

columnas 2 = n = 2

Denominada matriz m*n = 2 x 2

Donde: $a_{rs} = a_{11}, a_{12\ldots}$ los elementos

Ejemplos: $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ (4 es el elemento b_{11} y 2= $b_{12}, \ldots$) matriz 2x2

$$C = \begin{pmatrix} -4 & \sqrt{9} & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

matriz m*n = 2x3

3 = elemento c_{22}

$$D = \begin{bmatrix} -2 & 8 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & 1/2 \\ -6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

matriz 4filas x 3 columnas

-6 = elemento d_{41}

Tipos de matrices

Matriz nula E = [todos los elementos en las columnas o filas son ceros]

Matriz fila F = [tiene una sola fila] matriz 1xn F = (3 -5 1 7) 1x4

Matriz columna G = [tiene una sola columna] matriz mx1 $G = \begin{vmatrix} 2 \\ -1 \end{vmatrix}$ 2x1

Matriz fila columna H [un solo elemento cumple las dos funciones] H = (-8) 1x1

Matriz cuadrada B = [el número de filas y columnas es el mismo] matriz mxn ejemplo matriz B arriba

Matriz rectangulo D = [el numero de filas es diferente al de columnas] matriz nxn, ejemplo matriz D y C

Diagonal principal (DP) de una matriz A **Traza de la matriz = ∑ de elementos de la DP**

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ **DP =** A_{11}, a_{22}, a_{33} **Traza (A) =** $a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Diagonal secundaria (DS) de una matriz A **DS** = a_{31}, a_{22}, a_{13} **Traza** = $a_{31} + a_{22} + a_{13}$

Matriz triangular superior [todos los elementos encima de DP son ceros] **En A a_{12}, a_{13}, a_{23} son ceros**
Matriz triangular inferior [todos los elementos debajo de DP son ceros] **En A a_{21}, a_{31} y a_{32} son ceros**
Matriz diagonal (tiene elementos fuera de la DP encima y debajo que son ceros) **∴ es simétrica** porque contiene una matriz triangular superior e inferior en su interior. **DP = a_{11}, a_{22}, a_{33} = 1, 3, 5, el resto ceros**
Matriz unidad o identidad (In) la DP tiene todos los elementos = 1 el resto = 0, ej. **en A: a_{11}, a_{22}, a_{33}... = 1, 1, 1**
Matriz transpuesta A^T (Los elementos de la matriz A se reordenan de tal manera que los elementos en las filas pasen a las columnas y los elementos en estas, a las filas. Cuando los cambios ocurren los elementos se presentan en una nueva matriz con un superíndice T indicando que tienen los mismos elementos y se denota A^T, pero las filas de A son las columnas y las columnas son las filas de la otra matriz). Ej. matriz A = (2 -3 5) **m x n= 1x3** y matriz B **m x n = 3x1** tiene los mismos elementos en una columna, ∴ B es matriz A^T transpuesta o inversa de A. **.**

Usted puede encontrar otros tipos de matrices que llevan características combinadas de las matrices líneas arriba mencionadas tales como la matriz conjugada, ortogonal, antihermitiana, adjunta o de cofactores entre otras que solo las mencionare para no extender esta publicación.

Cuando se trabaja con matrices generalmente se busca hallar ***el determinante*** que es un número que relaciona todos los elementos en una matriz con el propósito de determinar o indicar la suma de las posibles permutaciones de tamaño del escalar (aumento o disminución) de la matriz. En un par de coordenadas (ejemplo 3) el determinante refiere cuánto se ha comprimido o estirado la base formada en un plano por los segmentos (x, y).
El grado de dificultad para obtener el determinante depende de la longitud de la matriz, será fácil en una matriz de corta longitud u orden, por ejemplo 2 x 2 (dos filas y dos columnas), pero se ira complicando en la medida que la matriz tenga más filas y columnas (ejemplos 1 y 2).
El determinante "det(A) o |A|" se obtiene al multiplicar los elementos de la DP y restarlos del resultado de la multiplicación de los elementos de la DS. A continuación se presenta la disposición de los elementos para halla el det(A):

Matriz cuadrada 2 x 2 $\longrightarrow$

$$\textbf{Det(A)} = |A| = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \times a_{22} - a_{12} \times a_{21}$$

Ejemplo 1: Hallar el det (A) y det (B) de estas matrices de orden 2x2.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \longrightarrow$$

A = 4 x 1 – (-2) x 3 = 4 + 6 = 10 => det(A) o |A|

B = -5 x -1 – 2 x -3 = 5 – (2 x -3) = 5 + 6 = 11 => det(B) o |B|

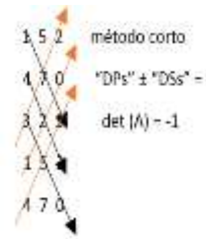
Si se quiere hallar el determinante de una matriz de orden 3. es decir 3 x 3 aplicar esta ecuación:
Ejemplo 2:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

det (A) = $a_{11} * a_{22} * a_{33} + a_{12}*a_{23}*a_{13} + a_{13}*a_{21}*a_{32} - a_{13}*a_{21}*a_{31}$

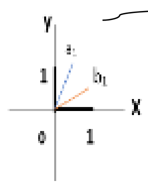
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

det (A) = 1*7*1 + 5*0*2 + 2*4*2 – 2*4*3 = - 1



Se puede simplificar la operación en una matriz 3x3 al escribir las dos primeras filas al final para encontrar su determinante, luego multiplica los elementos diagonalmente hacia abajo con signo positivo (como si tuviera 3 DP y las suma teniendo en cuenta el signo del elemento), luego multiplica de abajo hacia arriba con signo negativo (como si tuviera 3 DS y las resta), finalmente suma y resta los valores encontrados.

Ejemplo 3:



$$\text{Matriz } R = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ Y \;\; x \end{array}$$

El det (R) = 1. Si det disminuye a 0.5 la posición del segmento **a** cambia a $\mathbf{a_1}$ y el **b** a $\mathbf{b_1}$ se comprime el área entre los segmentos lineales, lo que queda determinado al multiplicar det (R)*el área inicial, ∴ a medida que el valor del det se acerque a 0 el área ab puede desaparecer al comprimirse totalmente o convertir a y b en una línea, haciendo cada segmento múltiplo o dependiente del otro. Si el det (R) fuese negativo cambiaria la orientación del área entre los segmentos a y b moviéndolo a otro cuadrante en las coordenadas.

Operaciones suma, resta y multiplicación de matrices

Sumas: Solo se suman las que presentan la misma disposición **m x n ∴ (A + B) = m x n**

**

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 7 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 \\ 8 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3 \times 3}{A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}} + \underset{3 \times 3}{B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \\ a_{31}+b_{31} & a_{31}+b_{32} & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0 & 3+0 & 2+5 \\ 1+7 & 0+5 & 0+0 \\ 1+2 & 2+1 & 2+1 \end{pmatrix} =$$

Restas: El proceso es similar al de la suma las matrices deben presentar la misma disposición m x n, ∴ se procede a la resta de sus elementos **(A - B).**

** Restando los elementos de las matrices A y B arriba:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{31} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{pmatrix} \quad A - B = \begin{pmatrix} 1-0 & 3-0 & 2-5 \\ 1-7 & 0-5 & 0-0 \\ 1-2 & 2-1 & 2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -3 \\ -6 & -5 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

3 x 3 **3 x 3**

Multiplicación:

A. La multiplicación de matrices (A),(B),(C), por ejemplo: A(B + C) = AB + AC y si multiplica (AB)C $\neq$ A(BC) No ley conmutativa. Cuando una matriz multiplica a otra matriz (kB) que es multiplicada por un numero k, por ejemplo A(kB) = k(AB) se multiplican cuando las sumas y productos pueden realizarse. Si se da la multiplicación de A*B $\therefore$ las matrices transpuestas pueden multiplicarse $(AB)^T = A^T x\, B^T$

B. Al multiplicación de una matriz por un escalar, por ejemplo un número real (J) que es una constante. El producto será otra matriz de igual orden: matriz A = (a_{rs}) x J = una matriz de = orden. En este caso, multiplica la primera fila por la constante y luego la segunda fila por J para obtener la nueva matriz. Ejemplo:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 7 & -4 & 5 \end{pmatrix} \times 5 = \begin{pmatrix} 15 & 30 & -10 \\ 35 & -20 & 25 \end{pmatrix}$$

¿ j puede ser una fracción? Sí, J =1/3 el producto será: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2/3 \\ 2\ 1/3 & -4/3 & 1\ 2/3 \end{pmatrix}$ matriz 2x3

C. Para multiplicar una matrices por otra matriz, la condición es que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz. La multiplicación empieza con los elementos de (A) en la primera fila por los elementos de (B) en la primera columna: $a_{11} \times b_{11}$, $a_{12} \times b_{21}$, $a_{13} \times b_{31}$, $a_{14} \times b_{41}$ y continua, los elementos de (A) en la segunda fila por los de la segunda columna en (B) para obtener el producto de la multiplicación que será la matriz (C).

Proceso de multiplicación para hallar los elementos de matriz C:

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 6 & -2 & 4 \\ 7 & -4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \times B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ =>

2x4   4 x3

m x **n**   **m** x n

C_{11} = 3*1 + 6*1 + -2*2 + 4*1 = 9

C_{12} = 3*2 + 6*0 + -2*-3 + 4*4 = 28

C_{13} = 3*3 + 6*0 + -2*8 + 4*-6 = -31

C_{21} = 7*1 + -4*1 + 5*2 + -1*1 = 12

C_{22} = 7*2 + -4*0 + 5*-3 + -1*4 = - 5

C_{23} = 7*3 + -4*0 + 5*8 + -1*-6 = 67

$$C = \begin{pmatrix} 9 & 28 & 31 \\ 12 & -5 & 67 \end{pmatrix}$$

A X B = C (OK)

B X A = C (la ley conmutativa no se aplica en la multiplicación de matrices)

Conclusiones:

*El producto de multiplicar dos matrices cuadradas D x EA es otra matriz cuadrada.

*Cuando multiplica las matrices A x B de orden 3x3 el producto será una matriz de 3 x 3.

* Si intercambia entre sí la posición de filas o columnas en una matriz tendrá otra matriz equivalente.

* Al multiplicar una matriz A de identidad por otra matriz B el producto será la misma matriz B.

* Si multiplica una matriz A por su inversa A^{-1} el producto será el elemento neutro o matriz de identidad.

* Las matrices no se pueden dividir ej. Matriz A/Matriz B solo sumar, restar y multiplicar.

* Un determinante será cero si la matriz tiene una fila o columna con ceros

* Cuando los elementos de una matriz fila o columna se multiplican por un número R $\therefore$ también $|A|*R$ y si un par de filas o columnas en una matriz se intercambian el det(A) cambia el signo.
* En una matriz triangular el det(A) es el producto de sus diagonales
* Al quitarle una columna o una fila a una matriz se crea un nuevo det(A) con los elementos que quedaron y este tome el nombre de determinante menor.

Recuerde al despejar una incógnita en una ecuación matricial, ej. $A*x = B$ para encontrar el valor de x no puede dividir A/B y decir x= A/B pero si podría usar la matriz inversa de A^{-1} a los dos lados de la ecuación (con det $\neq 0$), así por un lado elimina la matriz A: $A^{-1}*A$ qué se hace igual a la de identidad $\therefore x = A^{-1}*B$.

Práctica:

1. Encontrar el determinante de una matriz 3x3 con filas (1 5 2)(470)(321)
2. En una matriz Todos los elementos de una fila o columna son ceros ¿Cuánto vale el determinante?
3. Utilice un método corto o un truco para encontrar el det de una matriz 3x3 con (5 3 -3), (3 -1 0) y (4 2 -3). La respuesta el determinante que debe ser igual a 12.
4. multiplica la matriz A de orden mx1 que tiene una columna (-1 0 1) y la matriz B de orden 1xn que tiene una fila (1 1 1). ¿La respuesta es cero? V F
5. Crear y multiplicar dos matrices A de orden 3x2 y B de orden 2x3, las matrices deben contener dos elementos = 0.5 localizados entre filas y en diferentes columnas (un decimal es positivo y otro tiene signo negativo). ¿La respuesta es una matriz de orden 3x3 sin elementos cero? V F
6. la ley conmutativa no se aplica en la multiplicación de matrices, si multiplica una matriz de 2x3 y otra de 3x2 el producto será una matriz de a) 3x3 b) 2x2 (Pruebe creando un ejercicio matricial).
7. Para sumar o restar dos matrices que condición debe cumplirse:
   a) Las dos operaciones deben presentar solo elementos positivos
   b) Las dos operaciones deben tener la misma disposición m x n
   c) Las dos operaciones se pueden realizar con matrices de diferente orden o disposicion.